ESPACES DE BANACH, DE HILBERT, DE SOBOLEV.

Alexandre Popier

Université du Maine, Le Mans

Plan du cours

1. Espaces de Banach
2. Espaces de Hilbert
   - Dual d'un espace de Hilbert
   - Théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram
   - Bases hilbertiennes
3. Espaces de Sobolev
   - Premières définitions et propriétés
   - Opérateurs de prolongement
   - Inégalités de Sobolev
   - Espace $H_0^1(\Omega)$
   - Notion de trace au bord

PLAN

1. ESPACES DE BANACH
2. ESPACES DE HILBERT
   - Dual d'un espace de Hilbert
   - Théorèmes de Stampacchia et Lax-Milgram
   - Bases hilbertiennes
3. ESPACES DE SOBOLEV
   - Premières définitions et propriétés
   - Opérateurs de prolongement
   - Inégalités de Sobolev
   - Espace $H_0^1(\Omega)$
   - Notion de trace au bord

RAPPELS :

DÉFINITION

Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. *Une norme sur E est une application* $p : E \to \mathbb{R}$ *t.q.*

1. $\forall x \in E,\ p(x) \geq 0$;
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$;
3. $\forall (x, y) \in E^2,\ p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ *(inégalité triangulaire) ;*
4. $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

DÉFINITION

Un espace de Banach est un espace vectoriel E muni d'une norme p qui le rende complet pour la distance associée $d(x, y) = p(x - y)$.

Exemples.

- $C([0,1])$ muni de la norme infinie $\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$.
- $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_p$ pour $1 \leq p \leq +\infty$.
- l^p, $1 \leq p < +\infty$:
  - ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p < +\infty$.
  - norme $\|u\|_p = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{1/p}$.
- l^∞ :
  - ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornées.
  - norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

THÉORÈME

Soient E et F deux espaces normés et $T : E \to F$ application linéaire. Alors équivalence entre :

1. T est continue sur E ;
2. T est continue en 0 ;
3. T est lipschitzienne ;
4. il existe $C_T \geq 0$ t.q. pour tout $x \in E$, $\|Tx\|_F \leq C_T \|x\|_E$.

DÉFINITION

La norme de T est définie par

$$|||T||| = \sup\{\|Tx\|_F,\ \|x\|_E \leq 1\}.$$

DÉFINITION

La norme de T est définie par

$$|||T||| = \sup\{\|Tx\|_F,\ \|x\|_E \leq 1\}.$$

PROPOSITION

$|||.|||$ *est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$, ensemble des applications linéaires continues.*

PROPOSITION

Si F est un espace de Banach, $\mathcal{L}(E, F)$ muni de $|||.|||$ est de Banach.

DÉFINITION

L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est l'espace dual de E, noté E'.

Plan

Définitions.

Définition

Soit H un espace vectoriel. Un produit scalaire $\langle u, v\rangle$ est une forme bilinéaire de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$ symétrique, définie positive.

Lemme

- *Inégalité de Cauchy-Schwarz :*

$$\forall (u,v) \in H^2, \qquad |\langle u, v\rangle| \leq \langle u, u\rangle^{1/2} \langle v, v\rangle^{1/2}.$$

- $u \in H \mapsto \|u\| = \langle u, u\rangle^{1/2}$ *est une norme sur H.*
- *Identité du parallélogramme :*

$$\forall (u,v) \in H^2, \qquad \left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u-v}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \left(\|u\|^2 + \|v\|^2 \right).$$

DÉFINITIONS.

DÉFINITION

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle u, v\rangle$ et qui est complet pour la norme $\langle u, u\rangle^{1/2}$

EXEMPLES

- $H = \mathbb{R}^d$, *avec* $a_1, \ldots, a_d$ *réels strictement positifs et*
$$\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^d)^2, \quad \langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{d} a_i u_i v_i.$$
- $H = l^2$ *: ensemble des suites* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *t.q.* $\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 < +\infty$, *avec*
$$\forall (u, v) \in H^2, \quad \langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_i v_i.$$
- $H = L^2(\Omega)$ *avec* $\langle u, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$

Théorème de projection.

