Prographes sylvestres et groupes profinis presque libres.

Bruno Deschamps et Ivan Suarez Atias

Université du Maine

Résumé.— L'objet de cet article est de donner un analogue au cas profini du théorème qui affirme qu'un groupe (abstrait) est libre si et seulement s'il agit librement sur un arbre. Nous définissons dans un premier temps un objet combinatoire, les *proarbres*, qui sont des systèmes inductifs particuliers extrait de systèmes projectifs de graphes. Nous définissons ensuite une notion d'*action profinie* qui se résume moralement à faire agir les groupes du système projectif de groupes finis associé à un groupe profini sur chaque étage d'un système projectif de graphes avec certaines conditions arithmétiques. Ces objets arithmético-combinatoires permettent alors de donner l'analogue suivant : un groupe profini possède un sous-groupe libre dense si et seulement s'il agit prolibrement sur un proarbre.

Abstract.— In this article we want to give an analogous in the profinite case to the following theorem : an abstract group is free if and only if it acts freely on a tree. In a first time we define a combinatory object, the protrees, which are particular inductive systems extracted from projective systems of graphs. Then we define a notion of *profinite action.* These objects allow us to give the following analogous : a profinite group contains a dense abstract free subgroup if and only if it acts profreely on a protree.

0.— Introduction et notations.

Les groupes prolibres (relativement à une classe de groupes) jouent un rôle essentiel en mathématiques, en particulier en théorie de Galois où ils apparaissent volontiers. On sait qu'il sont obtenus en prenant la complétion profinie des groupes abstraits libres relativement à certaines bases de filtres de sous-groupes distingués (cf. [FJ], [RZ], [W]).

La réciproque de cette propriété est bien sur fausse : si l'on considère le groupe libre $\mathbb{Z}$ et la base de filtre $\mathscr{B} = \{H_n\}_{n\geq 1}$, où $H_n = p_1 \cdots p_n\mathbb{Z}$ (la suite $(p_n)_n$ désignant celle des nombres premiers) on constate que la complétion profinie $\widehat{\mathbb{Z}}_{\mathscr{B}}$ s'identifie au produit cartésien $\prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}/p_n\mathbb{Z}$ et ne peut donc être prolibre (puisque possédant de la torsion). On va s'intéresser dans cet article à cette famille de groupes profinis :

Définition 1.— *Un groupe profini sera dit presque libre s'il est égal à la complétion profini d'un groupe libre relativement à une base de filtre de sous-groupes distingués d'indice fini $\mathscr{B}$, vérifiant* $\bigcap_{H\in\mathscr{B}} H = \{e\}$.

L'hypothèse de séparation $\bigcap_{H\in\mathscr{B}} H = \{e\}$, présente dans la définition, est là pour s'assurer que le groupe libre s'injecte de manière dense dans sa complétion. De manière plus précise, on a :

Lemme 2.— *Un groupe profini est presque libre si et seulement s'il possède un sous-groupe (abstrait) libre dense.*

Preuve : Le sens direct est donc assuré par l'hypothèse $\bigcap_{H\in\mathscr{B}} H = \{e\}$.

[0]2000 Mathematics Subject Classification : Primary 20E18, 20E08, 20E99 Secondary 05C05, 05C99

Pour la réciproque, de manière générale si Γ est profini et si G est un sous-groupe dense de Γ, alors pour tout sous-groupe ouvert distingué U de Γ, la restriction à G de l'épimorphisme canonique $\varphi_U : \Gamma \longrightarrow \Gamma/U$ reste surjective. On en déduit donc que Γ/U s'identifie à $G/(G \cap ker(\varphi_U))$ et, par compatibilité des applications, que Γ est isomorphe à la complétion profinie de G relativement à la base de filtre $\{G \cap ker(\varphi_U)\}_U$ où U parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts distingués de Γ.

———

En fait, sans l'hypothèse de séparation, tous les groupes profinis seraient presque libres : si Γ est profini et α désigne son cardinal, alors le groupe libre F_α de rang α se surjecte sur Γ. On a alors $\Gamma \sim \varprojlim_U F_\alpha/\tilde{U}$ où U parcourt l'ensemble des sous-groupes ouverts distingués de Γ et où $\tilde{U}$ désigne le noyau de la surjection composée $F_\alpha \twoheadrightarrow \Gamma \twoheadrightarrow \Gamma/U$.

Avec l'hypothèse de séparation, il existe des groupes profinis non presque libres, par exemple le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$. En effet, s'il l'était il posséderait un sous-groupe libre dense, mais étant commutatif, ce sous-groupe serait obligatoirement isomorphe à $\mathbb{Z}$ et donc $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$ serait de rang topologique 1, ce qui n'est pas la cas (son rang est 2).

Dans le premier chapitre de son livre [S], Serre présente un théorème caractérisant de manière combinatoire de la liberté d'un groupe : *un groupe abstrait est libre si et seulement s'il agit librement sur un arbre.* L'objet principal de cet article est de donner un analogue de ce théorème pour les groupes profinis presque libres. Pour ce faire on introduit un nouvel objet combinatoire : les proarbres. Ce sont des systèmes inductifs extraits par section de systèmes projectifs de graphes (appelé prographe) qui, par passage à la limite directe, donnent des arbres. Cette notion est présentée dans le premier paragraphe de ce texte. Nous y montrons, en particulier, que pour le prographe associé au graphe d'un groupe dénombrable G il existe une section permettant de reconstruire le groupe G (théorème 7). Nous développons dans la partie suivante une notion d'action profinie. Il s'agit en fait de faire agir chaque étage d'un système projectif de groupes finis définissant un groupe profini donné sur les étages d'un prographe, ces actions étant assujetties à des conditions arithmético-combinatoires. Avec ces objets, on peut alors donner l'analogue au cas profini de la caractérisation des groupes libres : *un groupe profini est presque libre si et seulement s'il agit prolibrement sur un proarbre* (théorème principal).

Dans ce texte, étant donné un graphe orienté Γ, on notera $\mathscr{S}(\Gamma)$ (resp. $\mathscr{A}(\Gamma)$) l'ensemble des sommets (resp. des arêtes orientées) de Γ. Pour toute arête orientée $a \in \mathscr{A}(\Gamma)$, on notera $o(a)$ (resp. $t(a)$) l'origine (resp. le sommet terminal) de a. Quand on fera agir un groupe sur un graphe, il s'agira d'une action à gauche et cette action sera toujours une action de graphes orientés.

Par commodité, on notera indifféremment dans ce texte $\overline{x}$ la classe d'équivalence d'un objet x, qu'il s'agisse de la classe d'une arête ou d'un sommet dans un graphe quotient, de la classe d'un élément dans un groupe quotient ou encore même de la classe d'un élément dans une limite inductive d'ensembles. Par ailleurs, toujours par commodité, un morphisme de graphe $\theta : \Gamma_1 \longrightarrow \Gamma_2$ sera vu comme une unique application, par exemple de l'ensemble $\mathscr{S}(\Gamma_1) \sqcup \mathscr{A}(\Gamma_1)$ vers l'ensemble $\mathscr{S}(\Gamma_2) \sqcup \mathscr{A}(\Gamma_2)$.

Rappels sur les graphes de groupes. On rappelle qu'étant donné un groupe G et une partie non vide $S \subset G$, on appelle *graphe du groupe G relativement à la partie S* le graphe orienté, noté $\Gamma(G,S)$, défini par $\mathscr{S}(\Gamma(G,S)) = G$ et $\mathscr{A}(\Gamma(G,S)) = \{[g, gs]/\ g \in G,\ s \in S\}$.

Le groupe G agit alors naturellement, par multiplication à gauche, sur le graphe $\Gamma(G,S)$. Étant donné un sous-groupe H de G, on peut considérer le graphe quotient $H\backslash\Gamma$ (pour l'action décrite précédemment). On a alors $\mathscr{S}(H\backslash\Gamma) = H\backslash G$. On constate, par ailleurs, que pour

$g, g' \in G$ et $s, s' \in S$ on a

$$[g, gs] \equiv [g', g's'] \bmod H \Longleftrightarrow \begin{cases} g \equiv g' \bmod H \\ s = s' \end{cases}$$

On en déduit que $\mathscr{A}(H\backslash\Gamma)$ est l'ensemble des arêtes $a(\overline{g}, s) = \overline{[g, gs]}$ avec $\overline{g} \in H\backslash G$ et $s \in S$, cette description étant biunivoque (si $s \neq s'$ on a $a(\overline{g}, s) \neq a(\overline{g}, s')$ même si $\overline{s} = \overline{s'}$). Par ailleurs, si l'on suppose de plus que H est distingué dans G, alors le groupe quotient G/H agit de manière naturelle sur le graphe quotient $H\backslash\Gamma$. Pour cette action, on a alors $a(\overline{g}, s)^{\overline{g'}} = a(\overline{g'g}, s)$. Remarquons, pour finir, que si G agit librement sur Γ, alors il en est de même pour G/H agissant sur $H\backslash\Gamma$.

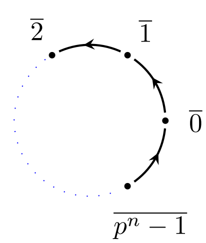
1.— Prographes sylvestres.

