

Partie A : Rappels de cours en thermique de l'ingénieur  
(conduction et convection)

1- Introduction sur les échanges thermiques .....	2
2- Transferts thermiques par conduction	
2.1- Equations générales pour les transferts de chaleur dans les solides .....	13
2.2- Solutions fondamentales de l'équation de la chaleur sans terme source ....	17
2.3- Transferts thermiques dans les murs et les surfaces planes .....	17
2.4- Analogies électro-acousto-thermique .....	23
2.5- Transferts thermiques dans une coque sphérique .....	25
2.6- Transferts thermiques dans un tuyau .....	27
2.7- Equation de la chaleur avec terme source (plan, cylindre, sphère) .....	28
2.8- Equation de la chaleur dans une plaque rectangulaire .....	31
2.9- Equation de la chaleur avec terme dépendant du temps .....	34
2.10- Applications au cas d'un choc thermique .....	40
3- Transferts thermiques par convection (libre et forcée)	
3.1- Equations générales pour les transferts de chaleur dans les fluides .....	46
3.2- Couplage entre écoulement du fluide et transfert de chaleur .....	52
3.3- Description des applications classiques (plaque, tube, barreau, ailette) .....	52
3.4- Théorie de la similitude, équations aux dimensions, nombres caractéristiques sans dimension .....	53
3.5- Théorie de la similitude, applications aux couches limites .....	56
3.6- Equations fondamentales pour la convection libre .....	60
3.7- Transferts thermiques pour un fluide en écoulement dans un tuyau .....	63
3.8- Transferts thermiques pour un barreau immergé dans un fluide .....	65
3.9- Application à la thermique des ailettes (planes, cylindriques) .....	66
3.10- Autres exemples d'applications pour des échanges de chaleur .....	72
4- Conclusion et éléments bibliographiques .....	73
5- Tables de valeurs usuelles des paramètres thermiques de divers matériaux .....	74

# Les transferts de chaleur

## I. Introduction générale

L'énergie correspond à un transfert ou échange par interaction d'un système avec son environnement. Ce système subit alors une transformation. On distingue habituellement deux types d'énergie : i) le travail noté  $W$  qui peut prendre diverses formes selon l'origine physique du transfert en jeu (électrique, magnétique, mécanique.....), et ii) la chaleur notée  $Q$ .

La thermodynamique classique ne s'intéresse généralement qu'aux états d'équilibre et aux variations entre ces états, grâce à l'utilisation de fonctions d'état, qui sur un plan mathématique sont des différentielles totales exactes. On pourrait d'ailleurs plus logiquement appeler cette discipline la thermostatique.

Le formalisme généralement utilisé nécessite ainsi seulement la connaissance des états initiaux et finaux sans pour autant examiner le processus de transfert d'énergie, ni les modes d'interaction. L'étude complète et générale des mécanismes de transfert d'énergie nécessite d'aborder le formalisme de la thermodynamique hors équilibre (formalisme d'Onsager par exemple et théories de Prigogine).

Dans le cadre de cet ouvrage, nous nous limiterons de façon modeste, parmi les transferts énergétiques, à l'étude des transferts de chaleur ou transferts thermiques, selon un point de vue macroscopique. Nous serons ainsi amené à répondre à trois questions:

1. Qu'est ce qu'un transfert de chaleur ?
2. Comment la chaleur est elle transférée ?
3. Pourquoi est-ce important de l'étudier ?

Les réponses apportées à ces trois questions nous permettront de comprendre les mécanismes physiques en jeu dans les transferts de chaleur et d'apprécier l'importance de ces transferts de chaleur dans les problèmes industriels, environnementaux et économiques.

Par définition, un transfert de chaleur ou transfert thermique entre deux corps est une interaction énergétique qui résulte d'une différence de température entre les deux corps.

On distingue habituellement trois modes de transfert de chaleur :

1. La conduction thermique ou diffusion thermique
2. Le rayonnement thermique
3. La convection

Ces trois modes sont régis par des lois spécifiques et font ainsi l'objet de chapitres différents, cependant strictement parlant, seuls la conduction et le rayonnement sont des modes fondamentaux de transmission de la chaleur ; la convection, tout en étant très importante, ne fait que combiner la conduction avec un déplacement de fluide.

