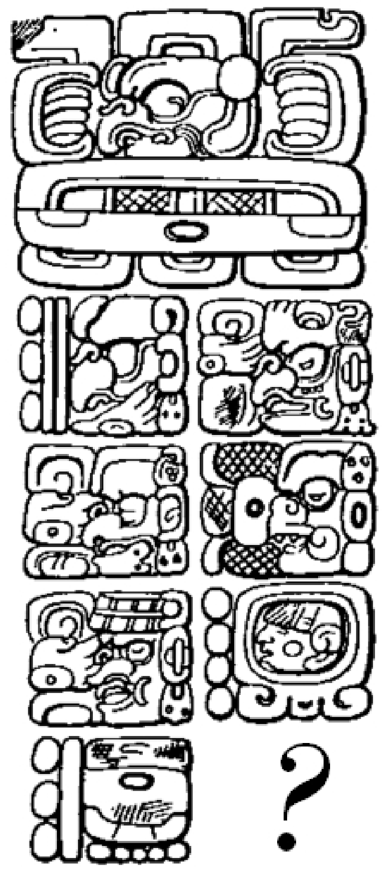
# Topologie des espaces métriques

Université d'Eleuthéria-Polites

**Résumé de cours de Licence 2 — 2016/2017**

**Bruno Deschamps**

**Version 3.1**



*Tout un monde lointain, absent, presque défunt,*
*Vit dans tes profondeurs, forêt aromatique...*

# Table des matières

# 1 Espaces métriques.

## 1.1 Espaces métriques et espaces vectoriels normés.

### 1.1.1 Espaces métriques.

**Définition 1.—** *Etant donné un ensemble $E$ non vide, on appelle distance (ou métrique) sur $E$ toute application*

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

*vérifiant les trois axiomes suivants :*

*(A1) Pour tout $x, y \in E$, $d(x,y) = d(y,x)$ (Symétrie).*

*(A2) Pour tout $x, y \in E$, $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$ (Séparation).*

*(A3) Pour tout $x, y, z \in E$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Inégalité triangulaire).*

*Le couple $(E, d)$ est alors appélé espace métrique.*

**Définition 2.—** *Soient $E$ un ensemble et $d$ et $d^{'}$ deux distances sur $E$. On dit que $d$ et $d^{'}$ sont équivalentes s'il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ strictement positifs tels que*

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \alpha d(x,y) \leq d^{'}(x,y) \leq \beta d(x,y)$$

**Remarque 3.—** La relation "être équivalente à" est un relation d'équivalence sur l'ensemble des distances sur un ensemble.

**Définition 4.—** *Soient $(E,d)$ un espace métrique et $A, B$ deux sous-ensembles de $E$.*

• *On appelle diamètre de la partie $A$ l'élément*

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} \{d(x,y)\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

*Si $\delta(A) \in \mathbb{R}^+$, on dit que $A$ est bornée.*

• *Pour $x \in E$, on appelle distance de $x$ à la partie $A$ le réel noté $d(x,A)$ et défini par*

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y)$$

• *on appelle distance de la partie $A$ à la partie $B$ le réel noté $d(A,B)$ et défini par*

$$d(A,B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x,y) = \inf_{x \in A} d(x,B) = \inf_{y \in B} d(y,A)$$

**Définition 5.—** *Etant donnés $(E,d)$ et $(F,d^{'})$ deux espaces métriques, on appelle isométrie de $E$ sur $F$ toute application $\varphi : E \longrightarrow F$ vérifiant*

$$\forall x, y \in E,\ d^{'}(\varphi(x), \varphi(y)) = d(x,y)$$

**Proposition-Définition 6.—** *Si $(E,d)$ est un espace métrique, alors pour toute partie $F \subset E$ non vide, l'application $d$ restreinte à $F \times F$ est une distance sur $F$. On dit que $d$ est la distance induite sur $F$ et que $(F,d)$ est un sous-espace métrique de $(E,d)$.*

#### 1.1.2 Espaces vectoriels normés.

Dans cette section $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

**Définition 7.—** *Etant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$, on appelle norme sur $E$ toute application*

$$N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

*vérifiant les trois axiomes suivants :*

*(A1) Pour tout $x \in E$, $N(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.*

*(A2) Pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.*

*(A3) Pour tout $x, y \in E$, $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.*

*Le couple $(E, N)$ est alors appélé espace vectoriel normé.*

**Proposition 8.—** *Soit $(E, N)$ un espace vectoriel normé, l'application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie, pour $x, y \in E$, par*

$$d(x, y) = N(x - y)$$

*est une distance sur $E$. On l'appelle distance associée sur $E$ à la norme $N$.*

**Proposition 9.—** *Pour tout couple $(x, y) \in E^2$, on a:*

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq N(x) + N(y)$$

**Définition 10.—** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $N$ et $N^{'}$ deux normes sur $E$. On dit que $N$ et $N^{'}$ sont équivalentes s'il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ strictement positifs tels que:*

$$\forall x \in E,\ \alpha N(x) \leq N^{'}(x) \leq \beta N(x)$$

**Remarques 11.—** 1/ La relation "être équivalente à" est un relation d'équivalence sur l'ensemble des normes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

2/ Deux normes sur un même espace vectoriel normé sont équivalentes si et seulement si leurs distances associées le sont aussi.

