Mémoire de synthèse en vue de l'obtention de

l'Habilitation à Diriger des Recherches,

spécialité *Mathématiques appliquées et applications des mathématiques*, intitulé

Contributions à la statistique des processus fractionnaires

présenté et soutenu publiquement le 27 mai 2014 par

Alexandre Brouste

devant le jury composé de

Alain Bensoussan	Universités du Texas à Dallas & City de Hong-Kong Académie des Sciences (*Président*)
Serge Cohen	Université Paul Sabatier de Toulouse (*Examinateur*)
Marina Kleptsyna	Université du Maine (*Examinateur*)
Yury Kutoyants	Université du Maine (*Examinateur*)
Jacques Lévy-Véhel	I.N.R.I.A. (*Rapporteur*)
Anne Philippe	Université de Nantes (*Examinateur*)
Mark Podolskij	Université de Heidelberg (*Rapporteur*)
Ciprian Tudor	Université Lille 1 (*Rapporteur*)

U.F.R. Sciences et Techniques – Université du Maine

Γένοι᾽ οἷος ἐσσί μαθών.
Odes Pythiques, Pindare.

Au terme de ce parcours en vue de l'obtention de l'habilitation à diriger des recherches, mes remerciements vont, tout d'abord, à Alain Bensoussan, Professeur à l'Université du Texas à Dallas et à l'Université City de Hong-Kong, membre de l'Académie des Sciences, pour m'avoir fait l'honneur de présider la soutenance de ce mémoire.

Je veux remercier Jacques Lévy-Véhel, Directeur de recherche à l' I.N.R.I.A., Mark Podolskij, Professeur à l'Université de Heidelberg et Ciprian Tudor, Professeur à l'Université de Lille 1, d'avoir accepté de rapporter ce mémoire. Leurs commentaires précieux me permettront de mener à bien la suite de ces recherches. Qu'ils sachent combien ma reconnaissance est grande.

Je tiens également à exprimer mes remerciements à Serge Cohen, Professeur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse, et Anne Philippe, Professeur à l'Université de Nantes, pour avoir examiner ce texte. Depuis le D.E.A., les conseils avisés de M. Cohen m'ont toujours été très utiles. J'espère que les relations fructueuses avec Mme Philippe perdureront.

Je ne peux mesurer ce que j'ai appris aux côtés de Marina Kleptsyna et de Yury Kutoyants, Professeurs à l'Université du Maine, durant ces sept années au Mans. Ils ont toujours fait preuve à mon égard de bienveillance et je les prie en retour d'accepter, l'un et l'autre, l'expression de ma profonde (et filiale) gratitude.

Et puisqu'un mémoire ne peut résumer qu'une certaine partie du travail du chercheur, que certaines réflexions, certaines collaborations, le nom de certaines personnes n'y figurent pas, je dédie ce mémoire à tous ceux qui m'ont permis de réaliser, jusqu'ici, une partie de ce que j'ai entrepris il y a une quinzaine d'années, et ainsi, de « devenir ce que je suis en apprenant » : mes directeurs et mon garant, mes professeurs, mes collègues, mes amis, ma famille, ma femme et mon fils.

Table des matières

Introduction **1**

I Équations différentielles stochastiques fractionnaires **7**

1 Présentation de la procédure d'estimation **12**
1.1 Estimation de H et de σ par variations quadratiques généralisées . . 12
1.2 Estimation de λ par une méthode de moments 15

2 Simulation avec la librairie de fonctions `yuima` **16**
2.1 Simulation de bruits gaussiens fractionnaires 17
2.2 Simulation des processus de diffusion fractionnaires 17
2.3 Estimation des paramètres 18

3 Estimation du drift dans des processus autorégressifs gaussiens **20**

II Processus fractionnaires en observations partielles **23**

4 Observations partielles en temps continu **23**
4.1 Propriétés asymptotiques de l'EMV dans le cas fractionnaire 28
4.1.1 Transformation du modèle d'observations 28
4.1.2 Calculs de transformées de Laplace 29
4.2 Perspectives 33

5 Observations partielles en temps discret **35**
5.1 Notations et définitions 36
5.2 Transformation des observations 37
5.3 Filtrage optimal 38
5.4 Simulations et application à l'hybridation Inertie–GPS 39

III Champs gaussiens fractionnaires **43**

6 Simulation de champs gaussiens fractionnaires **43**
6.1 Champs gaussiens réels sur $\mathbb{R}^d$ 44
6.2 Procédure `fieldsim` 45

6.3 Estimation de la régularité 48
6.4 Adaptation de la procédure à la sphère et à l'hyperboloïde 50

7 Applications en géologie et perspectives **53**

Introduction

Dans ce mémoire de synthèse en vue de l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches, nous présentons nos contributions en statistique des processus fractionnaires. Nos recherches peuvent se diviser en quatre thématiques principales. Nous aborderons la statistique inférentielle des solutions d'équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement brownien fractionnaire directement observées ou partiellement observées (avec des observations continues ou des observations discrètes) dans les deux premières parties, puis l'estimation de la régularité et la simulation des champs gaussiens fractionnaires (et leurs applications) dans une troisième partie. La prévision de la production d'électricité d'une éolienne sera uniquement mentionnée dans cette introduction.

⋆

Les travaux effectués en statistique des processus pour les solutions d'équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement brownien fractionnaire directement observées sur une grille régulière s'inscrivent dans le projet collaboratif *Yuima*.

Les multiples séjours de recherche à l'Université de Tokyo avec Nakahiro Yoshida en novembre 2008, mars 2010 et avril 2014, à l'Université d'Osaka avec Masaaki Fukasawa en mars 2014, à l'Università degli Studi de Milan avec Stefano Iacus en novembre 2009 et décembre 2011 et les invitations de ce dernier à l'Université du Maine (UM) en octobre 2010 et octobre 2013 ont permis d'inclure dans la librairie de fonctions `Yuima` pour le logiciel `R` des méthodes de simulation de ces processus et d'estimation de leurs différents paramètres (notamment les paramètres d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire).

Une partie de ces travaux est développée dans les articles suivants :

[I] A. Brouste and S. Iacus (2012) Parameter estimation for the discretely observed fractional Ornstein-Uhlenbeck process and the Yuima R package, Computational Statistics, 28(4), 1529–1547.

[II] A. Brouste, M. Fukasawa, H. Hino, S.. Iacus, K. Kamatani Y. Koike, H. Masuda, R. Nomura, Y. Shimuzu, M.Uchida and N.Yoshida (2014) *The YUIMA Project : a Computational Framework for Simulation and Inference of Stochastic Differential Equations*, Journal of Statistical Software, 57(4), 1–51.

Certains de ces résultats ont été présentés dans une session (que nous avons organisée avec George Ostrouchov) du *World Statistics Congress* à Hong-Kong en

août 2013 et dans les séminaires des universités partenaires. Cette thématique relève également des activités de recherche de l'*Institut du Risque et de l'Assurance du Mans* et fait l'objet d'un cours sur l'estimation de la volatilité en finance (que nous donnons depuis 2009) en deuxième année du Master *Mathématiques pour l'Assurance, la Finance et la Santé* de l'UM. Un cours de recherche a également été dispensé à l'Università degli Studi de Milan en décembre 2011.

Le Laboratoire Manceau de Mathématiques (LMM) de l'UM et la Fédération de Recherche n° 2962 du CNRS *Mathématiques des Pays de Loire* (FR 2962) ont largement contribué au projet pour les déplacements, les invitations de chercheurs étrangers (dans les contrats MATPYL et GEANPYL) et le financement du premier serveur de calcul du LMM [1] sur lequel la librairie `Yuima` a pu être développée.

Les perspectives de ces travaux sont nombreuses. Il est peut-être possible de déterminer les vitesses et les variances asymptotiques optimales des estimateurs de H et σ d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire (pour différents schémas de convergence) et d'étendre ces résultats d'optimalité à des diffusions fractionnaires homogènes plus générales. Alors, nous pourrons intégrer ces nouveaux outils dans la librairie `Yuima`.

Dans cette partie, nous inclurons l'article

[III] A. Brouste, C. Cai and M. Kleptsyna (2014) *Asymptotic properties of the MLE for the autoregressive process coefficients under stationary Gaussian noise*, Mathematical Methods of Statistics, 23(2).

Ce travail, effectué au LMM, traite des propriétés asymptotiques de l'estimateur de maximum de vraisemblance du paramètre de dérive d'un processus autorégressif dont les bruits sont des suites gaussiennes stationnaires (par exemple, des bruits gaussiens fractionnaires).

⋆

La statistique des processus de diffusion fractionnaires partiellement observés a été développée pour des observations continues depuis 2008 au LMM dans les travaux suivants :

[IV] A. Brouste (2010) *Asymptotic properties of MLE for partially observed fractional diffusion system with dependent noise*, Journal of Statistical Planning and Inference, 140, 551–558.

1. Nous avons encadré l'installation et le fonctionnement du serveur au Mans, financé par le projet régional MOSTAPAD.

[V] A. Brouste and M. Kleptsyna (2010) *Asymptotic properties of MLE for partially observed fractional diffusion system*, Statistical Inference for Stochastic Processes, 13(1), 1–13.

[VI] A. Brouste, M. Kleptsyna and A. Popier (2011) *Fractional diffusion with partial observations*, Communications in Statistics - Theory and Methods, 40(19-20), 3479–3491.

[VII] A. Brouste, M. Kleptsyna and A. Popier (2012) *Design for estimation of drift parameter in fractional diffusion system, Statistical Inference for Stochastic Processes*, 15(2), 133–149.

[VIII] A. Brouste and C. Cai (2013) *Controlled drift estimation in fractional diffusion linear systems*, Stochastics and Dynamics, 13(3).

Ces articles font suite aux deux travaux pionniers publiés en 2002 de Marina Kleptsyna et d'Alain Le Breton sur la consistance de l'estimateur de maximum de vraisemblance pour l'observation continue et directe d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire, d'une part, et sur les équations du filtre de Kalman lorsque ce processus est partiellement observé, d'autre part.

Nos premiers travaux [IV, V] donnent les propriétés de l'estimateur de maximum de vraisemblance dans le cas fractionnaire partiellement observé et prolongent ainsi l'histoire de la statistique des processus de diffusion ergodique initiée par Yury Kutoyants au LMM.

Cette thématique s'est étoffée avec la thèse de Chunhao Cai (thèse qui sera soutenue en mai 2014) que nous avons co-encadrée avec Marina Kleptsyna et les travaux d'estimation du paramètre de dérive dans le modèle partiellement observé (fractionnaire) avec contrôle déterministe [VI, VII, VIII].

Ces résultats ont fait l'objet de nombreuses présentations dans des conférences internationales, notamment au *Stochastic Analysis and Statistical Inference III Workshop* à l'Université de Tokyo en novembre 2008, aux conférences *Statistics for Stochastic Processes : Inference, Limit Theorems, Finance and Data Analysis* à l'Institut Louis Bachelier de Paris en mars 2012 et *DynStoch 2012* à l'Institut Henri Poincaré en juin 2012 et dans les colloques *Statistique Asymptotique des Processus Stochastiques VII, VIII* et *IX* en mars 2009, 2011 et 2013 organisés par le LMM au Mans.

Les cas où les exposants de Hurst sont différents dans le signal et les observations et où le signal est la solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique offrent des perspectives intéressantes actuellement à l'étude.

Cette partie est complétée par la formulation des équations du filtre de Kalman dans le cas d'un processus autoregressif partiellement observé (avec des observations

en temps discret et le même type de corrélation temporelle dans le signal et dans les observations), qui permet d'écrire un algorithme récursif et stable présenté dans l'article suivant :

[IX] A. Brouste and M. Kleptsyna (2012) *Kalman type filter under stationary noises*, Systems and Control Letters, 61, 1229–1234.

L'application de ce travail à l'hybridation Inertie–GPS fait l'objet de financements du Labex AMIES (Agence pour les Mathématiques en Interactions avec l'Entreprise et la Société), du LMM, de la FR 2962 et de la société privée SBG Systems. Deux projets d'élèves ingénieurs de l'ENSIM (École Nationale Supérieure d'Ingénieurs du Mans) en collaboration avec Kosai Raoof ont été encadrés récemment (novembre 2012 – février 2013 et octobre 2013 – février 2014). Un travail de Fin d'Études de l'ESGT (École Supérieure des Géomètres et Topographes) en collaboration avec Jérôme Verdun (février 2014 – juin 2014) prolonge ces recherches.

Certaines méthodes statistiques utiles pour calibrer ce modèle sont déjà développées dans [III].

⋆

La simulation des champs fractionnaires gaussiens et l'estimation de paramètres pour des applications en géologie sont des travaux développés dans les articles suivants :

[X] A. Brouste, F. Renard, J.-P. Gratier and J. Schmittbuhl (2007) Variety of stylolites morphologies and statistical characterization of the amount of heterogeneities in the rock, Journal of Structural Geology, 29, 422–434.

[XI] A. Brouste, S. Lambert-Lacroix and J. Istas (2007) On fractional Gaussian random fields simulations, Journal of Statistical Software, 23(1), 1–23.

[XII] T. Candela, F. Renard, M. Bouchon, A. Brouste, D. Marsan, J. Schmittbuhl and C. Voisin (2009) Characterization of Fault Roughness at Various Scales : Implications of Three-Dimensional High Resolution Topography Measurements, Pure and Applied Geophysics, 166(10-11), 1817–1851.

[XIII] A. Brouste, S. Lambert-Lacroix and J. Istas (2010) On simulation of manifold indexed fractional Gaussian fields, Journal of Statistical Software, 36(4), 1–14.

Certains de ces résultats et des extensions de [X] ont été exposés à la conférence *Américan Geophysical Union* en 2010. Les algorithmes de simulation des champs fractionnaires gaussiens et d'estimation de la régularité [XI, XIII] font l'objet d'une librairie de fonctions, nommée `FieldSim`, pour le logiciel `R`, développée avec Jacques Istas et Sophie Lambert-Lacroix.

L'analyse des failles de fracture [XII], la simulation des champs à autosimilarité matricielle développées par Hermine Biermé, Mark Meerschaert et Hans-Peter Scheffler ainsi que l'estimation statistique des paramètres d'autosimilarité, pour appréhender la régularité de ces champs, sont des perspectives envisagées.

À l'avenir, différents estimateurs de la régularité (inspirés de travaux existants ou de nouveaux travaux) pour divers champs gaussiens, devraient intégrer une nouvelle version de `FieldSim`, qui comprendra également la simulation de ponts gaussiens fractionnaires.

⋆

Une dernière partie de nos recherches, que nous ne développerons pas dans cette synthèse pour conserver l'unité de ce document, concerne la prévision de la production annuelle d'électricité d'une éolienne et regroupe nos contributions récentes :

[XIV] A. Bensoussan, P. Bertrand and A. Brouste (2012) *Forecasting the energy produced by a windmill on a yearly basis*, Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, 26(8), 1109–1122.

[XV] A. Bensoussan, P. Bertrand, A. Brouste, N. Haouas, M. Fhima and D. Koulibaly (2014) *Confidence intervals for annual wind power production*, ESAIM Proceedings, 44, 150–158.

[XVI*] A. Bensoussan, P. Bertrand, A. Brouste and N. Haouas (2013) *Impact of Seasonality on Forecasting the Energy produced by a Windmill*, soumis à publication.

[XVII] A. Bensoussan, P. Bertrand and A. Brouste (2014) *A generalized linear model approach to seasonal aspects of wind speed modeling*, Journal of Applied Statistics, 41(8), 1694-1707.

Ces premiers résultats, obtenus dans le cadre d'un contrat de recherche avec Électricité de France – Énergies Nouvelles, visent à améliorer les outils statistiques du Bureau d'Études pour le choix du site d'installation d'une ferme éolienne. Les modèles stochastiques de la production annuelle d'électricité éolienne sont présentés avec corrélation et/ou saisonnalité dans [XIV, XV, XVI] et précisent les modèles déjà utilisés.

Ces travaux ont été présentés lors des séjours de recherche avec Alain Bensoussan dans les universités de Hong-Kong : Polytechnic University (mai 2011 et mai 2012) et City University (avril 2013 et janvier 2014).

Une méthode statistique d'estimation (basée sur les Generalized Linear Models) du paramètre saisonnier d'échelle de la loi de Weibull des séries de vitesses de vents au niveau de la turbine est présentée dans [XVII]. Des perspectives de filtrage dans des cas corrélés non gaussiens (loi de Weibull) sont envisagées.

Première partie

Équations différentielles stochastiques fractionnaires

L'estimation paramétrique dans les processus de diffusion a été largement étudiée ces dernières années (pour un résumé sans preuve, voir [64]). Pour $T > 0$ et Θ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, notons $Y^T = (Y_t, 0 \leq t \leq T)$ la solution [2] de l'équation différentielle stochastique

$$Y_t = y_0 + \int_0^t V_0(Y_s, \vartheta)ds + \int_0^t V_1(Y_s, \vartheta)dW_s, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{1}$$

où $(W_t, 0 \leq t \leq T)$ est un processus de Wiener, V_0 et V_1 sont des fonctions connues et $\vartheta \in \Theta$ est le paramètre inconnu.

Quand la trajectoire $Y^T = (Y_t, 0 \leq t \leq T)$ est observée, la théorie de l'estimation paramétrique a été établie principalement par Y. Kutoyants (voir [79] et les nombreux articles de cet auteur). Les mesures des solutions de (1) sont singulières si les coefficients de diffusion $c_t(\vartheta) = V_1(Y_t, \vartheta)^2$ diffèrent pour des valeurs distinctes de ϑ ; il n'y a donc pas, dans ce cas là, d'erreur d'estimation [3]. Par contre, si le coefficient de diffusion ne dépend pas de ϑ, les mesures des processus sont équivalentes et des résultats asymptotiques de différents estimateurs du paramètre ϑ dans le coefficient de dérive lorsque $T \longrightarrow \infty$ sont obtenus avec des conditions d'homogénéité et d'ergodicité du processus de diffusion.

Pour estimer ϑ, nous ne disposons en pratique que des observations d'une trajectoire de ce processus sur une grille temporelle discrète

$$0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_n^n, \quad n \geq 1.$$

Pour plus de clarté, nous ne considérons, dans la suite, que les grilles déterministes et régulières pour lesquelles le pas $\Delta_n = t_1^n - t_0^n = t_2^n - t_1^n = \ldots = t_n^n - t_{n-1}^n$. On note classiquement l'échantillon d'observation

$$X^{(n)} = (X_1, \ldots, X_n) \quad \text{où} \quad X_k = Y_{t_k^n}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

2. lorsqu'elle existe, faible ou forte, voir [70].

3. Il s'agit, en théorie, de calculer les variations quadratiques du processus, qui convergent vers $\int_0^T c_t(\vartheta)dt$ et d'en déduire la vraie valeur du paramètre ϑ.

Pour tout $\vartheta \in \Theta$, la solution $(Y_t,\, 0 \leq t \leq T)$ de l'équation (1) est un processus de Markov homogène et on note $p_\delta^\vartheta(x,\cdot)$ ses densités de transition, *i.e.* les densités de $Y_{t+\delta}$ conditionnellement à $\{Y_t = x\}$. La fonction de vraisemblance s'écrit alors

$$\mathcal{L}(\vartheta, X^{(n)}) = \prod_{i=1}^{n} p_{\Delta_n}^\vartheta(X_{i-1}, X_i)\,.$$

Un des candidats possible à l'estimation du paramètre ϑ est l'estimateur de maximum de vraisemblance

$$\widehat{\vartheta}_n = \arg\max_{\vartheta\in\Theta} \mathcal{L}(\vartheta, X^{(n)}).$$

Excepté pour quelques processus de diffusion dont les densités de transition sont connues (processus d'Ornstein-Uhlenbeck, mouvement brownien géométrique, processus de Bessel, *etc.*), la fonction de vraisemblance n'a pas de forme explicite et il n'est pas possible de calculer explicitement l'estimateur de maximum de vraisemblance.

Les propriétés asymptotiques des différents estimateurs dépendent du schéma de convergence, par exemple

1. le schéma « haute-fréquence » où l'horizon d'observation $t_n^n = T > 0$ est fixe et le pas $\Delta_n = \frac{T}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$;
2. le schéma « de grands échantillons » où l'horizon d'observation $t_n^n = n\Delta \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ avec un pas $\Delta_n = \Delta > 0$ fixe ;
3. et le schéma « composé » où l'horizon d'observation $t_n^n = n\Delta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ et le pas $\Delta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour le schéma haute-fréquence, la propriété LAMN [4] (*local asymptotic mixing normality*) des vraisemblances a été démontrée dans [37] pour le cas autonome et unidimensionnel (1) et dans [48] pour le cas général (les coefficients V_0 et V_1 peuvent dépendre du temps) multidimensionnel. Lorsque elle est satisfaite, les théorèmes minimax de [65, 66] sont valides et on peut déduire une borne inférieure de la variance des estimateurs. Des méthodes d'estimation efficaces ont été étudiées dans [37, 46], basées sur des fonctions de contraste (dont la quasi-vraisemblance).

