Une suite possédant une valeur d'adhérence qui n'est limite d'aucune sous-suite

Rappel sur les ultrafiltres : Un *filtre* $\mathscr{F}$ sur un ensemble E non vide est une partie non vide de $\mathscr{P}(E)$ (i.e. un ensemble non vide de sous-sensembles de E) qui vérifie les 3 axiomes suivants :

A1 : $\emptyset \notin \mathscr{F}$.
A2 : si $A, B \in \mathscr{F}$ alors $A \cap B \in \mathscr{F}$.
A3 : si $A \in \mathscr{F}$ et $A \subset B \subset E$ alors $B \in \mathscr{F}$.

Une *base filtre* $\mathscr{B}$ sur un ensemble E non vide est une partie non vide de $\mathscr{P}(E)$ (i.e. un ensemble non vide de sous-sensembles de E) qui vérifie les 4 axiomes suivants :

B1 : $\emptyset \notin \mathscr{F}$.
B2 : si $A, B \in \mathscr{F}$ alors il existe $C \in \mathscr{F}$ tel que $C \subset A \cap B$.

Il est immédiat que tout filtre $\mathscr{F}$ est une base de filtre et, dans cette situation, le filtre engendré par $\mathscr{F}$ en tant que base de filtre est égal à $\mathscr{F}$. Il est aussi immédiat que si $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(E)$ est une partie stable par intersection finie, alors $\mathscr{B}$ est une base de filtre sur E.

Proposition 1.— *Si $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(E)$ désigne une base de filtre, alors il existe un plus petit filtre $\mathscr{F}$ sur E tel que $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$. Ce filtre est appelé le "filtre engendré" par $\mathscr{B}$.*

Preuve : On considère l'ensemble

$$\mathscr{F} = \{B \subset E / \exists A \in \mathscr{B} / A \subset B\}$$

Il est clair que $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ et que tout filtre contenant $\mathscr{B}$ contient $\mathscr{F}$. Il reste donc à montrer que $\mathscr{F}$ est un filtre.
A1 : est immédiat car $\emptyset \notin \mathscr{B}$.
A2 : si $A, B \in \mathscr{F}$ alors il existe $A_0, B_0 \in \mathscr{B}$ tels que $A_0 \subset A$ et $B_0 \subset B$. Soit $C \in \mathscr{B}$ tel que $C \subset A_0 \cap B_0$, on a $C \subset A_0 \cap B_0 \subset A \cap B$ et donc $A \cap B \in \mathscr{F}$.
A3 : soient $A \in \mathscr{F}$ et $A \subset B \subset E$. Il existe $C \in \mathscr{B}$ tel que $C \subset A \subset B$ et donc $B \in \mathscr{F}$.

Un ultrafiltre sur E, est un élémént maximal (pour l'inclusion) dans l'ensemble des filtres sur E : c'est donc un filtre $\mathscr{F}$ tel que si $\mathscr{F}'$ désigne un autre filtre et que $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$ alors on a $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$.

Proposition 1.— *Un filtre $\mathscr{F}$ sur E est un ultrafiltre si et seulement si, il vérifie l'axiome supplémentaire suivant :*
A4 : si $A \subset E$ alors, soit $A \in \mathscr{F}$, soit $A^c \in \mathscr{F}$ (A^c désigne le complémentaire de A dans E).

Preuve : Supposons qu'un filtre $\mathscr{F}$ vérifie l'axiome A4 et considérons un filtre $\mathscr{F}'$ tel que $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$. Si $\mathscr{F} \neq \mathscr{F}'$ il existe alors un élément A de $\mathscr{F}'$ qui n'est pas dans $\mathscr{F}$. Dans ces conditions, à cause de A4, on a $A^c \in \mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$, mais alors $\emptyset = A \cap A^c \in \mathscr{F}'$ ce qui est contraire à l'axiome A1.

Réciproquement, supposons que $\mathscr{F}$ soit un ultrafiltre sur E et considérons un élement $A \subset E$ tel que $A \notin \mathscr{F}$. Si $A^c \notin \mathscr{F}$, alors pour tout $X \in \mathscr{F}$, on a $A \cap X \neq \emptyset$. En effet, s'il existait un $X \in \mathscr{F}$ tel que $A \cap X = \emptyset$, alors on aurait $X \subset A^c$ et donc $A^c \in \mathscr{F}$. Considérons alors

$$\mathscr{B} = \{A \cap X / A \in \mathscr{F}\}$$

Il eſt clair que $\mathscr{B}$ vérifie l'axiome B2 et donc, d'après ce qui précède c'eſt une base de filtre. Le filtre $\mathscr{F}_0$ engendré par $\mathscr{B}$ contient visiblement $\mathscr{F}$ et l'on a donc, par maximalité, $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}$. Ceci eſt absurde car, comme $A \cap X \subset A$ (pour n'importe quel élément $X \in \mathscr{F}$), on aurait donc $A \notin \mathscr{F}$.