**Définition 12.—** *Soit $(E, N)$ un e.v.n et $F$ un sous espace vectoriel de $E$. Pour tout $x \in F$, on pose $N^{'}(x) = N_{|F}(x)$. $(F, N^{'})$ est alors un e.v.n, on dit que $N^{'}$ est la norme induite par $N$ sur $F$. On note alors abusivement $N(x)$ a la place de $N^{'}$ pour parler de cette norme.*

**Proposition-Définition 13.—** *Soient $\geq 1$ et $(E_1, N_1), \cdots, (E_n, N_n)$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ l'espace vectoriel produit. Sur $E$, on considère l'application $N$ définie, pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E$, par*

$$N(x) = N_1(x_1) + \cdots + N_n(x_n)$$

*L'application $N$ est alors une norme sur $E$ et l'espace vectoriel normé $(E, N)$ est alors appelé "espace vectoriel normé produit" des espaces $(E_1, N_1), \cdots, (E_n, N_n)$.*

### 1.2 Suites dans un espace métrique.

#### 1.2.1 Convergence.

**Définition 14.—** *Soient $(E, d)$ un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $E$. On dit que $(x_n)_n$ converge vers $l \in E$ si la suite numérique $(d(x_n, l))_n$ converge vers 0, autrement dit, si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ d(x_n, l) < \epsilon$$

*on appelle alors $l$ la limite de $(x_n)_n$ et on note $\lim_n x_n = l$. Si une suite ne converge pas, on dit qu'elle est divergente.*

**Lemme 15.—** *Si une suite converge, sa limite est unique.*

**Cas des e.v.n.** Dans le cas ou $(E, \|.\|)$ est un e.v.n., la convergence de $(x_n)_n$ vers $l$ se traduit de la manière suivante:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \|x_n - l\| < \epsilon$$

On a alors

**Lemme 16.—** *Il y a équivalence entre*

*i)* $\lim_n x_n = l$

*ii)* $\lim_n \|x_n - l\| = 0$

*Dans ces conditions, on a* $\lim_n \|x_n\| = \|l\|$.

**Théorème 17.—** *L'ensemble des suites convergentes d'un e.v.n. est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites. Par ailleurs, si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont deux suites convergentes et $\alpha \in \mathbb{K}$ un scalaire, on a* $\lim_n(\alpha x_n + y_n) = \alpha \lim_n x_n + \lim y_n$.

**Proposition 18.—** *Soient $N_1$ et $N_2$ deux normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. Il y a équivalence entre:*

*i) Toute suite convergente vers $0$ au sens de $N_1$ est convergente vers $0$ au sens de $N_2$,*

*ii) il existe $\alpha > 0$ tel que $N_2 \leq \alpha N_1$.*

**Preuve:** Pour tout $x \neq 0$ on pose $\alpha(x) = \dfrac{N_2(x)}{N_1(x)}$. Supposons que l'ensemble $A = \{\alpha(x),\ x \in E\}$ ne soit pas borné. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $x_n \in E$ tel que $\alpha(x_n) = \dfrac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} \geq n$. Posons alors $y_n = \dfrac{x_n}{\sqrt{n} N_1(x_n)}$, on a:

$$\sqrt{n} N_2(y_n) = \frac{N_2(y_n)}{N_1(y_n)} = \frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} > n$$

par suite $N_2(y_n) > \sqrt{n}$ et donc $(y_n)_n$ ne converge pas vers $0$ au sens de $N_2$ alors que $N_1(y_n) = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ converge vers $0$, c'est à dire que $(y_n)_n$ converge vers $0$ au sens de $N_1$, ce qui est absurde.

**Corollaire 19.—** *Si une famille de normes sont équivalentes sur $E$, alors la notion de convergence de suites sur $E$ est indépendante du choix d'une de ces normes.*

**Proposition 20.—** *Soit $(E_i, N_i)$, $i = 1, \cdots, p$, une famille finie de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $(E, N)$ l'espace vectoriel normé produit. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $E$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = (x_n^{(1)}, \cdots, x_n^{(p)}) \in E_1 \times \cdots \times E_p$. On a l'équivalence:*

*i) $(x_n)_n$ converge vers $l = (l_1, \cdots, l_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ dans $(E, N)$*

*ii) pour tout $i = 1, \cdots, p$ $(x_n^{(i)})_n$ converge vers $l_i$ dans $(E_i, N_i)$.*

### 1.2.2 Valeurs d'adhérence.

On considère $(E, d)$ un espace métrique.