Pour le schéma de grands échantillons, l'expérience statistique se réduit à l'observation d'une chaine de Markov. Elle satisfait la propriété de normalité locale

4. qui généralise la propriété LAN (local asymptotic normality) des expériences statistiques, voir [53, 82].

asymptotique (LAN) pour les vraisemblances dans le cas ergodique pour des densités de transitions suffisamment régulières (voir [64]). Les méthodes d'approximation de la vraisemblance par calcul numérique de l'équation aux dérivées partielles de Fokker-Planck-Kolmogorov [85], par développement sur la base de polynômes d'Hermite [3, 4], par simulation Monte-Carlo [102] ou par construction de fonctions de contraste ou de fonctions d'« estimation » [15, 72, 73] peuvent être citées en exemple pour obtenir des estimateurs.

Pour le schéma composé, la propriété LAN pour les vraisemblances a été démontrée dans [49] pour des processus de diffusion multidimensionnels elliptiques et ergodiques. Des procédures d'estimation ont été étudiées par différents auteurs, la plupart du temps dans le cas unidimensionnel [42, 43, 71] (voir [123] pour le cas multidimensionnel). Tous ces estimateurs sont basés sur les fonctions de contraste en supposant, dans le cas le plus général, qu'il existe un réel $p > 1$ tel que $N\Delta_N^p \longrightarrow 0$ lorsque $N \longrightarrow +\infty$.

Dans le cas particulier du processus d'Ornstein-Uhlenbeck, les densités de transition du processus de Markov sont explicites ainsi que les variances asymptotiques des estimateurs, ceci dans les trois différents schémas de convergence [64].

$\star$

Le mouvement brownien fractionnaire standard [77, 90] est le processus gaussien centré $\left(W_t^H, t \geq 0\right)$ de fonction de covariance

$$\mathbf{E}W_s^H W_t^H = \frac{1}{2}\left(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H}\right), \quad s,t > 0,$$

où l'exposant de Hurst $H \in (0,1)$. Le théorème de continuité de Kolmogorov–Chentsov garantit l'existence d'une version à trajectoires $(H-\epsilon)$–hölderiennes pour tout $\epsilon > 0$. Pour $H = \frac{1}{2}$, le mouvement brownien fractionnaire est le processus de Wiener. Dans les autres cas, le mouvement brownien fractionnaire n'est plus un processus de Markov ni une martingale. Ses accroissements, s'ils restent autosimilaires et stationnaires, ne sont plus indépendants. En effet, la fonction d'autocorrélation vaut (voir [111])

$$\begin{aligned} r(s) = \mathbf{E}W_1^H(W_{s+1}^H - W_s^H) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\left(\prod_{k=0}^{2n-1}(2H-k)\right) s^{2H-2n} \\ &= H(2H-1)s^{2H-2} + \underset{s\to\infty}{\mathcal{O}}(s^{2H-4}) \end{aligned}$$

et montre la corrélation négative des accroissements pour $H < \frac{1}{2}$ et positive pour $H > \frac{1}{2}$. De plus, le processus présente de la longue mémoire pour $H > \frac{1}{2}$, *i.e*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} r(n) = \infty.$$

La finitude des p–variations du mouvement brownien fractionnaire (sur un intervalle borné et au sens L^2), pour $p \geq \frac{1}{H}$, rend possible, à partir d'une généralisation de l'intégrale de Riemann-Stieljes [110, 124], de définir la solution de l'équation différentielle stochastique

$$Y_t = y_0 + \int_0^t V_0(Y_s, \vartheta)ds + \int_0^t V_1(Y_s, \vartheta)dW_s^H, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2}$$

pour un exposant de Hurst $H > \frac{1}{2}$ (voir [88]). Pour $\frac{1}{4} < H < \frac{1}{2}$, il est possible aussi de définir des solutions à l'équation (2) en utilisant la théorie des chemins rugueux (voir [34, 89]) mais ces thèmes sortent de cette synthèse.

Les solutions de (2) ne sont plus markoviennes et ne sont plus des semimartingales ; les techniques de calcul stochastique utilisées dans le cas classique ne fonctionnent plus. Dans ce cadre, peu de résultats généraux sur les propriétés asymptotiques des estimateurs de ϑ existent. Nous n'en connaissons pas en observations continues. Le cadre haute-fréquence reste le plus favorable à l'élaboration de résultats asymptotiques où la propriété LAMN a été déterminée dans [87] pour l'estimation du paramètre du coefficient de diffusion, dans une diffusion sans dérive avec un exposant de Hurst connu. Dans ce même cadre, des tests d'adéquation ont été développés dans [105].

Nous présentons dans cette partie les travaux effectués sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire [23], solution de l'équation différentielle stochastique

$$Y_t = y_0 - \lambda \int_0^t Y_s ds + \sigma W_t^H, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

pour $H \in (0, 1)$ et leurs perspectives. Le processus solution de (3) est donné par

$$Y_t = e^{-\lambda t}\left(y_0 + \sigma \int_0^t e^{\lambda s} dW_s^H\right), \quad t \geq 0,$$

et n'est ni un processus de Markov, ni une semimartingale pour $H \neq \frac{1}{2}$; c'est un processus gaussien et ergodique [33] pour $\lambda > 0$. Comme le mouvement brownien

fractionnaire, il présente de la longue mémoire pour $H > \frac{1}{2}$ comme l'indique sa fonction d'autocorrélation (voir [23, 104])

$$\begin{aligned} r(s) = \mathbf{E}Y_0 Y_s &= c_H \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \frac{|x|^{1-2H}}{\lambda^2 + x^2} dx \\ &= \sigma^2 H(2H-1)\lambda^{-2} s^{2H-2} + \underset{s\to\infty}{\mathcal{O}}(s^{2H-4}). \end{aligned} \tag{4}$$

Cette propriété fait du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire un outil utile pour les applications en biologie [92], en physique [113], pour le traffic ethernet [19, 52] et la finance [22, 32, 121].

Dans le cas d'observations continues d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire, les propriétés asymptotiques de l'estimateur de maximum de vraisemblance du paramètre de dérive ont été étudiées dans [12, 25, 76] et [IV,VIII] pour différentes applications. Les preuves de [IV,VIII] suivent le schéma développé dans la deuxième partie de ce mémoire et consistent à transformer le modèle d'une part et à calculer la transformée de Laplace du terme quadratique du ratio de vraisemblance d'autre part. Seule la consistance a été obtenue dans des cas plus généraux (dérive linéaire en le paramètre) dans [117]. Les propriétés asymptotiques de l'estimateur des moindres carrés ont été également étudiées dans le cas ergodique [5] [56] ou dans le cas explosif [9].

Dans le cas d'observations discrètes, plusieurs travaux récents présentent des méthodes d'estimation des paramètres du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire.

Pour le schéma haute-fréquence, des estimateurs de (H, σ) de type variations quadratiques sont donnés dans [14] et des estimateurs de σ (avec $H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ connu) dans [87]. Pour le schéma de grands échantillons, l'estimateur de Whittle [6] de (H, σ, λ) a été étudié dans [58]. Dans ce travail, l'efficacité asymptotique de cet estimateur (au sens de Fisher) est démontrée. Pour le schéma composé, les articles sur l'estimation de λ par un estimateur de moment [121], par moindres carrés [96] ou transformations de transformations intégrales [117] peuvent être cités. Dans ces derniers travaux, l'exposant de Hurst est supposé connu et seule la consistance est obtenue.

5. Récemment, les propriétés asymptotiques de l'estimateur de minimum de contraste, dans le cas ergodique, ont été également étudiées dans [115].

6. Lorsque la fonction d'autocovariance est explicite (par exemple pour le mouvement brownien fractionnaire avec ou sans dérive), il est possible, bien que coûteux, de calculer l'estimateur de maximum de vraisemblance [13, 57]. Dans le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire, la fonction d'autocovariance fait intervenir une fonction hypergéométrique de Gauss [58] et le calcul est difficile.

Dans la section 1, nous présentons la procédure d'estimation des trois paramètres λ, σ et H de (3) dans le schéma composé et les futurs développements possibles. Puis, nous détaillerons, dans la section 2, les apports effectués dans la librairie de fonctions `yuima` pour le logiciel `R` et les travaux envisagés. Dans une troisième section, nous présentons brièvement les résultats obtenus sur le maximum de vraisemblance dans le cas des modèles autorégressifs dans des bruits gaussiens, par exemple lorsque (3) est discrétisé par un schéma d'Euler-Maruyama :

$$\tilde{Y}_{(k+1)\Delta} = (1 - \lambda\Delta)\tilde{Y}_{k\Delta} + \sigma\left(W^H_{(k+1)\Delta} - W^H_{k\Delta}\right), \quad k \geq 0, \quad \tilde{Y}_0 = y_0.$$

1 Présentation de la procédure d'estimation

Dans ce chapitre, nous présentons les travaux statistiques effectués sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire, solution de l'équation différentielle stochastique

$$Y_t = y_0 - \lambda \int_0^t Y_s ds + \sigma W^H_t, \quad t \geq 0, \tag{5}$$

où $W^H = \left(W^H_t, t \geq 0\right)$ est le mouvement brownien fractionnaire standard, $\vartheta = (\lambda, \sigma, H)$ est le paramètre inconnu et appartient à l'ensemble ouvert Θ de $(0, \Lambda) \times [\underline{\sigma}, \overline{\sigma}] \times (0, 1)$, $0 < \Lambda < +\infty$, $0 < \underline{\sigma} < \overline{\sigma} < +\infty$.

Pour estimer ϑ, une grille discrète déterministe et régulière de la trajectoire $Y^T = (Y_t, 0 \leq t \leq T)$ est observée, précisément

$$\left(X_n := Y_{n\Delta_N}, n = 0 \dots N\right),$$

où $T = T_N = N\Delta_N \longrightarrow +\infty$ et $\Delta_N \longrightarrow 0$ lorsque $N \longrightarrow +\infty$.

1.1 Estimation de H et de σ par variations quadratiques généralisées

Un des points centraux de [I] est que l'exposant de Hurst H et le coefficient de diffusion σ peuvent être estimés sans connaître le paramètre de dérive λ. Les propriétés asymptotiques de ces estimateurs sont obtenues pour le schéma haute-fréquence (ou le schéma composé).

Soit $K \geq 1$. On note $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_K)$ le filtre discret de longueur $K+1$ et d'ordre $1 \leq L \leq K$, *i.e.*

$$\sum_{k=0}^{K} a_k k^\ell = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq \ell \leq L-1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{K} a_k k^L \neq 0. \tag{6}$$

Dans la suite, les filtres sont normalisés par la relation

$$\sum_{k=0}^{K}(-1)^{1-k}a_k = 1\,. \tag{7}$$

On considère également le filtre dilaté $\mathbf{a}^2 = (a_0^2, \ldots, a_K^2)$ associé à $\mathbf{a}$ défini par

$$a_k^2 = \begin{cases} a_{k'} & \text{si } k = 2k' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \qquad \text{for} \quad 0 \le k \le 2K\,.$$

Puisque $\sum_{k=0}^{2K} a_k^2 k^r = 2^r \sum_{k=0}^{K} k^r a_k$, le filtre $\mathbf{a}^2$ est du même ordre que $\mathbf{a}$. On note

$$V_{N,\mathbf{a}} = \sum_{i=0}^{N-K}\left(\sum_{k=0}^{K} a_k X_{i+k}\right)^2$$

les variations quadratiques généralisées associées au filtre $\mathbf{a}$ (voir [63]). On définit également

$$\rho_H^{\mathbf{a}^m,\mathbf{a}^n}(i) = \frac{\sum_{k=0}^{mK}\sum_{\ell=0}^{nK} a_k^m a_\ell^n |mk - n\ell + i|^{2H}}{(mn)^H \sum_{k,\ell} a_k a_\ell |k-\ell|^{2H}}.$$

Heuristiquement, les variations quadratiques généralisées satisfont

$$V_{N,\mathbf{a}^u} \longrightarrow c_{\mathbf{a}}\Delta^{2H}u^{2H}$$

lorsque $N \to \infty$. Par conséquent, un estimateur naturel de l'exposant de Hurst est

$$\widehat{H}_N = \frac{1}{2}\log_2 \frac{V_{N,\mathbf{a}^2}}{V_{N,\mathbf{a}}}. \tag{8}$$

On définit également un estimateur de σ par

$$\widehat{\sigma}_N = \left(-2\frac{V_{N,\mathbf{a}}}{\sum_{k,\ell} a_k a_\ell |k-\ell|^{2\widehat{H}_N}\Delta_N^{2\widehat{H}_N}}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Dans [I], nous donnons la preuve que pour un filtre $\mathbf{a}$ d'ordre $L \ge 2$, les estimateurs $\widehat{H}_N$ et $\widehat{\sigma}_N$ définis respectivement par les équations (8) et (9) sont fortement consistants, *i.e.*

$$(\widehat{H}_N, \widehat{\sigma}_N) \xrightarrow{a.s.} (H, \sigma) \quad \text{lorsque } N \longrightarrow +\infty.$$

De plus, les estimateurs sont asymptotiquement normaux, *i.e.* pour tout $H \in (0,1)$,

$$\sqrt{N}(\widehat{H}_N - H) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma_1(H, \mathbf{a}))$$

et

$$\frac{\sqrt{N}}{\log N}(\widehat{\sigma}_N - \sigma) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma_2(H, \sigma, \mathbf{a}))$$

lorsque $N \to +\infty$. Dans ces formules, $\Gamma_1(H, \mathbf{a})$ et $\Gamma_2(H, \sigma, \mathbf{a})$ sont des matrices symétriques définies positives dépendent respectivement de H et du filtre $\mathbf{a}$ et de H, σ et $\mathbf{a}$; elles sont définies par

$$\Gamma_1(H, \mathbf{a}) = \frac{1}{2\log(2)^2} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\rho_H^{\mathbf{a},\mathbf{a}}(i)^2 + \rho_H^{\mathbf{a^2},\mathbf{a^2}}(i)^2 - 2\rho_H^{\mathbf{a},\mathbf{a^2}}(i)^2 \right) \tag{10}$$

et

$$\Gamma_2(H, \sigma, \mathbf{a}) = \frac{\sigma^2}{4} \Gamma_1(H, \mathbf{a}).$$

Les filtres *classiques* d'ordre $L = K \geq 1$ définis par

$$a_k = c_{L,k} = \frac{(-1)^{1-k}}{2^K} \binom{K}{k} = \frac{(-1)^{1-k}}{2^K} \frac{K!}{k!(K-k)!} \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq K. \tag{11}$$

et les filtres de Daubechies d'ordre pair (voir [35] pour leur construction) sont largement utilisés en pratique. Par exemple le filtre *classique* $\mathbf{c_2}$ d'ordre 2 de longueur 3

$$\tfrac{1}{4}(-1, 2, -1)$$

et le filtre de Daubechies $\mathbf{a_{Db4}}$ d'ordre 2 et de longueur 4

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(.4829629131445341, -.8365163037378077, .2241438680420134, .1294095225512603).$$

Il est possible de montrer également la consistance des estimateurs par variations quadratiques pour le filtre *classique* d'ordre 1 $\mathbf{c_1} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pour toute valeur de $H \in (0,1)$. Par contre, la normalité asymptotique n'est alors valable que pour $H < \frac{3}{4}$ (voir [63]).

Dans le cadre gaussien du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire, la liste des estimateurs possibles de H et σ ne se limite pas aux variations quadratiques présentées précédemment. On pourrait généraliser ce type d'estimateur à une régression sur trois, quatre, cinq, *etc.* dilatations différentes d'un même filtre. De plus, des méthodes d'ondelettes [1], de variations en puissances quelconques [100], des méthodes spectrales [47] ou encore des méthodes de maximum de vraisemblance [11] sont possibles.

⋆

Les perspectives de ces travaux sont nombreuses. Il est possible, dans le schéma de grands échantillons, de montrer que la propriété LAN des vraisemblances est satisfaite pour l'estimation paramétrique conjointe de H et σ dans un processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire ergodique. Pour cela, il faut vérifier les conditions exprimées dans [29] sur la densité spectrale du processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire, explicitée dans l'équation (4). Dans ce résultat, la vitesse est en $\sqrt{n}$ pour les deux paramètres et les variances limites peuvent être déterminées en calculant l'information de Fisher à partir de la densité spectrale.

Dans le cadre haute-fréquence, il est possible que les vitesses optimales des estimateurs de H et de σ soient respectivement $\sqrt{n}$ et $\frac{\sqrt{n}}{\log(n)}$, comme pour l'experience statistique effectuée sur un mouvement brownien fractionnaire uniquement [28]. Il serait utile d'étendre (si possible) ces résultats d'optimalité à des diffusions fractionnaires homogènes plus générales de type (1). Ce travail tenterait de généraliser la propriété LAMN, déterminée dans [87], pour l'estimation du paramètre du coefficient de diffusion, dans une diffusion sans dérive avec un exposant de Hurst connu dans l'intervalle $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Là encore, des estimateurs basés sur des variations quadratiques pourrait être utilisés (par exemple [78]) pour l'estimation de H. Des méthodes sophistiquées pour l'estimation de σ avec vitesse optimale doivent également être développées dans ce cadre général ; les comportements à haute-fréquence des estimateurs de minimum de contraste ou de Whittle pourraient être ainsi étudiés.

1.2 Estimation de λ par une méthode de moments

L'estimation du paramètre de dérive dans le processus d'Ornstein-Uhlenbeck (5) se base sur le résultat (voir [56])

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \mathrm{var}(Y_t) = \lim_{t\longrightarrow\infty} \frac{1}{t}\int_0^t Y_t^2 dt = \frac{\sigma^2\Gamma\left(2H+1\right)}{2\lambda^{2H}} =: \mu_2\,.$$

Cette identité donne un estimateur de moment de λ, précisément

$$\widehat{\lambda}_N = \left(\frac{2\,\widehat{\mu}_{2,N}}{\widehat{\sigma}_N^2\Gamma\left(2\widehat{H}_N+1\right)}\right)^{-\frac{1}{2\widehat{H}_N}} \tag{12}$$

où $\widehat{\mu}_{2,N}$ est le moment empirique d'ordre 2, *i.e*

$$\widehat{\mu}_{2,N} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} X_n^2.$$

Dans [I], nous démontrons que pour $H \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ et un pas satisfaisant la condition $N\Delta_N^p \longrightarrow 0$, $p > 1$, et $\Delta_N (\log N)^2 \longrightarrow 0$ lorsque $N \longrightarrow +\infty$, alors,

$$\widehat{\lambda}_N \xrightarrow{a.s.} \lambda$$

et

$$\sqrt{T_N}\left(\widehat{\lambda}_N - \lambda\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma_3(\vartheta)),$$

lorsque $N \longrightarrow +\infty$, avec

$$\Gamma_3(\vartheta) = \lambda \left(\frac{\sigma_H}{2H}\right)^2$$

et

$$\sigma_H^2 = (4H-1)\left(1 + \frac{\Gamma(1-4H)\Gamma(4H-1)}{\Gamma(2-2H)\Gamma(2H)}\right). \tag{13}$$

Les différentes conditions sur le pas Δ_N soulèvent la question de son existence ; un pas possible est $\Delta_N = \frac{\log N}{N}$. Comme dans le cas Wiener, la variance limite $\Gamma_3(\vartheta)$ ne dépend pas du coefficient de diffusion σ^2. On remarque par contre que la quantité $\sigma_H^2 > 2$ (à comparer avec le cas classique) dans (13) est une fonction croissante de H.

2 Simulation avec la librairie de fonctions `yuima`

La librairie de fonctions `yuima` permet la simulation et l'inférence statistique pour les processus stochastiques pour le logiciel `R` [106]. Elle utilise le système de classes et de méthodes S4 [21]. Cette librairie a l'ambition de remplacer rapidement la librairie `sde` [59], librairie de référence dans ce domaine.

Les méthodes d'inférence statistique demandent parfois des techniques avancées de simulation et certaines simulations nécessitent que des paramètres aient été fixés (notamment par des méthodes statistiques). Par ailleurs, les formules de la théorie des équations différentielles stochastiques sont sophistiquées, ce qui les rendent difficiles à utiliser en pratique pour des utilisateurs non familiers. Dans le package `yuima` [II], les équations différentielles stochastiques peuvent être utilisées de manière abstraite et les techniques d'estimation afférentes peuvent être appliquées plus aisément.

Les équations différentielles stochastiques peuvent être multidimensionnelles, dirigées par un mouvement brownien, un mouvement brownien fractionnaire ou un processus de Levy, *etc.*. Dans la suite, nous n'exposons que la partie fractionnaire du *package*, dont nous conduisons le développement pour le projet `yuima`.

2.1 Simulation de bruits gaussiens fractionnaires

Différentes méthodes de simulation de bruit gaussien fractionnaire (fractional Gaussian noise (fGn) en anglais) ont été implémentées d'abord pour une utilisation efficace dans les schémas numériques d'équations différentielles stochastiques dirigées par un mouvement brownien fractionnaire.