En outre il est rare qu'une situation particulière ne concerne qu'un seul mode : le plus souvent deux sinon trois modes entrent en jeu. Il sera donc nécessaire de poser correctement les problèmes pour prendre en compte ces différents mécanismes. N'oublions pas qu'un autre mode de transfert, qui ne fera pas l'objet ici d'étude, existe : il s'agit des changements d'état.

## La conduction

La conduction est définie comme étant le mode de transmission de la chaleur (ou l'échange d'énergie interne) provoquée par la différence de température entre deux régions d'un milieu solide, liquide ou gazeux ou encore entre deux milieux en contact physique. (gradient de température dans un milieu).

Dans la plupart des cas, on étudie la conduction dans les milieux solides, puisque dans les milieux fluides (c'est-à-dire liquide ou gazeux), il y a souvent couplage avec un déplacement de matière et donc mécanisme de convection.

La conduction est le seul mécanisme intervenant dans le transfert de chaleur dans un solide homogène, opaque et compact.

La conduction s'effectue de proche en proche :

Si on chauffe l'extrémité d'un solide il y a transfert progressif.

Si on coupe le solide, on stoppe le transfert.

*Exemple* : Barre de métal chauffée à l'une de ces extrémités.

On comprend donc intuitivement que la conduction a une origine microscopique. Il s'agit d'un mécanisme de diffusion de la chaleur.

## Le rayonnement

Le rayonnement thermique peut être considéré comme un cas particulier du rayonnement électromagnétique. L'exemple le plus simple est celui du rayonnement solaire.

Le rayonnement thermique est le mode de transmission par lequel la chaleur passe d'un corps à haute température à un autre plus froid sans nécessité de support matériel. C'est donc le seul mode de transfert de chaleur qui peut se propager dans le vide.

Le rayonnement thermique ne diffère des autres ondes électromagnétiques, comme les ondes hertziennes par exemple, que par son origine : la température. En effet tout corps rayonne tant que sa température est différente de 0 K.

Le rayonnement thermique est un phénomène de surface.

## La convection

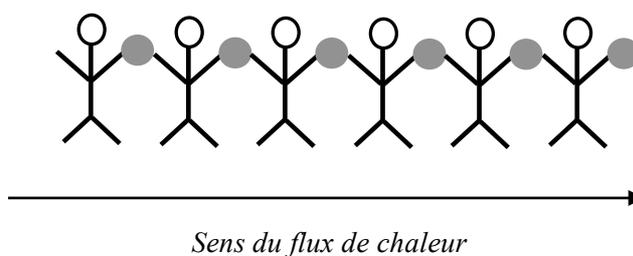
La convection est le mode de transmission qui implique le déplacement d'un fluide gazeux ou liquide (écoulement) et échange avec une surface qui est à une température différente.

*Exemple* : C'est ce qui se passe le long d'un radiateur. L'air froid s'échauffe au contact du radiateur, se dilate et monte sous l'effet de la poussée d'Archimède. Il est alors remplacé par de l'air froid et ainsi de suite ; il y a existence de courants de fluide dans l'air ambiant.

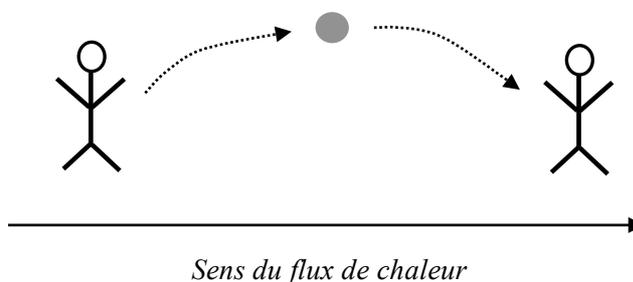
On distinguera la convection forcée (due à l'action d'une pompe, d'un ventilateur, etc., ...) de la convection naturelle (ou libre) dans laquelle le mouvement du fluide est créé par des différences de densité, elles mêmes provoquées par des différences de température.

On peut schématiquement représenter les transferts de chaleur comme décrit ci-dessous (Figure 1) :

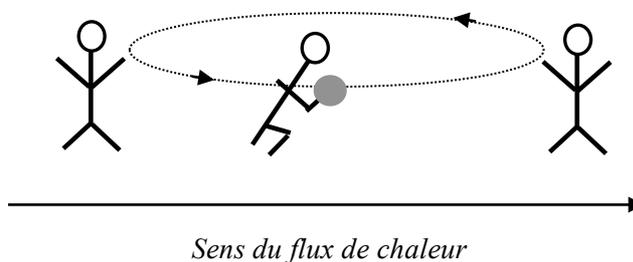
(a) CONDUCTION



(b) RAYONNEMENT



(c) CONVECTION



F

Figure 1 : Schémas de principe sur les mécanismes de transferts de chaleur : (a) conduction thermique ; (b) rayonnement ; (c) convection.