**Définition 21.—** *Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $E$ et $l \in E$. On dit que $l$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall N \geq 0,\ \exists n \geq N,\ d(x_n, l) < \epsilon$$

**Théorème 22.—** *Il y a équivalence entre* *i) $l$ est valeur d'adhérence de $(x_n)_n$*

*ii) il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers $l$.*

**Corollaire 23.—** *Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et sa limite est égale à celle de la suite de départ.*

**Corollaire 24.—** *Si une suite possède au moins deux valeurs d'adhérence distinctes, alors elle diverge. Une suite convergente possède une unique valeur d'adhérence : sa limite.*

## 1.3 Topologie.

### 1.3.1 Boules, voisinages.

Dans cette partie, $(E,d)$ désigne un espace métrique.

**Définition 25.—** *Soient $(E,d)$ un espace métrique, $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ un réel. On appelle boule ouverte de centre $x$ et de rayon $\varepsilon$ l'ensemble*

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in E / \ d(x,y) < \varepsilon\}$$

*On appelle boule fermée de centre $x$ et de rayon $\varepsilon$ l'ensemble*

$$B_f(x,\varepsilon) = \{y \in E / \ d(x,y) \leq \varepsilon\}$$

*On appelle sphère de centre $x$ et de rayon $\varepsilon$ l'ensemble*

$$S(x,\varepsilon) = \{y \in E / \ d(x,y) = \varepsilon\}$$

**Définition 26.—** *Soient $(E,d)$ un espace métrique, $x \in E$ et $V \subset E$ une partie. On dit que $V$ est un voisinage de $x$ (ou que $V$ voisine $x$), s'il existe une boule ouverte $B \subset V$ telle que $x \in B$. On note $\mathscr{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de $x$ dans $E$.*

**Proposition 27.—** *Soient $(E,d)$ un espace métrique, $x \in E$ et $V \subset E$. Les propositions suivantes*

*i) $V \in \mathscr{V}(x)$,*

*ii) il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset V$,*

*sont équivalentes.*

**Proposition 28.—** *Soient $x \in E$ et $(V_i)_{i \in I}$ une famille de voisinage de $x$. La partie $\bigcup_i V_i$ est un voisinage de $x$. Si $I$ est fini, alors $\bigcap_i V_i$ est un voisinage de $x$.*

**Définition 29.—** *On appelle ouvert de $E$ toute partie $O$ qui voisine tous ses points. On appelle fermé de $E$, toute partie qui est le complémentaire d'un ouvert.*

*La collection formée par les ouverts de $E$ s'appelle la topologie de $E$.*

**Théorème 30.—** *Deux distances équivalentes définissent la même topologie.*

**Proposition 31.—** *Soit $(E,d)$ un espace métrique.*

- *$E$ et $\emptyset$ sont des parties ouvertes de $E$.*
- *Toute réunion de parties ouvertes de $E$ est une partie ouverte de $E$.*
- *Toute intersection finie de parties ouvertes de $E$ est une partie ouverte de $E$.*
- *$E$ et $\emptyset$ sont des parties fermées de $E$.*

• *Toute intersection de parties fermées de E est une partie fermée de E.*

• *Toute réunion finie de parties fermées de E est une partie fermée de E.*

**Adhérence**

**Définition 32.—** *Soit $A \subset E$, on dit qu'un point $x \in E$ est adhérent à $A$ si pour tout voisinage $V$ de $x$ on a $V \cap A \neq \emptyset$. On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à $A$, on appelle cet ensemble l'adhérence de $A$.*

**Lemme 33.—** *1/ Pour tout partie $A \subset E$, on a $A \subset \overline{A}$.*

*2/ Si $A, B \subset E$ sont deux parties telles que $A \subset B$, on a $\overline{A} \subset \overline{B}$.*

*3/ Pour tout partie $A \subset E$, on a $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.*

**Proposition 34.—** *Soit $A \subset E$. L'ensemble $\overline{A}$ est un fermé, c'est le plus petit fermé qui contienne $A$.*

**Corollaire 35.—** *Une partie $A$ de $E$ est fermée si et seulement si $\overline{A} = A$.*

**Proposition 36.—** *Soit $A$ une partie de $E$. Il y a équivalence entre*

*i)* $x \in \overline{A}$,

*ii)* $\exists (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}},\ \lim_n x_n = x$.