Le bruit gaussien fractionnaire que nous souhaitons simuler est défini par la séquence $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ où

$$X_i = W^H(t_{i+1}) - W^H(t_i), \quad i = 0, \ldots, n$$

avec $H \in (0,1)$ et $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = T$ la grille temporelle (grille qui peut être régulièrement espacée, générée aléatoirement, être une grille de *tick-time*, *etc.*). Pour ce vecteur gaussien centré, la matrice de covariance est explicite et le terme général est donné par

$$\mathbf{E}\left(X_i X_j\right) = \frac{1}{2}\left(|t_{i+1} - t_j|^{2H} - |t_{i+1} - t_{j+1}|^{2H} - |t_i - t_j|^{2H} + |t_i - t_{j+1}|^{2H}\right). \quad (14)$$

Pour les méthodes de simulation exactes, il faut comparer la complexité, la mémoire requise et le temps de calcul des différents algorithmes. Nous nous sommes particulièrement appliqués à ce que la méthode utilisée s'adapte aux différentes grilles de discrétisation : grille aléatoire, grille déterministe, Poisson, tick-time (et plus généralement pour les objets `yuima.sampling`).

Pour le moment, les méthodes de Cholesky et de Wood et Chan sont implémentées. La fonction `CholeskyfGn` utilise la fonction de base `chol` qui permet la décomposition de Cholesky de la matrice de covariance du vecteur gaussien à simuler. Cette méthode demande de la mémoire et un nombre d'opérations est d'ordre n^3 mais s'adapte à tout type de grille. La fonction `WoodChanfGn` (voir [120] pour plus d'informations) utilise quant à elle la fonction de base `fft`. Cette méthode adaptée uniquement pour les grilles déterministes régulières est rapide et demande asymptotiquement $n\log(n)$ opérations.

2.2 Simulation des processus de diffusion fractionnaires

Pour $H > 1/2$, l'équation différentielle stochastique

$$Y_t = x_0 + \int_0^t V_0(Y_s)ds + \int_0^t V_1(Y_s)dW_s^H \quad 0 \le t \le T \quad (15)$$

admet une solution unique dont les trajectoires sont Hölder d'ordre $\alpha > 1 - H$ p.s. lorsque $V_1 \in \mathcal{C}_b^2$ et V_0 satisfont la condition de Lipschitz globale [95].

On note $\tilde{Y}_i^n$ l'approximation d'Euler-Maruyama de la valeur Y_{t_i}, définie par l'équation récursive

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{Y}_0^n & = & x_0\,, \\ \tilde{Y}_{i+1}^n & = & \tilde{Y}_i^n + V_0(\tilde{Y}_i^n)\,(t_{i+1}-t_i) + V_1(\tilde{Y}_i^n,\vartheta)\,(W(t_{i+1})-W(t_i))\,, \quad i \leq n\,. \end{array} \right.$$

et les interpolations linéaires entre les points d'évaluation. Pour le moment, seul le schéma d'Euler-Maruyama a été implémenté dans la librairie de fonctions `yuima` dans la fonction `sim.euler`. Sur une grille régulière, lorsque le coefficient de diffusion $\sigma \in \mathcal{C}_b^2$ et $S \in \mathcal{C}_b^3$ le schéma d'Euler converge vers la solution de (15) (voir [95]) et

$$n^{2H-1}||\tilde{Y}^n - Y||_\infty \longrightarrow \frac{1}{2}\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \sigma'(Y_s)D_sY_t ds\right| \quad \text{lorsque } n \text{ tend vers } \infty \text{ p.s..}$$

où D_sY_t est la dérivée de Malliavin au temps s de Y_t par rapport au mouvement brownien fractionnaire [98].

Dans un futur proche, les méthodes de simulations doivent être étendues au cadre multidimensionnel où le schéma d'Euler-Maruyama converge toujours [94]. D'autres schémas convergents de simulation (schéma de Milstein [7], schémas implicites, *etc.*) doivent être également implémentés.

2.3 Estimation des paramètres

Dans cette partie, nous présentons un exemple de simulation et d'estimation avec le package `yuima`. Nous avons intégré les estimateurs `qgv` de H et σ et `mmfrac` de λ définis dans la Section 1 dans cette librairie.

D'abord la libraire de fonctions est importée dans le logiciel `R` avec la commande

```
> library(yuima)
```

L'exemple traité dans ce chapitre est celui du processus de Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire

$$Y_t = y_0 - \lambda\int_0^t Y_t dt + \sigma dW_t^H, \quad 0 \leq t \leq T$$

Pour définir le modèle, on utilise successivement les commandes

```
> mod <- setModel(drift="-lambda*y", diffusion="sigma",
                                    hurst=NA, state.variable="y")
```

7. Des résultats de convergence de ce schéma pour des diffusions fractionnaires sans dérive sont donnés dans [50].

Pour simuler le processus de Ornstein-Uhlenbeck sur une grille régulière de $[0, T]$, $T = 10$, de $N = 10000$ points, il faut créer la grille de discrétisation

```
> T<-10;N<-10000;
> samp <- setSampling(Terminal=T, n=N)
```

puis simuler le processus en spécifiant les paramètres $\lambda = 1$, $\sigma = 2$, $H = 0.7$ ainsi que la condition initiale $y_0 = 0$

```
> H<-0.7
> ou <- setYuima(model=mod, sampling=samp)
> fou <- simulate(ou,true.parameter=list(sigma=2,lambda=1),hurst=H)
```

La fonction `plot`, qui s'étend à l'objet `yuima.model`,

```
> plot(fou)
```

permet de visualiser la trajectoire (voir Figure 1).

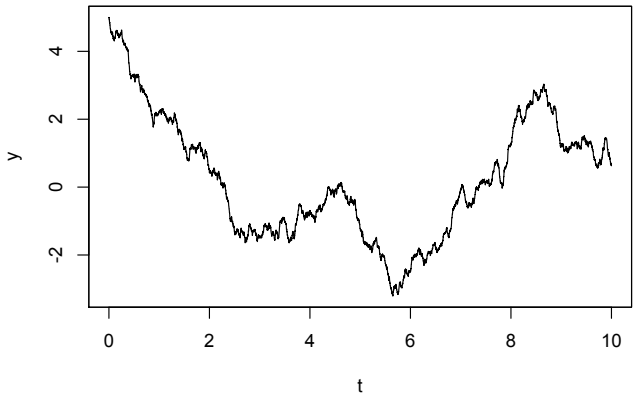

FIGURE 1 – Simulation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire

L'estimation du paramètre de Hurst est exécutée avec la fonction `qgv`. Par exemple, pour estimer uniquement le paramètre H, on peut écrire

```
> qgv(fou)
```

Cette fonction marche également pour des diffusions fractionnaires non linéaires (voir [78, 93]). Elle utilise par défaut le filtre de Daubechies d'ordre 2 (voir section 1.1).

La procédure d'estimation jointe de l'exposant de Hurst H, du coefficient de diffusion σ et du paramètre de dérive λ est effectuée avec la commande

```
> mmfrac(fou)
```

qui donne

```
   Fractional OU estimation
             hurst  sigma  theta
   Estimate  0.704  2.041  1.071
 Std. Error  0.011  0.140  0.182
```

Les propriétés asymptotiques des estimateurs énoncées dans les sections 1.1 et 1.2 ont été testées avec la librairie `yuima` dans [I]. Certaines intuitions développées dans les perspectives de la section 1.1 ont également été vérifiées numériquement avec ces outils.

3 Estimation du drift dans des processus autorégressifs gaussiens

Les modèles linéaires discrets, analogues aux processus de Ornstein-Uhlenbeck [8], sont les processus autorégressifs. Dans ce chapitre, on considère le processus $(X_n,\, n \geq 1)$ défini par l'équation récursive

$$X_n = \sum_{i=1}^{p} \vartheta_i X_{n-i} + \xi_n, \quad n \geq 1, \quad X_r = 0, \quad r = 0,\, -1, \ldots,\, -(p-1), \tag{16}$$

où $\xi = (\xi_n,\, n \in \mathbb{Z})$ est une suite gaussienne stationnaire et régulière, *i.e.*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ln f_\xi(\lambda)|\, d\lambda < \infty \,[9], \tag{17}$$

où $f_\xi(\lambda)$ est la densité spectrale de ξ. On suppose également que la fonction de covariance $c = (c(m,n),\, m,n \geq 1)$,

$$\mathbf{E}\xi_m\xi_n = c(m,\, n) = \rho(|n-m|), \quad \rho(0) = 1, \tag{18}$$

8. Par exemple, le schéma d'Euler-Maruyama d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

9. Cette condition peut être écrite avec la fonction de covariance ρ, précisément $\rho(n) \sim cn^{-\alpha}$, $\alpha > 0$.

est définie positive.

L'estimation paramétrique dans les processus autorégressifs dirigés par des bruits blancs a été largement étudiée. La consistance et autres propriétés asymptotiques de l'estimateur de maximum de vraisemblance (loi, biais, erreur quadratique) ont été prouvées pour le modèle d'ordre $p = 1$ dans tous les cas possibles (stable, instable et explosif) dans [6, 81, 108, 109, 118, 119] par exemple. Concernant les modèles d'ordre $p > 1$ (AR(p)) avec des bruits blancs, on peut citer les contributions [80, 91, 107].

Plusieurs articles ont été dédiés à l'estimation dans des modèles de régression avec des bruits gaussiens fractionnaires et des modèles « fractionally differenced » [5, 51, 54, 112, 122]. On peut remarquer que l'estimateur des moindres carrés n'est pas consistant dans les modèles autorégressifs dirigés par des bruits à longue mémoire.

Les conditions générales pour la consistance et de la normalité asymptotique de l'EMV pour des suites stationnaires ont été données dans [114]. Pour appliquer ces résultats aux processus autorégressifs d'ordre p dans des bruits dépendants (avec des bruits gaussiens fractionnaires par exemple), il serait nécessaire d'étudier la dérivée seconde de la matrice de covariance de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_N)$. Pour éviter ce calcul, une approche initiée par Whittle (ce n'est plus l'EMV) a été suivie dans [44] pour des suites stationnaires générales.

$\star$

Soit Θ un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^p$. Pour une valeur fixée du paramètre $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_p) \in \Theta$, on note $\mathbf{P}_\vartheta^N$ la mesure de probabilité induite $X^{(N)}$. Soit $\mathcal{L}(\vartheta, X^{(N)})$ la fonction de vraisemblance de cet échantillon.

L'estimateur de maximum de vraisemblance $\widehat{\vartheta}_N$ of ϑ, à partir des observations $X^{(N)} = (X_1, \ldots, X_N)$, est défini par

$$\hat{\vartheta}_N = \sup_{\vartheta \in \Theta} \mathcal{L}(\vartheta, X^{(N)}). \tag{19}$$

Les propriétés asymptotiques (lorsque $N \longrightarrow \infty$) de l'estimateur de maximum de vraisemblance (EMV) $\hat{\vartheta}_N$ de ϑ dans le modèle (16) avec des bruits gaussiens stationnaires a été étudié dans [III].

Pour cela, une transformation du modèle d'observation (16) en modèle équivalent avec des bruits gaussiens indépendants est effectuée. Elle permet d'écrire l'EMV de manière explicite et la différence de $\hat{\vartheta}_N$ et de la valeur ϑ apparaît alors comme le rapport d'une martingale gaussienne et de son processus de variance. Des méthodes basées sur le calcul de la transformée de Laplace par des méthodes de Cameron-Martin permettent alors de prouver la normalité asymptotique de l'EMV.

On définit la matrice A_0 de taille $p \times p$ et le vecteur $b \in \mathbb{R}^p$ par

$$A_0 = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 & \cdots & \vartheta_{p-1} & \vartheta_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_{(p-1)\times 1} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Soit $r(\vartheta)$ le rayon spectral de la matrice A_0, $\| \, \|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^p$ et $*$ la transposition de matrice. Soit $p \geq 1$ et

$$\Theta = \{\vartheta \in \mathbb{R}^p \,|\, r(\vartheta) < 1\}. \tag{21}$$

Il est montré dans [III*] que l'estimateur de maximum de vraisemblance $\hat{\vartheta}_N$ de ϑ est consistant, *i.e.*, pour tout $\vartheta \in \Theta$ et $\nu > 0$,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}_\vartheta^N \left\{ \left\| \hat{\vartheta}_N - \vartheta \right\| > \nu \right\} = 0, \tag{22}$$

et asymptotiquement normal

$$\sqrt{N}\left(\hat{\vartheta}_N - \vartheta\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathcal{I}^{-1}(\vartheta)), \quad \text{lorsque } N \longrightarrow \infty, \tag{23}$$

où $\mathcal{I}(\vartheta)$ est l'unique solution de l'équation de Lyapounov :

$$\mathcal{I}(\vartheta) = A_0 \mathcal{I}(\vartheta) A_0^* + bb^*, \tag{24}$$

pour A_0 et b définis dans (20). De plus, la convergence des moments est satisfaite : pour tout $\vartheta \in \Theta$ et $q > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \left| \mathbf{E}_\vartheta \left\| \sqrt{N}\left(\hat{\vartheta}_N - \vartheta\right) \right\|^q - \mathbf{E} \, \|\eta\|^q \right| = 0, \tag{25}$$

et η est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\mathcal{I}(\vartheta)^{-1}$.

On peut remarquer, d'une part, que la variance asymptotique $\mathcal{I}^{-1}(\vartheta)$ est la même que dans le cas standard où ξ est un bruit blanc. D'autre part, dans le cas $p = 1$, on peut affiner les résultats précédents : la consistance forte (pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$) et la convergence uniforme des moments sur les compacts dans le cas stable sont satisfaites (voir [III]).

Deuxième partie

Processus fractionnaires en observations partielles

4 Observations partielles en temps continu

Dans un grand nombre de domaines d'application des mathématiques, le signal $X = (X_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles, dont la loi dépend d'un paramètre inconnu $\vartheta \in \Theta$ (ensemble ouvert de $\mathbb{R}$), ne peut pas être observé directement mais seulement au travers d'un processus d'observation $Y = (Y_t, t \geq 0)$ à valeurs réelles. Parfois, il est possible d'avoir un contrôle déterministe $u = (u(t), t \geq 0)$ du signal sous-jacent X.

Dans ce cadre, se pose naturellement le problème d'estimation du paramètre inconnu ϑ en observant la trajectoire continue [10] $Y^T = (Y_t, 0 \leq t \leq T)$, $T > 0$, et en choisissant un contrôle u^T dans une certaine classe de fonctions.

Dans le modèle « classique » d'observations partielles, le processus d'observation est donné par l'équation

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t h(X_s)ds + \sigma W_t\,, \quad t \geq 0\,, \tag{26}$$

où la fonction $h : \mathbb{R} \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ et le niveau de bruit $\sigma > 0$ sont connus, le bruit additif $(W_t\,, t \geq 0)$ est un processus de Wiener et Y_0 est la condition initiale.

Le théorème de Girsanov et le théorème de filtrage général (voir [84, Théorème 7.16]) permettent, dans ce cas, d'écrire la fonction de vraisemblance [11] s'écrit

$$\mathcal{L}_T\left(\vartheta, Y^T\right) = \exp\left(\int_0^T \pi_t^\vartheta\left(h(X)\right) dY_t - \frac{1}{2}\int_0^T \pi_t^\vartheta\left(h(X)\right)^2 dt\right) \tag{27}$$

où $\pi_t^\vartheta\left(h(X)\right) = \mathbf{E}_\vartheta\left(h(X_t)|\mathcal{F}_t^Y\right)$ est l'espérance conditionnelle de $h(X_t)$ sachant $\mathcal{F}_t^Y = \sigma\left(Y_s, 0 \leq s \leq t\right)$.

10. La plupart des systèmes réels stochastiques peuvent être modélisés en temps continu. Les observations, quant à elles, peuvent être (théoriquement) continues ou (pratiquement) discrètes ; on peut observer la trajectoire $Y^T = (Y_t, 0 \leq t \leq T)$ ou cette trajectoire sur une grille régulière $t_1 < \ldots < t_n$, *i.e.* $Y^{(n)} = (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$.

11. Pour ϑ fixé, on note $\mathbf{P}_\vartheta^T$ la mesure de probabilité induite par $((X_t, Y_t), 0 \leq t \leq T)$ sur $\mathcal{C}_{[0,T]} \times \mathcal{C}_{[0,T]}$ et $\mathcal{F}_t^Y$ la filtration naturelle de Y, $\mathcal{F}_t^Y = \sigma\left(Y_s, 0 \leq s \leq t\right)$. La fonction de vraisemblance est la dérivée de Radon-Nikodym de $\mathbf{P}_\vartheta^T$, restreinte à $\mathcal{F}_T^Y$, par rapport à une mesure de référence sur $\mathcal{C}_{[0,T]}$ (que l'on explicite généralement pour chaque problème).

Dans le cas non contrôlé, en général, l'estimateur de maximum de vraisemblance $\widehat{\vartheta}_T$ de ϑ, qui maximise (27), n'a pas d'expression explicite, la dépendance du « filtre » $\left(\pi_t^\vartheta\left(h(X)\right), t \geq 0\right)$ en ϑ étant complexe. Pour obtenir tout de même des propriétés asymptotiques de type « grands échantillons » (lorsque $T \to \infty$) de l'estimateur de maximum de vraisemblance (EMV) implicite, on utilise les résultats d'Ibragimov et Has'minskii [60] qui consistent à vérifier plusieurs conditions sur le ratio de vraisemblance

$$\mathcal{Z}_\vartheta^T(w) = \frac{d\mathbf{P}^T_{\vartheta+\frac{w}{\sqrt{T}}}}{d\mathbf{P}^T_\vartheta}(Y^T) = \frac{\mathcal{L}_T\left(\vartheta+\frac{w}{\sqrt{T}}, Y^T\right)}{\mathcal{L}_T\left(\vartheta, Y^T\right)}, \quad w \in \mathcal{W}_\vartheta^T = \left\{w\,;\, \vartheta+\frac{w}{\sqrt{T}} \in \Theta\right\}.$$

Si ces conditions [12] se vérifient, alors l'EMV $\widehat{\vartheta}_T$ de ϑ est uniformément consistant sur les compacts $\mathbb{K} \subset \Theta$, *i.e.* pour tout $\nu > 0$,

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{\vartheta\in\mathbb{K}} \mathbf{P}_\vartheta^T\left\{\left|\widehat{\vartheta}_T - \vartheta\right| > \nu\right\} = 0\,, \tag{28}$$

asymptotiquement normal (uniformément sur les compacts), *i.e.*

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{\vartheta\in\mathbb{K}} \left|\mathbf{E}_\vartheta f\left(\sqrt{T}\left(\widehat{\vartheta}_T - \vartheta\right)\right) - \mathbf{E} f\left(\mathcal{I}\left(\vartheta\right)^{-\frac{1}{2}}\xi\right)\right| = 0, \quad \forall f \in \mathcal{C}_b, \tag{29}$$

12. Précisément, les fonctions $w \in \mathcal{W}_\vartheta^T \longmapsto \mathcal{Z}_\vartheta^T(w)$, doivent être continues avec probabilité 1 et satisfaire les propriétés suivantes :

(i) Pour tout compact $\mathbb{K} \subset \Theta$, il existe des réels $a_\mathbb{K} = a$ et $b_\mathbb{K} = b$ et des fonctions $k^T_\mathbb{K}(.) = k^T(.)$ tels que
- pour $T > 0$ fixé, $k^T(.)$ est positive sur $[0, \infty)$ et telle que

$$\lim_{y\to\infty} k^T(y) = \infty \quad \text{et,} \quad \text{pour tout } N > 0, \quad \lim_{T\to\infty, y\to\infty} y^N \exp\left(-k^T(y)\right) = 0\,;$$

- il existe des réels $q > 1$ et $m \geq q$ tels que pour tout $|w_1| < R$, $|w_2| < R$ et tout $R > 0$

$$\sup_{\vartheta\in\mathbb{K}} \mathbf{E}_\vartheta \left|\mathcal{Z}_\vartheta^T(w_2)^{\frac{1}{m}} - \mathcal{Z}_\vartheta^T(w_1)^{\frac{1}{m}}\right|^m \leq b(1+R^a)|w_2 - w_1|^q\,;$$

- pour tout $w \in \mathcal{W}_\vartheta^T$,

$$\sup_{\vartheta\in\mathbb{K}} \mathbf{E}_\vartheta \mathcal{Z}_\vartheta^T(w)^{\frac{1}{2}} \leq \exp\left(-k_T(|w|)\right).$$

(ii) Soit la fonction $\mathcal{Z}_\vartheta(w) = \exp\left(w\eta - \frac{w^2}{2}\mathcal{I}(\vartheta)\right)$ avec $\eta \sim \mathcal{N}\left(0, \mathcal{I}(\vartheta)\right)$ dont l'unique maximum est atteint au point $\hat{w} = \frac{\eta}{\mathcal{I}(\vartheta)}$. Uniformément en $\vartheta \in \mathbb{K}$, les lois marginales (finies-dimensionnelles) de la fonction (aléatoire) $\mathcal{Z}_\vartheta^T(w)$ convergent vers les lois marginales de la fonction $\mathcal{Z}_\vartheta(w)$.