Théorème

Soit $K \subset H$ convexe fermé non vide. Alors pour tout $u \in H$, il existe $v \in K$ unique t.q.

$$\|u - v\| = \inf_{w \in K} \|u - w\| = \min_{w \in K} \|u - w\|.$$

De plus v caractérisé par

$$\boxed{v \in K, \qquad \langle u - v, w - v \rangle \leq 0, \forall w \in K.}$$

Définition

v est appelé la projection de u sur K et noté $P_K u$.

Proposition

Pour tout $(u_1, u_2) \in H^2$, $\|P_K u_1 - P_K u_2\| \leq \|u_1 - u_2\|$.

Théorème de projection.

Théorème

Soit $K \subset H$ convexe fermé non vide. Alors pour tout $u \in H$, il existe $v \in K$ unique t.q.

$$\|u - v\| = \inf_{w \in K} \|u - w\| = \min_{w \in K} \|u - w\|.$$

De plus v caractérisé par

$$\boxed{v \in K, \qquad \langle u - v, w - v \rangle \leq 0, \forall w \in K.}$$

Corollaire

Soit $M \subset H$ sev fermé et $u \in H$. Alors $v = P_M u$ caractérisé par

$$\boxed{v \in M, \qquad \langle u - v, w \rangle = 0, \forall w \in M.}$$

$u - v \in M^\perp$ et P_M est un opérateur linéaire, dit projecteur orthogonal.

IDENTIFICATION DE H' AVEC H.

THÉORÈME DE RIESZ

Soit $\phi \in H'$. Il existe $u \in H$ unique t.q.

$$\forall v \in H, \quad \phi(v) = \langle u, v \rangle.$$

De plus $\|u\| = \|\phi\|_{H'}$.

DÉFINITION

Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H converge faiblement vers $x \in H$ si

$$\forall y \in H, \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

THÉORÈME

De toute suite bornée de H, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.

Théorème de Stampacchia.

Définition

Une forme bilinéaire $A : H \times H \to \mathbb{R}$ est

- *continue s'il existe C t.q. pour tout (u, v), $|A(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|$;*
- *coercive s'il existe $\alpha > 0$ t.q. pour tout u, $A(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$.*

Théorème

Soit A bilinéaire continue et coercive. Soit K convexe fermé non vide. Pour $\phi \in H'$, il existe $u \in K$ unique t.q.

$$\forall v \in K,\ A(u, v - u) \geq \phi(v - u).$$

Si A est symétrique, alors u caractérisé par

$$\boxed{u \in K, \qquad \frac{1}{2}A(u, u) - \phi(u) = \min_{v \in K} \left(\frac{1}{2}A(v, v) - \phi(v) \right).}$$

Théorème de Lax-Milgram.

Théorème

Soit A bilinéaire continue et coercive. Pour $\phi \in H'$, il existe $u \in H$ unique t.q.

$$\forall v \in H, \; A(u, v) = \phi(v).$$

Si A est symétrique, alors u caractérisé par

$$\boxed{u \in H, \qquad \frac{1}{2}A(u, u) - \phi(u) = \min_{v \in K} \left(\frac{1}{2}A(v, v) - \phi(v) \right).}$$

Sommes hilbertiennes.

Définition

Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces fermés de H. H est somme hilbertienne des (E_n), noté $H = \bigoplus_n E_n$ si

- *les E_n sont 2 à 2 orthogonaux : $\langle u, v\rangle = 0$ pour tout $u \in E_m$, $v \in E_n$, $m \neq n$;*
- *et $\overline{Vect\,(E_n,\ n \in \mathbb{N})} = H$.*

Théorème

Soit $H = \oplus_n E_n$. Soit $u \in H$ et $u_n = P_{E_n} u$. Alors

1. $u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{k} u_n$,
2. $\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|^2$ (égalité de Bessel-Parseval).