Définition 3.— *On appelle prographe tout système projectif de graphes $(\Gamma_i, \theta_{ji})_{i\in I}$ indexé sur un ensemble pré-ordonné d'indices $(I, \leq)$ filtrant à droite, tel que pour tout $i \leq j$ le morphisme de graphes θ_{ji} soit surjectif.*

Soient G un groupe, $\mathscr{N}$ une base de filtre de sous-groupes de G et $S \subset G$ une partie non vide. On considère $\Gamma = \Gamma(G, S)$, le graphe du groupe G relativement à la partie S. Le groupe G agit à gauche de manière naturelle sur Γ et pour tout $N \in \mathscr{N}$, on note $\Gamma_N = N\backslash\Gamma$. Si l'on considère l'inclusion sur $\mathscr{N}$, cela fait de cet ensemble un ensemble ordonné filtrant à droite et si $M \subset N$ on dispose alors d'un épimorphisme naturel de graphes $\theta_{MN} : \Gamma_M \longrightarrow \Gamma_N$. Le système $(\Gamma_N, \theta_{MN})_{N\in\mathscr{N}}$ est alors un prographe. On l'appellera dans la suite *Prographe de G relativement à la partie S et à la base de filtre $\mathscr{N}$.*

Exemple : (Prographe associé à $\mathbb{Z}_p$) Soit p un nombre premier, $G = \mathbb{Z}$, $\mathscr{N} = \{p^n\mathbb{Z}\}_{n\geq 0}$ et $S = \{1\}$. Le graphe de groupe $\gamma = \Gamma(G, S)$ s'identifie à l'arbre droit infini :

et pour $N = p^n\mathbb{Z}$, le graphe quotient $\gamma_n = p^n\mathbb{Z}\backslash\gamma$ s'identifie au graphe circulaire



Puisque S est réduit à un seul élément, les arêtes de γ_n sont définies de manière non équivoque par leurs origines et leurs sommets. On notera alors pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $a(\overline{x}, 1) = [x \bmod(p^n),\ x+1 \bmod(p^n)]$. Pour $m \geq n$, l'épimorphisme θ_{mn} est alors défini par

$$\theta_{mn}(x \bmod(p^m)) = x \bmod(p^n)$$
$$\theta_{mn}([x \bmod(p^m),\ x+1 \bmod(p^m)]) = [x \bmod(p^n),\ x+1 \bmod(p^n)]$$

Le prographe $(\gamma_n, \theta_{mn})_n$ décrit dans cet exemple sera repris tout au long de cet article comme exemple de référence pour illustrer les différentes notions que nous y présentons. Au fur et à mesure que nous filerons cet exemple nous garderons, sans les rappeler, les notations introduites dans chaque partie précédente de l'exemple.

Définition 4.— *Étant donné* $(\Gamma_i, \theta_{ji})_{i\in I}$ *un prographe, on appelle section graphiquement cohérente toute famille inductive de sections ensemblistes* $(s_{ij})_{i\leq j}$ *de* $(\theta_{ji})_{i\leq j}$ *vérifiant que :*

(C_1) *pour tout* $i \in I$ *et tout* $a \in \mathscr{A}(\Gamma_i)$ *il existe* $i_0 \geq i$ *tel que pour tout* $k \geq i_0$

$$\begin{array}{rcl} o(s_{ik}(a)) & = & s_{i_0k}(o(s_{ii_0}(a))) \\ t(s_{ik}(a)) & = & s_{i_0k}(t(s_{ii_0}(a))) \end{array}$$

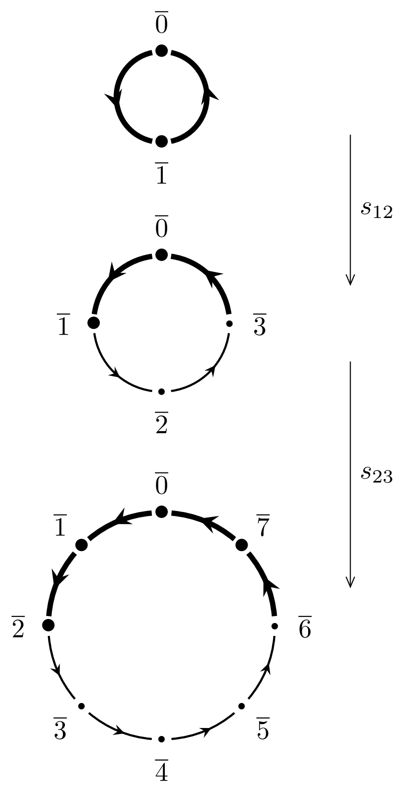
Exemple : (Prographe associé à $\mathbb{Z}_p$) Définissons une section au prographe $(\gamma_n, \theta_{mn})_n$ de la manière suivante : pour $m > n$, on pose, pour $x \in \{0, \cdots, [p^n/2]\}$,

$$\begin{array}{l} s_{nm}(x \bmod(p^n)) = x \bmod(p^m) \\ s_{nm}(p^n - x \bmod(p^n)) = p^m - x \bmod(p^m) \\ s_{nm}([x \bmod(p^n),\ x+1 \bmod(p^n)]) = [x \bmod(p^m),\ x+1 \bmod(p^m)] \end{array}$$

et, pour $x \in \{1, \cdots, [p^n/2]\}$,

$$s_{nm}([p^n - x \bmod(p^n),\ p^n - x + 1 \bmod(p^n)]) = [p^m - x \bmod(p^m),\ p^m - x + 1 \bmod(p^m)]$$

Ces formules sont valables pour $p \geq 3$, pour $p = 2$ on peut considérer les sections suivantes :



Considérons un indice $i \in \mathbb{N}$ et une arête $a \in \mathscr{A}(\gamma_i)$. Si

$$a \neq [p^i - [p^i/2] \bmod(p^i),\ p^i - [p^i/2] + 1 \bmod(p^i)]$$

alors l'indice $i_0 = i$ convient pour a dans la propriété (C_1). Si maintenant

$$a = [p^i - [p^i/2] \bmod(p^i),\ p^i - [p^i/2] + 1 \bmod(p^i)]$$

alors l'indice $i_0 = i+1$ convient pour a dans la propriété (C_1). La section s définie ici est donc graphiquement cohérente.

Une section d'un prographe définit donc deux systèmes inductifs d'ensembles : le premier à partir des ensembles de sommets des graphes et le deuxième, pour les arêtes. Le fait que la section soit graphiquement cohérente permet de construire, à partir de la limite inductive de ces deux systèmes, un graphe :

Proposition-Définition 5.— *Si $(\Gamma_i, \theta_{ji})_{i\in I}$ est un prographe muni d'une section graphiquement cohérente $s = (s_{ij})_{i\leq j}$. Les deux ensembles $\varinjlim_s \mathscr{S}(\Gamma_i)$ et $\varinjlim_s \mathscr{A}(\Gamma_i)$ permettent de définir canoniquement les sommets et les arêtes d'un graphe. Ce graphe est appelé limite inductive du prographe $(\Gamma_i, \theta_{ji})_{i\in I}$ relativement à la section graphiquement cohérente $s = (s_{ij})_{i\leq j}$ et est noté $\varinjlim_s \Gamma_i$.*

Preuve : La famille de sections s étant inductive on peut donc considérer les ensembles

$$\mathscr{S}(\varinjlim_s \Gamma_i) = \varinjlim_s \mathscr{S}(\Gamma_i) \text{ et } \mathscr{A}(\varinjlim_s \Gamma_i) = \varinjlim_s \mathscr{A}(\Gamma_i)$$

Définissons alors des applications o et t de $\mathscr{A}(\varinjlim_s \Gamma_i)$ à valeurs dans $\mathscr{S}(\varinjlim_s \Gamma_i)$: soient $\overline{a} \in \varinjlim_s \mathscr{A}(\Gamma_i)$, avec $a \in \Gamma_i$ pour un certain $i \in I$. D'après la définition de section graphiquement cohérente, il existe un indice i_0 tel que pour tout $k \geq i_0$ $o(s_{ik}(a)) = s_{i_0k}(o(s_{ii_0}(a)))$. Posons alors

$$o(\overline{a}) = \overline{o(s_{ii_0}(a))} \in \mathscr{S}(\varinjlim_s \Gamma_i)$$

Cette définition ne dépend que de $\overline{a}$. En effet, pour commencer, si a est fixé alors la définition de $o(\overline{a})$ ne dépend pas de i_0 : soit $i_1 \in I$ tel que pour tout $k \geq i_1$ $o(s_{ik}(a)) = s_{i_1k}(o(s_{ii_1}(a)))$ et considérons un élément $k \in I$ tel que $k \geq i_0, i_1$. On a

$$\begin{array}{rcl} o(s_{ik}(a)) & = & s_{i_0k}(o(s_{ii_0}(a))) \\ & = & s_{i_1k}(o(s_{ii_1}(a))) \end{array}$$

on en déduit donc que $\overline{o(s_{ii_0}(a)))} = \overline{o(s_{ii_1}(a))}$ et donc cette définition ne dépend pas de i_0.

Considérons maintenant un indice $j \in I$, $b \in \mathscr{A}(\Gamma_j)$ tel que $\overline{a} = \overline{b}$. Il existe donc $h \in I$, $h \geq i, j$ tel que $s_{ih}(a) = s_{jh}(b)$. Soient i_0, j_0 des indices donnés par (C_1) pour a et b respectivement. Considérons un indice $k_0 \geq i_0, j_0, h$. On a

$$s_{ik_0}(a) = s_{hk_0} \circ s_{ih}(a) = s_{hk_0} \circ s_{jh}(b) = s_{jk_0}(b)$$

et donc $o(s_{ik_0}(a)) = o(s_{jk_0}(b))$. Comme $o(s_{ik_0}(a)) = s_{i_0k_0}(o(s_{ii_0}(a)))$, on a $\overline{s_{ik_0}(a)} = \overline{s_{ii_0}(a)}$ et de même on a $\overline{s_{jk_0}(b)} = \overline{s_{jj_0}(b)}$. Ainsi, la définition de $o(\overline{a})$ ne dépend pas de a.