Pour plus d'informations, se référer à [60, Théorème I.10.1] ou [79, Section 2.1].

où ξ est une variable gaussienne centrée-réduite et la convergence des moments (uniforme sur les compacts) est valide, *i.e.* pour tout $p > 0$,

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{\vartheta\in\mathbb{K}} \left| \mathbf{E}_\vartheta \left| \sqrt{T} \left(\widehat{\vartheta}_T - \vartheta \right) \right|^p - \mathbf{E} \left| \mathcal{I}\left(\vartheta\right)^{-\frac{1}{2}} \xi \right|^p \right| = 0. \tag{30}$$

Dans ces formules, $\mathcal{I}(\theta) = \lim_{T\to\infty} \dfrac{\mathcal{I}_T(\theta)}{T}$, où $\mathcal{I}_T(\theta)$ est l'information de Fisher definie par

$$\mathcal{I}_T\left(\vartheta\right) = -\mathbf{E}_\vartheta \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \ln \mathcal{L}_T(\vartheta, Y^T). \tag{31}$$

Il est souhaitable, dans nombre d'applications, de calculer $\mathcal{I}(\theta)$ de manière explicite. De plus, la convergence uniforme des moments (30) associée à la continuité de la fonction $\vartheta \longmapsto \mathcal{I}(\vartheta)$ sur Θ donne l'efficacité asymptotique de l'EMV, *i.e.*

$$\lim_{\delta\to 0} \lim_{T\to\infty} \sup_{|\vartheta-\vartheta_0|<\delta} \mathbf{E}_\vartheta \ell \left(\sqrt{T} \left(\widehat{\vartheta}_T - \vartheta \right) \right) = \mathbf{E}\ell \left(\mathcal{I}\left(\vartheta_0\right)^{-\frac{1}{2}} \xi \right) \quad \text{pour tout } \vartheta_0 \in \Theta,$$

pour une fonction de coût $\ell(\cdot)$ polynomiale.

Dans le cas contrôlé, l'information de Fisher de l'expérience statistique est notée

$$\mathcal{I}_T\left(\vartheta, u\right) = -\mathbf{E}_\vartheta \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} \ln \mathcal{L}_T(\vartheta, Y^T). \tag{32}$$

Nous recherchons alors un estimateur efficace de ϑ dans le sens où, pour tout compact $\mathbb{K} \subset \Theta$,

$$\lim_{T\to\infty} \sup_{\vartheta\in\mathbb{K}} \sup_{u\in\mathcal{U}_T} \mathcal{I}_T\left(\vartheta, u\right) \mathbf{E}_\vartheta \left(\widehat{\vartheta}_T - \vartheta \right)^2 = 1. \tag{33}$$

pour la classe de fonctions

$$\mathcal{U}_T = \left\{ u\,;\, \frac{1}{T} \int_0^T u(s)^2 ds \leq 1 \right\}.$$

Dans le cas où le contrôle optimal

$$u_{opt}(t) = \arg\max_{u\in\mathcal{U}_T} \mathcal{I}_T\left(\vartheta, u\right)$$

ne dépend [13] pas de ϑ, l'EMV de ϑ dans l'équation (26) avec le contrôle optimal $u_{opt}(t)$ est un candidat pour l'estimation efficace (33). Les autres propriétés asymptotiques de l'EMV peuvent également être déduites par la méthode d'Ibragimov et Has'minskii.

13. Dans le cas où le contrôle optimal dépend de ϑ, des méthodes « one-step » sont possibles, voir [101].

Dans trois exemples, au moins, la méthode d'Ibragimov et Has'minskii a été utilisée :

1. Dans le cas où le signal $(X_t, t \geq 0)$ est un processus de Ornstein-Uhlenbeck linéairement observé

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_t & = & -\vartheta \int_0^t X_s ds \quad + \quad V_t \\ Y_t & = & \mu \int_0^t X_s ds \quad + \quad W_t, \end{array} \right. , \quad t \geq 0,$$

où $(W_t\,, V_t\,, t \geq 0)$ sont deux processus de Wiener indépendants et X_0, Y_0 sont des conditions initiales gaussiennes indépendantes. Les propriétés asymptotiques de l'EMV ont été obtenues dans [79] avec un vitesse régulière en $\sqrt{T}$ et une variance limite égale à l'inverse de

$$\mathcal{I}(\vartheta) = \frac{1}{2\vartheta} - \frac{2\vartheta}{\alpha(\alpha+\vartheta)} + \frac{\vartheta^2}{2\alpha^3} \tag{34}$$

où $\alpha = \sqrt{\mu^2 + \vartheta^2}$. Dans ce cadre, l'espérance conditionnelle $\pi_t^\vartheta(X)$ satisfait un système d'équations différentielles (une stochastique et une ordinaire) connu sous le nom d'équations de filtrage de Kalman–Bucy, précisément

$$d\pi_t^\vartheta(X) = -\vartheta \pi_t^\vartheta(X) dt + \mu \gamma_{X,X}(t) \left(dY_t - \mu \pi_t^\vartheta(X) dt \right), \quad t > 0, \quad \pi_0^\vartheta(X) = 0,$$

où l'erreur de filtrage

$$\gamma_{X,X}(t) = \mathbf{E} \left(X_t - \pi_t^\vartheta(X) \right)^2$$

satisfait l'équation de Ricatti

$$\frac{d\gamma_{X,X}(t)}{dt} = 2\vartheta \gamma_{X,X}(t) + 1 - \mu^2 \gamma_{X,X}(t)^2, \quad t > 0, \quad \gamma_{X,X}(0) = 0.$$

Pour $\vartheta > 0$, l'erreur de filtrage a une limite finie, le filtre $\left(\pi_t^\vartheta(X), t \geq 0\right)$ a des propriétés d'ergodicité et les conditions du programme d'Ibragimov et Has'minskii se vérifient.

2. Dans le cas où le signal $(X_t, t \geq 0)$ est déterministe mais contrôlé, observé linéairement,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_t & = & \int_0^t (-\vartheta X_s + u(s)) ds \\ Y_t & = & \mu \int_0^t X_s ds \quad + \quad W_t, \end{array} \right. , \quad t \geq 0,$$

le contrôle optimal $u_{opt}(.)$ a été déduit dans [101]. Dans ce cas simple, le contrôle optimal est la constante égale à 1. Comme il ne dépend pas de ϑ, l'EMV du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_t & = & \displaystyle\int_0^t (-\vartheta X_s + u_{opt}(s))ds \\ Y_t & = & \mu \displaystyle\int_0^t X_s ds \quad + \quad W_t, \end{array} \right. , \quad t \geq 0,$$

est un candidat à l'estimation efficace (33). On obtient la vitesse régulière $\sqrt{T}$ et une variance limite pour la normalité asymptotique (29) donnée par

$$\mathcal{I}(\vartheta) = \frac{\mu^2}{\vartheta^4}. \tag{35}$$

3. Dans le cas non-linéaire, les propriétés asymptotiques de l'EMV ont été obtenues pour un signal $(X_t, t \geq 0)$ qui est une chaîne de Markov à états finis et satisfaisant des conditions restrictives sur les densités de transition (voir [24] pour plus de précision). Même dans le cas de l'exemple du processus du télégraphe (deux états), l'information de Fisher est non explicite.

$\star$

La longue mémoire, observée sur certaines données réelles, est ignorée dans le modèle (26). Pour cette raison, il est utile de considérer l'analogue fractionnaire du problème d'observations partielles où le processus d'observation est donné par

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t h(X_s)ds + \sigma W_t^H \,, \quad t \geq 0 \,, \tag{36}$$

et où le bruit $\left(W_t^H \,, t \geq 0\right)$ est désormais un mouvement brownien fractionnaire d'exposant de Hurst $H \in (0,1)$ connu [14].

Mais pour $H \neq \frac{1}{2}$, le processus d'observation $Y = (Y_t,\, t \geq 0)$ n'est plus une semimartingale et la vraisemblance ne peut pas s'écrire directement comme dans (27). Il est tout de même possible de déduire les propriétés asymptotiques de l'EMV dans le cas fractionnaire lorsque l'horizon $T \longrightarrow \infty$ et lorsque la fonction h est linéaire ; ceci fait l'objet de la section suivante.

14. Dans le cas de l'observation d'une trajectoire continue, il n'y a pas d'erreur statistique commise pour l'estimation de l'exposant de Hurst (estimation par variations quadratiques généralisées comme dans la Partie I, méthodes spectrales, *etc.*).

4.1 Propriétés asymptotiques de l'EMV dans le cas fractionnaire

Pour illustrer notre méthode, nous présentons les résultats obtenus dans différents modèles étudiés dans les articles [IV, V, VI, VII,VIII] (d'autres exemples seront donnés dans les perspectives en section 4.2). Dans le cadre d'observations partielles et de bruits fractionnaires, nous étudions le modèle

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_t &=& \displaystyle\int_0^t (-\vartheta X_s + \varepsilon_1 u_s)\, ds \;+\; \varepsilon_2 V_t^H \\ Y_t &=& \mu \displaystyle\int_0^t X_s ds \;+\; W_t^H, \end{array} \right. , \quad t \geq 0, \tag{37}$$

où $\vartheta > 0$ est inconnu, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{0,1\}^2 \setminus (0,0)$ et $\left(W_t^H, V_t^H, t \geq 0\right)$ sont deux mouvements browniens fractionnaires de même [15] paramètre de Hurst H connu. Notre procédure pour obtenir les propriétés asymptotiques de l'EMV de ϑ comprend trois parties :

1. la transformation du modèle d'observation pour pouvoir écrire la vraisemblance,
2. le calcul de la transformée de Laplace du terme quadratique du ratio de vraisemblance en utilisant la formule de Cameron-Martin,
3. la vérification des conditions du programme d'Ibragimov et Has'minskii pour déduire les propriétés asymptotiques de l'EMV.

4.1.1 Transformation du modèle d'observations

Même si le mouvement brownien fractionnaire (mbf) n'est pas une martingale, il existe, connaissant l'exposant de Hurst H, des transformations intégrales qui changent le mbf en sa « martingale fondamentale » (voir [97, 99]). Précisément, pour $H > \frac{1}{2}$ [16], il existe un noyau déterministe (et explicite) $k_H(t,s)$, $0 < s < t$, tel que le processus $M = (M_t, t \geq 0)$ défini par

$$M_t = \int_0^t k_H(t,s) dW_s^H \,,$$

15. Pour des exposants de Hurst différents, voir la section 4.2.

16. Pour tous les problèmes traités, il existe également des transformations intégrales liant un mbf d'exposant de Hurst $H > \frac{1}{2}$ avec un mbf d'exposant de Hurst $H > \frac{1}{2}$ [67]. Ces relations permettent de généraliser nos résultats pour tout $H \in (0,1)$ (voir par exemple [V,VII]).

est une martingale gaussienne de processus de variance explicite.

Pour un signal X suffisamment régulier $(X_t, t \geq 0)$, il est possible d'introduire (voir [75]) la « semimartingale fondamentale » $Z = (Z_t, t \geq 0)$ associée à Y, donnée par

$$Z_t = \int_0^t k_H(t,s) dY_s \,.$$

De plus, les filtrations naturelles de Y et Z coïncident. Après transformation, on peut montrer que la log-vraisemblance s'écrit

$$\ln \mathcal{L}_T \left(\vartheta, Z^T\right) = \lambda\mu \int_0^T \pi_t^\vartheta \left(Q\right) dZ_t - \frac{\left(\lambda\mu\right)^2}{2} \int_0^T \pi_t^\vartheta \left(Q\right)^2 d\langle M \rangle_t$$

où $\pi_t^\vartheta \left(Q\right) = \mathbf{E}_\vartheta \left(Q_t | \mathcal{F}_t^Z\right)$ est l'espérance conditionnelle de

$$Q_t = \frac{d}{d\langle M \rangle_t} \int_0^t k_H(t,s) X_s ds \,,$$

conditionnellement à la filtration $\mathcal{F}_t^Z = \sigma\left(Z_s, 0 \leq s \leq t\right)$ et λ est une constante explicite dépendante de H (voir [V] par exemple).

4.1.2 Calculs de transformées de Laplace

Dans les problèmes exposés dans [IV, V, VI, VII, VIII], nous avons dû calculer des transformées de Laplace en utilisant la formule de Cameron-Martin pour des processus gaussiens [74]. Regardons plus précisément pour chacun des problèmes :

1– Lorsque le signal est stochastique ($\varepsilon_2 = 1$) mais n'est pas contrôlé ($\varepsilon_1 = 0$) : dans ce cas, le signal $(X_t, t \geq 0)$ est un processus de Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire

$$X_t = -\vartheta \int_0^t X_s ds + V_t^H, \quad t \geq 0,$$

d'exposant de Hurst H identique à celui des observations. On peut montrer que le processus $(Q_t, t \geq 0)$ est une combinaison linéaire d'un autre processus bidimensionnel $(\zeta_t, t \geq 0)$, précisément

$$Q_t = \ell(t)^* \zeta_t \quad \text{où} \quad \ell(t) = \begin{pmatrix} t^{2H-1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le processus $(\zeta_t, t \geq 0)$ satisfait, quant à lui, une équation différentielle stochastique aux coefficients explicites (dependants du temps t et de H). De plus, le processus filtre $\pi_t^\vartheta(\zeta) = \mathbf{E}_\vartheta\left(\zeta_t | \mathcal{F}_t^Y\right)$ satisfait le système d'équations *Kalman-Bucy* (voir [V]) :

$$d\pi_t(\zeta) = \left(-\vartheta\lambda\mathbf{A}(t) - \mu^2\lambda^2\gamma_{\zeta,\zeta}(t)\ell(t)\ell(t)^*\right)\pi_t(\zeta)d\langle N\rangle_t + \mu\lambda\gamma_{\zeta\zeta}(t)\ell(t)dZ_t,$$

avec la condition initiale $\pi_0(\zeta) = 0$. Dans cette équation, $(N_t, t \geq 0)$ est la martingale fondamentale de $\left(V_t^H, t \geq 0\right)$ et $\gamma_{\zeta,\zeta}(t) = \mathbf{E}_\vartheta\left(\zeta_t - \pi_t(\zeta)\right)^*\left(\zeta_t - \pi_t(\zeta)\right)$ est la variance de l'erreur de filtrage, solution positive de l'équation de Ricatti

$$\frac{d\gamma_{\zeta\zeta}(t)}{d\langle N\rangle_t} = -\vartheta\lambda\left(\mathbf{A}(t)\gamma_{\zeta\zeta}(t) + \gamma_{\zeta\zeta}(t)\mathbf{A}(t)^*\right) + b(t)b(t)^* - \mu^2\lambda^2\gamma_{\zeta\zeta}(t)\ell(t)\ell(t)^*\gamma_{\zeta\zeta}(t),$$

de condition initiale $\gamma_{\zeta\zeta}(0) = 0$ et où la matrice $\mathbf{A}(t)$, de taille 2×2, et le vecteur bidimensionnel $b(t)$ sont connus explicitement.

Dans ce cadre, il est alors possible d'écrire le log-ratio de vraisemblance

$$\log \mathcal{Z}_\vartheta^T(u) = \mu\lambda\int_0^T \ell(t)^*\delta_{\vartheta,u,T}d\nu_t^\vartheta - \frac{\mu^2\lambda^2}{2}\int_0^T \delta_{\vartheta,u,T}^*\ell(t)\ell(t)^*\delta_{\vartheta,u,T}d\langle M\rangle_t \tag{38}$$

où $\delta_{\vartheta,u,T}(t)$ est la différence $\pi_t^{\vartheta+\frac{u}{\sqrt{T}}}(\zeta) - \pi_t^\vartheta(\zeta)$ et $\left(\nu_t^\vartheta, t \geq 0\right)$ est l'« innovation » définie par

$$d\nu_t^\vartheta = dZ_t - \mu\lambda\ell(t)^*\pi_t^\vartheta(\zeta)d\langle N\rangle_t\,, \quad \nu_0^\vartheta = 0\,. \tag{39}$$

L'expression (38) est composée d'une martingale (intégration contre la martingale d'innovation) et de son processus crochet (second terme sous forme quadratique). Nous avons montré dans [IV,V] qu'il était suffisant de déterminer le comportement asymptotique de la transformée de Laplace du terme quadratique pour vérifier les conditions d'applications du théorème d'Ibragimov et Has'minskii et, par conséquent, de déduire les propriétés de l'EMV. Plus précisément, il s'agit de montrer qu'il existe $a_0 < 0$ tel que pour tout $a > a_0$, $\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{T\to\infty} \mathbf{E}_{\vartheta_1} \exp\left\{-a\frac{\mu^2\lambda^2}{2}\int_0^T \delta_{\vartheta_1,\vartheta_2}^*\ell(t)\ell(t)^*\delta_{\vartheta_1,\vartheta_2}d\langle M\rangle_t\right\} = \exp\left(-a\frac{(u_2-u_1)^2}{2}\mathcal{I}(\vartheta)\right)$$

où $\mathcal{I}(\vartheta)$ est défini par (34) et $\delta_{\vartheta_1,\vartheta_2}(t) = \pi_t^{\vartheta_2}(\zeta) - \pi_t^{\vartheta_1}(\zeta)$ avec $\vartheta_1 = \vartheta + \frac{u_1}{\sqrt{T}}$ et $\vartheta_2 = \vartheta + \frac{u_2}{\sqrt{T}}$.

Ce calcul de transformée de Laplace a été effectué à partir de la formule de Cameron-Martin et des approximations asymptotiques de la variance de l'erreur de filtrage [V]. Les propriétés asymptotiques (uniformes sur les compacts) de l'EMV dans ce problème ont été obtenues avec vitesse classique et régulière en $\sqrt{T}$, et de variance limite qui ne dépend pas de H et qui est identique au cas classique (34).

2– Lorsque le signal est déterministe ($\varepsilon_2 = 0$) mais contrôlé ($\varepsilon_1 = 1$) : Dans ce cas, le signal $(X_t, t \geq 0)$ suit l'équation différentielle ordinaire

$$X_t = \int_0^t (\alpha(\vartheta) X_s + u_s) ds, \quad t \geq 0\,.$$

Le point central de [VI,VII] est de trouver un contrôle optimal $\tilde{v}$ tel que

$$\mathcal{J}_T(\vartheta) = \mathcal{I}_T\left(\vartheta, \tilde{v}\right) = \sup_{v \in \mathcal{V}_T} \mathcal{I}_T\left(\vartheta, v\right)\,,$$

où $\mathcal{I}_T\left(\vartheta, v\right)$ est l'information de Fisher (32), et de déduire un estimateur $\overline{\vartheta}_T$ (EMV dans notre cas ou un estimateur basé sur l'EMV dans [101]) du paramètre ϑ qui est asymptotiquement efficace dans le sens (33).

Dans ces travaux, après transformation du modèle, le supremum de l'information de Fisher, dans une classe adéquate de contrôles (voir [VI,VII]), peut être écrit sous la forme quadratique

$$\mathcal{J}_T(\vartheta) = T \sup_{v \in L^2[0,T]} \int_0^T \int_0^T K_T(s,\sigma) v(s) v(\sigma) ds d\sigma \tag{40}$$

où le noyau K_T (aussi sous forme intégrale) doit être étudié. Dans le cas classique $H = \frac{1}{2}$, le noyau s'écrit sous forme stationnaire $K_T(s,\sigma) = K(|s-\sigma|)$ et l'optimisation, qui se réduit à une unique dimension, s'effectue par des méthodes de transformée de Fourier [101]. Dans le cas fractionnaire, ces propriétés disparaissent, même lorsque $T \longrightarrow \infty$. Il est tout de même possible de déduire le contrôle optimal de la façon suivante :

– pour une borne inférieure du suprémum, il est suffisant de considérer l'exemple

$$\tilde{v}_t = \frac{\mathbf{1}(t \in [0,T])}{\sqrt{T}}.$$

– pour une borne supérieure du suprémum, nous avons montré dans [VI] que la première valeur propre $\nu_1(T)$ de l'opérateur compact auto-adjoint

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{K}_T: & L^2([0,T]) & \longrightarrow & L^2([0,T]) \\ & \widetilde{v} & \longmapsto & \mathcal{K}_T \widetilde{v} = \int_0^T K_T(t,s) \tilde{v}(s) ds \end{array}$$

est bornée par $\dfrac{\mu^2}{\vartheta^4}$, pour un temps T suffisamment grand.

L'estimation de cette valeur propre se base sur la structure particulière du noyau $K_T(s,\sigma)$. Pour l'exhiber, on introduit le processus gaussien centré $\xi = ((\xi_1(t),\xi_2(t)),0\le t\le T)$ 4-dimensionnel tel que

$$\frac{\mu^2}{4}\mathbf{E}\left(\xi_2(s)b(s)s^{\frac{1}{2}-H}\xi_2(\sigma)b(\sigma)\sigma^{\frac{1}{2}-H}\right) = K_T(s,\sigma).$$

Ce processus ξ est solution d'une équation différentielle stochastique rétrograde (voir [VII]). La représentation générale de la transformée de Laplace d'une part et le calcul explicite par une formule de Cameron-Martin d'autre part permet d'écrire l'égalité

$$\begin{aligned} L_T(a) &= \mathbf{E}_\vartheta \exp\left\{-a\int_0^T\left[\frac{\mu}{2}\xi_2(t)b(t)t^{\frac{1}{2}-H}\right]^2 dt\right\} \\ &= \prod_{i\ge 1}(1+2a\nu_i(T))^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

où $(\nu_i, i\ge 1)$ sont les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{K}_T$, et de montrer ainsi le résultat.
On montre que l'EMV du système (37), avec le contrôle optimal [17]

$$u_{opt}(t) = c_H t^{H-\frac{1}{2}},$$

possède toutes les propriétés asymptotiques voulues. Notamment, la normalité asymptotique s'écrit avec une vitesse régulière $\sqrt{T}$ et une variance limite qui ne dépend pas de H et est identique au cas classique (35).