Bases hilbertiennes.

Définition

Une base hilbertienne est une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H t.q.

- $\|e_n\| = 1, \forall n\, ; \langle e_m, e_n \rangle = 0$ *si* $m \neq n$.
- *et* $\overline{Vect\,(e_n,\ n \in \mathbb{N})} = H$.

Théorème

Tout espace de Hilbert séparable admet une base hilbertienne.

Exemples

Dans $H = L^2(0, \pi)$*, base formée des fonctions*

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx.$$

Plan

PROBLÈME : pour $c \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in L^2(\Omega)$:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + c(x)u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

INTÉGRATION PAR PARTIES : si u et Ω sont assez réguliers, pour $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla u(x).\nabla\phi(x)dx + \int_\Omega c(x)u(x)\phi(x)dx = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx.$$

RÉGULARITÉ de u : $u \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u \in (L^2(\Omega))^d$ $\rightarrow$ espaces de Sobolev.

Premières définitions.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert.

Définition

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega),\ \exists g_1, \ldots, g_d \in L^2(\Omega) \text{ t.q.} \right.$$
$$\left. \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \int_\Omega g_i \phi,\ \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \right\}.$$

On pose $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = g_i$.

Norme : pour $u \in H^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_2 + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2.$$

Remarques.

- $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle_{H^1(\Omega)} = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{d} \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

- Si $u \in L^2(\Omega) \cap C^1(\Omega)$, et si $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega)$, alors les deux définitions de dérivée coïncident.
- Norme équivalente : $\left(\|u\|_2^2 + \sum_{i=1}^{d} \left\| \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_2^2 \right)^{1/2}$.
- Espaces de fonctions-tests : $C_c^1(\Omega)$ convient aussi.
- $C_c^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ et si Ω borné, $C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$.

Premières propriétés.

Lemme

Soit une suite (u_n) *une suite de* $H^1(\Omega)$ *t.q.* $u_n \to u$ *dans* $L^2(\Omega)$ *et* (∇u_n) *converge dans* $(L^2(\Omega))^d$. *Alors* $u \in H^1(\Omega)$ *et* $\|u_n - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0$.

Proposition

$H^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert séparable.*

THÉORÈME (FRIEDRICHS)

Soit $u \in H^1(\Omega)$. Alors il existe une suite (u_n) de $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ t.q.

1. $u_n|_\Omega \to u$ dans $L^2(\Omega)$;
2. $\nabla u_n|_\omega \to \nabla u|_\omega$ dans $(L^2(\omega))^d$ pour tout $\omega \subset\subset \Omega$ (i.e. ω ouvert t.q. $\overline{\omega} \subset \Omega$ et $\overline{\omega}$ compact).

REMARQUE : en général $C_c^1(\mathbb{R}^d)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$.

Règles de dérivation.

Proposition (Produit)

Soient u et v dans $H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Alors $uv \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i}.$$

Proposition (Composition)

Soient $G \in C^1(\mathbb{R})$ t.q. $G(0) = 0$ et $|G'(s)| \leq M, \forall s \in \mathbb{R}$; et $u \in H^1(\Omega)$. Alors $G \circ u \in H^1(\Omega)$ et

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Proposition (Changement de variables)

Soient Ω et Ω' deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $H : \Omega' \to \Omega$ une application bijective, $x = H(y)$ t.q.

$$H \in C^1(\Omega'),\ H^{-1} \in C^1(\Omega),\ Jac\, H \in L^\infty(\Omega'),\ Jac\, H^{-1} \in L^\infty(\Omega).$$

Soit $u \in H^1(\Omega)$. Alors $u \circ H \in H^1(\Omega')$ et

$$\forall j = 1, \ldots, d,\ \frac{\partial}{\partial y_j}(u \circ H)(y) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y)) \frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y).$$

ESPACES $H^m(\Omega)$.