**Corollaire 37.—** *Une partie $A$ de $E$ est fermée si et seulement si toute suite d'éléments de $A$ qui converge dans $E$ a sa limite dans $A$.*

**Définition 38.—** *On dit qu'une partie $A \subset E$ est dense si $\overline{A} = E$.*

**Intérieur.**

**Définition 39.—** *Soit $A \subset E$, on dit qu'un point $x \in E$ est intérieur à $A$ si $A$ voisine $x$. On note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à $A$, on appelle cet ensemble l'intérieur de $A$.*

**Lemme 40.—** *1/ Pour tout partie $A \subset E$, on a $\overset{\circ}{A} \subset A$.*

*2/ Si $A, B \subset E$ sont deux parties telles que $A \subset B$, on a $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.*

*3/ Pour tout partie $A \subset E$, on a $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.*

**Proposition 41.—** *Soit $A \subset E$. L'ensemble $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert, c'est le plus grand ouvert inclus dans $A$.*

**Corollaire 42.—** *Une partie $A$ de $E$ est ouverte si et seulement si $\overset{\circ}{A} = A$.*

**Extérieur et frontière.**

**Définition 43.—** *Soit $A \subset E$, on appelle point frontière de $A$ tout point qui est adhérent à $A$ sans être intérieur à $A$. On note $\mathrm{Fr}(A)$ l'ensemble des points frontière de $A$, cet ensemble s'appelle la frontière de $A$.*

*On dit qu'un point est extérieur à $A$ s'il n'appartient pas à l'adhérence de $A$. On note $\mathrm{Ext}(A)$ l'ensemble des points extérieurs à $A$, cet ensemble s'appelle l'extérieur de $A$.*

**Remarque 44.—** Toutes les définitions que nous venons de donner ne dépendent que de la topologie de $E$ et sont donc indépendantes du choix d'une distance équivalente.

### 1.3.2 Boules dans un e.v.n.

**Proposition 45.—** *Soit $(E, N)$ un e.v.n. On a pour tout $x \in E$ et tout $\epsilon > 0$,*

• $\overset{\circ}{B_f(x, \epsilon)} = B(x, \epsilon)$.

• $\overline{B(x,\epsilon)} = B_f(x,\epsilon)$.

• $S(x,\epsilon) = \mathrm{Fr}(B(x,\epsilon)) = \mathrm{Fr}(B_f(x,\epsilon))$.

**Preuve:** On a $\overline{B(x,\epsilon)} \subset B_f(x,\epsilon)$. Soit $a \in B_f(x,\epsilon)$ et $a_n = x + (1-1/n)(a-x)$. On a $\|a_n - x\| < \|a - x\| \leq \epsilon$, donc $a_n \in B(x,\epsilon)$, et comme $\lim_n a_n = a$ on en déduit $a \in \overline{B(x,\epsilon)}$.

### 1.3.3 Topologie induite

Soit $(E,d)$ un espace métrique et $F$ un sous-ensemble de $E$. On regarde $F$ comme sous-espace métrique de $(E,d)$.

**Proposition 46.—** • *Tout ouvert de F est l'intersection d'un ouvert de E avec F.*

• *Tout fermé de F est l'intersection d'un fermé de E avec F.*

• *Tout voisinage de F d'un point x de F est l'intersection d'un voisinage dans E de x avec F.*

## 1.4 Complétude.

### 1.4.1 Suites de Cauchy.

**Définition 47.—** *Soit $(E,d)$ un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E. On dit que la suite $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante:*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geq N,\ \forall q \geq N,\ d(x_p, x_q) < \epsilon$$

**Exemple 48.—** Toute suite convergente est une suite de Cauchy. La réciproque est bien évidemment fausse : considérons $\mathbb{Q}$ muni de la distance $d(x,y) = |x-y|$ et la suite $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Cette suite est de Cauchy, mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

**Proposition 49.—** *On a les propriétés suivantes :*

• *Toute suite de Cauchy est bornée.*

• *Si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, alors cette suite converge vers cette valeur. En particulier, une suite de Cauchy a au maximum une valeur d'adhérence.*

• *L'ensemble des suites de Cauchy sur un e.v.n. forme un $\mathbb{K}$-e.v.*

**Proposition 50.—** *Soient $E_i$, $i = 1, \cdots, p$ une famille finie d'e.v.n. et $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ l'e.v.n. produit. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = (x_n^1, \cdots, x_n^p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$. On a alors l'équivalence :*

*i) $(x_n)_n$ est de Cauchy,*

*ii) $(x_n^i)_n$ est de Cauchy, pour tout $i = 1, \cdots, p$.*

### 1.4.2 Espaces complets.

**Définition 51.—** *Un espace métrique $(E,d)$ est dit complet si toute suite de Cauchy d'éléments de E est convergente. On appelle alors*

• *Espace de Banach, tout e.v.n complet.*

• *Espace de Hilbert, tout espace pré-hilbertien muni d'un produit scalaire, qui soit un Banach pour la norme induite par le produit scalaire.*

**Exemple 52.—** $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces de Banach (et de Hilbert) pour la valeur absolue (resp. le module).

