Domaine de Recherche

Mon domaine de recherche mathématique concerne l'arithmétique des corps et des revêtements, la théorie de Galois et la théorie inverse, l'arithmétique des groupes profinis, la cohomologie galoisienne et la théorie additive des nombres.

1.— Théorie inverse de Galois, géométrie-arithmétique. Mots clés : *Problème Inverse de Galois, arithmétique des revêtements algébriques, espace de Hurwitz, arithmétique des groupes profinis.*

Il s'agit de mon domaine originel de recherche. La théorie inverse de Galois a pour objectif de regarder la possibilité de réaliser des groupes (pro)finis comme groupes de Galois sur des corps fixés. Plus généralement l'objectif est de mieux comprendre la structure arithmétique des groupes de Galois absolus (i.e. des groupes de Galois d'extensions galoisiennes maximales). L'approche moderne à ce problème utilise la géométrie arithmétique, en particulier la théorie des revêtements algébriques.

Après avoir travaillé sur la théorie des espaces de modules de revêtements (espaces d'Hurwitz) pendant ma thèse sous la direction de Pierre Dèbes, j'ai obtenu plusieurs résultats de théorie inverse de Galois (voir 1/ et 2/) sur ce sujet. En particulier j'ai montré que pour un groupe fini G donné il existe des espaces de Hurwitz paramétrés par G et possédant pour tout p des points $\mathbb{Q}_p$-rationnels (rappelons à ce sujet que l'existence d'un point $\mathbb{Q}$-rationnel assure la réalisation du groupe comme groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$).

Un important travail dans ce domaine est une collaboration avec P. Dèbes (cf. 9/). Dans cet article nous introduisons une nouvelle notion : celle de corps ψ-libre. L'idée fut d'utiliser les méthodes existantes pour la construction de revêtements à paramètres arithmétiques fixés (groupe de Galois, ramification etc) et de les appliquer à la construction de tours infinies cohérentes de revêtements. Ces constructions permettent de réaliser sur certains corps, le groupe profini libre de rang dénombrable $\widehat{F}_\omega$ comme groupe de Galois (c'est ce que nous appelons être ψ-libre). En particulier nous montrons que si k est un corps valué hensélien de caractéristique résiduelle nulle et contenant les racines de l'unité alors le corps $k(T)$ est (régulièrement) ψ-libre (i.e. $\widehat{F}_\omega$ est groupe de Galois d'une extension régulière de $k(T)$). Ce résultat s'applique par exemple pour le corps $k = \mathbb{Q}^{ab}((T))$.

Cette notion de psi-liberté est proprement nouvelle puisqu'elle vient s'intercaler strictement entre la propriété d'ω-liberté et le fait pour un corps de vérifier Galois Inverse. Des perspectives intéressantes s'ouvrent à partir de cette notion, par exemple pour la conjecture de Shafarevich (qui prévoit au total beaucoup plus que la ψ-liberté de la clôture abélienne de $\mathbb{Q}$) ainsi que vers des perspectives modulaires comme l'indique la dernière partie de l'article mentionné.

Il faut rajouter à ces travaux, la publication (en tant qu'éditeur et pour le compte de la SMF) en 2002, d'un livre d'articles de recherche sur ce thème (cf III). Il s'agissait à la base des actes d'une conférence que j'avais organisée à Saint-Etienne sur le sujet quand il était encore Maître de conférences. Le livre présente plusieurs exposés de base et des articles plus spécifiquement orientés recherche.

2.— Arithmétique des corps et des groupes profinis. Mots clés : *Théorie de Galois, arithmétique des corps ordonnables et théorie d'Artin-Schreier, valuations et corps henséliens, groupes profinis, cohomologie galoisienne.*

Vers la fin de ma thèse je me suis plus spécialement intéressé aux corps ordonnables et à la théorie d'Artin et Schreier. Synthétisant plusieurs idées de théorie inverse de Galois, j'ai obtenu des résultats arithmétiques et cohomologiques sur les clôtures totalement réelles, qui sont présentés dans 3/. Nommé Maître de conférence à Saint-Etienne en 1999, j'ai continué mon travail sur l'arithmétique des corps. J'ai repris des travaux de Ribenboim sur les corps fermatiens et j'ai montré que, sous certaines conditions, la clôture p-fermatienne d'un corps, a un groupe de Galois qui est un pro-p-groupe sans torsion. Ce résultat est l'objet principal de 4/. Parallèlement, j'ai décrit dans 5/, pour un corps K de caractéristique 0, le plus petit corps complet et algébriquement clos contenant $K((X))$: le corps des séries de Puiseux généralisées qui, comme son nom l'indique, étend la notion de série de Puiseux. Un travail sur les corps gauches (voir 7/) est paru dans les annales Blaise Pascal. Dans cet article, je montre notamment qu'un corps gauche de dimension finie sur un corps algébriquement clos $\overline{K}$ (sans aucune condition de centralité) est en fait un corps de quaternions sur un sous-corps réel clos de $\overline{K}$. Ce résultat étend, sur ce point, le fameux théorème de Frobenius. Ces dernières années je me suis concentré sur certaines structures algébriques apparaissant naturellement en arithmétique.