———

Etant donné un élément $a \in E$, on considère l'ensemble

$$\mathscr{F}_a = \{A \subset E /\ a \in A\}$$

dont il eſt aisé de voir que c'eſt un ultrafiltre sur E. Cet ultrafiltre possède un élément minimal (pour l'inclusion) qui eſt d'ailleurs un plus petit élément : le singleton $\{a\}$. On dira d'un ultrafiltre qu'il eſt *principal* s'il possède un élément minimal.

Proposition 1.— *Si $\mathscr{F}$ désigne un ultrafiltre sur un ensemble E alors les proprositions suivantes*

i) $\mathscr{F}$ eſt principal,

ii) il exiſte $a \in A$ tel que $\mathscr{F} = \mathscr{F}_a$,

iii) $\mathscr{F}$ contient une partie finie,

sont équivalentes.

Preuve : $i) \Longrightarrow ii)$ Soient A un élément minimal de $\mathscr{F}$ et $a \in A$. La partie $A - \{a\}$ n'eſt donc pas élément de $\mathscr{F}$ et comme $\mathscr{F}$ eſt un ultrafiltre $A^c \cup \{a\} = (A - \{a\})^c \in \mathscr{F}$. Donc $\{a\} = A \cap (A^c \cup \{a\}) \in \mathscr{F}$, ce qui montre que $A = \{a\}$ et que $\mathscr{F}_a \subset \mathscr{F}$. Puisque $\mathscr{F}_a$ eſt un ultrafiltre, on a bien $\mathscr{F} = \mathscr{F}_a$.

$iii) \Longrightarrow ii)$ Soient $A \in \mathscr{F}$ une partie finie et $a \in A$. Si $\{a\} \in\in \mathscr{F}$ alors $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}_a$, mais comme $\mathscr{F}$ eſt maximal pour l'inclusion, on a $\mathscr{F} = \mathscr{F}_a$.
Si $\{a\} \notin\in \mathscr{F}$, alors puisque $\mathscr{F}$ eſt un ultrafiltre, $E - \{a\} \in \mathscr{F}$ et donc $A - \{a\} = A \cap (E - \{a\}) \in \mathscr{F}$. Ainsi, $\mathscr{F}$ contient un ensemble ſtrictement inclus dans A. En opérant par récurrence sur le nombre d'élément de A, on voit finalement que $\mathscr{F}$ contient bien un singleton.

$ii) \Longrightarrow i)$ et $ii) \Longrightarrow iii)$ sont triviales.

———

En particulier, si E eſt un ensemble fini, alors tout ultrafiltre sur E eſt principal. Le théorème qui suit eſt capital dans l'étude des ultrafiltres sur des ensembles infinis :

Théorème.— *Si E désigne un ensemble infini, alors il exiſte un ultrafiltre non principal sur E.*

Preuve : On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ conſtitué des filtres sur E qui ne contiennent aucune partie finie : $\forall \mathscr{F} \in \mathscr{E}, \forall A \in \mathscr{F}, \sharp A = +\infty$. L'ensemble $\mathscr{E}$ eſt certainement non vide puisque le filtre $\mathscr{F} = \{E\}$ lui appartient. Maintenant, muni de l'inclusion, l'ensemble $(\mathscr{E}, \subset)$ eſt certainement inductif : si $(\mathscr{F}_i)_i$ désigne une chaine d'éléments de $\mathscr{E}$, alors $\mathscr{F} = \bigcup_i \mathscr{F}_i$ eſt certainement un élément de $\mathscr{E}$.

Le lemme de Zorn assure alors de l'exiſtence d'un élément maximal $\mathscr{F}_0 \in \mathscr{E}$. Ce filtre possède la propriété suivante : toute partie confinie $X_0 \subset E$ eſt élément de $\mathscr{F}_0$. En effet, l'ensemble

$$\mathscr{B} = \mathscr{F}_0 \cup \{X \cap X_0 /\ X \in \mathscr{F}_0\}$$

eſt ſtable par interſection et ne contient pas $\emptyset$. Il s'agit donc d'une base de filtre et l'on conſtate que $\mathscr{B}$ ne contient que des ensembles infinis. Il en eſt alors de même du filtre $\mathscr{F}$ engendré par $\mathscr{B}$. Mais comme $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}$, par maximalité on a finalement $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F}$. Il s'ensuit que $X_0 = X_0 \cap E \in \mathscr{F}_0$.

Si $\mathscr{F}_0$ n'était pas un ultrafiltre, il serait donc contenu ſtrictement dans un filtre $\mathscr{F}_1$. Par maximalité de $\mathscr{F}_0$, ce nouveau filtre contiendrait nécessairement une partie finie A. Mais alors, puisque $X_0 = E - A$ eſt une partie cofinie, on aurait $X_0 \in \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1$ et on en déduirait donc que $\emptyset = A \cap X_0 \in \mathscr{F}_1$, ce qui eſt bien sur absurde.

En conclusion, $\mathscr{F}_0$ est un ultrafiltre. Il sera alors nécessairement non principal puisqu'il ne possède pas de partie finie.

———

On considère un ultrafiltre non principal $\mathscr{F}$ sur un ensemble E infini. On établit ici deux lemmes utiles pour la suite.

lemme 1.— *Si $A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{F}$, alors l'ensemble $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ est une partie infinie.*

Preuve : S'obtient par récurrence sur l'entier n en utilisant l'axiome A2.