## II. Introduction à la conduction

### II.1 Origine microscopique du mécanisme de conduction

Rappelons que la conduction nécessite un support matériel et que son origine est microscopique, liée aux atomes et aux molécules du milieu où se produit la conduction.

La conduction peut être vue comme le transfert d'énergie de particules les plus énergétiques vers les particules les moins énergétiques, à cause des interactions entre particules.

Description simplifiée du mécanisme physique

Exemple : gaz sans mouvement d'ensemble (pas de convection).

Prenons un gaz contenu entre deux surfaces à  $T_1$  et  $T_2$  avec  $T_1 > T_2$  (voir Figure 2).

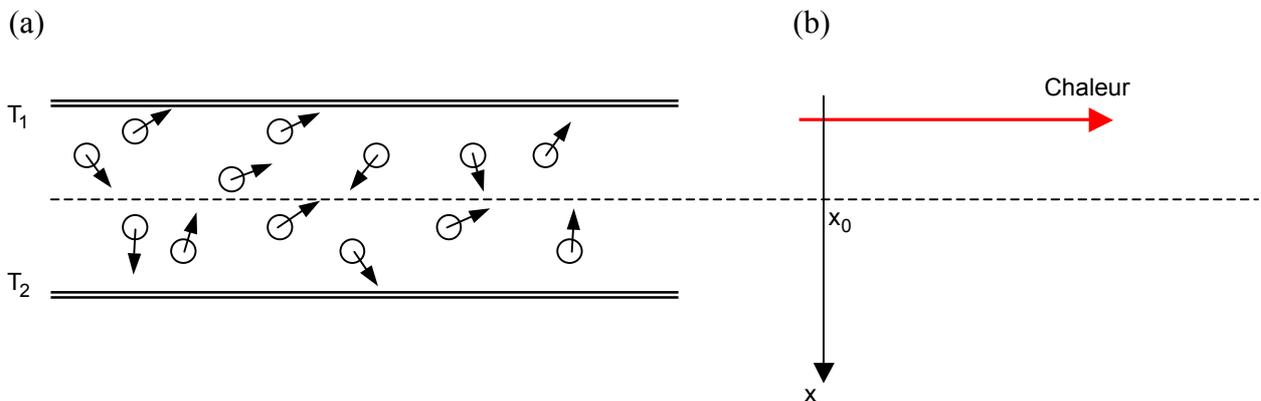


Figure 2 : (a) Mécanisme de dissipation thermique à la base de l'agitation moléculaire, et (b) Profil de température associé.

Dans un modèle moléculaire simple (théorie cinétique des gaz parfaits – distribution de Maxwell), l'énergie cinétique moyenne peut se mettre sous la forme suivante :

$$U = E_{\text{cinétique\_translation}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$$

où  $v$  désigne la vitesse quadratique moyenne d'agitation des molécules sous la seule action de la température  $T$ .

$k$  est la constante de Boltzmann ( $k = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$ ) et  $m$  la masse d'un atome ou d'une molécule.

Les molécules en mouvement près de  $T_1$  ont la température  $T_1$ .

Les molécules en mouvement près de  $T_2$  ont la température  $T_2$ .

Une énergie plus grande est par conséquent associée à une température plus élevée.

Au moment des collisions qui sont incessantes, il y a transfert d'énergie des molécules les plus énergétiques vers les moins énergétiques, des plus rapides vers les moins rapides, c'est-à-dire des plus hautes températures vers les plus basses.

Si l'on considère un plan fictif d'abscisse  $x_0$  dans le gaz (voir Figure 2), des molécules traversent continûment la surface dans un sens ou dans l'autre.

Mais les molécules du dessus ont une énergie plus grande car la température est plus élevée, il se produit ainsi un transfert net dans le sens des  $x > 0$  par mouvement aléatoire des molécules. Il s'agit d'un processus de diffusion d'énergie

Pour un **liquide** le modèle est à peu près le même avec des interactions plus fortes.

Dans les **solides** il faudra distinguer deux cas, à savoir celui des matériaux de type conducteur électrique, et celui des matériaux de type isolant électrique.