3– Lorsque le signal est stochastique ($\varepsilon_2 = 1$) et contrôlé ($\varepsilon_1 = 1$) : dans ce cas, on peut par une décomposition judicieuse du problème, se ramener aux calculs effectués précédemment et à un reste à traiter indépendamment. Le principe de décomposition est développé dans [VIII] et consiste

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_T(\vartheta,v) &= \mu^2\lambda^2\int_0^T \mathbf{E}_\vartheta\left(\mathcal{C}(t)(\eta_t - \mathbf{E}_\vartheta\eta_t + \mathbf{E}_\vartheta\eta_t)\right)^2 d\langle N\rangle_t \\ &= \mathcal{I}_{1,T}(\vartheta,v) + \mathcal{I}_{2,T}(\vartheta,v) \end{aligned} \tag{41}$$

où

$$\mathcal{I}_{1,T}(\vartheta,v) = \mu^2\lambda^2\int_0^T \mathbf{E}_\vartheta\left(\mathcal{C}(t)(\eta_t - \mathbf{E}_\vartheta\eta_t)\right)^2 d\langle N\rangle_t$$

17. On remarque que le contrôle est continu en 0 pour $H > \frac{1}{2}$, pour $H < \frac{1}{2}$, le contrôle est de carré intégrable.

et

$$\mathcal{I}_{2,T}(\vartheta, v) = \mu^2\lambda^2 \int_0^T \left(\mathcal{C}(t)\mathbf{E}_\vartheta \eta_t\right)^2 d\langle N\rangle_t.$$

Soit $m(t) = \mathbf{E}_\vartheta \eta_t$. Cette quantité satisfait l'équation

$$\frac{dm(t)}{d\langle N\rangle_t} = \mathcal{A}^\vartheta(t)m(t) + \mathcal{D}(t)v(t), \quad m(0) = \mathbf{0}_{4\times 1}, \tag{42}$$

où

$$\mathcal{D}(t) = \begin{pmatrix} b(t) \\ \mathbf{0}_{2\times 1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}^\vartheta(t) = \begin{pmatrix} -\lambda\vartheta\mathbf{A}(t) & \mathbf{0}_{2\times 2} \\ -\lambda\mathbf{A}(t) & a_\vartheta(t) \end{pmatrix}.$$

Dans le même temps, $\eta_t - m(t)$ satisfait

$$d\left(\eta_t - m(t)\right) = \mathcal{A}^\vartheta(t)\left(\eta_t - m(t)\right) d\langle N\rangle_t + \mu\lambda\gamma(t) \begin{pmatrix} \ell(t) \\ \ell(t) \end{pmatrix} d\nu_t \tag{43}$$

avec la condition initiale $\eta_0 - m(0) = \mathbf{0}_{4\times 1}$. Comme $\mathcal{I}_{1,T}(\vartheta, v)$ ne dépend pas de $v(t)$ dans l'équation (43), on note cette quantité $\mathcal{I}_{1,T}(\vartheta)$. En fait, $\mathcal{I}_{1,T}(\vartheta)$ est l'information de Fisher du système (37) quand $u(t) = 0$.

Par conséquent, maximiser $\mathcal{I}_T(\vartheta, v)$ revient à maximiser $\mathcal{I}_{2,T}(\vartheta, v)$ qui correspond aux calculs effectués dans l'item 2 et les articles [VI,VIII], qui mènent au même contrôle optimal.

En ce qui concerne la vérification des conditions d'application du théorème d'Ibragimov et Has'minskii pour déduire les propriétés asymptotiques de l'EMV du système avec contrôle optimal, on calcule la transformée de Laplace du terme quadratique du log-ratio (38). Là encore, la décomposition donne

$$L_T(a) = L_{1,T}(a)L_{2,T}(a).$$

Le premier terme se traite comme dans l'item 1 et les articles [IV,V]. Le second terme est nouveau et son étude est détaillée dans [VIII].

4.2 Perspectives

Pour conclure ce chapitre, nous présentons quelques perspectives intéressantes de recherche sur les modèles d'observations partielles en temps continu :

i) Exposant de Hurst différents dans le signal et dans les observations : dans ce problème, le signal est un processus de Ornstein-Uhlenbeck fractionnaire d'exposant de Hurst H_s et il est observé linéairement dans un bruit fractionnaire

d'exposant $H < H_s$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_t &=& -\vartheta \displaystyle\int_0^t X_s ds \;+\; V_t^{H_s} \\ Y_t &=& \mu \displaystyle\int_0^t X_s ds \;+\; W_t^H, \end{array} \right. , \quad t \geq 0. \tag{44}$$

Même dans le cas « semi-classique », $H_s > H = 1/2$, le filtre de Kalman-Bucy n'est plus un système d'équations différentielles mais un système d'équations intégrales de Volterra for $t \geq s$,

$$\pi_t(X) = \int_0^t \left(-\vartheta - \mu^2 \gamma(t,s)\right) \pi_s(X) ds + \int_0^t \mu \gamma(t,s) dY_t \,, \quad \pi_0(X) = 0 \,. \tag{45}$$

Dans l'équation précédente, $\gamma(t,s) = \mathbf{E}_\vartheta \left(X_t - \pi_t(X)\right)\left(X_s - \pi_s(X)\right)$ est la variance de l'erreur de filtrage, solution unique de l'équation

$$\begin{array}{rcl} \gamma(t,s) &=& \displaystyle\int_0^s -\vartheta \left(\gamma(s,r) + \gamma(t,r)\right) dr - \int_0^s \mu^2 \gamma(s,r)\gamma(t,r) dr + \\ && \displaystyle + \frac{1}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} + |t-s|^{2H}\right) \,, \quad \gamma(t,0) = 0 \,. \end{array}$$

La connaissance du comportement asymptotique du filtre est nécessaire pour déduire les propriétés de l'EMV de ϑ. Pour le moment, le noyau f^* de l'approximation stationnaire du filtre

$$\pi_t^*(X) = \int_0^t f^*(t-s) dY_s$$

satisfait un problème de valeurs aux frontières de Riemann [45] que nous devons résoudre pour aller plus en avant.

ii) Signal solution d'une équation aux dérivées partielles stochastiques : dans ce problème, le signal est la solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique (équation de la chaleur stochastique)

$$du(t,x) = \vartheta u_{x,x}(t,x) dt + dW(t,x), \quad 0 < t \leq T, \quad x \in (0,\pi) \tag{46}$$

de conditions initiales et aux frontières nulles, avec $\vartheta > 0$ et W un mouvement brownien « cylindrique » [86], *i.e.*

$$W(t,x) = \sum_{k \geq 1} w_k(t) h_k(x)$$

où $(w_k(t), t \geq 0)_{k\geq 1}$ est une suite de mouvements browniens indépendants et $h_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx)$. La substitution d'une solution de la forme

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 1} u_k(t)h_k(x)$$

dans l'équation (46) implique que chaque processus u_k doit satisfaire l'équation différentielle stochastique

$$du_k(t) = -k^2\vartheta u_k(t)dt + dw_k(t).$$

Chaque « harmonique » u_k est un processus de Ornstein-Uhlenbeck. L'estimateur de maximum de vraisemblance du coefficient de dérive ϑ est consistant (lorsque $T \longrightarrow \infty$). Mais le problème, ici, consiste à estimer ϑ en observant les N premières harmoniques à T fixé. Les propriétés asymptotiques de l'EMV ont été déduites dans [86] dans le cas classique et [25] dans le cas fractionnaire. Nous proposons d'étendre ces résultats au cadre partiellement observé. Même si la linéarité de la transformée de Laplace permet d'étendre les calculs de [V] dans ce cadre, nous ne pouvons plus utiliser les propriétés asymptotiques du filtre de Kalman.

5 Observations partielles en temps discret

Le filtre de Kalman [68] est la solution optimale récursive du problème de filtrage d'un processus autorégressif (multivarié) d'ordre un observé linéairement dans un bruit blanc gaussien

$$\left\{ \begin{array}{rclcll} X_n & = & \Theta X_{n-1} & + & \Lambda\xi_n, & n \geq 1, \qquad X_0 = x, \\ Y_n & = & \mathcal{M}X_n & + & \widetilde{\Lambda}\widetilde{\xi}_n, & n \geq 1, \qquad Y_0 = y. \end{array} \right. \tag{47}$$

Cette théorie du filtrage optimal est très célèbre et utilisée dans nombre de domaines d'ingénierie. Des algorithmes robustes (*square-root type*) et rapides (*Chandrasekhar type*) ont été développés. Le filtre de Kalman est même parfois utilisé comme approximation de la solution de filtrage dans le cas d'une dynamique non-linéaire (*Extended Kalman filter*).

La qualité du filtre peut cependant se dégrader grandement si les bruits ne satisfont pas les hypothèses d'utilisation. Des développements pour des bruits corrélés et/ou des bruits colorés ainsi que pour des bruits markoviens non gaussiens ont fait l'objet d'un intérêt croissant ces dernières années.

Nous avons détaillé dans [IX] l'algorithme de filtrage optimal lorsque les bruits du signal et des observations sont des suites gaussiennes stationnaires de même structure de covariance. Dans cette situation, nous perdons la propriété de Markov du signal $X = (X_n, n \geq 0)$ et la structure d'innovation de l'observation $Y = (Y_n, n \geq 0)$. Notre méthode de transformation du modèle, inspirée des travaux effectués dans le cas continu, permet de réduire le problème à un problème de filtrage « classique » d'un processus autorégressif d'ordre un (de dimension double) observé linéairement dans un bruit blanc.

En comparaison, les techniques habituellement utilisées pour ce type de bruits sont l'augmentation de la dimension de l'état (en mémoire finie) et/ou les schémas de différences (voir [2]). Elles mènent à des états de dimension plus grande que pour notre filtre. Une autre approche intéressante est donnée dans [83] où un algorithme de filtrage optimal semi-récursif et un algorithme de filtrage sous-optimal récursif ont été proposés. Le premier est coûteux en terme d'opération, nécessitant l'inversion d'une matrice $n \times n$ à l'étape n. Le second est instable et écrit sous des conditions restrictives.

Dans [IX], nous considérons un signal aléatoire non-observable X et la suite des observations Y satisfaisant le système (47) où les matrices $\mathcal{M} \neq 0$, Θ, Λ et $\tilde{\Lambda}$ sont connues, x est une condition initiale déterministe, $\xi = (\xi_n)_{n\geq 1}$ et $\tilde{\xi} = (\tilde{\xi}_n)_{n\geq 1}$ sont des suites de vecteurs gaussiens de composantes indépendantes et telles que pour tout $m, n \geq 1$,

$$\mathbf{E}\xi_n = \mathbf{E}\tilde{\xi}_n = 0, \quad \mathbf{E}\xi_n\tilde{\xi}_m = 0$$

et

$$\mathbf{E}\xi_m\xi_n = \mathbf{E}\tilde{\xi}_m\tilde{\xi}_n = c(m,n) = \rho(|\, n-m|), \quad \rho(0) = 1.$$

On suppose également que $c(.,.)$ est définie positive.

En supposant l'observation de Y, la solution du problème de filtrage est donnée par la distribution conditionnelle (gaussienne) de X_n sachant $\sigma(\{Y_k\,,\, 1 \leq k \leq n\})$. Dans le cas de bruits blancs, les équations récursives des paramètres (moyenne et variance) qui caractérisent cette loi sont les équations de Kalman.

5.1 Notations et définitions

Soit $\xi = (\xi_n)_{n\geq 0}$ une suite stationnaire de variables aléatoires réelles gaussiennes centrées. On lui associe la suite d'« innovation » $(\sigma_n\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$\sigma_1\varepsilon_1 = \xi_1, \quad \sigma_n\varepsilon_n = \xi_n - \mathbf{E}(\xi_n \,|\, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}), \quad n \geq 2,$$

où $\varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, $n \geq 1$, sont des variables indépendantes. Il existe un noyau déterministe $k = (k(n,m),\, n \geq 1,\, m \leq n)$ tel que $k(n,n) = 1$ et

$$\sigma_n \varepsilon_n = \sum_{m=1}^{n} k(n,m)\xi_m. \tag{48}$$

Dans la suite, pour $n \geq 1$, on note β_{n-1} les coefficients de corrélation partielle

$$\beta_{n-1} = -k(n,1). \tag{49}$$

On remarque que $\sigma_n\beta_n$ est la corrélation de ξ_0 et ε_n, précisément $\sigma_n\beta_n = \mathbf{E}\xi_0\varepsilon_n$. La fonction $c(.,.)$ étant définie positive, il existe également un noyau déterministe réciproque $K = (K(n,m), n \geq 1, m \leq n)$ tel que

$$\xi_n = \sum_{m=1}^{n} K(n,m)\sigma_m\varepsilon_m. \tag{50}$$

Les noyaux k et K sont les éléments de la décomposition de Cholesky de la matrice de covariance et de son inverse. Précisément,

$$\Gamma_n^{-1} = k_n D_n^{-1} k_n^* \quad \text{and} \quad \Gamma_n = K_n^* D_n K_n,$$

où $\Gamma_n(i,j) = \rho(|i-j|)$, k_n et K_n sont des matrices de taille $n \times n$ triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale et les termes génériques $k(i,j)$ et $K(i,j)$ sous la diagonale (voir la section 5.4 pour des noyaux correspondant à des modèles spécifiques) et D_n est une matrice de taille $n \times n$ diagonale avec σ_i^2, $i = 1, \ldots, n$, comme termes diagonaux.

5.2 Transformation des observations

L'idée principale de cette section est de transformer linéairement les observations originales $(Y_k, 1 \leq k \leq n)$ afin d'obtenir des bruits blancs dans la dynamique des observations modifiées (voir par exemple les contributions [39, 40, 75]). On introduit la suite $Z = (Z_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$Z_n = \sum_{m=1}^{n} k(n,m)Y_m, \quad n \geq 1. \tag{51}$$

Réciproquement,

$$Y_n = \sum_{m=1}^{n} K(n,m)Z_m.$$

De plus, la filtration naturelle de Z coïncide avec la filtration naturelle de Y. Dans [IX], on montre que

$$X_n = \sum_{m=1}^{n} K(n,m) b^* \zeta_m, \tag{52}$$

$$Z_n = \mathcal{M} b^* \zeta_n + \sigma_n \widetilde{\Lambda} \widetilde{\varepsilon}_n, \quad n \geq 1. \tag{53}$$

où le processus autorégressif $(\zeta_n)_{n\geq 1}$ $(2 \times d)$-dimensionel est défini par

$$\zeta_n = A_{n-1}\zeta_{n-1} + \sigma_n b \Lambda \varepsilon_n, \quad n \geq 1, \quad \zeta_0 = bx, \tag{54}$$

avec

$$A_n = \begin{pmatrix} \Theta & \beta_n \Theta \\ \beta_n \mathbf{I}_d & \mathbf{I}_d \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_d \\ \mathbf{O}_d \end{pmatrix}, \tag{55}$$

$\mathbf{I}_d$ la matrice identité de taille $d \times d$ et $\mathbf{0}_d$ la matrice de zéros de taille $d \times d$.

Puisque le modèle signal-observation défini par les équations (54) et (53) implique des bruits blancs, il tombe dans le cadre du filtrage classique de Kalman. Le filtre optimal peut s'exprimer en fonction des innovations $\nu_n = Z_n - \mathbf{E}(Z_n/\mathcal{Z}_{n-1})$, $n \geq 1$ de Z :

$$\nu_n = Z_n - \mathcal{M} b^* A_{n-1} \pi_{n-1}(\zeta). \tag{56}$$

On peut également décrire le comportement de l'espérance conditionnelle $\pi_n(\zeta)$ de ζ_n sachant $\mathcal{Z}_n$ et la matrice de variance-covariance de l'erreur de filtrage $\gamma_{\zeta\zeta}(n) = \mathbf{E}(\zeta_n - \pi_n(\zeta)(\zeta_n - \pi_n(\zeta))^*$, $n \geq 1$, par les équations :

$$\pi_n(\zeta) = A_{n-1}\pi_{n-1}(\zeta) + P_n b \mathcal{M}^* \langle \nu \rangle_n^{-1} \nu_n \,, \quad \pi_0(\zeta) = bx,$$

et

$$\gamma_{\zeta\zeta}(n) = \Phi_n P_n \,, \quad \gamma_{\zeta\zeta}(0) = 0,$$

où

$$P_n = A_{n-1}\gamma_{\zeta\zeta}(n-1)A_{n-1}^* + \sigma_n^2 b \Lambda \Lambda^* b^*, \tag{57}$$

$$\langle \nu \rangle_n = \sigma_n^2 \widetilde{\Lambda}\widetilde{\Lambda}^* + \mathcal{M} b^* P_n b \mathcal{M}^* \quad \text{et} \quad \Phi_n = \mathbf{I}_{2d} - P_n b \mathcal{M}^* \langle \nu \rangle_n^{-1} \mathcal{M} b^*. \tag{58}$$

5.3 Filtrage optimal

La transformation du modèle a permis de réduire le système initial au problème de filtrage (52). Même si X_n ne satisfait pas les conditions du théorème de filtrage optimal [84, Théorème 13.4] (car le noyau $K(n,.)$ dépend de n), il est possible

d'obtenir un filtre de type Kalman présenté dans [VIII]. L'espérance conditionnelle $\pi_n(X)$ de X_n sachant $\mathcal{Y}_n$ et la matrice de variance-covariance de l'erreur de filtrage $\gamma_{XX}(n) = \mathbf{E}(X_n - \pi_n(X))(X_n - \pi_n(X))^*$ satisfont, pour $n \geq 1$,

$$\pi_n(X) = x + \sum_{m=1}^{n} K(n,m) b^* \pi_m(\zeta) + \sum_{m=1}^{n} \gamma_{X\zeta}(n, m-1) A_{m-1}^* b \mathcal{M}^* \langle \nu \rangle_m^{-1} \nu_m \qquad (59)$$

et

$$\gamma_{XX}(n) = \sum_{m=1}^{n} K(n,m) \Big(\gamma_{X\zeta}(n,m) b + b^* \Phi_m A_{m-1} \gamma_{X\zeta}^*(n, m-1) \Big) - \widetilde{P}^*(n,m) \langle \nu \rangle_m^{-1} \widetilde{P}(n,m)$$

où $\widetilde{P}(n,m) = \mathcal{M} b^* A_{m-1} \gamma_{X\zeta}^*(n, m-1)$, Φ_m est défini par l'équation (58) et la matrice $\gamma_{X\zeta}(n,m)$, pour $1 \leq m \leq n$, suit l'équation récursive

$$\gamma_{X\zeta}(n,m) \;\; = \;\; \gamma_{X\zeta}(n, m-1) A_{m-1}^* \Phi_m^* + K(n,m) b^* \gamma_{\zeta\zeta}(m). \qquad (60)$$

On peut noter que dans le cas de bruits blancs, lorsque $K(n,m) = \delta_{n-m}$ et $\beta_n = \delta_n$, (δ_n est le symbole de Kronecker), les équations précédentes se réduisent au filtre de Kalman.

5.4 Simulations et application à l'hybridation Inertie–GPS

Des simulations ont été effectuées dans [IX] pour des suites stationnaires de bruits gaussiens dans le système (47) :

1. bruits « moving-average » (MA),

$$\xi_n = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} (\varepsilon_{n+1} + \alpha \varepsilon_n), \quad n \geq 1,$$

où $(\varepsilon_n, n \geq 1)$ est une suite de variables gaussiennes centrées-réduites indépendantes. Les bruits des observations $\tilde{\xi}$ possèdent la même structure. À titre indicatif, dans ce cas, la fonction de covariance s'écrit

$$\rho(|n-m|) = \mathbb{1}_{\{|n-m|=0\}} + \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \mathbb{1}_{\{|n-m|=1\}}.$$

Asymptotiquement, lorsque $n \to \infty$, $K(n,m) = \delta_{n-m} + \alpha \delta_{n-m-1}$, $k(n,m) = (-\alpha)^{n-m}$ et $\beta_n = -(-\alpha)^n$.