Soit $m \geq 2$ entier.

DÉFINITION

Espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ défini par récurrence

$$\begin{aligned} H^m(\Omega) &= \left\{ u \in H^{m-1}(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^{m-1}(\Omega) \right\} \\ &= \Big\{ u \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha \text{ t.q. } |\alpha| \leq m,\ \exists g_\alpha \in L^2(\Omega) \text{ t.q.} \\ &\qquad \int_\Omega u \partial^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \phi,\ \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega) \Big\}. \end{aligned}$$

On pose $\partial^\alpha u = g_\alpha$.

NORME : pour $u \in H^m(\Omega)$, $\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_2$.

ESPACES $H^m(\Omega)$.

PROPOSITION

$H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha u, \partial^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)},$$

est un espace de Hilbert.

Prolongement.

Théorème

Soit Ω ouvert de classe C^1 avec $\Gamma = \partial\Omega$ borné (ou $\Omega = \mathbb{R}^d_+$). Alors il existe un opérateur de prolongement $P : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^d)$ linéaire t.q. : $\forall u \in H^1(\Omega)$

1. $Pu|_\Omega = u$;
2. $\|Pu\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}$;
3. $\|Pu\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$;

C dépendant seulement de Ω.

Corollaire

Si Ω de classe C^1 et $u \in H^1(\Omega)$, alors il existe une suite (u_n) de $C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ t.q. $u_n|_\Omega \to u$ dans $H^1(\Omega)$.

Cas où $\Omega = \mathbb{R}^d$ et $2 < d$.

Théorème (Sobolev, Gagliardo, Nirenberg)

Si $2 < d$, alors

$$H^1(\mathbb{R}^d) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^d), \text{ avec } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{d}.$$

Il existe $C = C(p, N)$ t.q.

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R})} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}, \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Corollaire

Si $2 < d$, alors $H^1(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d)$, pour tout $q \in [2, p^*]$ avec injection continue.

Corollaire

$H^1(\mathbb{R}^2) \subset L^q(\mathbb{R}^2)$, pour tout $q \in [2, +\infty[$ avec injection continue.

CAS OÙ $\Omega = \mathbb{R}$.

THÉORÈME (MORREY)

Alors
$$H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R}),$$
avec injection continue. De plus pour tout $u \in H^1(\mathbb{R})$:
$$|u(x) - u(y)| \leq C\|x - y\|^{1/2}\|\nabla u\|_{L^2}, \quad \text{p.p. } x, y \in \mathbb{R}.$$

Cas où $\Omega = \mathbb{R}^d$.

Corollaire (Espaces H^m)

Soient $m \geq 1$ entier. Avec injections continues :

- *Si $\dfrac{1}{2} - \dfrac{m}{d} > 0$, alors $H^m(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d)$ où $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{m}{d}$.*
- *Si $\dfrac{1}{2} - \dfrac{m}{d} = 0$, alors $H^m(\mathbb{R}^d) \subset L^q(\mathbb{R}^d)$, $\forall q \in [2, +\infty[$.*
- *Si $\dfrac{1}{2} - \dfrac{m}{d} < 0$, alors $H^m(\mathbb{R}^d) \subset L^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

De plus si $m - \dfrac{d}{2} > 0$ non entier, $k = [m - d/2]$ et $\theta = m - d/2 - k$, $H^m(\mathbb{R}^d) \subset C^k(\mathbb{R}^d)$ et :

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{H^m}, \ \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq k$$

$$|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| \leq C\|u\|_{H^m}|x - y|^\theta, \quad \text{p.p. } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Hypothèses :

- Ω ouvert de classe C^1 avec $\partial\Omega$ borné,
- $\Omega = \mathbb{R}^d_+ = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ x_d > 0\}$.

Corollaire

Avec injections continues :

- *Si* $2 < d$, *alors* $H^1(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ *où* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{d}$.
- *Si* $d = 2$, *alors* $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [2, +\infty[$.
- *Si* $d = 1$, *alors* $H^1(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.