**Proposition 53.—** *Soient $E_i$, $i = 1, \cdots, p$ une famille finie de Banach. L'e.v.n. $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ est un espace de Banach.*

**Corollaire 54.—** *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ (munis de la structure produit) sont des espaces de Banach.*

**Proposition 55.—** *Soit $(E, d)$ un espace métrique complet et $F \subset E$. On considère $F$ comme sous-espace métrique de $E$. On a alors l'équivalence :*

*i) $F$ est complet,*

*ii) $F$ est fermé.*

**Théorème 56.—** *(Critère de Cauchy) Soit $(E, d)$ un espace métrique complet et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $E$. On a alors l'équivalence:*

*i) $(x_n)_n$ converge,*

*ii) $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall p \geq N$, $\forall q \geq N$, $d(x_p, x_q) < \epsilon$,*

*iii) $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall p \geq N$, $\forall q \geq 0$, $d(x_p, x_{p+q}) < \epsilon$.*

**Proposition 57.—** (Fermés emboités) *Soit $(E, d)$ un espace métrique complet et $(F_n)_n$ une suite de fermés non vide emboités (i.e. $\forall n$, $F_{n+1} \subset F_n$) telle que $\lim_n \delta(F_n) = 0$ ($\delta(F_n) = \sup_{x,y \in F_n} d(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}$), alors $\bigcap_n F_n$ est égal à un singleton.*

**Corollaire 58.—** (Suites adjacentes) *Deux suites réelles adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.*

**Théorème 59.—** (Point fixe) *Soit $(E, d)$ un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow E$ une application contractante (i.e. $k$-lipschitzienne pour un certain $k \in ]0, 1[$). Alors :*

- *$f$ admet un unique point fixe $\xi$.*
- *Toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de $E$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers $\xi$. On a alors de plus :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d(x_n, \xi) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1-k} k^n$$

## 1.5 Compacité.

**Définition 60.—** *Un espace métrique $(E, d)$ est dit compact si toute suite d'éléments de $E$ admet une valeur d'adhérence.*

**Remarque 61.—** Cette définition est indépendante du choix d'une distance équivalente.

**Proposition 62.—** *Soit $(E, d)$ un espace métrique et $A \subset E$. Si $E$ est compact et $A$ fermé, alors $A$ est compact.*

**Proposition 63.—** *Soit $E$ et $F$ deux e.v.n. si $A \subset E$ et $B \subset F$ sont compacts alors $A \times B$ est compact dans $E \times F$.*

**Théorème 64.—** *Tout espace métrique compact est complet.*

**Théorème 65.—** *Soit $(E, d)$ un espace métrique et $A \subset E$. Si $A$ est compact, alors $A$ est fermé et bornée.*

*Réciproquement, si $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ (muni de la structure produit) alors si $A$ est fermé et borné, $A$ est compact.*

Ce théorème est la conséquence de :

**Théorème 66.—** (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite bornées d'élements de $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ on peut extraire une sous-suite convergente.*

**Preuve :** Le cas $E = \mathbb{R}$ se fait par dichotomie. Prenons $n \geq 1$ et $x_p = (x_p^1, \cdots, x_p^n) \in \mathbb{R}^n$ une suite bornée. La suite $(x_p^1)_p$ est bornée, donc il existe une sous-suite $(x_p^1)_{\varphi_1(p)}$ qui converge dans $\mathbb{R}$. Considérons la suite $(x_p)_{\varphi_1(p)}$, cette suite est bornée, donc $(x_p^2)_{\varphi_1(p)}$ aussi, il existe donc une sous-suite $(x_p^2)_{\varphi_2\circ\varphi_1(p)}$ convergente. La suite $(x_p^1)_{\varphi_2\circ\varphi_1(p)}$ est une sous-suite d'une suite convergente, elle converge donc. De proche en proche, on construit une sous-suite $(x_p)_{\varphi_n\circ\cdots\circ\varphi_1(p)}$ tel que $(x_p^i)_{\varphi_n\circ\cdots\circ\varphi_1(p)}$ converge pour tout $i = 1, \cdots, n$, ce qui équivaut à dire que $(x_p)_{\varphi_n\circ\cdots\circ\varphi_1(p)}$ converge.