On observe que les bons conducteurs thermiques sont aussi des bons conducteurs électriques (métaux), intuitivement, il est facile de comprendre que dans le cas des matériaux conducteurs électriques, les électrons responsables de la conduction électrique sont aussi responsables de la conduction thermique.

Par contre dans le cas des isolants électriques, les vibrations atomiques (phonons) sont à l'origine microscopique de la conduction thermique

## II.2 La loi de Fourier

### II.2.1. Notion de flux

Après cette brève introduction sur l'origine microscopique du mécanisme de conduction thermique, intéressons nous à son aspect macroscopique, tel que l'a découvert J.B Fourier au début du 19<sup>ème</sup> siècle.

C'est en effet J.B Fourier qui en 1822 publie la loi fondamentale de la conduction dans son traité : « La théorie analytique de la chaleur ». Rappelons qu'il avait obtenu en 1812 le prix de l'Académie des Sciences pour un mémoire sur la propagation de la chaleur, délivré par un jury qui comprenait Laplace, Legendre et Lagrange !

Fourier apparente ainsi la conduction de la chaleur à l'écoulement d'un fluide des régions les plus chaudes vers les régions les plus froides et considère les milieux comme continus, en négligeant toute dilatation volumique.

Considérons un transfert élémentaire de chaleur élémentaire  $\delta Q$  entre deux plans indéfinis portés aux températures  $T$  et  $T+dT$ . Ces deux plans délimitent une portion de solide et sont supposés perpendiculaires à un axe  $Ox$ . La loi de Fourier exprime naturellement que la chaleur échangée est proportionnelle : à la surface d'échange, à la différence de température entre les deux parois, au temps écoulé et qu'elle est inversement proportionnelle à la distance entre les deux plans. La Figure 3 donne un schéma de principe sur la conduction à une dimension, le long de l'axe  $Ox$ .

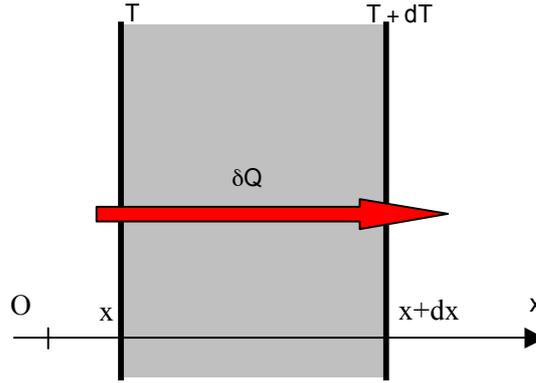


Figure 3 : Géométrie de base pour l'établissement de la loi de Fourier à une dimension (le long de l'axe horizontal Ox).

$$\text{Soit : } \delta Q = -\lambda S \frac{dT}{dx} dt \quad (\text{loi de Fourier}) \quad (1.1).$$

$S$  est la surface d'échange (perpendiculaire à l'axe Ox)

$dT$  est l'écart de température entre les deux plans séparés de  $dx$

$dt$  désigne le temps que dure l'expérience.

$\lambda$  est le coefficient de proportionnalité appelé conductivité thermique ou conductance spécifique.

Le signe ( - ) correspond à une convention qui impose une quantité de chaleur échangée positive (  $\delta Q > 0$  ) dans le sens des températures décroissantes le long des  $x$  croissants. Il faut noter que cette convention est en fait opposée à elle choisie généralement en thermodynamique classique où l'on impose toujours que toute énergie perdue par le système est comptée négativement.

Il est en fait plus commode d'utiliser le flux thermique que l'on peut définir par :  $\phi = \frac{\delta Q}{\delta t}$

$\phi$  est homogène à une puissance et s'exprime en Watts (W).

$$\text{On a donc } \phi = -\lambda S \frac{dT}{dx} \quad (1.2)$$

On utilise aussi couramment la densité de flux qui correspond au flux échangé rapporté à l'unité de surface.

Soit :  $\varphi = \frac{\phi}{S}$   $\varphi$  s'exprime en (W/m<sup>2</sup>)

$$\text{Et ainsi } \varphi = -\lambda \frac{dT}{dx} \text{ dans un problème unidimensionnel} \quad (1.3).$$

Dans le problème simplifié ci-dessus on a implicitement considéré un mécanisme de conduction unidimensionnel perpendiculaire à l'axe des  $x$ . Dans un cas général de mécanisme tri-dimensionnel on exprimera une densité de flux de chaleur selon chacune des directions principales d'un repère orthonormé ( $O x, y, z$ ).