Un travail de fond a été fait sur l'étude des automorphismes continus d'un corps de série de Puiseux. Dans l'article 10/, je donne une décomposition en un produit semi-direct à quatre facteurs du groupe des K-automorphismes du corps des séries de Puiseux à coefficients dans la clôture algébrique de K (K étant un corps de caractéristique nulle). Les facteurs de ce produit semi-direct sont intrinsèquement donnés par l'arithmétique du corps, on y retrouve d'ailleurs de manière naturelle le groupe de Galois absolu de $\overline{K}((X))$. En application de ce résultat structurel, je décris les classes de conjugaisons des sous-corps réels clos de ce corps de séries de Puiseux. Elles sont paramétrées finalement par les ordres compatibles sur K. Une autre application de ce travail vise à décrire certains sous-groupes du monstre $\mathbf{Aut}(\mathbb{C})$. Je montre en particulier que pour tout corps K de caractéristique nulle et de cardinal au plus la puissance du dénombrable, le groupe de Galois absolu de K est un sous-groupe de $\mathbf{Aut}(\mathbb{C})$. En particulier $\mathbf{Aut}(\mathbb{C})$ contient en son sein tous les groupes prolibres de rang plus petit que la puissance du continu.

Un autre travail (cf. 11/), qui est en collaboration avec Gérard Leloup (logicien, MCF au Mans) a porté sur la structure algébrique du groupe des unités d'un anneau de séries entières à coefficients dans un anneau commutatif unitaire fini. Ce groupe est en fait profini. Le résultat principal de l'étude montre qu'il s'agit d'une somme directe du sous-groupe des éléments de torsion et d'une partie constituée de groupes (pro)-libres. Plus exactement, pour un anneau de coefficients A fixé, ce groupe est isomorphe en tant que groupe topologique (pour la topologie profinie liée à la presque-valuation usuelle) au produit direct $A^* \times \Gamma \times \prod_{p \mid \sharp A} \mathbb{Z}_p^{\aleph_0}$ où Γ est un groupe profini abélien d'exposant. L'étude de la torsion de ce groupe a été faite dans un cas assez large et nous montrons que sous certaines conditions sur A (incluant le cas des produits directs) on a $\Gamma \simeq N^{\aleph_0}$ où $N = \sqrt{\{0\}}$ désigne le nilradical de A.

J'ai assuré en 2001 à Lyon (et dans une variante en 2003 dans la même université), un cours de DEA sur les groupes profinis. Consécutivement à ce cours, j'ai organisé un groupe de travail à l'ENS de Lyon sur un théorème de Serre concernant les sous-groupes d'indices finis d'un groupe profini. Ce thème me tenait particulièrement à coeur puisque j'ai travaillé sur le problème général suivant : Serre montre que, dans un pro-p-groupe de rang fini, tout sous-groupe d'indice fini est ouvert. La question est de savoir si cette propriété reste vraie pour n'importe quel groupe profini de rang fini. Par ailleurs, j'ai publié en 1998 chez Hermann un livre de problèmes d'arithmétique des corps (cf. I/).

3.— Théorie additive des nombres. Mots clés : *Bases additives*, *essentialités*.

Dans ce domaine le centre d'intérêt est la notion d'essentialité dans une base additive. Une base additive est une partie $A \subset \mathbb{N}$ telle qu'il existe un entier $h \geq 1$ vérifiant que $h.A \sim \mathbb{N}$. Le plus petit entier h vérifiant cette propriété s'appelle alors l'ordre de la base A.

En 2001, un travail en collaboration avec G. Grekos (cf 6/) et publié au journal de Crelle traitait du problème des éléments essentiels dans une base additive A donnée, c'est-à-dire les éléments $a \in A$ tel que $A - \{a\}$ ne soit plus une base (par exemple 1 dans la base $A = 2.\mathbb{N} \cup \{1\}$). Le résultat principal de cette étude est que le nombre d'éléments essentiels dans une base est fini et que le cardinal de l'ensemble de ces éléments est en $O\left(\sqrt{\frac{h}{\log h}}\right)$ (avec une constante effective = 5.7). Il est par ailleurs montré que cette estimation en O est en fait la meilleure possible asymptotiquement. Cette étude a été complétée ultérieurement par l'article 8/ où il est démontré que l'on peut toujours retirer d'une base additive une infinité d'éléments sans perdre le caractère de basicité.

Une généralisation de la notion d'élément essentiel dans une base est la notion d'essentialité : une essentialité dans une base A est une partie minimale B de A telle que la partie $A-B$ ne soit plus une base additive. Une collaboration (cf 12/) avec B.Farhi (ATER au Mans en 2004-2005) a abordé le cas des essentialités finies. Le résultat principal de cette étude montre qu'à l'instar des éléments essentiels, les essensialités finies dans une base sont toujours en nombre fini. Toutefois, leur nombre ne peut être contrôler par une fonction de l'ordre de la base, comme le montre des exemples assez simples. Dans cet article, nous introduisons un invariant pour l'étude de ce nombre : la raison d'une base. Il s'agit de la plus grande raison des progressions arithmétiques contenant presque totalement A (l'existence d'une telle progression maximale avec cette propriété n'est pas simple). Etant donné la raison r d'une base on peut alors majorer le nombre d'essentialités finies par la longueur du radical de r. Là encore ce résultat est optimal.

Reste le problème des essentialités infinies qui mériterait d'être étudié. Il n'est déjà pas clair que toute base possède au moins une essentialité infinie...