**Proposition 67.—** *Soit $(E, d)$ un espace métrique compact et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $E$. On a l'équivalence :*

*i) $(x_n)_n$ possède une unique valeur d'adhérence $\alpha$,*

*ii) $(x_n)_n$ converge vers $\alpha$.*

# 2 Applications continues.

## 2.1 Limites et continuité.

### 2.1.1 Limites dans un espace métrique.

**Définition 68.—** *Soient $(E, d)$ et $(F, d')$ deux espaces métriques, $x_0 \in E$ et $l \in F$, et $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que $f$ admet $l$ pour limite en $x$ et l'on note $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ (ou $\lim\limits_{x_0} f = l$), si*

$$\forall W \in \mathscr{V}(l),\ \exists V \in \mathscr{V}(x_0),\ f(V) \subset W$$

**Proposition 69.—** *On conserve les notations précédentes. Les propositions suivantes*

*i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$,*

*ii) pour tout ouvert $U$ de $F$ contenant $l$, il existe un ouvert $O$ de $E$ contenant $x_0$ tel que $f(O) \subset U$,*

*iii) pour toute boule ouverte $B'$ de $F$ contenant $l$, il existe une boule ouverte $B$ de $E$ contenant $x_0$ tel que $f(B) \subset B'$,*

*iv) pour toute boule ouverte $B'$ de $F$ centrée en $l$, il existe une boule ouverte $B$ de $E$ centrée en $x_0$ tel que $f(B) \subset B'$,*

*v) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, f(B(x_0, \eta)) \subset B(l, \varepsilon)$,*

*vi) $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in E, d(x, x_0) < \eta \Longrightarrow d'(l, f(x)) < \varepsilon$,*

*sont équivalentes.*

**Remarque 70.—** La notion de limite ne dépend pas du choix de distances équivalentes (que ce soit pour $E$ ou pour $F$).

**Proposition 71.—** *Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, alors $l = f(x_0)$. En particulier, si une fonction possède une limite, cette dernière est unique.*

**Théorème 72.—** (Critère séquentiel) *Les proposition suivantes*

*i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$,*

*ii) pour toute suite $(a_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_n a_n = x_0$ on a $\lim_n f(a_n) = l$,*

*sont équivalentes.*

**Proposition 73.—** *Soient $E, F, G$ trois espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_0$ et $\lim\limits_{l \to l_0} g(l) = w$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} g \circ f(x) = w$.*

**Définition 74.—** *Si $f$ possède une limite en $x_0$ on dit que $f$ est continue en $x_0$. Si $f$ est continue en tout point d'une partie $A$, on dit que $f$ est continue sur $A$.*

**Corollaire 75.—** *La composée d'applications continues est une application continue.*

**Théorème 76.—** (Critère séquentiel) *Soient $f : E \longrightarrow F$ une application entre deux espaces métriques et $A \subset E$. Les proposition suivantes*

*i) $f$ est continue sur $A$,*

*ii) Pour toute suite d'éléments $(a_n)_n$ d'éléments de $A$ convergeant dans $A$, on a $\lim\limits_n f(a_n) = f(\lim\limits_n a_n)$,*

*iii) Pour toute suite d'éléments $(a_n)_n$ d'éléments de $A$ convergeant dans $A$, la suite $f(a_n)$ converge.*

*sont équivalentes.*

**Théorème 77.—** *Avec les notations de la définition, les trois propriétés suivantes*

*i) $f$ est continue sur $A$,*

*ii) l'image réciproque par $f$ de tout ouvert de $F$ est un ouvert (relatif à $A$) de $A$,*

*iii) l'image réciproque par $f$ de tout fermé de $F$ est un fermé (relatif à $A$) de $A$.*

*sont équivalentes.*

### 2.1.2 Cas des espaces vectoriels normés.

**Lemme 78.—** *Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Les deux applications*

$$\begin{array}{ccc} E \times E : & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E : & \longrightarrow & E \\ (\lambda,x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

*sont continues.*

**Théorème 79.—** *Soient $X$ un espace métrique et $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Pour une partie $A \subset X$, on considère l'ensemble $\mathscr{C}^0(A, E)$ constitué des applications de $X$ vers $E$ continues sur $A$ est un sous-espace vectoriel de $E^A$.*

**Proposition 80.—** *Soient $E, F_1, \cdots, F_n$ des e.v.n. et $F = F_1 \times \cdots \times F_n$ l'e.v.n. produit. Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$. On note $f_1, \cdots, f_n$ les applications coordonnées de $f$ (i.e. $\forall x \in E,\ f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x)) \in F_1 \times \cdots \times F_n$). Les propriétés suivantes*

*i) $f$ est continue,*

*ii) $f_i$ est continue pour tout $i = 1, \cdots, n$.*

*sont équivalentes.*

### 2.1.3 Propriétés des applications continues.

#### Prolongement par continuité.

**Théorème 81.—** *Soient $E$ et $F$ deux espaces métriques, $A \subset E$ et $f$ et $g$ deux applications continues de $A$ dans $F$. Soit $B$ une partie de $A$ dense dans $A$ (i.e. $\overline{B} = A$) telle que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in B$. On a alors $f = g$.*

**Compacité**

**Théorème 82.—** *Soit $(E,d)$ et $(F,d^{'})$ deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ une application continue. Si $A \subset E$ est compact, alors $f(A)$ est compact.*