L'application t se définit de manière analogue et le graphe $\varinjlim_s \Gamma_i$ est donc la donnée des ensembles $\mathscr{S}(\varinjlim_s \Gamma_i) = \varinjlim_s \mathscr{S}(\Gamma_i)$ et $\mathscr{A}(\varinjlim_s \Gamma_i) = \varinjlim_s \mathscr{A}(\Gamma_i)$ et des deux applications o, t précédemment définies.

Exemple : (Prographe associé à $\mathbb{Z}_p$) On a alors $\varinjlim_s \gamma_n \sim \gamma$ (la section s permet donc de reconstruire l'arbre γ à partir de son prographe). Cette propriété sera une conséquence immédiate du théorème 7 à venir, nous ne la détaillons donc pas ici.

Lemme 6.— *Considérons un prographe $(\Gamma_n, \theta_{mn})_{n\in\mathbb{N}}$ indicé par $\mathbb{N}$ (muni de l'ordre naturel) et un graphe Γ muni pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'un morphisme de graphes $\theta_n : \Gamma \longrightarrow \Gamma_n$ vérifiant que pour tout $m \geq n$, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
\Gamma \arrow[r, two heads, "\theta_m"] \arrow[dr, "\theta_n"'] & \Gamma_m \arrow[d, "\theta_{mn}"] \\
& \Gamma_n
\end{tikzcd}$$

Supposons qu'il existe une suite croissante $(\Delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de parties de Γ telle que $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \Delta_k = \Gamma$ et qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_k$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, Δ_{k+1} s'injecte (par $\theta_{n_{k+1}}$) dans $\Gamma_{n_{k+1}}$ et se surjecte (par θ_{n_k}) dans Γ_{n_k} :

$$\begin{tikzcd}
\Delta_{k+1} \arrow[r, hook, "\theta_{n_{k+1}}"] \arrow[dr, two heads, "\theta_{n_k}"] & \Gamma_{n_{k+1}} \arrow[d, "\theta_{n_{k+1}n_k}"] \\
\Delta_k \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "\theta_{n_k}"'] & \Gamma_{n_k}
\end{tikzcd}$$

Il existe alors une section graphiquement cohérente s telle que $\varinjlim_s \Gamma_n$ soit canoniquement isomorphe à Γ.

Preuve : Commençons par définir, pour $k \geq 0$,

$$\begin{tikzcd}
\Delta_{k+1} \arrow[r, hook, "\theta_{n_{k+1}}"] \arrow[dr, two heads, "\theta_{n_k}"] & \Gamma_{n_{k+1}} \arrow[d, "\theta_{n_{k+1}n_k}"] \\
\Delta_k \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "\theta_{n_k}"'] & \Gamma_{n_k} \arrow[ul, dashed, bend left, "\sigma_{n_k}"]
\end{tikzcd}$$

une section σ_{n_k} de l'application $\theta_{n_k}|_{\Delta_{k+1}}$:

- si $x \in \theta_{n_k}(\Delta_k)$, on pose $\sigma_{n_k}(x) = (\theta_{n_k}|_{\Delta_k})^{-1}(x)$,
- si $x \notin \theta_{n_k}(\Delta_k)$, alors on prend pour $\sigma_{n_k}(x)$ un relevé quelconque de x qui soit dans Δ_{k+1}.

On définit alors une section $s_{n_k n_{k+1}}$

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_{n_{k+1}} \arrow[r, two heads, "\theta_{n_{k+1}n_k}"'] & \Gamma_{n_k} \arrow[l, bend right, "s_{n_k n_{k+1}}"']
\end{tikzcd}$$

de l'application $\theta_{n_k n_{k+1}}$ en posant $s_{n_k n_{k+1}} = \theta_{n_{k+1}} \circ \sigma_{n_k}$.

Pour $h \geq 1$, on pose $s_{n_k n_{k+h}} = s_{n_{k+h-1} n_{k+h}} \circ \cdots \circ s_{n_k n_{k+1}} = \theta_{n_{k+h}} \circ \sigma_{n_k}$.

La section $(s_{n_k n_{k+h}})_{k,h}$ du sous-prographe (Γ_{n_k}) est alors graphiquement cohérente. En effet, si $a \in \mathscr{A}(\Gamma_{n_k})$, alors il existe $h \geq k$ tel que $\sigma_{n_k}(a), o(\sigma_{n_k}(a)), t(\sigma_{n_k}(a)) \in \Delta_h$. Or Δ_h s'injecte dans Γ_{n_h}, donc, en vertu de l'égalité $s_{n_k n_{h+m}} = \theta_{n_{h+m}} \circ \sigma_{n_k}$, on en déduit que, pour $m \geq 0$, on a

$$o(s_{n_k n_{h+m}}(a)) = s_{n_h n_{h+m}}(o(s_{n_k n_h}(a)))$$

Définissons maintenant, pour un entier n quelconque, une section $s_{n,n+1}$. Pour cela fixons un indice n_k, posons $l = n_k$ et considérons les entiers i tel que $n_k \leq l + i \leq n_{k+1}$. Définissons d'abord les sections $s_{l+i,n_{k+1}}$ et $s_{l+i,l+i+1}$

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_{n_{k+1}} \arrow[r, two heads] & \cdots \arrow[r, two heads] & \Gamma_{l+i+1} \arrow[r, two heads] & \Gamma_{l+i} \arrow[r, two heads] \arrow[lll, bend right, "s_{l+i,n_{k+1}}"'] \arrow[l, bend left, "s_{l+i,l+i+1}"] & \cdots \arrow[r, two heads] & \Gamma_{n_k}
\end{tikzcd}$$

par récurrence sur i : pour $i = 0$, $s_{l,n_{k+1}}$ est déjà définie et on pose $s_{l,l+1} = \theta_{n_{k+1},l+1} \circ s_{l,n_{k+1}}$. Si pour $i - 1 \geq 0$, les sections $s_{l+i-1,n_{k+1}}$ et $s_{l+i-1,l+i}$ sont définies, on définit $s_{l+i,n_{k+1}}$ de la manière suivante :

- si $x \in s_{l+i-1,l+i}(\Gamma_{l+i-1})$, on pose $s_{l+i,n_{k+1}}(x) = s_{l+i-1,n_{k+1}}(\theta_{l+i,l+i-1}(x))$,
- si $x \notin s_{l+i-1,l+i}(\Gamma_{l+i-1})$, on prend pour $s_{l+i,n_{k+1}}(x)$ n'importe quel relevé de x dans $\Gamma_{n_{k+1}}$.

Une fois $s_{l+i,n_{k+1}}$ ainsi définie, on définit comme il se doit $s_{l+i,l+i+1} = \theta_{n_{k+1},l+i+1} \circ s_{l+i,n_{k+1}}$. Il est alors clair que l'on a $s_{l+i,n_{k+1}} = s_{n_{k+1}-1,n_{k+1}} \circ \cdots \circ s_{l+i,l+i+1}$.

Si $n \leq m$, on pose $s_{nm} = s_{m-1,m} \circ \cdots \circ s_{n,n+1}$ et le système $(\Gamma_n, s_{nm})_n$ est alors inductif. La section $s = (s_{nm})_{n \leq m}$ est une section inductive qui possède une sous-section $(s_{n_k n_l})_{k \leq l}$ graphiquement cohérente. Elle est donc elle-même graphiquement cohérente.

Pour $n_k < l < n_{k+1}$, on définit une application $\sigma_l : \Gamma_l \longrightarrow \Delta_{k+2}$ en posant $\sigma_l = \sigma_{n_{k+1}} \circ s_{l,n_{k+1}}$. Les applications σ_l commuttent visiblement au diagramme inductif et, par propriété universelle, on en déduit l'existence d'une application

$$\sigma : \varinjlim_s \Gamma_n \longrightarrow \Gamma$$

Si $x \in \Gamma$, il existe $k \geq 0$ tel que $x \in \Delta_k$ et alors la classe $\overline{\theta_{n_k}(x)}$ ne dépend pas du choix de k. En effet si $k_1 < k_2$ sont tels que $x \in \Delta_{k_1} \subset \Delta_{k_2}$, alors par construction on a $s_{n_{k_1} n_{k_2}} \circ \theta_{n_{k_1}}(x) = \theta_{n_{k_2}}(x)$ et donc $\overline{\theta_{n_{k_1}}(x)} = \overline{\theta_{n_{k_2}}(x)}$. Ceci permet de définir une application

$$\psi : \Gamma \longrightarrow \varinjlim_s \Gamma_n$$

en posant $\psi(x) = \overline{\theta_{n_k}(x)}$, où k est tel que $x \in \Delta_k$.

L'application ψ est un morphisme de graphe. En effet, si $a \in \Gamma$ est une arête et k est un entier tel que $a, o(a), t(a) \in \Delta_k$, alors on a alors pour tout $m \geq n_k$, $o(s_{n_k m}(\theta_{n_k}(a))) = s_{n_k m}(o(\theta_{n_k}(a)))$ et donc $o(\psi(a)) = \overline{o(\theta_{n_k}(a))} = \psi(o(a))$. On a de même $t(\psi(a)) = \psi(t(a))$ et ψ est donc bien un morphisme. Il est certainement bijectif puisque $\psi \circ \sigma = \mathrm{Id}$ et $\sigma \circ \psi = \mathrm{Id}$.

Ainsi, σ est un isomorphisme canonique (i.e. provenant de la propriété universelle des objets inductifs) entre $\varinjlim_s \Gamma_n$ et Γ. Cet isomorphisme dépend toutefois du choix de la suite $(\Delta_k)_k$.