De plus si $d = 1$ *pour tout* $u \in H^1(\Omega)$ *:*

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{H^1}|x-y|^{1/2}, \quad p.p.\ x, y \in \Omega.$$

Donc $H^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Hypothèses :

- Ω ouvert de classe C^1 avec $\partial\Omega$ borné,
- $\Omega = \mathbb{R}^d_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d,\ x_d > 0\}$.

Corollaire

Les conclusions du corollaire (Espaces H^m) restent vraies en remplaçant $\mathbb{R}^d$ par Ω.

Cas où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Définition

Une application $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est compacte si $T(B_E(0,1))$ est relativement compacte dans F.

Théorème (Rellich-Kondrachov)

Soit Ω ouvert de classe C^1 borné. Avec injections compactes :

- Si $2 < d$, alors $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, p^*[$, où $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{d}$.
- Si $d = 2$, alors $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$.
- Si $d = 1$, alors $H^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$.

Remarque : $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ avec injection compacte.

DÉFINITION

$H^1_0(\Omega)$ désigne la fermeture de $C^1_c(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

PROPOSITION

$H^1_0(\Omega)$ muni de la norme induite par $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

REMARQUE

- Si $\Omega = \mathbb{R}^d$, $H^1_0(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d)$.
- En général, $H^1_0(\Omega) \neq H^1(\Omega)$.
- $H^1_0(\Omega)$ est aussi la fermeture de $C^\infty_c(\Omega)$.

Comportement au bord.

Théorème

Soit Ω ouvert de classe C^1. Soit $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Alors :

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \Leftrightarrow u \in H^1_0(\Omega).$$

Proposition

On suppose Ω de classe C^1. Soit $u \in L^2(\Omega)$. Alors équivalence entre

- $u \in H^1_0(\Omega)$;
- *il existe une constante C t.q. :*

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right| \leq C\|\phi\|_2, \quad \forall \phi \in C^1_c(\mathbb{R}^d), \forall i = 1, \ldots, d;$$

- *la fonction $\overline{u}(x) = u(x)$ pour $x \in \Omega$ et $\overline{u}(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ est dans $H^1(\Omega)$ et $\overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i}$.*

THÉORÈME

Soit Ω ouvert borné (ou borné dans une direction). Alors il existe $C = C(\Omega)$ t.q.

$$\|u\|_2 \leq C\|\nabla u\|_2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Donc $\|\nabla u\|_2$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme $\|u\|_{H^1}$.
Autrement dit, $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \nabla v$ est un produit scalaire qui induit la norme $\|\nabla u\|_2$ équivalente à $\|u\|_{H^1}$.

LEMME

Il existe une constante C t.q. pour tout $u \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left| u(x', 0) \right|^2 dx' \right)^{1/2} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

DÉFINITION

$\gamma_0 : C^1_c(\mathbb{R}^d) \to L^2(\partial\Omega)$ *qui à u associe* $u|_{\partial\Omega}$*, avec* $\partial\Omega = \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$*, est continu.*
Donc se prolonge en un opérateur linéaire continu de $H^1(\Omega)$ *dans* $L^2(\partial\Omega)$*. Cet opérateur est la trace sur* $\partial\Omega$*.*

Si Ω est une ouvert borné de classe C^1, alors il existe $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ opérateur linéaire continu t.q.

1. noyau de $\gamma_0 = H^1_0(\Omega)$;
2. image de γ_0 : $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$ et

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

$$W^{1/2,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega),\ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{(d+1)/2}} \in L^2(\Omega \times \Omega) \right\}.$$

3. Formule de Green : pour u et v dans $H^1(\Omega)$:

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v = - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\partial\Omega} (uv)(\sigma)(\nu.e_i)(\sigma) d\sigma.$$

Pour u et v dans $H^2(\Omega)$:

$$- \int_\Omega (\Delta u) v = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma) v(\sigma) d\sigma.$$