2. bruits autorégressifs (AR(1)),

$$\xi_{n+1} = \sqrt{1-\alpha^2}\varepsilon_{n+1} + \alpha\xi_n, \quad n \geq 1, \quad \xi_1 = \varepsilon_1,$$

où $(\varepsilon_n, n \geq 1)$ est une suite de variables gaussiennes centrées-réduites indépendantes. Les bruits des observations $\tilde{\xi}$ possèdent la même structure. Dans ce cas, la fonction de covariance dans son état stationnaire (lorsque $n \longrightarrow \infty$, $n-m$ étant constant) vaut

$$\rho(|n-m|) = \alpha^{|n-m|}.$$

3. bruits gaussiens fractionnaires (fGn) dont la fonction de covariance est explicite et vaut

$$\rho(|m-n|) = \frac{1}{2}\left(|m-n+1|^{2H} - 2|m-n|^{2H} + |m-n-1|^{2H}\right)$$

pour un exposant de Hurst connu $H \in (0,1)$.

Dans tous ces cas, le filtre optimal est naturellement meilleur (au sens d'une plus petite variance de l'erreur de filtrage) que le filtre de Kalman classique (voir [IX]). Les simulations Monte-Carlo sur 10000 trajectoires sont illustrées par les figures 2 et 3).

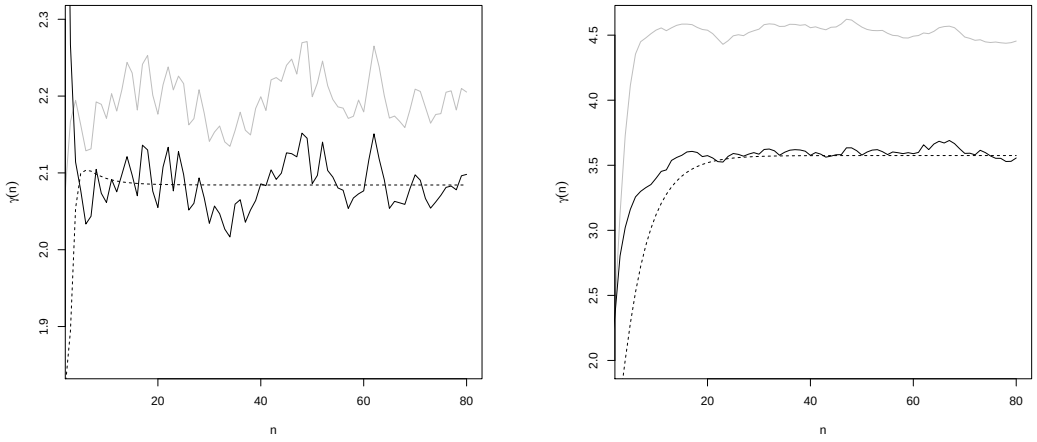

FIGURE 2 – Variance théorique de l'erreur de filtrage $\gamma_{X,X}(n)$, $n = 1 \ldots 80$, (en pointillés) et variance empirique Monte-Carlo pour le filtre de Kalman à bruits colorés (en noir) et classique (en gris) pour les bruits MA (à gauche) et AR(1) (à droite).

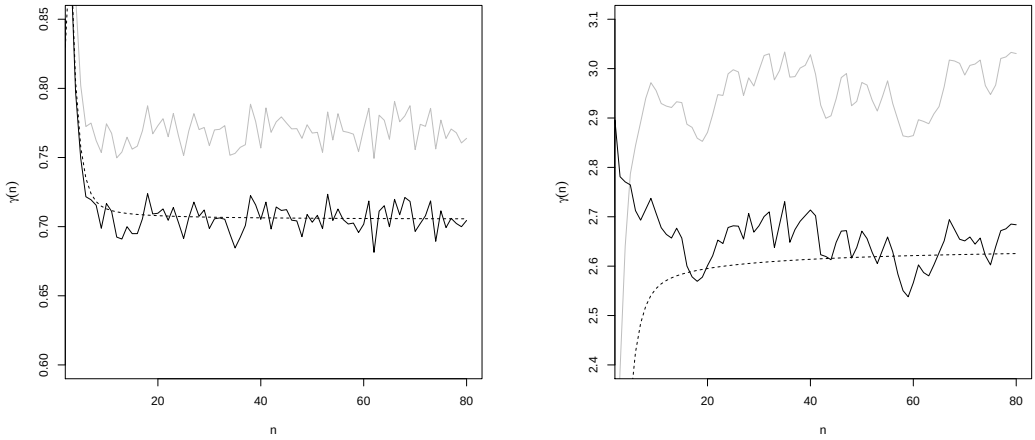

FIGURE 3 – Variance théorique de l'erreur de filtrage $\gamma_{X,X}(n)$, $n = 1 \dots 80$, (en pointillés) et variance empirique Monte-Carlo pour le filtre de Kalman à bruits colorés (en noir) et classique (en gris) pour les bruits gaussiens fractionnaires avec $H = 0.2 < \frac{1}{2}$ (à gauche) et $H = 0.8 > \frac{1}{2}$ (à droite).

Il est également plus rapide que les algorithmes concurrents de [83] comme l'indique la figure 4.

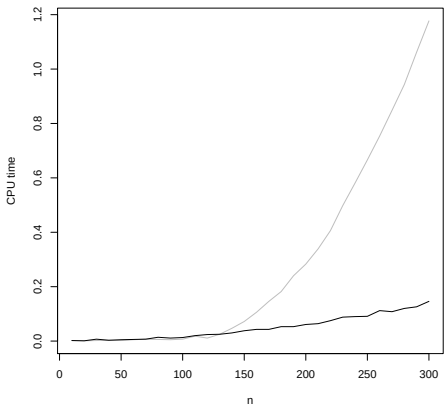

FIGURE 4 – Temps CPU pour notre algorithme (en noir) et l'algorithme concurrent (en gris) pour une taille du signal n croissante.

L'algorithme de filtrage présenté précédemment pour des bruits gaussiens stationnaires (par exemple des bruits à longue mémoire comme les bruits gaussiens fractionnaires) est testé, dans le cadre d'un Projet Exploratoire Premier Soutien de l'Agence pour les Mathématiques en Interaction avec l'Entreprise et la Société (AMIES), comme alternative aux solutions de filtrage classiques (filtre de Kalman, filtre de Kalman étendu) pour l'hybridation Inertie–GPS dans des systèmes de navigation électroniques, embarqués, miniatures et composés de capteurs de type MEMS [18]. Ce projet est mené en collaboration avec la société SBG Systems, qui produit et commercialise de tels systèmes de navigation.

Nous considérons, dans ce projet, un mobile qui se déplace dans un repère unidimensionnel inertiel. L'unité de mesures inertielles embarquée sur ce mobile est composée d'un unique accéléromètre. Le système de navigation est composé de cette unité de mesures inertielles et d'un GPS additionnel. Ce système est décrit par exemple dans [7, 41].

Le but de ce travail est d'évaluer les performances de notre solution de filtrage (complexité, vitesse de calcul, variance de l'erreur de filtrage, *etc.*) en comparaison des autres solutions embarquées existantes. Ces performances doivent être évaluées sur des simulations et sur des expériences réelles.

Le travail de simulation est achevé ainsi que les comparaisons concernant la vitesse de calcul sur des cartes électroniques embarquées (travaux menés en partenariat avec des étudiants et des enseignants-chercheurs de l'ENSIM). Des expériences sur un banc linéaire et sur une section rectiligne du tramway (en partenariat avec l'ESGT) donneront les premiers résultats de cette étude avant la fin de l'année 2014.

Dans le cas où le gain de l'utilisation de corrélation dans les bruits pour ces modèles de filtrage, plusieurs perspectives sont envisagées. D'abord, la question de l'estimation du paramètre de la structure de corrélation *on-line* se posera. Ensuite, il faudra étendre, si possible, ces résultats aux dimensions supérieures.

18. Micro-Electro-Mechanicals Systems

Troisième partie

Champs gaussiens fractionnaires

Dans cette partie, nous présentons les travaux [X-XIII]. Le premier chapitre présente le *package* `R FieldSim`[19] décrit dans les articles [XI] et [XIII]. Ce *package* permet de simuler des champs gaussiens fractionnaires sur un plan, une sphère ou un hyperboloïde et d'estimer le paramètre de rugosité dans les cas les plus simples. Le deuxième chapitre aborde quelques applications possibles des champs fractionnaires en géologie [X,XII] ainsi que nos futurs travaux sur le sujet.

6 Simulation de champs gaussiens fractionnaires

Les phénomènes rugueux apparaissent dans de nombreux domaines d'applications des mathématiques : simulation de texture et de paysages naturels (nuages, montagnes), géologie, mécanique des fluides, mathématiques financières, trafic ethernet, *etc.* Certains phénomènes comme le trafic ethernet ou les cours d'actifs financiers sont indexés par le temps. À l'instar de ces deux exemples, les profils ou coupes stylolitiques en géologie (voir la figure 10) sont des trajectoires rugueuses indexées par une seule dimension d'espace.

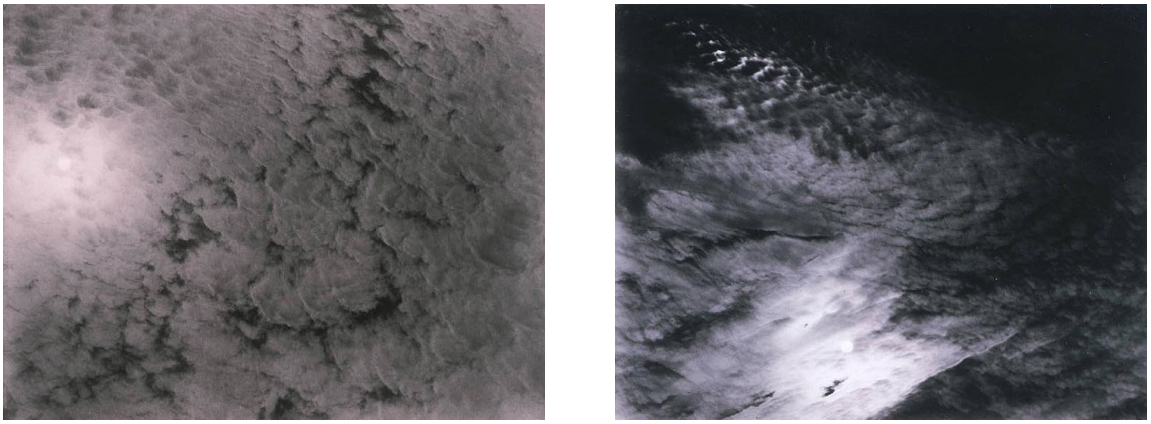

FIGURE 5 – Deux photos de la série *Equivalent* de Stieglitz (1864-1946).

19. Le *package* est disponible à l'adresse `http://cran.r-project.org/web/packages/FieldSim/index.html` dans sa version 3.1.3.

D'autres phénomènes, comme les images (en *image processing*) et les flots turbulents en mécanique des fluides, sont respectivement indexés par les espaces euclidiens $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. L'ouvrage récent [30] compile les connaissances actuelles en modélisation et en statistique des champs fractionnaires dans $\mathbb{R}^d$. Enfin, certains phénomènes sont indexés par des variétés ; c'est le cas du *cosmic microwave background* [20] ou des données solaires [31], qui conduisent à des données sphériques. Les textures réelles sont généralement supportées par des surfaces.

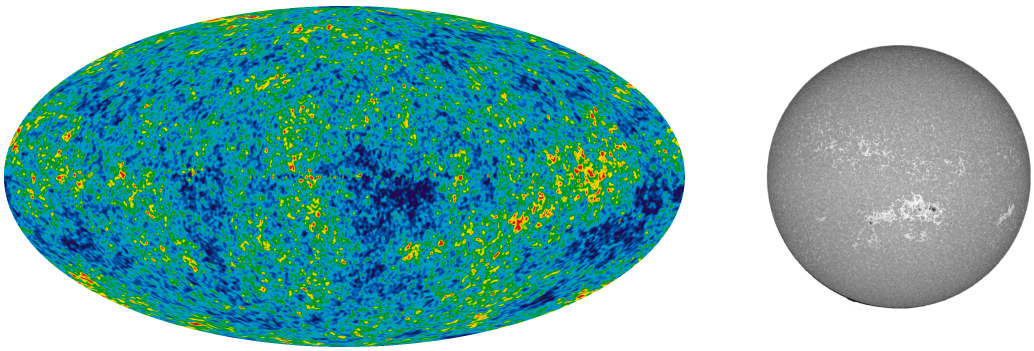

FIGURE 6 – Projection d'Aitoff du *cosmic microwave background* (à gauche) et données solaires (à droite).

Les champs gaussiens fractionnaires (champ brownien fractionnaire, champ brownien multifractionnaire, drap brownien fractionnaire, *etc.*) sont des candidats naturels pour modéliser des phénomènes rugueux. Ces champs peuvent être indexés par des espaces euclidiens [30, 55, 69, 103] ou, plus généralement, par des variétés [61]. La régularité des champs gaussiens est généralement caractérisée par des paramètres ou des fonctions. Il est intéressant en pratique de pouvoir estimer ces paramètres de régularité à partir de l'observation d'une surface uniquement.

Après avoir introduit quelques définitions et notations des champs gaussiens (section 6.1), nous décrivons les deux étapes (exacte et raffinement) de la procédure `fieldsim` du package `R FieldSim` (section 6.2). Les méthodes classiques d'estimation des paramètres de régularité sont présentées dans la section 6.3. Ensuite, nous développons l'extension de cette méthode aux champs fractionnaires sur des variétés spécifiques (section 6.4).

6.1 Champs gaussiens réels sur $\mathbb{R}^d$

Soit $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^d$ et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^d$. Dans la suite, on note $X = (X(M), M \in \mathcal{M})$ un champ aléatoire gaussien centré. La fonction de covariance

$R(\cdot,\cdot)$ du champ X définie par

$$R(M,M') = \mathbf{cov}\left(X(M), X(M')\right), \quad M,\ M' \in \mathcal{M}$$

est semidéfinie positive, *i.e.* que pour tout $n \geq 1$, pour tous nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et tous points $M_1, \ldots, M_n \in \mathcal{M}$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j R(M_i, M_j) \geq 0.$$

Réciproquement, à toute fonction $R(\cdot,\cdot)$ semidéfinie positive est associée un unique champ aléatoire gaussien centré (voir par exemple [30]).

Le champ brownien fractionnaire, par exemple [20], est l'unique processus gaussien centré défini par la fonction de covariance

$$R(M,M') = \frac{1}{2}\left(\|M\|^{2H} + \|M'\|^{2H} - \|M - M'\|^{2H}\right), \quad M,\ M' \in \mathcal{M}, \tag{61}$$

qui est semidéfinie positive pour un paramètre de Hurst $H \in (0,1]$. Le cas $H = 1$ est dégénéré et nous l'omettrons volontairement dans la suite. Les propriétés du champ brownien fractionnaire sont semblables à celle du mouvement brownien fractionnaire. Notamment, plus H est élevé, plus la surface est régulière (directionnellement, au sens de Hölder) et inversement.

La simulation de champs gaussiens fractionnaires pose déjà des problèmes de mémoire et de complexité sur le plan. Pour résoudre ces problèmes, nous avons proposé un algorithme rapide comportant une étape de simulation exacte et une étape de simulation approchée (voir [XI]). Cet algorithme peut s'étendre aux dimensions supérieures et à des variétés spécifiques.

6.2 Procédure `fieldsim`

Nous donnons dans ce paragraphe un descriptif de la procédure `fieldsim`, qui permet de simuler un champ aléatoire gaussien centré sur le plan euclidien. Un sous-espace borné de $\mathbb{R}^2$, par exemple $\mathcal{M} = [0,1]^2$, et la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$ sont généralement considérés pour la simulation.

La procédure `fieldsim` permet de générer une éventuelle surface du champ aléatoire gaussien sur une grille de discrétisation de $\mathcal{M}$ (définie par défaut ou par l'utilisateur) à partir de sa fonction de covariance $R(\cdot,\cdot)$. Cette procédure se divise en

20. D'autres exemples seront présentés dans la section 6.2.

deux étapes : une étape de simulation exacte et une étape de simulation approchée ; par conséquent, la grille de discrétisation est l'union $\{\mathcal{S}_e, \mathcal{S}_r\}$ d'une grille $\mathcal{S}_e$ sur laquelle la procédure simulera le champ de manière exacte et une grille $\mathcal{S}_r$ sur laquelle elle simulera le champ de manière approchée.

Étape de simulation exacte. On note alors $(X(M))_{M\in\mathcal{S}_e}$ le vecteur gaussien centré de matrice de covariance $\mathbf{R}$ donnée par $\mathbf{R}_{i,j} = R(M_i, M_j)$, M_i, $M'_j \in \mathcal{S}_e$, $i, j \in \{1, \ldots, \mathbf{Card}\,\mathcal{S}_e\}$. La méthode de simulation exacte des valeurs du champ est basée sur la décomposition de Cholesky [21] de la matrice $\mathbf{R}$.

Étape de simulation approchée. Pour simuler le champ en chaque point restant $M \in \mathcal{S}_r$, nous n'utiliserons qu'un nombre fixe de voisins. Précisément, notons N_M l'ensemble des voisins du point M (pour la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$) et $\mathcal{X}_{N_M}$ l'espace des variables générées par $X(M')$, $M' \in N_M$. On peut remarquer que l'ensemble des voisins est inclus dans l'ensemble des points déjà simulés (dans l'étape de simulation exacte et dans les précédentes itérations de l'étape de simulation approchée). On note $X_{\mathcal{X}_{N_M}}(M)$ la combinaison linéaire optimale de variables de $\mathcal{X}_{N_M}$ qui approche $X(M)$ dans le sens qu'elle minimise la variance de l'innovation $\varepsilon_{\mathcal{X}_{N_M}}(M) = X(M) - X_{\mathcal{X}_{N_M}}(M)$. Alors, la nouvelle variable $X(M)$ est obtenue par

$$X_{\mathcal{X}_{N_M}}(M) + \sqrt{Var(\varepsilon_{\mathcal{X}_{N_M}}(M))}U,$$

où U est une variable aléatoire gaussienne centrée-réduite indépendante des valeurs de champs déjà simulées. On peut noter de nouveau que la variable $X_{\mathcal{X}_{N_M}}(M)$ et la variance $\mathbf{var}(\varepsilon_{\mathcal{X}_{N_M}}(M))$ sont entièrement déterminées par la structure de covariance de la suite $X(M)$, $X(M')$, $M' \in N_M$.

Pour les raisons de stockage ou de temps de calcul, l'étape de simulation exacte ne doit concerner qu'un nombre restreint de points d'évaluation tandis que l'étape de simulation approchée s'applique sur le plus grand nombre. De plus, pour quantifier

21. La méthode de Cholesky est utilisée ici pour convenir aux grilles les plus générales. Il est possible d'améliorer la vitesse de cette étape en utilisant d'une part les possibilités du calcul parallèle et d'autre part les spécificités des champs et des grilles sur lesquelles ils sont simulés. Dans le cas d'une grille régulière et d'un processus gaussien à accroissement stationnaires par exemple, la méthode de Wood et Chan [120] peut être utilisée.

la qualité des simulations approchées, des tests ont été effectués [22] dans [XI] sur l'estimation du paramètre de Hurst comme dans [27].

Pour la simulation sur le plan, la procédure `fieldsim` propose par défaut un ensemble de discrétisation régulier de la forme $(k2^{-J}, l2^{-J})$, k, $l = 0, \ldots, 2^J$ avec J un entier positif. L'étape de simulation exacte peut ainsi s'appliquer sur les points $(k2^{-J_a}, l2^{-J_a})$, où J_a est l'échelle choisie par l'utilisateur (en général $J_a = 1$ ou 2). L'étape de simulation approchée s'exécute sur le reste des points de discrétisation. Si la fonction de covariance est explicite, il est possible de simuler avec `fieldsim` le champ gaussien associé (voir Figure 7), par exemple :

- Le champ brownien multifractionnaire (standard) [103] défini par sa fonction de covariance

$$R(M, M') = K\left(\|M\|^{\widetilde{H}(M,M')} + \|M'\|^{\widetilde{H}(M,M')} - \|M - M'\|^{\widetilde{H}(M,M')}\right),$$

  où $\widetilde{H}(M, M') = H(M) + H(M')$ et le paramètre de Hurst est une fonction continue $H : \mathbb{R}^d \longrightarrow (0, 1)$,

$$K = \frac{C\left(\frac{H(M)+H(M')}{2}\right)^2}{2C\left(H(M)\right)C\left(H(M')\right)} \quad \text{et} \quad C(h) = \left(\frac{\pi^{\frac{d+1}{2}}\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)}{h\sin\left(\pi h\right)\Gamma\left(2h\right)\Gamma\left(h+\frac{d}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

  On retrouve le champ brownien fractionnaire pour une fonction H constante.

- Le champ brownien bi-fractionnaire [55] défini par sa fonction de covariance

$$R(M, M') = \frac{1}{2}\left(\left(\|M\|^{2H} + \|M'\|^{2H}\right)^K - \|M - M'\|^{2HK}\right),$$

  où le paramètre de Hurst $H \in (0, 1)$ et $K \in (0, 1]$. Pour $K = 1$, on retrouve le champ brownien fractionnaire standard. Pour $K < 1$, les accroissements du processus ne sont plus stationnaires mais restent localement autosimilaires d'ordre HK.