Dans le cas des graphes de groupes, on a alors le résultat de relèvement suivant :

Théorème 7.— *On considère un groupe G dénombrable, $S \subset G$ une partie non vide et une suite décroissante $H_0 \supset H_1 \supset \cdots$ de sous-groupes distingués d'indices finis de G telle que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n = \{e\}$. On note $(\Gamma_n, \theta_{mn})_n$ le prographe de G relativement à la partie S et à la base de filtre $\{H_0, H_1, \cdots\}$.*

Si $\Gamma' \subset \Gamma(G,S)$ est un sous-graphe vérifiant que, pour tout $n \geq 0$, la restriction à Γ' du morphisme $\Gamma(G,S) \longrightarrow \Gamma_n$ reste surjective, alors il existe une section graphiquement cohérente, s, telle que $\varinjlim_s \Gamma_n$ soit canoniquement isomorphe à Γ' (on peut canoniquement relever $(\Gamma_n, \theta_{mn})_n$ à Γ', par une certaine section).

Preuve : On note $\Gamma = \Gamma(G,S)$ et, pour $k \geq 0$, $\theta_k : \Gamma \longrightarrow \Gamma_k$ l'épimorphisme canonique et, pour $m \geq n$, $\theta_{mn} : \Gamma_m \longrightarrow \Gamma_n$ l'épimorphisme induit par l'inclusion $H_m \subset H_n$. Ainsi, pour tout $n \leq m$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \Gamma' \arrow[r, two heads, "\theta_m"] \arrow[dr, "\theta_n"'] & \Gamma_m \arrow[d, two heads, "\theta_{mn}"] \\ & \Gamma_n \end{tikzcd}$$

Si $\Delta \subset \Gamma'$ est une partie composée d'un nombre fini de sommets et de toutes les arêtes de Γ' ayant pour origine un de ces sommets, alors il existe un indice $n \geq 0$ tel que Δ s'injecte par θ_n dans Γ_n. En effet, l'hypothèse de séparation $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n = \{e\}$ assure l'existence d'un indice $n \geq 0$ pour le quel les sommets de Δ s'envoient injectivement par θ_n dans Γ_n. Les arêtes de Δ (elles sont de la forme $[g_i, g_i s]$ avec $i \leq n$ et $s \in S$) s'envoient alors aussi injectivement par θ_n dans Γ_n, d'après la remarque faite dans l'introduction.

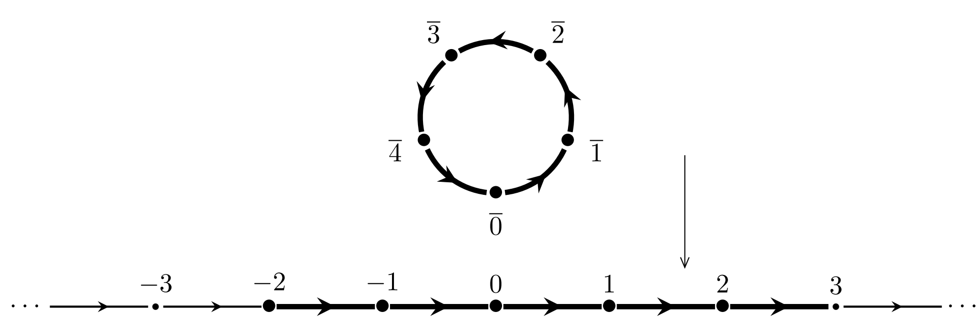
Comme $G = \mathscr{S}(\Gamma)$ est dénombrable, on peut énumérer $\mathscr{S}(\Gamma')$ en une suite $(g_n)_n$. Pour $n \geq 0$, on considère la partie $\Delta_n \subset \Gamma'$ constituée des sommets $g_0, \cdots, g_n$ et de toutes les arêtes de Γ' qui ont pour origine un des g_i avec $i \leq n$. La suite $(\Delta_n)_n$ est donc une suite de parties de Γ', croissante pour l'inclusion et de réunion valant Γ' tout entier.

Posons $i_0 = 0$. D'après ce qui précède, il existe un indice n_0 tel que Δ_{i_0} s'injecte par θ_{n_0} dans Γ_{n_0}. Comme Γ_{n_0} ne compte qu'un nombre fini de sommets, si l'on relève ces sommets dans Γ' il existe alors un indice $i_1 > i_0$ tel que Δ_{i_1} contienne tous ces relevés. La partie Δ_{i_1} se surjectent alors par θ_{n_0} sur le graphe Γ_{n_0}. Il existe alors un indice $n_1 > n_0$ tel que Δ_{i_1} s'injecte par θ_{n_1} dans Γ_{n_1}. On construit ainsi, par récurrence, deux suites d'indice $i_0 < i_1 < \cdots$ et $n_0 < n_1 < \cdots$ telles que, pour tout $k \geq 0$, $\Delta_{i_{k+1}}$ s'injecte (par $\theta_{n_{k+1}}$) dans $\Gamma_{n_{k+1}}$ et se surjecte (par θ_{n_k}) dans Γ_{n_k}.

On peut alors appliquer le lemme 6 pour conclure : il existe un monomorphisme canonique de graphes $\sigma : \varinjlim_s \Gamma_n \longrightarrow \Gamma$ ayant pour image Γ'.

Exemple : (Prographe associé à $\mathbb{Z}_p$) La section s du prographe associé à $\mathbb{Z}_p$ décrite précédemment, est exactement celle obtenue dans la preuve du théorème 7 en considérant les parties $\Delta_n = \{-[p^n/2], \cdots, -1, 0, 1, \cdots, [p^n/2]\}$. Ceci justifie que $\varinjlim_s \gamma_n \sim \gamma$.

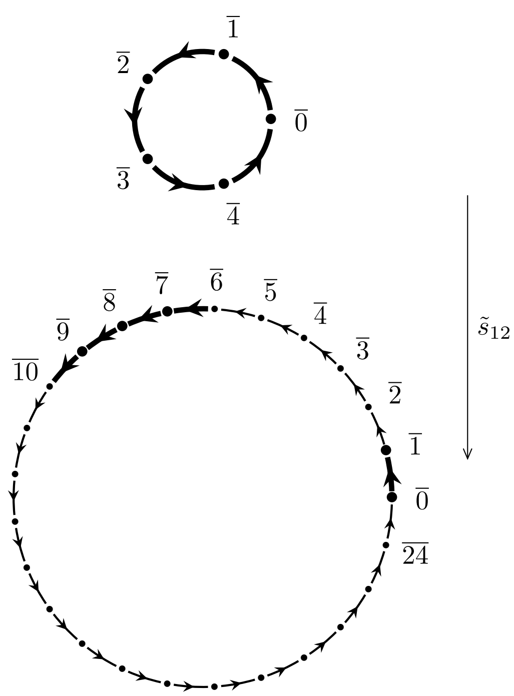
Illustration du plongement naturel de $\gamma_n \longrightarrow \gamma$ induit par s pour $p = 5$ et $n = 1$:



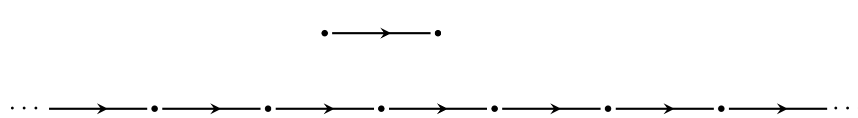
Remarques : Le théorème 7 affirme que pour un sous-graphe de $\Gamma(G,S)$ se surjectant sur tout les graphes du prographe associé, on sait relever par une certaine section s la limite $\varinjlim_s \Gamma_n$ sur ce sous-graphe. Ceci montre la grande diversité que peut avoir $\varinjlim_s \Gamma_n$ quand on fait varier s, par exemple, il existe une section s du prographe associé à $\mathbb{Z}_p$ telle que $\varinjlim_s \gamma_n$ s'identifie au graphe

On peut aussi remarquer qu'il n'existe pas de réciproque significative à cette propriété : les graphes $\varinjlim_s \Gamma_n$ n'a aucune raison de s'injecter de manière systématique dans Γ, comme le souligne l'exemple suivant : on reprend le prographe associé à $\mathbb{Z}_p$ et l'on définit une nouvelle section graphiquement cohérente $\tilde{s}$ (pour $p \geq 3$) de la manière suivante : sur le graphe γ_n, on pose :

$$
\begin{array}{ll}
\tilde{s}_{n,n+1}(x \bmod(p^n)) = x \bmod(p^{n+1}) & \text{pour } x = 0,\ 1, \\
\tilde{s}_{n,n+1}(x \bmod(p^n)) = x + p^n \bmod(p^{n+1}) & \text{pour } 2 \leq x < p^n, \\
\tilde{s}_{n,n+1}(a(0 \bmod(p^n),1)) = a(0 \bmod(p^{n+1}),1) & \text{et} \\
\tilde{s}_{n,n+1}(a(x \bmod(p^n),1)) = a(x + p^n \bmod(p^{n+1}),1) & \text{pour } 1 \leq x < p^n.
\end{array}
$$



Soit $\beta = \sum_{i=0}^{+\infty} p^i \in \mathbb{Z}_p$. Les sommets de $\varinjlim_{\tilde{s}} \gamma_n$ sont on bijection avec $\{0,1\} \cup \{a + p^n\beta \ :\ 0 \leq a < p^n\}$. De plus, une arête part du sommet a et arrive sur b ($a,\ b \in \mathbb{Z}_p$) si et seulement si $b - a = 1$. Ainsi, tout sommet de $\varinjlim_{\tilde{s}} \gamma_n$ distinct de 0 et de 1 est le sommet terminal d'une unique arrête et le sommet d'origine d'une unique arrête. Le graphe $\varinjlim_{\tilde{s}} \gamma_n$ est donc la réunion disjointe du segment $[0,1]$ et d'un arbre isomorphe à γ :



Ainsi, le graphe $\varinjlim_{\tilde{s}} \gamma_n$ ne peut d'aucune manière s'injecter dans γ.