Soit suivant  $Ox$  :

$$\varphi_x = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{y,z}$$

suitant  $Oy$  :

$$\varphi_y = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{x,z}$$

suitant  $Oz$  :

$$\varphi_z = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{x,y}$$

ou encore de manière globale :

$$\boxed{\vec{\varphi} = -\lambda \text{ grad } \vec{T}} \quad (1.4)$$

Dans le modèle de l'équation (1.4), la conductivité thermique est supposée être un scalaire constant. C'est le cas des solides homogènes et isotropes. Il existe cependant de nombreux cas où la conductivité thermique dépend des propriétés d'orientation du solide (cristal, matériau déposé en couches minces, matériau fibreux etc., ...). La conductivité thermique devient alors un tenseur et la loi de Fourier généralisée s'exprime par :

$$\boxed{\vec{\varphi} = -[\Lambda] \text{ grad } \vec{T}} \quad (1.5)$$

où  $[\Lambda] = \begin{vmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{vmatrix}$  désigne le tenseur des conductivités thermiques.

Dans la plupart des cas, le tenseur peut être diagonalisé sous la forme  $[\Lambda] = \begin{vmatrix} \lambda_u & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_v & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_w \end{vmatrix}$  où

les grandeurs  $\lambda_u, \lambda_v, \lambda_w$  désignent les conductivités principales du milieu selon les directions  $Ou, Ov, Ow$ .

### II.2.2. La conductivité thermique

La conductivité thermique  $\lambda$  (souvent notée  $k$  dans les pays anglo-saxons) exprime, de par sa définition, l'aptitude d'un matériau à conduire la chaleur.

**Définition** : la conductivité thermique est le flux de chaleur qui traverse une surface unité pour un matériau soumis à un gradient de température égal à l'unité.

La conductivité thermique s'exprime en  $\mathbf{W.m^{-1}.K^{-1}}$ .

La conductivité thermique dépend de :

- La nature physico-chimique du matériau
- La nature de la phase considérée (solide, liquide, gaz)
- La température
- L'orientation dans les matériaux anisotropes

On trouvera dans la Table I des ordres de grandeur pour la conductivité thermique pour divers matériaux à température ambiante (20°C).

<u>Type de matériau</u>	<u>Conductivité thermique (W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>)</u>
Gaz à la pression atmosphérique	0.006-0.18
Matériaux isolants	0.025-0.25
Liquides non métalliques	0.1-1.0
Solides non métalliques	0.025-3
Liquides métalliques	8.5-85
Alliages métalliques	10-150
Métaux purs	20-400

Table I : Ordres de grandeur de la conductivité thermique pour divers matériaux.

La conductivité thermique dépend de la température lorsque l'on considère des plages étendues de température. Dans ce cas on pourra cependant souvent considérer une variation linéaire avec  $T$ , sous la forme :  $\lambda = \lambda_0 (1 + b(T - T_0))$

$\lambda_0$  désigne la conductivité à  $T = T_0$  et  $b$  est une constante expérimentale.

La dépendance en température de différents matériaux est illustrée dans la Figure 4 ci-dessous (extraite de J. Crabol – transfert de chaleur- ed. Masson 1989)

Dans la suite de ces rappels de cours on considérera systématiquement la conductivité thermique  $\lambda$  comme un scalaire constant ce qui revient à se placer dans le **cas de matériaux homogènes et isotropes**. Cette simplification n'est cependant pas abusive car il est souvent difficile de procéder différemment et même dans le cas de matériaux typiquement inhomogènes (béton par exemple) on considère une conductivité moyenne appelée conductivité effective.