- Le drap brownien fractionnaire [69] défini par sa fonction de covariance

$$R(M, M') = \frac{1}{2^d}\prod_{i=1}^{d}\left(|M_i|^{2H_i} + |M_i'|^{2H_i} - |M_i - M_i'|^{2H_i}\right),$$

22. Récemment, des tests ont été également effectués sur la simulation du champ brownien fractionnaire anisotrope en comparaison avec l'algorithme « turning-band » [17]. L'étape de simulation approchée de l'algorithme nécessite alors un nombre de voisins assez grand pour capter toutes les propriétés statistiques de ce champ.

où $M = (M_1, M_2, \ldots, M_d) \in \mathbb{R}^d$, $M' = \left(M'_1, M'_2, \ldots, M'_d\right) \in \mathbb{R}^d$ et $H = (H_1, H_2, \ldots, H_d)$ est le paramètre de Hurst multivarié de $\mathbb{R}^d$ avec $0 < H_i < 1$ pour tout $i = 1 \ldots d$.

- Le champ brownien fractionnaire anisotrope [18] défini par sa fonction de covariance
$$R(M, M') = v_H(M) + v_H(M') - v_H(M - M')$$
où le variogramme
$$v_H(x) = 2^{2H-1}\gamma(H)C_{H,\vartheta_1,\vartheta_2}(\arg(x))\|x\|^{2H}$$
avec $H \in (0, 1)$, $\gamma(H)$ une constante (dépendante de H de manière explicite) et $C_{H,\vartheta_1,\vartheta_2}(.)$ une fonction qui s'exprime avec des fonctions Beta incomplètes et de deux constantes $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leq \frac{\pi}{2}$.

D'autres champs fractionnaires gaussiens, comme le champ brownien fractionnaire à espace-temps déformé ou le champ brownien fractionnaire hyperbolique (avec leurs références bibliographiques) sont décrits et simulés dans [XI].

6.3 Estimation de la régularité

Il existe plusieurs types de méthodes d'estimation des paramètres de régularité des processus ou champs gaussiens fractionnaires : méthode de maximum de vraisemblance, méthodes spectrales, méthodes par variations quadratiques pour ne citer qu'elles (voir [11, 27] pour un exposé de ces méthodes).

Dans le cas du champ brownien fractionnaire défini sur $\mathbb{R}^2$, le paramètre de Hurst H peut être estimé par variations quadratiques généralisées. On note
$$\hat{H}_N = \frac{1}{2}\log_2 \frac{V_{\frac{N}{2}}}{V_N} + 1$$
l'estimateur de H où
$$V_N = \sum_{k=1}^{N-1}\sum_{\ell=1}^{N-1}\left(\sum_{i=-1}^{1}\sum_{j=-1}^{1} a_i a_j X\left(\begin{array}{c}\frac{k+i}{N} \\ \frac{\ell+j}{N}\end{array}\right)\right)^2$$
avec $a_{-1} = a_1 = 1$ et $a_0 = 2$. Ici N est la taille d'une dimension d'espace de la grille de discrétisation. Cet estimateur est consistant et asymptotiquement normal
$$N(\hat{H}_N - H) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \gamma_H^2),$$

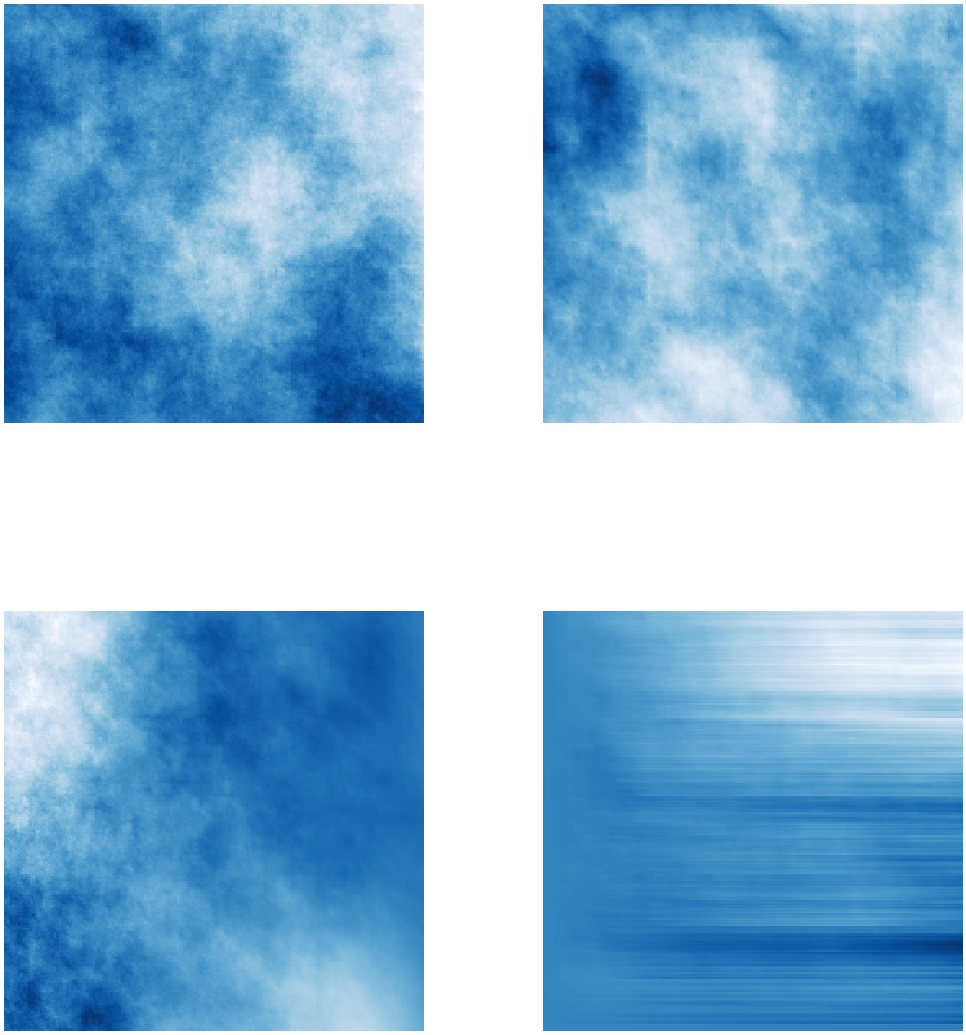

FIGURE 7 – Champs browniens fractionnaires (en haut, pour $H = 0.5$ à gauche et $H = 0.7$ à droite), champ brownien multifractionnaire (en bas à gauche pour $H(t) = 0.5 + 0.4t_1$) et drap brownien fractionnaire (en bas à droite pour $H_1 = 0.5$, $H_2 = 0.9$). Toutes les simulations utilisent la procédure `fieldsim` et sont de taille 256×256.

où la convergence est en loi et γ_H^2 est une constante. L'expression détaillée de γ_H^2 est donnée dans [XI].

Pour le moment, le package `FieldSim` ne possède que cet estimateur de régularité. Nous pourrons à l'avenir intégrer les estimateurs des paramètres de divers autres champs gaussiens fractionnaires en nous inspirant des nombreux travaux existants sur le sujets (généralement en dimension 1). Dans le cadre de variations quadratiques, on peut citer les exemples de [8] pour le champ brownien bi-fractionnaire et de [10] pour le champ brownien multifractionnaire.

6.4 Adaptation de la procédure à la sphère et à l'hyperboloïde

Il est possible d'étendre l'algorithme à une variété riemannienne lisse $\mathcal{M}$ de dimension 2. On note $d_{\mathcal{M}}$ la distance géodesique. On note $X = (X(M), M \in \mathcal{M})$ un processus gaussien centré indexé par la variété $\mathcal{M}$. Lorsque $\mathcal{M}$ est le plan euclidien et $d_{\mathcal{M}}$ la distance euclidienne, on retrouve la définition classique d'un champ aléatoire sur $\mathbb{R}^2$. La simulation d'un champ gaussien indexé par une variété $\mathcal{M}$ nécessite la connaissance de sa fonction de covariance $R(\cdot,\cdot)$. La procédure `fieldsim` présentée dans [XIII] permet de simuler un champ gaussien sur la sphère ou l'hyperboloïde sur une grille d'évaluation par défaut ou définie par l'utilisateur avec la fonction de covariance du champ et la distance sur ces variétés.

À titre d'exemple, on peut citer le champ brownien fractionnaire sphérique introduit dans [61]. Il est défini sur la sphère $\mathcal{S}$ (muni de sa distance géodésique $d_{\mathcal{S}}$) par sa fonction de covariance [23]

$$R_{\mathcal{S}_1}(M,M') = \frac{1}{2}\left(d_{\mathcal{S}}^{2H}(O,M) + d_{\mathcal{S}}^{2H}(O,M') - d_{\mathcal{S}}^{2H}(M,M')\right), \quad M,\ M' \in \mathcal{S}$$

où O est un point fixé de $\mathcal{S}$ et le paramètre de Hurst $H \in (0, 1/2]$.

Dans [XI], nous avons proposé l'extension de la procédure `fieldsim` aux variétés que sont la sphère et l'hyperboloïde. Pour ces variétés, en plus des problèmes de temps de calcul et de stockage déjà abordés dans le plan, deux nouveaux problèmes

23. Les fonctions suivantes, pour $0 < H < 1$,

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{S}_2}(M,M') &= \exp\left(-d_{\mathcal{S}}^{2H}(M,M')\right), \\ R_{\mathcal{S}_3}(M,M') &= \ln\left(1+d_{\mathcal{S}}^{2H}(O,M)\right) + \ln\left(1+d_{\mathcal{S}}^{2H}(O,M')\right) - \ln\left(1+d_{\mathcal{S}}^{2H}(M,M')\right), \\ R_{\mathcal{S}_4}(M,M') &= \frac{1}{1+d_{\mathcal{S}}^{2H}(M,M')}, \end{aligned}$$

sont également des fonctions de covariance de champs gaussiens sur la sphère (voir [62]).

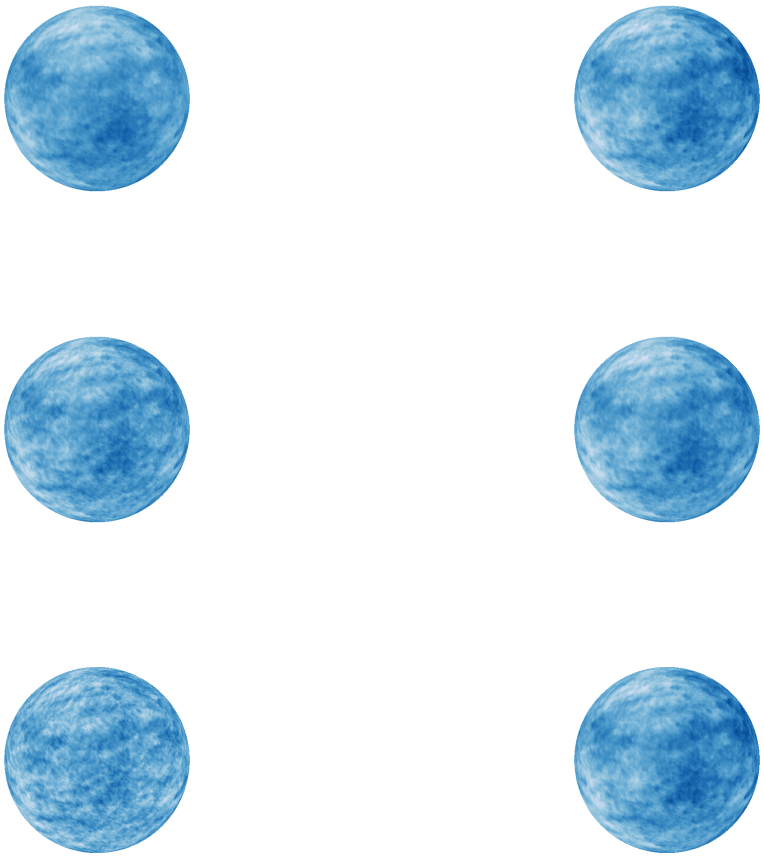

FIGURE 8 – À gauche, champs fractionnaires indexés par la sphère avec la fonction de covariance R_{S1} et un exposant de Hurst $H = 0.45$ (en haut), $H = 0.3$ (au milieu) et $H = 0.15$ (en bas). À droite, les champs fractionnaires avec $H = 0.45$ et les fonctions de covariance R_{S2} (en haut), R_{S3} (au milieu) et R_{S4} (en bas). Toutes les simulations sont effectuées avec $N_e = 100$, $N_r = 1000$, $N_g = 100$ et $nbNeighbor = 15$.

émergent. Dans le cas euclidien, la grille « classique » de visualisation du champ dans le logiciel `R` est équidistribuée (grille dyadique) mais nous ne connaissons pas de telle grille sur les variétés. Il faut donc adapter l'algorithme à des grilles non régulières. De plus, chaque variété possède une grille de visualisation spécifique. Dans la suite, nous traiterons le cas de la sphère uniquement.

Pour la sphère, la grille est visualisation utilisée dans le *package* `Fieldsim` est un recouvrement de six sous-grilles (un atlas de six cartes précisément) ; chaque carte a peu de points à certains endroits et une accumulation à d'autres (en particulier autour des six pôles). L'ensemble des points de visualisation, notée $\mathcal{S}_g$, est généralement trop grand pour les simuler uniquement par l'étape de simulation exacte.

Pour utiliser l'étape de simulation approchée, il faut pouvoir utiliser des voisins [24] suffisamment bien répartis sur toute la sphère. Pour cela, il est possible de définir, par exemple [25] pour la sphère, une mesure de probabilité uniforme [26]. Nous avons proposé dans [XIII] de simuler d'abord une grille de discrétisation $\{\mathcal{S}_e, \mathcal{S}_r\}$ aléatoire selon la loi uniforme (de manière exacte pour $\mathcal{S}_e$, puis approchée pour $\mathcal{S}_r$) suffisamment fine pour recouvrir la sphère. Pour répondre au problème spécifique de la visualisation, nous avons simulé, dans une dernière étape, les points appartenant à la grille de visualisation $\mathcal{S}_g$ de manière approchée en utilisant les voisins simulés sur la précédente grille.

On peut citer également le champ brownien fractionnaire hyperbolique défini sur l'hyperboloïde $\mathcal{H} = \{x^2 + y^2 - z^2 = -1,\ z \geq 1\}$ (muni de sa distance géodésique distance $d_{\mathcal{H}}$) par sa fonction de covariance

$$R_{\mathcal{H}_1}(M, M') = \frac{1}{2}\left(d_{\mathcal{H}}^{2H}(O, M) + d_{\mathcal{H}}^{2H}(O, M') - d_{\mathcal{H}}^{2H}(M, M')\right), \quad M,\ M' \in \mathcal{H}$$

où O est un point fixé de $\mathcal{H}$ et $H \in (0, 1/2]$.

24. Notons que le concept de voisin doit être précisé ici ; un choix naturel est celui de la distance géodésique. Les voisins sont donc les points les plus proches de M selon cette distance.

25. D'autres grilles intéressantes sur la sphère peuvent être utilisées, voir [36, 116].

26. Pour rappel, pour une variable θ de loi uniforme $[0, 2\pi]$ et une variable ϕ à densité $\frac{\sin(\phi)}{2}\mathbb{1}_{[0,\pi]}$, les coordonnées sphériques

$$x = \cos\theta \sin\phi, \quad y = \sin\theta \sin\phi, \quad z = \cos\phi,$$

suivent une loi uniforme sur la sphère.

FIGURE 9 – Champs browniens fractionnaires indexés par l'hyperboloïde avec la fonction de covariance R_{H1} et le paramètre de Hurst $H = 0.45$ (à gauche) et $H = 0.15$ (à droite). Les simulations sont effectuées avec $N_e = 100$, $N_r = 1000$, $N_g = 150$ et $nbNeighbor = 15$.

7 Applications en géologie et perspectives

Les applications en géologie [27] de nos recherches sur la simulation des champs fractionnaires et l'estimation de leurs paramètres de régularité ont été compilées dans les articles [X] et [XII].

Nous ne développerons pas le premier article, qui constitue déjà un chapitre de la thèse de l'auteur. En quelques mots, ce travail consistait à modéliser l'alternance de régularité le long des profils stylolitiques. La procédure d'estimation des paramètres de régularité par des méthodes de variations quadratiques généralisées était également décrite. Des travaux récents sur les séries d'ondelettes indexées par des processus de branchements [38] permettent de généraliser le travail initié dans [X]. Nous projetons d'estimer dans ces modèles les paramètres d'intermittence et de régularité (dans ces modèles, deux phénomènes induisent des irrégularités) afin de classer plus finement les différentes morphologies stylolitiques.

Le deuxième article introduit des champs fractionnaires récents, les champs à autosimilarité matricielle développés dans [16], en géologie des failles de fractures. Quelques exemples de champs gaussiens sont présentés dans [26]. Ces champs gaussiens centrés $X = (X(M), M \in \mathbb{R}^2)$ ont des accroissements stationnaires et satisfont la propriété

$$\{X(c^E x)\}_{x\in\mathbb{R}^2} \sim \{cX(x)\}_{x\in\mathbb{R}^2} \quad \text{pour tout } c > 0, \tag{62}$$

27. Ces applications ont également fait l'objet d'un article de diffusion et de popularisation des mathématiques dans la revue électronique du CNRS *Images des Mathématiques* disponible à l'adresse `http://images.math.cnrs.fr/Champs-aleatoires-fractionnaires.html`.

pour une matrice admissible fixée E.

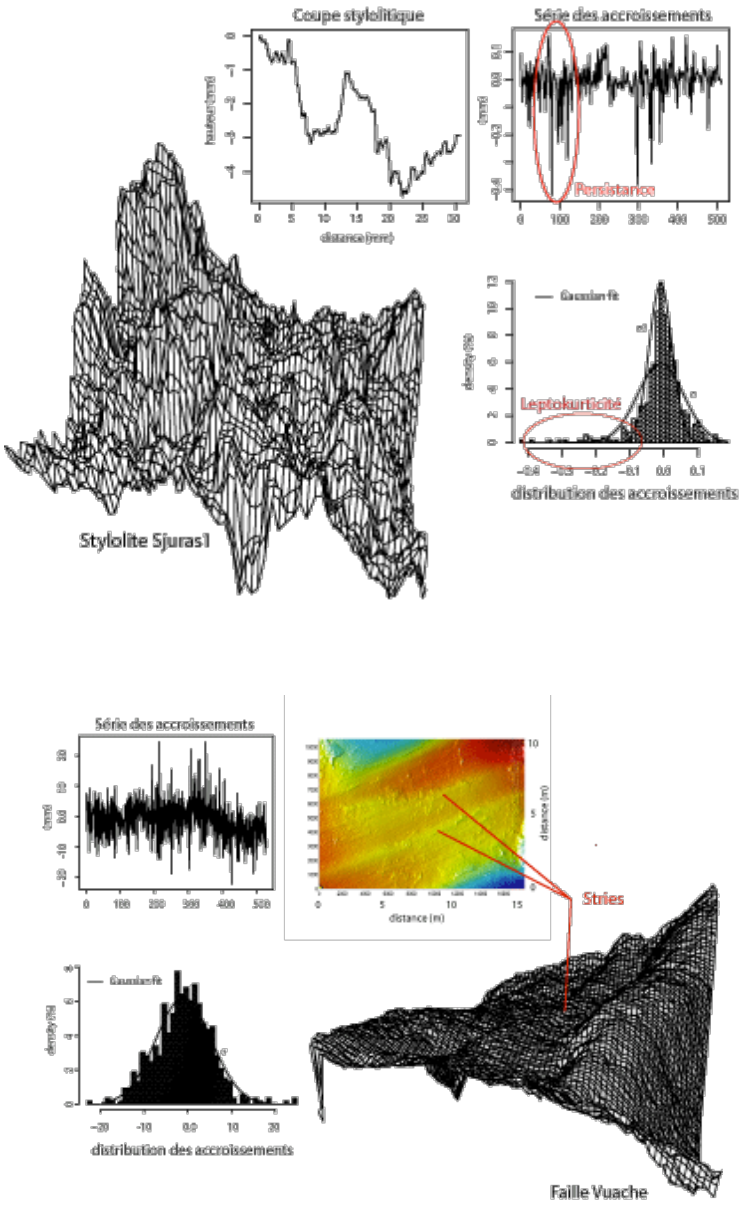

FIGURE 10 – Faits de style en géophysique : morphologies des stylolites (en haut) et des failles de fracture (en bas)

Les perspectives de ces travaux sont diverses.

D'abord, la simulation des champs à autosimilarité matricielle est une question intéressante, la fonction de vraisemblance n'étant pas explicite (elle s'écrit sous forme intégrale). Ces champs s'ajouteraient à la liste des exemples du package `FieldSim`.