———

lemme 2.— *Si $X \subset E$ est une partie infinie, alors il existe $A \in \mathscr{F}$ tel que $X \cap A^c$ soit une partie infinie.*

Preuve : Si $X \notin \mathscr{F}$, alors d'après l'axiome A4, on a $A = X^c \in \mathscr{F}$ et donc $X \cap A^c = X$ est bien infinie.

Si $X \in \mathscr{F}$, on considère l'ensemble de parties

$$\mathscr{F}_X = \{X \cap A / \ A \in \mathscr{F}\} = \{A \in \mathscr{F} / \ A \subset X\} \subset \mathscr{F}$$

(la deuxième égalité provient du fait que $X \in \mathscr{F}$ et de l'axiome A2). L'ensemble $\mathscr{F}_X$ est en fait un ultrafiltre sur X.

A1 : est clair.
A2 : si $A, B \in \mathscr{F}$ alors $(X \cap A) \cap (X \cap B) = X \cap (A \cap B) \in \mathscr{F}_X$.
A3 : si $A \in \mathscr{F}_X$ et $A \subset B \subset X$ alors comme $A \in \mathscr{F}$ on a $B \in \mathscr{F}$ et donc finalement $B \in \mathscr{F}_X$.
A4 : si $A \subset X$ et que $A \notin \mathscr{F}_X$ alors $A \notin \mathscr{F}$ et donc $A^c \in \mathscr{F}$. Puisque $X \in \mathscr{F}$, on a $X \cap A^c \in \mathscr{F}_X$. Dans l'ensemble X, on a $X \cap A^c = (X \cap A)^c \in \mathscr{F}_X$.

Comme X est infini, il existe une partie $A_0 \subset X$ telle que les parties A_0 et $X - A_0$ soient infinies. Comme $\mathscr{F}_X$ est un ultrafiltre sur X, l'une des deux parties A_0 ou $X - A_0$ est un élément de $\mathscr{F}_X$, donc de $\mathscr{F}$. Cette partie A vérifie bien que $X \cap A^c$ est une partie infinie.

———

Exemple de suite possédant une valeur d'adhérence qui n'est limite d'aucune sous-suite : On considère l'intervalle $I = [0,1]$ et l'espace topologique produit $\mathscr{E} = I^I$ qui correspond à l'ensemble $\{f : I \longrightarrow I\}$ muni de la convergence simple ($\mathscr{E}$ est compact). On se donne un ultrafiltre non principal $\mathscr{F}$ sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Le cardinal de $\mathscr{F}$ est la puissance du continu (ceci est une conséquence de la théorie des ensembles) et l'on peut donc énumérer $\mathscr{F} = \{A_x\}_{x \in I}$.

On définit alors la suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{E}$ de la manière suivantes : pour $n \geq 0$ et $x \in [0,1]$, on pose :

$$f_n(x) = \mathbf{1}_{A_x}(n)$$

où $\mathbf{1}_E$ désigne, pour tout ensemble E, la fonction caractéristique de E. On considère aussi la fonction $f \in \mathscr{E}$ constante égale à 1.

f est une valeur d'adhérence de la suite $(f_n)_n$: il s'agit de montrer que pour tout voisinage U de f, il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_n$ telle que $f_{\varphi(n)} \in U$ pour tout n. Eu égard à la définition de la topologie produit, on peut choisir U de la forme $U = U_{x_1} \times \cdots \times U_{x_k} \times I^{[0,1]-\{x_1,\cdots,x_k\}}$ où $x_1, \cdots, x_k \in [0,1]$ désigne k points distincts et pour chaque $i = 1, \cdots, k$, U_i désigne un voisinage de 1 dans $[0,1]$.

Le lemme 1 montre que la partie $A = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_{x_i}$ est infinie, on peut donc l'énumérer en une suite strictement croissante $(\varphi(n))_n$. Pour tout $i = 1, \cdots, k$, on a alors $f_{\varphi(n)}(x_i) = 1$ pour tout n et donc $f_{\varphi(n)} \in U$.

f n'est limite d'aucune sous-suite de $(f_n)_n$: il suffit de montrer que pour toute suite strictement croissante $(\varphi(n))_n$ il existe un réel $x_\varphi \in [0,1]$ tel que la suite $(f_{\varphi(n)}(x_\varphi))_n$ ne vonverge pas vers 1. On considère la partie $X = \{\varphi(n)/\ n \in \mathbb{N}\}$ qui est visiblement infinie. En utilisant alors le lemme 2, il existe $x_\varphi \in [0,1]$ tel que la partie $X \cap A^c_{x_\varphi}$ soit infinie. On énumère $X \cap A^c_{x_\varphi}$ en une suite $(\theta_n)_n$. La suite $(f_{\theta(n)})_n$ est une sous-suite de la suite $(f_{\varphi(n)})_n$ qui vérifie $f_{\theta(n)}(x_\varphi) = 0$ pour tout n. Ainsi, $(f_{\theta(n)})_n$ et donc $(f_{\varphi(n)})_n$ ne convergent pas vers f.