Il est aussi intéressant de constater qu'il existe des sections s telles que $\varinjlim_s \gamma_n$ soit théoriquement isomorphe à γ mais non canoniquement (c'est-à-dire que l'isomorphisme ne peut pas provenir de sections de γ_n dans γ). Un exemple pour cette situation est une variante du précédent : il suffit de considérer

$$s_{n,n+1}(x \bmod(p^n)) = x + p^n \bmod(p^{n+1}) \text{pour } 0 \leq x < p^n$$

(les sections sur les arêtes s'entendant d'elles-mêmes).

Définition 8.— *Une section graphiquement cohérente s d'un prographe $(\Gamma_i, \theta_{ji})_{i \in I}$ sera dite arborescente si $\varinjlim_s \Gamma_i$ est un arbre. Un prographe sera dit sylvestre s'il possède une section arborescente, on appellera alors proarbre la donnée d'un prographe sylvestre muni d'une section arborescente.*

Ce qui précède prouve alors :

Proposition 9.— *Le prographe d'un groupe libre de rang dénombrable relativement à une de ses bases et à une base de filtre constitué d'une suite décroissante de sous-groupes d'indices finis d'intersection réduite au neutre, est un prographe sylvestre.*

Preuve : Les hypothèses du théorème 7 sont vérifiées. Il existe donc un section graphiquement cohérente au prographe dont la limite inductive est isomorphe au graphe du groupe libre relativement à sa base. Mais un tel graphe est un arbre d'après [S].

———

Exemple : (Prographe associé à $\mathbb{Z}_p$) La section s est arborescente et le prographe $(\gamma_n, \theta_{mn})_n$ est donc une illustration de la proposition 9.

———

2.— Action profinie sur un prographe.

2.1.— Système inductif extrait d'un système projectif. On considère un système projectif $(G_i, \varphi_{ji})_{i \in I}$ d'ensembles indexé par un ensemble d'indices I filtrant à droite. On considère pour tout $i \in I$, un sous-ensemble $E_i \subset G_i$ et pour tout $i \leq j$ une section ensembliste r_{ij} de φ_{ji}. Si le système $(E_i, r_{ij})_i$ est inductif, on dira que c'est un système inductif extrait du système projectif $(G_i, \varphi_{ji})_{i \in I}$.

Proposition 10.— *Soit $(E_i, r_{ij})_i$ un système inductif extrait d'un système projectif $(G_i, \varphi_{ji})_{i \in I}$. L'ensemble $\varinjlim_r E_i$ s'injecte canoniquement dans l'ensemble $\varprojlim_\varphi G_i$.*

Preuve : • Commençons par définir pour tout $k \in I$, une application $\theta_k : \varinjlim_r E_i \longrightarrow G_k$: soit $x \in \varinjlim_r E_i$ et $x_i \in E_i$ tel que $x = \overline{x_i}$; il existe $l \geq i, k$ et l'on pose alors

$$\theta_k(x) = \varphi_{lk} \circ r_{il}(x_i)$$

Cette définition ne dépend que de x et de k. En effet, pour commencer, elle est indépendante de l : soit $l^{'} \geq i, k$, considérons $p \geq l, l^{'}$. On a

$$\begin{aligned} \varphi_{lk} \circ r_{il}(x_i) &= \varphi_{lk} \circ \varphi_{pl} \circ r_{lp} \circ r_{il}(x_i) = \varphi_{pk} \circ r_{ip}(x_i) \\ &= \varphi_{l'k} \circ \varphi_{pl'} \circ r_{l'p} \circ r_{il'}(x_i) = \varphi_{l'k} \circ r_{il'}(x_i) \end{aligned}$$

Montrons maintenant qu'elle est indépendante de i : soit $i^{'} \in I$ et $x_{i^{'}} \in E_{i^{'}}$ tel que $x = \overline{x_{i^{'}}}$. Il existe donc $j \geq i, i^{'}$ tel que $r_{ij}(x_i) = r_{i^{'}j}(x_{i^{'}})$. Pour $l \geq k, j$ on a

$$\varphi_{lk} \circ r_{il}(x_i) = \varphi_{lk} \circ r_{jl} \circ r_{ij}(x_i) = \varphi_{lk} \circ r_{jl} \circ r_{i^{'}j}(x_{i^{'}}) = \varphi_{lk} \circ r_{i^{'}l}(x_{i^{'}})$$

Donc les applications θ_k sont bien définies.

• Pour tout $j \geq i$ on a $\varphi_{ji} \circ \theta_j = \theta_i$. En effet, soit $x = \overline{x_k} \in \varinjlim_r E_i$, $x_k \in E_k$ et $l \geq j, k$. On a $\theta_j(x) = \varphi_{lj} \circ s_{kl}(x_k)$ et donc

$$\varphi_{ji} \circ \theta_j(x) = \varphi_{ji} \circ \varphi_{lj} \circ s_{kl}(x_k) = \varphi_{li} \circ s_{kl}(x_k) = \theta_i(x)$$

(car $l \geq i, k$).

• La propriété universelle de la limite projective assure alors qu'il existe une unique application $\theta : \varinjlim_r E_i \longrightarrow \varprojlim_\varphi G_i$ telle que pour tout $i \in I$ on ait $\varphi_i \circ \theta = \theta_i$ (où $\varphi_i : \varprojlim_\varphi G_i \longrightarrow G_i$ désigne l'application canonique).

Montrons maintenant que θ est injective : soit $x, y \in \varinjlim_s E_i$ tels que $\theta(x) = \theta(y)$. Il existe un indice $k \in I$ et $x_k, y_k \in E_k$ tels que $x = \overline{x_k}$ et $y = \overline{y_k}$. On a

$$x_k = \theta_k(x) = \varphi_k \circ \theta(x) = \varphi_k \circ \theta(y) = \theta_k(y) = y_k$$

et donc $x = y$. On a donc bien le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim G_i \arrow[r, two heads, "\varphi_i"] & G_i \\
\varinjlim_r E_i \arrow[u, hook, "\theta"] \arrow[ur, "\theta_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Définition 11.— *Si $(G_i, \varphi_{ji})_{i \in I}$ désigne un système projectif de groupes, on appellera section de ce système tout système inductif extrait $(G_i, r_{ij})_i$ tel que l'image de $\varinjlim_r G_i$ dans $\varprojlim_\varphi G_i$ soit un sous-groupe.*

Exemple : (Prographe associé à $\mathbb{Z}_p$) On considère le système projectif $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \varphi_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$ associé au groupe $\mathbb{Z}_p$. Pour $m > n$, on considère la section r_{nm} de φ_{mn} définie, pour $x \in \{0, \cdots, [p^n/2]\}$, par

$$r_{nm}(x \bmod(p^n)) = x \bmod(p^m)$$
$$r_{nm}(p^n - x \bmod(p^n)) = p^m - x \bmod(p^m)$$

Le système $r = (r_{nm})_n$ est alors une section au sens de la définition 11. Plus précisément, $\varinjlim_r \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ s'identifie au sous-groupe discret de $\mathbb{Z}_p$ engendré par 1 (qui est donc dense et isomorphe à $\mathbb{Z}$). Ce fait, est un cas particulier de la proposition 13 à venir.

Lemme 12.— *Soient $(G_i, \varphi_{ji})_{i \in I}$ un système projectif de groupes et $r = (r_{ij})_i$ un système inductif extrait. Les propriétés suivantes*

i) r est une section,

ii) (C_2) $\forall i \in I$, $\forall x_i, y_i \in G_i$, $\exists i_0 \geq i$, $\forall k \geq i_0$, $r_{i_0 k}\left(r_{ii_0}(x_i) r_{ii_0}(y_i)^{-1}\right) = r_{ik}(x_i) r_{ik}(y_i)^{-1}$,

sont équivalentes.

Preuve : *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Comme $\theta(\varinjlim_r G_i)$ est un sous-groupe de $\varprojlim_\varphi G_i$, pour tout $x, y \in \varinjlim_r G_i$, il existe $z \in \varinjlim_r G_i$ tel que $\theta(x)\theta(y)^{-1} = \theta(z)$. Considérons un indice $i \in I$ et $x_i, y_i \in G_i$, posons $x = \overline{x_i}$ et $y = \overline{y_i}$ et considérons $z \in \varinjlim_r G_i$ tel que $\theta(x)\theta(y)^{-1} = \theta(z)$ de représentant z_{i_0} avec $i_0 \geq i$. On a alors

$$\theta(\overline{z_{i_0}}) = \theta(\overline{x_i})\theta(\overline{y_i})^{-1} \Rightarrow \varphi_{i_0}\left(\theta(\overline{z_{i_0}})\right) = \varphi_{i_0}\left(\theta(\overline{x_i})\theta(\overline{y_i})^{-1}\right) \Rightarrow \theta_{i_0}(\overline{z_{i_0}}) = \theta_{i_0}(\overline{x_i})\theta_{i_0}(\overline{y_i})^{-1}$$

ce qui montre, pour finir, que $z_{i_0} = r_{ii_0}(x_i)r_{ii_0}(y_i)^{-1}$. Si $k \geq i_0$ on a, d'une part,

$$\varphi_k(\theta(x)\theta(y)^{-1}) = \varphi_k(\theta(x))\varphi_k(\theta(y))^{-1} = \theta_k(x)\theta_k(y)^{-1} = r_{ik}(x_i)r_{ik}(y_i)^{-1}$$

et d'autre part,

$$\varphi_k(\theta(x)\theta(y)^{-1}) = \varphi_k(\theta(z)) = \theta_k(z) = r_{i_0k}(z_{i_0})$$

ce qui montre bien que $r_{i_0k}\left(r_{ii_0}(x_i)r_{ii_0}(y_i)^{-1}\right) = r_{ik}(x_i)r_{ik}(y_i)^{-1}$.