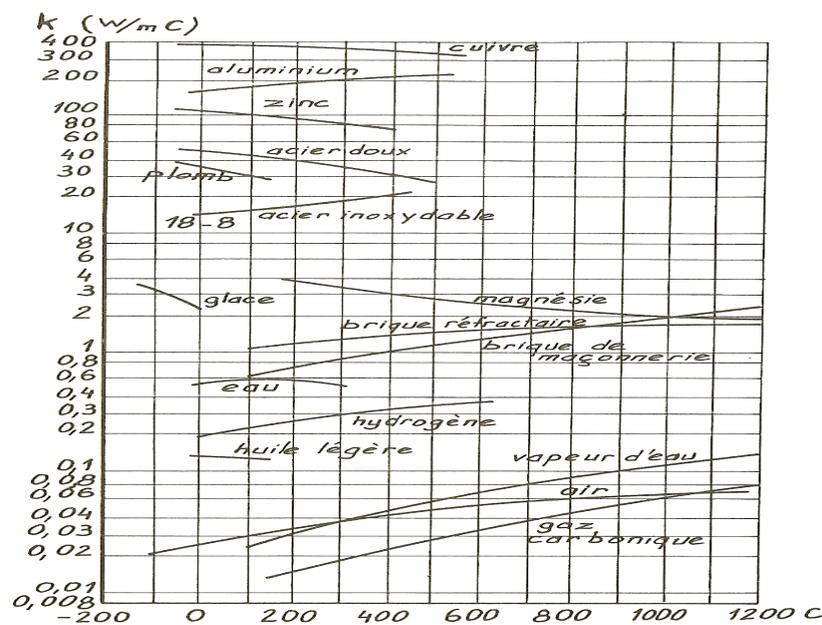


Figure 4 : Ordres de grandeurs de la conductivité thermique pour différents matériaux.

### III. Introduction au Rayonnement Thermique

Considérons un matériau recevant un flux d'énergie électromagnétique  $\Phi_i$ . Ce flux peut être réfléchi en partie  $\Phi_r$ , transmis en partie  $\Phi_t$  ou absorbé en partie  $\Phi_a$ .

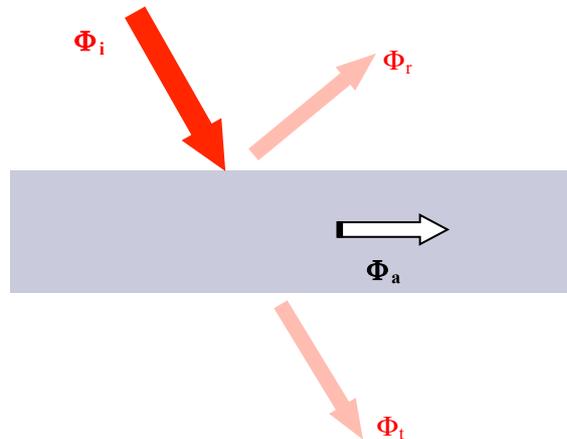


Figure 5 : Schéma de principe des échanges radiatifs, avec bilan des transferts observés.

La conservation de l'énergie impose que :  $\Phi_i = \Phi_r + \Phi_t + \Phi_a$

Cette relation peut encore s'écrire :  $1 = \frac{\Phi_r}{\Phi_i} + \frac{\Phi_t}{\Phi_i} + \frac{\Phi_a}{\Phi_i} = r + t + \alpha$

Avec :

- $r$  : coefficient de réflexion
- $t$  : coefficient de transmission
- $\alpha$  : **coefficient d'absorption**

Si  $\alpha = 1$  le matériau absorbe tout le rayonnement qu'il reçoit, on parle alors de **corps noir**

Le corps noir sert de référence à l'étude du rayonnement thermique des corps. Le corps noir correspond à un corps susceptible d'absorber tout le rayonnement qu'il reçoit, mais aussi capable de le réémettre intégralement. On parle de radiateur intégral et d'émetteur intégral.

Si l'on définit le coefficient d'émission  $\varepsilon$  d'une surface réelle comme étant le rapport du flux émis par cette surface à celui émis par la même surface si elle était noire, on a évidemment pour le corps noir :

$$\alpha = \varepsilon = 1$$

La loi de Stephan-Boltzmann (1879) énonce que le rayonnement thermique d'une surface  $S$  noire à la température  $T_S$ , s'exprime par :

$$\Phi = \sigma S T_S^4 \tag{1.6}$$

Elle exprime que le flux d'énergie radiante émis par une surface idéale appelée « noire » est proportionnel à l'aire de cette surface et à la puissance quatrième de la température absolue  $T_S$  de la surface.

$\sigma$  est la constante de Stephan qui vaut  $\sigma = 5.66697.10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$

Le flux d'énergie rayonné émis par une surface réelle quelconque (appelée corps gris, voir chapitre des rappels de cours sur le rayonnement) devient alors :  $\Phi = \alpha\sigma S T_S^4 = \varepsilon\sigma S T_S^4$

où  $\alpha$  est le facteur d'absorption de la surface grise et  $\varepsilon$  le facteur d'émission de la surface considérée.