Ensuite, dans le cas particulier des champs satisfaisant [28],

$$\{X(c^{1/H_1}x_1, c^{1/H_2}x_2)\}_{x\in\mathbb{R}^2} \sim \{cX(x_1,x_2)\}_{x\in\mathbb{R}^2} \quad \text{for all } c>0,$$

avec $0 < H_1 \leq H_2 < 1$, se pose la question de l'estimation de H_1 et H_2 (qui donnent la régularité du champ dans les directions $e_1 = (1,0)$ and $e_2 = (0,1)$) en observant une réalisation de X sur une grille régulière ; ceci par des méthodes de variations quadratiques généralisées. Il serait intéressant d'ajouter les méthodes connues d'estimation de paramètres des différents champs gaussiens fractionnaires listés précédemment dans le package `Fieldsim` sur le plan ou sur des variétés spécifiques.

Enfin, la version `4` du *package* `Fieldsim` devrait intégrer la simulation des ponts browniens fractionnaires (conditionnés à n'importe quelle courbe) qui permettrait la simulation de scènes naturelles réalistes : montagnes et vallées, nuages, *etc.* Les premières simulations en dimension un de ponts d'un mouvement brownien fractionnaire (à gauche sur la figure 11) et multifractionnaire (à droite) conditionnés au passage en deux points (marqués par des cercles) sont encourageantes.

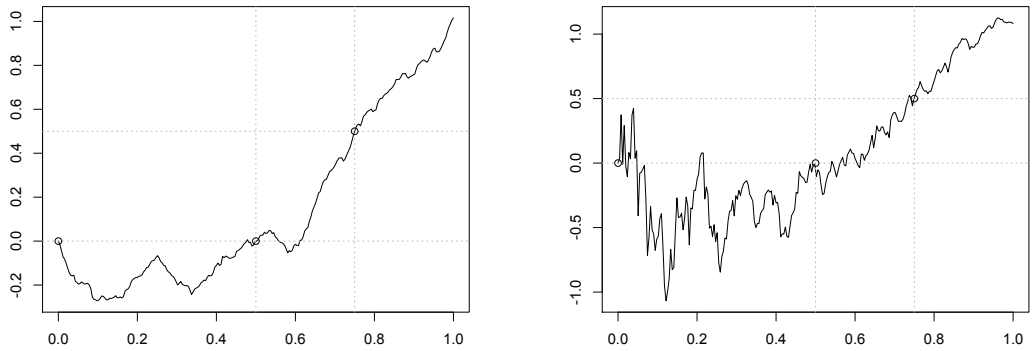

FIGURE 11 – Ponts gaussiens fractionnaires

28. Ce qui équivaut à la propriété (62) avec la matrice diagonale $E = \mathrm{diag}(\frac{1}{H_1}, \frac{1}{H_2})$.

Références

[1] P. Abry, P. Gonçalvès, and P. Flandrin. Wavelets, spectrum analysis and 1/f processes, wavelets and statistics. *Lectures Note in Statistics*, 103(15–29), 1995.

[2] B. Ait-El-Fquih and F. Desbouvries. Kalman filtering in triplet Markov chains. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 54 :2957–2963, 2006.

[3] Y. Ait-Sahalia. Transition densities for interest rate and other nonlinear diffusions. *The Journal of Finance*, 54(4) :1361–1395, 1999.

[4] Y. Ait-Sahalia. Maximum likelihood estimation of discretely sampled diffusions : a closed-form approximation approach. *Econometrica*, 70(1) :223–262, 2002.

[5] J. Anděl. Long memory time series models. *Kybernetika*, 22(2) :105–123, 1986.

[6] T. W. Anderson. On asymptotic distribution of estimates of parameters of stochastic difference equations. *Annals of Mathematical Statistics*, 30 :676–687, 1959.

[7] M. Barth and J. Farrell. *The Global Positioning System & Inertial Navigation*. McGraw-Hill, 1998.

[8] A. Bégyn. Asymptotic expansion and central limit theorem for quadratic variations of Gaussian processes. *Bernoulli*, 13(3) :712–753, 2007.

[9] R. Belfadli, K. Es-Sebaiy, and Y. Ouknine. Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes : Non-ergodic case. *Frontiers in Science and Engineering*, 1(1) :1–16, 2011.

[10] A. Benassi, S. Cohen, and J. Istas. Identifying the multifractional function of a Gaussian process. *Statistics and Probability Letters*, 39 :337–345, 1998.

[11] J. Beran. *Statistics for Long-Memory Processes*. Chapman & Hall, New York, 1994.

[12] B. Bercu, L. Coutin, and N. Savy. Sharp large deviations for the fractional Ornstein-Uhlenbeck process. *Theory of Probability and Its Applications*, 55(4) :575–610, 2011.

[13] K. Bertin, S. Torres, and C. Tudor. Drift parameter estimation in fractional diffusions driven by perturbed random walk. *Statistic and Probability Letters*, 81(2) :243–249, 2011.

[14] C. Berzin and J. Leon. Estimation in models driven by fractional Brownian motion. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 44(2) :191–213, 2008.

[15] B. Bibby, M. Jacobsen, and M. Sorensen. *Handbook of Financial Econometrics, Volume 1*, chapter Estimating functions for discretely sampled diffusion models, pages 203–268. Handbooks in Finance, 2009.

[16] H. Biermé, M. Meerschaert, and H. Scheffler. Operator scaling stable random fields. *Stoch. Proc. Appl.*, 117(3) :312–332, 2007.

[17] H. Biermé, L. Moisan, and F. Richard. A turning-band method for the simulation of anisotropic fractional brownian fields a turning-band method for the simulation of anisotropic fractional Brownian fields. http ://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/74/11/67/PDF/2012-31.pdf, 2012.

[18] A. Bonami and A. Estrade. Anisotropic analysis of some Gaussian models. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 9(3) :215–236, 2003.

[19] S. Bregni and W. Erangoli. Fractional noise in experimental measurements of IP traffic in a metropolitan area network. *Proc. of IEEE GlobeCom 2005*, 2 :781–785, 2005.

[20] P. Cabella and D. Marinucci. Statistical challenges in the analysis of the cosmic background radiation. *The Annals of Applied Statistics*, 3(1) :61–95, 2009.

[21] J. Chambers. *Programming with Data. A Guide to the S Language*. Springer-Verlag, 1998.

[22] P. Cheridito. Arbitrage in fractional Brownian motion models. *Finance and stochastics*, 2003.

[23] P. Cheridito, H. Kawaguchi, and M. Majimae. Fractional Ornstein-Uhlenbeck processes. *Electronic Journal of Probability*, 3 :1–14, 2003.

[24] P. Chigansky. Maximum likelihood estimator for hidden Markov model in continuous time. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 12 :139–163, 2009.

[25] I. Cialenco, S. Lototsky, and J. Pospisil. Asymptotic properties of the maximum likelihood estimator for stochastic parabolic equations with additive fractional Brownian motion. *Stochastics and Dynamics*, 9(2) :169–185, 2009.

[26] M. Clausel and B Vedel. Explicit construction of operator scaling Gaussian random fields. *Fractals*, 19(1) :101–111, 2011.

[27] J.-F. Coeurjolly. Simulation and identification of the fractional Brownian motion : A bibliographical and comparative study. *Journal of Statistical Software*, 5(7) :1–53, 2000.

[28] J.-F. Coeurjolly. Cramèr–Rao bounds for fractional Brownian motions. *Statistic and Probability Letters*, 53 :435–447, 2001.

[29] S. Cohen, F. Gamboa, C. Lacaux, and J.-M. Loubes. LAN property for some fractional type Brownian motion. *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 10(1) :91–106, 2013.

[30] S. Cohen and J. Istas. *Fractional Fields and Applications*. Springer, 2013.

[31] T. Colak, R. Qahwaji, S. Ipson, and H. Ugail. Representation of solar features in 3d for creating visual solar catalogues. *Advances in Space Research*, 47 :2092–2104, 2011.

[32] F. Comte and E. Renault. Long memory in continuous-time stochastic volatility models. *Mathematical Finance*, 8(4) :291–323, 1998.

[33] I. Cornfeld, S. Fomin, and Y. Sinai. *Ergodic theory*. Springer-Verlag, 1982.

[34] L. Coutin and Z. Quian. Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motion. *Prob. Theory Relat. Fields*, 122 :108–140, 2002.

[35] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, 1992.

[36] M. Deserno. How to generate equidistributed points on the surface of a sphere. http ://www.cmu.edu/biolphys/deserno/pdf/sphere_equi.pdf.

[37] G. Donhal. On estimating the diffusion coefficient. *Journal of Applied Probability*, 24 :105–114, 1987.

[38] A. Durand. Random wavelet series based on a tree-indexed Markov chain. *Comm. Math. Phys*, 283(2) :451–477, 2008.

[39] R. Elliott and J. Deng. A filter for a hidden Markov chain observed in fractional Gaussian noise. *Systems and Control Letters*, 60 :93–100, 2011.

[40] R. Elliott and T. Kuen Siu. Control of dicrete-time HMM partially observed under fractional Gaussian noises. *Systems and Control Letters*, 60 :350–355, 2011.

[41] J. Farrell. *Aided Navigation : GPS with High Rate Sensors*. McGraw-Hill, 2008.

[42] D. Florens-Zmirou. Approximate discrete time schemes for statistics of diffusion processes. *Statistics*, 20 :263–284, 1989.

[43] D. Florens-Zmirou. On estimating the diffusion coefficient from discrete observations. *Journal of Applied Probability*, 30 :790–804, 1993.

[44] R. Fox and M. Taqqu. Large-sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series. *The Annals of Statistics*, 14(2) :517–532, 1986.

[45] F. Gakhov. *Boundary value problems*. Courier Dover Publications, 1990.

[46] V. Genon-Catalot and J. Jacod. On the estimation of the diffusion coefficient for multi-dimensional diffusion processes. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 29(1) :119–151, 1993.

[47] J. Geweke and S. Porter-Hudak. The estimation and application of long-memory time series models. *Journal of Time Series Analysis*, 4 :221–238, A983.

[48] E. Gobet. Local asymptotic mixed normality property for elliptic diffusion : a Malliavin calculus approach. *Bernoulli*, 7(6) :899–912, 2001.

[49] E. Gobet. LAN property for ergodic diffusions with discrete observations. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 38(5) :711–737, 2002.

[50] M. Gradinaru and I. Nourdin. Milstein's type schemes for fractional sdes. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 45(4) :1085–1098, 2009.

[51] C. Granger and R. Joyeux. An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis*, 1(1) :15–29, 1980.

[52] C. Grimm and G. Schlüchtermann. *IP-Traffic theory and performance*. Springer-Verlag, 2008.

[53] J. Hájek. Local asymptotic minimax and admissibility in estimation. *Proc. 6th Brkeley Symp ; Math.Statist. Prob.*, 1 :175–194, 1972.

[54] J. Hosking. Fractional differencing. *Biometrika*, 68(1) :165–176, 1981.

[55] C. Houdré and J. Villa. An example of infinite dimensional quasi-helix. *Contemporary Mathematics, AMS*, 336 :195–201, 2003.

[56] Y. Hu and D. Nualart. Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes. *Statistics and Probability Letters*, 80(11-12) :1030–1038, 2010.

[57] Y. Hu, D. Nualart, W. Xiao, and W. Zhang. Exact maximum likelihood estimator for drift fractional Brownian motion at discrete time. *Acta Mathematica Scientia*, 31(5) :1851–1859, 2011.

[58] H. Hult. *Topics on fractional Brownian motion and regular variation for stochastic processes*. PhD thesis, Stockholm Royal Institute of Technology, 2003.

[59] S. Iacus. *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, 2008.

[60] I. Ibragimov and R. Has'minskii. *Statistical Estimation. Asymptotic Theory*. Springer, 1981.

[61] J. Istas. Spherical and hyperbolic fractional Brownian motion. *Electronic Communications of Probability*, 10 :254–262, 2005.

[62] J. Istas. Manifold indexed fractional fields. *ESAIM P&S*, 16 :222–276, 2012.

[63] J. Istas and G. Lang. Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of a Gaussian process. *Annales Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, 33 :407–436, 1997.

[64] J. Jacod. Inference for stochastic processes. In Y. Ait-Sahalia and L. Hansen, editors, *Handbook of Financial Econometrics, Volume 2 – Applications*, pages 197–239. North-Holland, 2009.

[65] P. Jeganathan. On the asymptotic theory of estimation when the limit of the log-likelihood ratios is mixed normal. *Sankhya*, 44(2) :173–212, 1982.

[66] P. Jeganathan. Some asymptotic properties of risk functions when the limit of the experiment is mixed normal. *Sankhya*, 45(1) :66–87, 1983.

[67] C. Jost. Transformation formulas for fractional Brownian motion. *Stoch. Proc. and App.*, 27 :514–535, 1999.

[68] R. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *ASME J. Basic Engineering*, 82 :25–40, 1960.

[69] A. Kamont. On the fractional anisotropic Wiener fields. *Journal of Probability and Mathematical Statistics*, 16(1) :85–98, 1996.

[70] I. Karatzas and S. Schreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, 1988.

[71] M. Kessler. Estimation of an ergodic diffusion from discrete observations. *Scandinavian Journal of Statistics*, 24 :211–229, 1997.

[72] M. Kessler. Simple and explicit estimating functions for discretely observed diffusion process. *Scandinavian Journal of Statistics*, 27 :65–82, 2000.

[73] M. Kessler and M. Sorensen. Estimating equations based on eigenfunctions for a discretely observed diffusion process. *Bernoulli*, 5 :299–314, 1999.

[74] M. Kleptsyna and A. Le Breton. A Cameron-Martin type formula for general Gaussian processes – A filtering approach. *Stochastics and Stochastics Reports*, 72 :229–250, 2002.

[75] M. Kleptsyna and A. Le Breton. Extension of the Kalman-Bucy filter to elementary linear systems with fractional Brownian noises. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 5 :249–271, 2002.

[76] M. Kleptsyna and A. Le Breton. Statistical analysis of the fractional Ornstein-Uhlenbeck type process. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 5 :229–241, 2002.

[77] A. Kolmogorov. Winersche Spiralen und einige andere interessante Kurven in Hilbertschen Raum. *Acad. Sci. USSR*, 26 :115–118, 1940.

[78] K. Kubilius and Y. Mishura. The rate of convergence of Hurst index estimate for the stochastic differential equation. *Stochastic Processes and their Applications*, 122(3718–3739), 2012.

[79] Y. Kutoyants. *Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes*. Springer, 2004.

[80] T. Lai and C. Wei. Asymptotic properties of general autoregressive models and strong consistency of least square estimate and their parameters. *Journal of Multivariate Analysis*, 13 :1–23, 1983.

[81] A. Le Breton and D. Pham. On the bias of the least squares estimator for the first order autoregressive process. *Ann. Inst. Statist. Math*, 41(3) :555–563, 1989.

[82] L. Le Cam. Limits of experiments. *Proc. 6th Brkeley Symp ; Math.Statist. Prob.*, 1 :245–261, 1972.

[83] X. Li, C. Han, and J. Wang. Discrete-time linear filtering in arbitrary noise. *Proc. 39th IEEE Conf. Decision and Control*, December 2000 :1212–1217, 2000.

[84] R. Liptser and A. Shiryaev. *Statistics of Random Processes*. Springer, 2001.

[85] A. Lo. Maximum likelihood estimation of generalized Itô processes with discretely sampled data. *Econometric Theory*, 4 :231–247, 1988.

[86] S. Lototsky. Statistical inference for stochastic parabolic equations : a spectral approach. *Publ. Mat.*, 53 :3–45, 2009.

[87] C. Ludena. Minimum contrast estimation for fractional diffusion. *Scandinavian Journal of Statistics*, 31 :613–628, 2004.

[88] T. Lyons. Differential equations driven by rough signals (i) : an extension of an inequality of L. C. Young. *Mathematical Research Letters*, 1(451–464), 1994.

[89] T. Lyons. Differential equations driven by rough signal (ii). *Rev. Math. Iber.*, 14 :451–464, 1998.

[90] B. Mandelbrot and J. Van Ness. Fractional Brownian motions, fractional noises and application. *SIAM Review*, 10 :422–437, 1968.

[91] H. Mann and A. Wald. On the statistical treatment of linear stochastic difference equations. *Econometrica*, 11(3&4) :173–220, 1943.

[92] N. Marie. A pathwise fractional one compartment intra-veinous bolus model. *Mathematical Biosciences*, soumis.

[93] D. Melichov. *On estimation of the Hurst index of solutions of stochastic equations*. PhD thesis, Vilnius Gediminas Technical University, 2011.

[94] Y. Mishura and G. Shevchenko. The rate of convergence of Euler approximations for solutions of stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion. *Stochastics*, 80 :489–511, 2008.

[95] A. Neuenkirch and I. Nourdin. Exact rate of convergence of some approximation schemes associated to SDEs driven by a fractional Brownian motion. *J. Theoret. Prob.*, 20(4) :871–899, 2007.

[96] A. Neuenkirch and S. Tindel. A Least Square-type procedure for parameter estimation in stochastic differential equations with additive fractional noise. *preprint*, 2011.

[97] I. Norros, E. Valkeila, and J. Virtamo. An elementary approach to a Girsanov formula and other analytical results on fractional Brownian motions. *Bernoulli*, 5 :571–587, 1999.

[98] D. Nualart. *The Malliavin calculus and related topic*. Springer, 2006.

[99] C. Nuzman and H. Poor. Linear estimation of self-similar processes via Lamperti's transformation. *J. Appl. Prob.*, 37 :429–452, 2000.

[100] J. Corcuera O. Barndorff-Nielsen and M. Podolskij. Power variation for Gaussian processes with stationary increments. *Stochastic Processes and their Applications*, 119(1845–1865), 2209.

[101] A. Ovseevich, R. Khasminskii, and P. Chow. Adaptative design for estimation of unknown parameters in linear systems. *Problems of Information Transmission*, 36(2) :125–153, 2000.

[102] A. Pedersen. A new approach to maximum-likelihood estimation for stochastic differential equations based on discrete observations. *Scandinavian Journal of Statistics*, 22 :55–71, 1995.

[103] R. Peltier and J. Levy-Véhel. Multifractional Brownian motion : Definition and preliminary results. Technical Report RR 2645, INRIA, 1996.

[104] V. Pipiras and M. Taqqu. Integration questions related to fractional Browian motion. *Probability Theory and Related Fields*, 118(251–291), 2000.

[105] M. Podolskij and K. Wasmuth. Goodness-of-fit testing for fractional diffusions. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 16(2) :147–159, 2013.

[106] R Development Core Team. *R : A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2010. ISBN 3-900051-07-0.

[107] M. Rao. Consistency and limit distributions of estimators of parameters in explosive stochastic difference equations. *Annals of Mathematical Statistics*, 32(1) :195–218, 1961.

[108] M. Rao. Asymptotic distribution of an estimator of the boundary parameter of an unstable process. *Annals of Statistics*, 6(1) :185–190, 1978.

[109] H. Rubin. Consistency of maximum likelihood estimates in the explosive case. In *Statistical Inference in Dynamic Economic Models*, pages 356–364. John Wiley and Sons, New-York, 1950.

[110] A. Ruzmaikina. Stieltjes integrals of Hölder continuous functions with applications to fractional Brownian motion. *Journal of Statistical Physics*, 100(5-6) :1049–1069, 2000.

[111] G. Samorodnitsky and M. Taqqu. *Stable non-Gaussian Random Processes : Stochastic Models with Infinite Variance*. Chapman & Hall, New York, 1994.

[112] S. Sethuraman and I. V. Basawa. The asymptotic distribution of the maximum likelihood estimator for a vector time series model with long memory dependence. *Statistics and Probability Letters*, 31 :285–293, 1997.

[113] Y. Shao. The fractional Ornstein-Uhlenbeck process as a representation of homogeneous Eulerian velocity turbulence. *Physica D*, 83 :461–477, 1995.

[114] T. J. Sweeting. Uniform asymptotic normality of the maximum likelihood estimator. *The Annals of Statistics*, 8 :1375–1381, 1980.

[115] K. Tanaka. Distributions of the maximum likelihood and minimum contrast estimators asociated wit hthe fractional Ornstein-Uhlenbeck process. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 16 :173–192, 2013.

[116] Y. Tashiro. On methods for generating uniform random points on the surface of the sphere. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 29(A) :295–300, 1977.

[117] C. Tudor and F. Viens. Statistical aspects of the fractional stochastic calculus. *The Annals of Statistics*, 35(3) :1183–1212, 2007.

[118] J. White. The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case I. *Annals of Mathematical Statistics*, 29 :1188–1197, 1958.

[119] J. White. The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case II. *Annals of Mathematical Statistics*, 30 :831–834, 1959.

[120] A. Wood and G. Chan. Simulation of stationary Gaussian processes in $[0, 1]^d$. *Journal of computational and graphical statistics*, 3(4) :409–432, 1994.

[121] W. Xiao, W. Zhang, and W. Xu. Parameter estimation for fractional Ornstein-Uhlenbeck processes at discrete observation. *Applied Mathematical Modelling*, 35 :4196–4207, 2011.

[122] Y. Yajima. On estimation of long-memory time series models. *Australian Journal of Statistics*, 27(3) :302–320–807, 1985.

[123] N. Yoshida. Estimation for diffusion processes from discrete observations. *Journal of Multivariate Analysis*, 41 :220–242, 1992.

[124] L. Young. An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration. *Acta Mathematica*, 67(1) :251–282, 1936.