**Corollaire 83.—** *Toute application continue sur un compact est bornée et la borne supérieure de sa norme est atteinte.*

**Corollaire 84.—** *Soient $K \subset E$ une partie compacte d'un espace métrique et $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. L'application $f$ admet un minimum et un maximum, ces deux extrémum sont atteints.*

**Définition 85.—** *Soient $(E,d)$ et $(E^{'},d^{'})$ deux espaces métriques. une application $f : E \longrightarrow E^{'}$ est dite uniformément continue si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (x,y) \in E^2,\ d(x,y) < \alpha \Longrightarrow d^{'}(f(x),f(y)) < \epsilon$$

**Remarque 86.—** Une fonction uniformément continue est continue.

**Théorème 87.—** (Heine) *Toute application continue sur un compact est uniformément continue.*

**Définition 88.—** *Soit $(E,d)$ et $(F,d^{'})$ deux espaces métriques. Une application $f : E \to F$ est dite k-lipschitzienne ($k \in \mathbb{R}^{+*}$) si*

$$\forall x,y \in E,\ d^{'}(f(x),f(y)) \leq kd(x,y)$$

**Lemme 89.—** *On a les propriétés suivantes :*

- *Toute application lipschitzienne est uniformément continue.*
- *Toute composée d'applications lipschitziennes est lipschitziennes.*

**Exemples 90.—** 1/ L'application norme dans un e.v.n. est 1-lipschitzienne.

2/ Soit $E$ un e.v.n. et $A \subset E$. L'application $x \longmapsto d(x,A)$ est 1-lipschitzienne.

3/ Soit $(E_i,N_i)$, $i = 1,\cdots,n$ une famille finie d'e.v.n. et $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ l'espace produit muni de la norme $N(x) = \sup_i N_i(x_i)$. Les applications coordonnées sont alors 1-lipschitziennes.

**Connexité**

**Théorème 91.—** *L'image continue d'un connexe (resp. d'un connexe par arc) est connexe (resp. est connexe par arc).*

**Application :** Il n'existe pas d'homéomorphisme entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$.

## 2.2 Applications linéaires continues.

### 2.2.1 Caractérisation.

On considère $(E,\|.\|_1)$ et $(F,\|.\|_2)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Pour tout $u \in \mathscr{L}(E,F)$, on pose

$$|||u||| = \sup_{x \in E-\{0\}} \frac{\|u(x)\|_2}{\|x\|_1} \in [0,+\infty]$$

**Théorème 92.—** *Avec les notations précédentes, les propriétés suivantes*

*i) $u$ est continue,*

*ii) $u$ continue en $0$,*

*iii) l'image par $u$ de la sphère unité est bornée,* *iv)* $\exists\alpha > 0,\ \forall x \in E,\ \|u(x)\|_2 \leq \alpha\|x\|_1$,

*v) u est* $\alpha$*-lipschitzienne,*

*vi)* $|||u||| < +\infty$,

*sont équivalentes.*

**Corollaire 93.—** *Soient E un* $\mathbb{K}$*-e.v. et* $N_1$ *et* $N_2$ *deux normes sur E. On a l'équivalence:*

*i)* $N_1$ *et* $N_2$ *sont équivalentes,*

*ii)* $Id : (E, N_1) \longrightarrow (E, N_2)$ *est bicontinue.*

**Proposition 94.—** *Soient* $(E, N)$ *un e.v.n. et* $\varphi \in E^*$ *une forme linéaire. On l'équivalence:*

*i)* $\varphi$ *est continue,*

*ii)* $\ker(\varphi)$ *est fermé.*

Dans la suite, on notera $\mathscr{L}_c(E,F)$ le sous-ensemble de $\mathscr{L}(E,F)$ constitué des applications continues.

**Proposition 95.—** $\mathscr{L}_c(E,F)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{L}(E,F)$.

### 2.2.2 Algèbre normée.

**Théorème 96.—** *Soient* $(E, \|.\|_1)$ *et* $(F, \|.\|_2)$*, deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés et* $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$*. On note :*

$$\begin{array}{rcl} A(u) & = & \{\alpha > 0/\ \forall x \in E,\ \|u(x)\|_2 \leq \alpha\|x\|_1\} \\ B(u) & = & \{\|u(x)\|_2,\ x \in E,\ \|x\|_1 = 1\} \\ C(u) & = & \{\|u(x)\|_2,\ x \in E,\ \|x\|_1 \leq 1\} \\ D(u) & = & \left\{\dfrac{\|u(x)\|_2}{\|x\|_1} /\ x \in E - \{0\}\right\} \end{array}$$

*on a alors :*

- $\inf A(u) = \sup B(u) = \sup C(u) = \sup D(u) = |||u||| \in \mathbb{R}^+$
- *L'application* $u \longmapsto |||u|||$ *est une norme sur* $\mathscr{L}_c(E,F)$.