$ii) \Rightarrow i)$ Il s'agit de montrer que si $x, y \in \varinjlim_r G_i$ alors il existe $z \in \varinjlim_r G_i$ tel que $\theta(x)\theta(y)^{-1} = \theta(z)$. Considérons un indice $i \in I$, $x_i, y_i \in G_i$ tels que $x = \overline{x_i}$ et $y = \overline{y_i}$, un indice $i_0 \geq i$ satisfaisant l'hypothèse ii), posons $z_{i_0} = r_{ii_0}(x_i)r_{ii_0}(y_i)^{-1}$ et considérons $z = \overline{z_{i_0}}$. Soit $k \in I$ et $l \geq i_0, k$, on a

$$\begin{aligned}
\theta_k(z) &= \varphi_{lk}(r_{i_0l}(z_{i_0})) = \varphi_{lk}(r_{i_0l}(r_{ii_0}(x_i)r_{ii_0}(y_i)^{-1})) \\
&= \varphi_{lk}(r_{il}(x_i)r_{il}(y_i)^{-1}) = \varphi_{lk}(r_{il}(x_i))\varphi_{lk}(r_{il}(y_i))^{-1} \\
&= \theta_k(x)\theta_k(y)^{-1}
\end{aligned}$$

et donc $\theta(z) = \theta(x)\theta(y)^{-1}$.

Remarque : La condition (C_2) implique, en particulier, la condition

$$(C_2^{'})\ \forall i \in I,\ \forall x_i, y_i \in G_i,\ \exists i_0 \geq i,\ \forall k \geq i_0,\ r_{i_0k}\left(r_{ii_0}(x_i)r_{ii_0}(y_i)\right) = r_{ik}(x_i)r_{ik}(y_i)$$

On peut, par ailleurs, caractériser (au moins dans le cas dénombrable) l'existence d'une section en termes de complétion profinie :

Proposition 13.— *Soient $(G_i, \varphi_{ji})_{i \in I}$ un système projectif de groupes finis et $G = \varprojlim_\varphi G_i$. Si r désigne une section de $(G_i, \varphi_{ji})_{i \in I}$ alors l'image H de $\varinjlim_r G_i$ dans G est un sous-groupe dense de G. En particulier, G s'identifie à la complétion profinie de H relativement à la base de filtre de sous-groupes distingués d'indices finis $\{H \cap ker(G \to G_i)\}_{i \in I}$.*

Réciproquement, soient H un groupe dénombrable et $H_0 \supset H_1 \supset \cdots$ une suite décroissante de sous-groupes distingués d'indices finis et d'intersection réduite au neutre. Posons, pour tout entier n, $G_n = H/H_n$ et considérons $G = \varprojlim G_n$. Il existe alors une section r du système projectif $(G_n, \varphi_{mn})_n$ telle que $H \simeq \varinjlim_r G_n$, plus précisément, si l'on considère les injections canoniques

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, hook, "\pi"] \arrow[rr, dashed, bend right, "\omega"'] & G & \varinjlim_r G_n \arrow[l, hook', "\theta"']
\end{tikzcd}$$

alors il existe une bijection $\omega : H \longrightarrow \varinjlim_r G_n$ telle que $\pi = \theta \circ \omega$ (en d'autres termes, on peut reconstruire par une certaine section, une copie de H dans sa complétion profinie).

Preuve : On garde les notations de la preuve de la proposition 10. Il est clair que les applications θ_k sont surjective et comme $\theta_k = \varphi_k \circ \theta$ on en déduit que $\varphi_k(\theta(H)) = G_k$ pour tout k, ce qui montre que $\theta(H)$ est un sous-groupe dense de G. Si maintenant, pour $i \in I$ fixé, on note $H_i = H \cap ker(\varphi_i)$, on a alors $G_i = H/H_i$ et donc $G = \varprojlim H/H_i$ est bien la complétion profinie du groupe H relativement à la base de filtre $\{H_i\}_i$.

Réciproquement, si l'on suppose que H est dénombrable, on peut donc énumérer H en une suite $h_1, h_2, \cdots$. Pour tout entier $k \geq 1$, on pose $\Delta_k = \{h_1, \cdots, h_k\}$. On prend les notations suivantes

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim_r G_n \arrow[d, "\theta"] \arrow[dr, two heads, "\theta_n"] & \\
G \arrow[r, two heads, "\varphi_n"] & G_n \\
H \arrow[u, "\pi"] \arrow[ur, "\pi_n"'] &
\end{tikzcd}$$

Exactement comme dans la preuve du lemme 6 et du théorème 7 (cas des sommets), on construit à partir de la suite de parties $(\Delta_k)_k$ un système inductif extrait $r = (r_{nm})_{n\leq m}$, en particulier, on dispose de deux suites $(i_k)_k$ et $(n_k)_k$ strictement croissantes telles que, par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\Delta_{i_{k+1}} \arrow[r, hook, "\pi_{n_{k+1}}"] \arrow[dr, "\pi_{n_k}"] & G_{n_{k+1}} \arrow[d, two heads] \\
\Delta_{i_k} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "\pi_{n_k}"'] & G_{n_k} \arrow[u, bend right, "r_{n_k n_{k+1}}"']
\end{tikzcd}$$

la partie Δ_{i_k} se relève identiquement par $r_{n_k n_{k+1}}$ dans $\Delta_{i_{k+1}}$. Définissons l'application $\omega : H \longrightarrow \varinjlim_r G_n$ de la manière suivante : si $h \in H$ il existe un indice i_k tel que $h \in \Delta_{i_k}$ et on pose

$$\omega(h) = \overline{\pi_{n_k}(h)}$$

La manière dont on a construit r assure que la définition de $\omega(h)$ ne dépend pas du choix de l'indice i_k et donc que ω est bien définie. L'application ω est surjective : soit $x = \overline{x_l} \in \varinjlim_r G_n$, et un indice k tel que $n_k \geq l$. L'ensemble $\Delta_{i_{k+1}}$ se surjecte sur G_l, on a alors $x = \overline{r_{ln_{k+1}}(x_l)}$ et comme G_l se relève injectivement par $r_{ln_{k+1}}$ dans $\pi_{n_{k+1}}(\Delta_{i_{k+1}})$, il existe (un unique) $h \in \Delta_{i_{k+1}}$ tel que $\pi_{n_{k+1}}(h) = r_{ln_{k+1}}(x_l)$. On a donc $\omega(h) = x$.

Montrons maintenant que $\theta \circ \omega = \pi$. Remarquons pour commencer que si $x \in \varinjlim_r G_n$ et que $x = \overline{x_n}$ pour un certain entier n, alors on a

$$\theta(x) = (\varphi_{n,1}(x_n), \cdots, \varphi_{n,n-1}(x_n), x_n, r_{n,n+1}(x_n), \cdots) \in \varprojlim G_n \subset \prod G_n$$

Prenons maintenant $h \in H$ et considérons un indice i_k tel que $h \in \Delta_{i_k}$, on a alors

$$\begin{array}{rcl}
\theta \circ \omega(h) & = & \theta(\overline{\pi_{n_k}(h)}) \\
 & = & (\varphi_{n_k,1}(\pi_{n_k}(h)), \cdots, \varphi_{n_k,n_k-1}(\pi_{n_k}(h)), \pi_{n_k}(h), r_{n_k,n_k+1}(\pi_{n_k}(h)), \cdots) \\
 & = & (\pi_1(h), \cdots, \pi_{n_k-1}(h), \pi_{n_k}(h), r_{n_k,n_k+1}(\pi_{n_k}(h)), \cdots)
\end{array}$$

Maintenant, par construction, pour tout $x \in \Delta_{i_k}$ et tout $l \geq n_k$ on a $r_{n_k,l}(\pi_{n_k}(x)) = \pi_l(x)$ et donc

$$\theta \circ \omega(h) = (\pi_1(h), \cdots, \pi_{n_k-1}(h), \pi_{n_k}(h), \pi_{n_k+1}(h), \cdots) = \pi(h)$$

L'application π étant injective, ω l'est aussi ce qui prouve finalement qu'elle est bien bijective.

Remarque 14.— Si $r = (r_{ij})_{i\leq j}$ est une section du système projectif de groupes finis $(G_i, \varphi_{ji})_{i\in I}$ alors il existe un élément $e \in \varinjlim_r G_i$ tel que $\theta(e)$ soit le neutre de $\varprojlim G_i$. Si $x_i \in G_i$ est un représentant de e, on a $x_i = \theta_i(e) = \varphi_i \circ \theta(e) = e_i$ et par suite, si $j \geq i$ on a $e_j = \theta_j(e) = r_{ij}(e_i)$: la section r envoie le neutre sur le neutre à partir d'un certain indice.

Réciproquement, si $x_i \in G_i$ est tel qu'il existe $i_0 \geq i$ tel que pour tout $j \geq i_0$, $r_{ij}(x_i) = e_j$ alors $\overline{x_i} = e$ et, par suite, $x_i = e_i$.

2.2.— Action complètement compatible.