**Définition 97.—** *La norme* $|||.|||$ *ainsi définie s'appelle la norme sur* $\mathscr{L}_c(E,F)$ *associée à* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$*. On l'appelle "norme triple".*

**Proposition 98.—** *Soient* $(E, \|.\|_1)$ *et* $(F, \|.\|_2)$*, deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés et* $\mathscr{L}_c(E,F)$ *l'espace vectoriel des applications linéaires continues normé par la norme triple. On a :*

- $\forall u \in \mathscr{L}_c(E,F),\ \forall x \in E,\ \|u(x)\|_2 \leq |||u|||.\|x\|_1$.
- *Si* $E = F$*, alors* $\forall u \in \mathscr{L}_c(E),\ \forall v \in \mathscr{L}_c(E)\ vu \in \mathscr{L}_c(E)$ *et de plus* $|||vu||| \leq |||u|||.|||v|||$.

**Définition 99.—** *Soit E une* $\mathbb{K}$*-algèbre unitaire et* $\|.\|$ *une norme sur E. On dit que* $(E, \|.\|)$ *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre unitaire normée si*

- $\|e\| = 1$ *(e désigne ici, le neutre de E).*
- $\forall (x,y) \in E^2,\ \|xy\| \leq \|x\|.\|y\|$.

**Proposition 100.—** *Pour tout e.v.n* $(E, \|.\|)$*, l'algèbre* $(\mathscr{L}_c(E), |||.|||)$ *est une algèbre unitaire normée.*

**Proposition 101.—** *Soient* $(E, \|.\|)$ *un e.v.n,* $A \subset E$ *et* $\mathscr{B}(A, \mathbb{C})$ *l'ensemble des applications bornées de A dans* $\mathbb{C}$*. L'algèbre* $(\mathscr{B}(A,\mathbb{C}), \|.\|_\infty)$ *est une algèbre unitaire normée.*

# 3 Espace vectoriel normé en dimension finie.

## 3.1 Topologie des e.v.n. de dimension finie.

**Théorème 102.—** *Toute les normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.*

**Preuve:** Soit $\|.\|$ une norme sur $E$ et $\|.\|_1$ la norme définie sur $E$ par :

pour $e = (e_1, \cdots, e_n)$ une base fixée de $E$ et $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on pose $N(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

Soit $\lambda = \sup_i \|e_i\|$, $\lambda > 0$ et

$$\forall x \in E,\ \|x\| \leq \lambda N(x)$$

Soit $\theta : \mathbb{K}^n \longrightarrow E$ définie par $\theta(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On a alors $\|(x_1, \cdots, x_n)\|_1 = N(\theta(x_1, \cdots, x_n))$, il s'ensuit que $\theta$ est une isométrie, donc l'image de la sphère unité de $(\mathbb{K}^n, \|.\|_1)$ est égale à la sphère unité $S$ de $(E, N)$, comme $\theta$ est continue, en en déduit que cette dernière sphère est compacte. Maintenant l'application

$$\varphi : x \in E \longmapsto \|x\| \in \mathbb{R}$$

est continue sur $(E, N)$. En effet, on a :

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq \lambda N(x - y)$$

donc $\varphi(S)$ est compacte admet un plus petit élément $\mu > 0$ (sinon comme le min est atteint il existerait un vecteur $x \in E$ non nul tel que $\|x\| = 0$).

Pour tout $x \in S$, on a $\|x\| \geq \mu$. Soit $x \in E - \{0\}$ et $y = \dfrac{x}{N(x)} \in S$, donc $N(y) \geq \mu$ et donc $\|x\| \geq \mu N(x)$.

**Remarque 103.—** Le théorème que nous venons de montrer implique en particulier que les notions de topologie que nous avons définies telle que la notion de voisinnage, d'ouvert, de fermé, de compact etc. sont indépendante du choix d'une norme sur un e.v. de dimension finie et que donc ces notions sont intrinséquement lié à l'espace sans préciser sa norme.

**Théorème 104.—** *On a les propriétés suivantes :*

- *Tout e.v.n. de dimension finie est un espace de Banach.*
- *Une partie A d'un e.v.n de dimension finie est compacte si et seulement si A est fermée et bornée.*
- *Une partie A d'un e.v.n de dimension finie est complète si et seulement si elle est fermée, en particulier tout les sous-espace d'un e.v.n. de dimension fini sont fermés.*
- *Si E est un e.v.n de dimension finie et si F est un e.v.n., alors toute application linéaire et multilinéaire de E dans F est continue. En particulier, si E est de dimension finie, on a $\mathscr{L}_c(E) = \mathscr{L}(E)$ et alors $(\mathscr{L}(E), |||.|||)$ est un espace de Banach.*