Définition 15.— *Soit $\mathcal{P} = (\Gamma_i, \theta_{ji})_{i\in I}$ un prographe et G un groupe profini. On dit que G agît sur $\mathcal{P}$ si*

- *Il existe une base de filtre, $(U_i)_{i\in I}$, de sous-groupes ouverts distingués de G, indexée par $(I, \leq)$ ($U_j \subset U_i \iff i \leq j$) tel que $\bigcap_i U_i = \{e\}$.*
- *Pour tout $i \in I$, le groupe quotient $G_i = G/U_i$ agît sur le graphe Γ_i.*
- *Les actions des groupes G_i sur les graphes Γ_i sont compatibles pour l'ordre : pour tout $i \leq j$, $g \in G_j$ et $x \in \Gamma_j$, on a $\theta_{ji}(x^g) = (\theta_{ji}(x))^{\varphi_{ji}(g)}$ où $\varphi_{ji} : G_j \longrightarrow G_i$ est la surjection canonique induite par l'inclusion $U_j \subset U_i$.*

Si l'on dispose d'une section graphiquement cohérente s de $(\Gamma_i, \theta_{ji})_{i\in I}$ et d'une section r du système projectif $(G/U_i, \varphi_{ji})_{i\in I}$ on dira que l'action de G sur $\mathcal{P}$ est complètement compatible à s et r si l'on a, en outre, la propriété suivante :

$$(C_3)\ \forall i \in I,\ \forall (g_i, a_i) \in G_i \times \Gamma_i,\ \exists i_0 \geq i,\ \forall k \geq i_0,\ s_{i_0k}\left(s_{ii_0}(a_i)^{r_{ii_0}(g_i)}\right) = s_{ik}(a_i)^{r_{ik}(g_i)}$$

Exemple : (Prographe associé à $\mathbb{Z}_p$) Le groupe profini $\mathbb{Z}_p$ agît sur le prographe $(\gamma_n, \theta_{mn})_n$ de la manière suivante : si $g \bmod(p^n) \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ et $x \bmod(p^n) \in \mathscr{S}(\gamma_n)$, alors

$$\begin{array}{lcl} (x \bmod(p^n))^{g\ mod(p^n)} & = & x + g \bmod(p^n) \\ [x \bmod(p^n), x+1 \bmod(p^n)]^{g\ mod(p^n)} & = & [x+g \bmod(p^n), x+g+1 \bmod(p^n)] \end{array}$$

On constate que cette action est complètement compatible aux sections r et s.

On reprend les notations de la définition précédente et l'on suppose que l'action de G sur $\mathcal{P}$ est complètement compatible à s et r. Considérons un indice $i \in I$ et $(a_i, g_i) \in \Gamma_i \times G_i$. Soient i_0, i_1 deux indices satisfaisant à la condition (C_3) et un indice $k \geq i_0, i_1$. On a

$$s_{i_0k}\left(s_{ii_0}(a_i)^{r_{ii_0}(g_i)}\right) = s_{ik}(a_i)^{r_{ik}(g_i)} = s_{i_1k}\left(s_{ii_1}(a_i)^{r_{ii_1}(g_i)}\right)$$

et donc

$$\overline{s_{ii_0}(a_i)^{r_{ii_0}(g_i)}} = \overline{s_{ii_1}(a_i)^{r_{ii_1}(g_i)}}$$

Considérons $(a,g) \in \varinjlim_s \Gamma_i \times \varinjlim_r G_i$ et deux indices $i, j \in I$ tel qu'il existe $(a_i, g_i) \in \Gamma_i \times G_i$ et $(a_j, g_j) \in \Gamma_j \times G_j$ vérifiant $g = \overline{g_i} = \overline{g_j}$ et $a = \overline{a_i} = \overline{a_j}$ (de tels indices existent puisque I est filtrant à droite). Soit i_0 (resp. j_0) un indice satisfaisant la propriété (C_3) pour le couple (g_i, a_i) (resp. (g_j, a_j)) et $k \geq i_0, j_0$ tel que $s_{ik}(a_i) = s_{jk}(a_j)$ et $r_{ik}(g_i) = r_{jk}(g_j)$. Comme k satisfait (C_3) simultanément pour (g_i, a_i) et (g_j, a_j), on a d'après ce qui précède

$$\overline{s_{ii_0}(a_i)^{r_{ii_0}(g_i)}} = \overline{s_{ik}(a_i)^{r_{ik}(g_i)}} = \overline{s_{jj_0}(a_j)^{r_{jj_0}(g_j)}}$$

Ainsi, si on prend $(a,g) \in \varinjlim_s \Gamma_i \times \varinjlim_r G_i$, un indice $i \in I$ tel qu'il existe $(a_i, g_i) \in \Gamma_i \times G_i$ vérifiant $g = \overline{g_i}$ et $a = \overline{a_i}$, et un indice i_0 satisfaisant la propriété (C_3) pour le couple (g_i, a_i), alors la classe de $s_{ii_0}(a_i)^{r_{ii_0}(g_i)}$ ne dépend que de a et g. On peut donc poser

$$a^g = \overline{s_{ii_0}(a_i)^{r_{ii_0}(g_i)}}$$

Proposition 16.— *L'application $(a,g) \longmapsto a^g$ définie précédemment est une action du groupe $\varinjlim_r G_i$ sur le graphe $\varinjlim_s \Gamma_i$.*

Preuve : • Montrons pour commencer que l'application en question est compatible avec la structure de graphe. Considérons à cet effet une arête $a \in \mathscr{A}(\varinjlim_s \Gamma_i)$, un élément $g \in \varinjlim_r G_i$, un indice $i \in I$ et $a_i \in \mathscr{A}(\Gamma_i)$, $g_i \in G_i$ tels que $\overline{a_i} = a$, $\overline{g_i} = g$.

Soit $i_0 \geq i$ un indice satisfaisant à la condition $(C_1)_{(1)}$ pour l'arête a_i et à la condition $(C_3)_{(1)}$ pour le couple (g_i, a_i) . On a alors

$$o(a^g) = o\left(\overline{s_{ii_0}(a_i)^{r_{ii_0}(g_i)}}\right)$$

Soit maintenant un indice $i_1 \geq i_0$ un indice satisfaisant à la condition $(C_1)_{(2)}$ pour l'arête $s_{ii_0}(a_i)^{r_{ii_0}(g_i)}$ et à la condition $(C_3)_{(2)}$ pour le couple $(r_{ii_0}(g_i), o(s_{ii_0}(a_i)))$. On a alors

$$\begin{array}{rcl}
o(a^g) & = & o\left(\overline{s_{ii_0}(a_i)^{r_{ii_0}(g_i)}}\right) \text{ d'après } (C_3)_{(1)} \\
& = & o\left(\overline{s_{i_0i_1}\left(s_{ii_0}(a_i)^{r_{ii_0}(g_i)}\right)}\right) \\
& = & \overline{o\left(s_{i_0i_1}\left(s_{ii_0}(a_i)^{r_{ii_0}(g_i)}\right)\right)} \text{ d'après } (C_1)_{(2)} \\
& = & \overline{o\left(s_{ii_1}(a_i)^{r_{ii_1}(g_i)}\right)} \text{ d'après } (C_3)_{(1)} \\
& = & \overline{o(s_{ii_1}(a_i))^{r_{ii_1}(g_i)}} \text{ puisque } G_{i_1} \text{ agit si } \Gamma_{i_1} \\
& = & \overline{s_{i_0i_1}\left(o(s_{ii_0}(a_i))\right)^{r_{i_0i_1}(r_{ii_0}(g_i))}} \text{ d'après } (C_1)_{(1)} \\
& = & o(a)^g \text{ d'après } (C_3)_{(2)}
\end{array}$$

On montre de la même manière que $t(a^g) = t(a)^g$.

• Montrons maintenant que pour tout $a \in \varinjlim_s \Gamma_i$, on a $a^e = a$. D'après la remarque 14 le neutre e est représenté par le neutre $e_i \in G_i$ pour un certain indice i. Choisissons cet indice pour que a ait un représentant $a_i \in \Gamma_i$ et considérons un indice i_0 satisfaisant la condition (C_3) pour (e_i, a_i). On a alors

$$a^e = \overline{s_{ii_0}(a_i)^{r_{ii_0}(e_i)}} = \overline{s_{ii_0}(a_i)^{e_{i_0}}} = \overline{s_{ii_0}(a_i)} = a$$

• Montrons finalement que pour tout $a \in \varinjlim_s \Gamma_i$ et tout $g, h \in \varinjlim_r G_i$, on a $(a^h)^g = a^{gh}$ (cette dernière propriété assurera alors avec les deux précédentes que nous sommes bien en présence d'une action). Soient donc $a \in \varinjlim_s \Gamma_i$, $g, h \in \varinjlim_r G_i$. Considérons un indice $i \in I$ et $a_i \in \Gamma_i$, $g_i, h_i, \omega_i \in G_i$ tels que $a = \overline{a_i}$, $g = \overline{g_i}$, $h = \overline{h_i}$ et $gh = \overline{\omega_i}$. On choisit cet indice i de sorte que la condition (C_2) soit directement vérifiée pour g_i et h_i (autrement dit, pour tout $k \geq i$ on a $r_{ik}(g_ih_i) = r_{ik}(g_i)r_{ik}(h_i)$). La loi de groupe considérée sur $\varinjlim_r G_i$ est donnée par l'application θ, de sorte que $\theta(gh) = \theta(g)\theta(h)$, on a donc

$$\omega_i = \theta_i(gh) = \varphi_i \circ \theta(gh) = \varphi_i(\theta(g)\theta(h)) = \varphi_i(\theta(g))\varphi_i(\theta(h)) = \theta_i(g)\theta_i(h) = g_ih_i$$

Considérons un indice $i_0 \geq i$ satisfaisant à la condition (C_3) pour (h_i, a_i), on a alors

$$a^h = \overline{s_{ii_0}(a_i)^{r_{ii_0}(h_i)}}$$

Soit un indice $i_1 \geq i_0$ satisfaisant à la condition (C_3) pour les deux couples (g_ih_i, a_i) et $(r_{ii_0}(g_i), s_{ii_0}(a_i)^{r_{ii_0}(h_i)})$. On a alors

$$\begin{array}{rcl}
(a^h)^g & = & \overline{s_{i_0i_1}\left(s_{ii_0}(a_i)^{r_{ii_0}(h_i)}\right)^{r_{i_0i_1}(r_{ii_0}(g_i))}} = \overline{\left(s_{ii_1}(a_i)^{r_{ii_1}(h_i)}\right)^{r_{ii_1}(g_i)}} \\
& = & \overline{s_{ii_1}(a_i)^{r_{ii_1}(g_i)r_{ii_1}(h_i)}} = \overline{s_{ii_1}(a_i)^{r_{ii_1}(g_ih_i)}} = a^{gh}
\end{array}$$

Définition 17.— (Action profinie) *On dira qu'un groupe profini G agit profiniement sur un prographe $\mathcal{P}$ si G agit sur $\mathcal{P}$ de manière complètement compatible à deux sections s et r. On dira que G agit prolibrement sur $\mathcal{P}$ si de plus pour tout $i \in I$ l'action de G_i sur Γ_i est libre.*

Si G agit prolibrement sur $\mathcal{P}$ (pour deux sections s et r), alors le groupe $\varinjlim_r G_i$ agit librement sur le graphe $\varinjlim_s \Gamma_i$. En effet, soient $(a, g) \in \varinjlim_s \Gamma_i \times \varinjlim_r G_i$ tel que $a^g = a$, un indice $i \in I$ tel qu'il existe $(a_i, g_i) \in \Gamma_i \times G_i$ vérifiant $g = \overline{g_i}$ et $a = \overline{a_i}$, et un indice i_0 satisfaisant la propriété (C_3) pour le couple (g_i, a_i). On a donc $a^g = \overline{s_{ii_0}(a_i)^{r_{ii_0}(g_i)}} = \overline{a_i} = \overline{s_{ii_0}(a_i)}$, et par suite, il existe $i_1 \geq i_0$ tel que

$$s_{ii_1}(a_i)^{r_{ii_1}(g_i)} = s_{i_0 i_1}(s_{ii_0}(a_i)^{r_{ii_0}(g_i)}) = s_{i_0 i_1}(s_{ii_0}(a_i)) = s_{ii_1}(a_i)$$

Ainsi, pour tout $k \geq i_1$, on a $s_{ik}(a_i)^{r_{ik}(g_i)} = s_{ik}(a_i)$, ce qui implique, puisque G_k agit librement sur Γ_k par hypothèse, que $r_{ik}(g_i) = e_k$ pour tout $k \geq i_1$ et donc que $\overline{g_i} = e$.

Théorème Principal.— *Soit Ω un groupe profini de rang dénombrable. Les propriétés suivantes*

i) Ω est presque libre,

ii) Ω agit prolibrement sur un proarbre,

sont équivalentes.

Preuve : *ii)* $\Rightarrow$ *i)* Posons $\Omega = \varprojlim_i G_i$ qui agit prolibrement sur un proarbre $(\Gamma_i, \theta_{ji})_i$, relativement à des sections r et s. Le sous-groupe $\varinjlim_r G_i$, qui est un sous-groupe dense de Ω, agit librement sur le graphe $\varinjlim_s \Gamma_i$ qui est un arbre par hypothèse, il est donc libre d'après [S]. Le groupe profini possède donc un sous-groupe abstrait libre qui est dense.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Comme Ω est de rang dénombrable, il existe une filtration $U_0 \supset U_1 \supset \cdots$ de sous-groupes ouverts distingués de Ω. Si l'on considère les groupes quotients $G_n = \Omega/U_n$, alors $G = \varprojlim_n G_n$. Soit F un sous-groupe libre et dense de Ω, on considère $\Gamma = \Gamma(F, S)$ où S est une base de F et $\mathcal{P} = (\Gamma_n)_n$, le prographe de F relativement à la base S et à la base de filtre $\{F \cap U_n\}_n$.

On considère une section graphiquement cohérente s de $\mathcal{P}$ comme construite dans la preuve du théorème 7. On rappelle que l'on dispose d'une suite croissante $(\Delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de parties de Γ telle que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Delta_k = \Gamma$ et d'une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_k$ tels que l'on ait

$$\begin{tikzcd}
\Delta_{k+1} \arrow[r, hook, "\theta_{n_{k+1}}"] \arrow[dr, "\theta_{n_k}"] & \Gamma_{n_{k+1}} \arrow[d, two heads, "\theta_{n_{k+1} n_k}"] \\
\Delta_k \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "\theta_{n_k}"'] & \Gamma_{n_k}
\end{tikzcd}$$

et que s s'obtient moralement en relevant identiquement les éléments de $\theta_{n_k}(\Delta_k)$ dans $\theta_{n_{k+1}}(\Delta_{k+1})$. On considère alors la section r en prenant la restriction de la section s aux ensembles $\mathscr{S}(\Gamma_n) = G_n$. La preuve de la proposition 13 montre bien que r est une section du système projectif (G_n). Ainsi, pour ce choix de s et r, on pourra pour un élément $g_n \in G_n$ écrire $s_{nm}(g_n) = r_{nm}(g_n)$ suivant que l'on regard g_n comme sommet d'un graphe ou comme élément d'un groupe.

On sait que $\mathcal{P}$ muni de s est un proarbre (proposition 9), il reste à montrer que Ω agit prolibrement sur ce proarbre. En premier lieu, puisque F agit librement sur l'arbre $\Gamma = \Gamma(F, S)$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_n = F/(F \cap U_n)$ agit librement sur le graphe quotient $\Gamma_n = \Gamma/(F \cap U_n)$ et que ces actions sont cohérentes au sens de la définition 15. Tout revient donc à montrer que pour ces actions, la condition (C_3) de la définition 15 est bien vérifiée.

La condition (C_2) du lemme 12, assure que pour, $(g_n, a_n) \in G_n \times \mathscr{S}(\Gamma_n)$, il existe un rang $n_0 \geq n$ tel que pour tout $m \geq n_0$,

$$s_{n_0 m}\left(s_{nn_0}(a_n)^{r_{nn_0}(g_n)}\right) = s_{n_0 m}\left(r_{nn_0}(g_n) s_{nn_0}(a_n)\right)$$

ici, $r_{nn_0}(g_n)s_{nn_0}(a_n)$ désigne le produit dans G_{n_0} de ces deux éléments, produit qui est alors vu comme sommet du graphe Γ_{n_0}. L'égalité est bien vraie, puisque l'action de G_{n_0} sur $\mathscr{S}(\Gamma_{n_0})$ est par définition la multiplication à gauche. Ainsi,

$$\begin{aligned} s_{n_0 m}\left(s_{nn_0}(a_n)^{r_{nn_0}(g_n)}\right) &= s_{n_0 m}\left(r_{nn_0}(g_n)s_{nn_0}(a_n)\right) = r_{n_0 m}\left(r_{nn_0}(g_n)r_{nn_0}(a_n)\right) \\ &= r_{nm}(g_n)r_{nm}(a_n) = r_{nm}(g_n)s_{nm}(a_n) \\ &= s_{nm}(a_n)^{r_{nm}(g_n)} \end{aligned}$$

et donc la condition (C_3) est vérifiée pour les sommets.

Soit maintenant $a_n = a(\omega_n, s) \in \mathscr{A}(\Gamma_n)$ (voir notations de l'introduction) et $g_n \in G_n$. Il existe un indice $n_k \geq n$ tel que, si l'on pose $s_{nn_k}(a_n) = a(\omega_{n_k}, s)$ et $g_{n_k} = r_{nn_k}(g_n) = s_{nn_k}(g_n)$, alors on a ω_{n_k}, $\omega_{n_k}s$, g_{n_k}, $g_{n_k}\omega_{n_k}$, $g_{n_k}\omega_{n_k}s \in \theta_{n_k}(\Delta_k)$. Pour tout $m \geq n_k$ on a alors

$$\begin{aligned} s_{n_k m}\left(s_{nn_k}(a_n)^{r_{nn_k}(g_n)}\right) &= s_{n_k m}\left(a(\omega_{n_k}, s)^{g_{n_k}}\right) = s_{n_k m}\left(a(g_{n_k}\omega_{n_k}, s)\right) \\ &= a(s_{n_k m}(g_{n_k}\omega_{n_k}), s) = a(s_{n_k m}(g_{n_k})s_{n_k m}(\omega_{n_k}), s) \\ &= a(s_{nm}(g_n)s_{nm}(\omega_n), s) = a(s_{nm}(\omega_n), s)^{r_{nm}(g_n)} \\ &= s_{nm}(a(\omega_n, s))^{r_{nm}(g_n)} = s_{nm}(a_n)^{r_{nm}(g_n)} \end{aligned}$$

et donc la condition (C_3) est vérifiée pour les arêtes.

Bibliographie

[FJ] Michael Fried et Moshe Jarden, *Fields arithmetic*, Third edition. Revised by Jarden. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag (2008).

[RZ] Luis Ribes et Pavel Zalesskii, *Profinite groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete , Springer-Verlag (2000).

[S] Jean-Pierre Serre, *Arbres, amalgames,* SL_2, Astérisque (1978).

[W] Wilson, *Profinite groups*, London Mathematical Society Monographs. New Series, 19. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, (1998).

Bruno Deschamps, Ivan Suarez Atias
Département de Mathématiques — Université du Maine
Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans cedex 9 - France
E-mail : Bruno.Deschamps@univ-lemans.fr, Ivan.Suarez_Atias@univ-lemans.fr