Dans le cas de la surface grise on a :  $\alpha = \varepsilon \neq 1$  (et bien sûr  $0 \leq \alpha = \varepsilon < 1$ )

Lorsqu'il y a échange entre la surface rayonnante et le milieu extérieur (température  $T_\infty$ ), l'équation d'échange s'écrit :

$$\Phi = \alpha \sigma S (T_S^4 - T_\infty^4) \quad (1.7)$$

*Exemple* : corps gris à la température  $T_S$  enfermé dans une enceinte à  $T_\infty$

#### IV. Introduction à la convection

Rappelons que la convection est le mode de transmission qui implique nécessairement le déplacement d'un fluide, liquide ou gazeux.

Le traitement mathématique de la convection est complexe puisqu'il combine les lois de la conduction et celles relatives à l'écoulement des fluides, c'est pourquoi on fait souvent appel dans la pratique à des formules semi-empiriques.

Pour pouvoir aisément traiter les problèmes de convection, on exprime assez intuitivement que le flux de chaleur échangé par convection le long d'une surface  $S$ , à la température de surface  $T_s$ , et plongé dans un milieu ambiant à  $T_\infty$ , s'exprime par la relation, dite de *Newton* :

$$\Phi = hS(T_s - T_\infty) \quad (1.8)$$

avec :  $h$  : conductance spécifique du milieu considéré, souvent appelé coefficient d'échange ou coefficient de surface ou plus simplement **coefficient de convection**.

$S$  : l'aire perpendiculaire au flux de chaleur

$T_s$  : La température de la surface « léchée » par le phénomène de convection

$T_\infty$  : la température du fluide « au large » ( c'est-à-dire loin de la surface)

$h$  s'exprime en  $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$

Cette relation, dont la simplicité est trompeuse, permet d'exprimer globalement le phénomène de convection.

$h$  est souvent considéré comme constant toutefois, il faut savoir qu'en fait  $h$  dépend :

du point où l'on est

de l'état de surface et de la géométrie du système  
de la vitesse du fluide et de ses propriétés physiques  
de la différence de température  $T - T_\infty$

$h$  est donc une grandeur globale, complexe et variable.

Reprenons la loi sur le rayonnement :

$$\Phi = \alpha \sigma S (T_S^4 - T_\infty^4) \text{ avec } T_S \text{ qui peut s'écrire } T_S = T_\infty + (T_S - T_\infty) = T_\infty + \Delta T$$

$$\text{c'est à dire } T_S = T_\infty \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_\infty} \right)$$

$$\text{d'où } T_S^4 = T_\infty^4 \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_\infty} \right)^4 \text{ si } \Delta T \ll T_\infty \text{ on tire } T_S^4 = T_\infty^4 \left( 1 + \frac{4\Delta T}{T_\infty} \right)$$

$$\text{d'où } T_S^4 - T_\infty^4 = 4\Delta T \cdot T_\infty^3, \text{ soit } \Phi = 4\alpha\sigma S T_\infty^3 (T_S - T_\infty)$$

Ainsi pour le rayonnement thermique, on montre que le flux échangé avec une surface  $T_S$  est, en première approximation, proportionnel à la quantité  $S(T_S - T_\infty)$ .

Dans le cas de la convection, la relation de Newton exprime également que le flux échangé est proportionnel à  $S(T_S - T_\infty)$ .

On peut donc exprimer de manière globale que le flux échangé par convection-rayonnement s'exprime par :

$$\Phi = KS(T_S - T_\infty) \quad (1.9)$$

où  $K$  est appelé coefficient global, ou encore **coefficient de convection-rayonnement**, ou encore **coefficient de transmission thermique (CTT)**, ou encore coefficient de transfert.

Nous exprimons ici la loi de Newton de la convection en remplaçant  $h$  par  $K$ . Le CTT englobe la convection et le rayonnement, il s'exprime en  $W.m^{-2}.K^{-1}$ .

Remarquons enfin que la loi de Newton nous permet d'aborder le cas d'une condition aux limites très fréquente en conduction : celui où un solide est « léché » par un fluide à la température  $T_\infty$ , le coefficient de convection rayonnement étant  $K$ . On applique alors la loi de conservation du flux :

$$\boxed{-\lambda S \frac{dT}{dx} \Big|_S} = KS(T_S - T_\infty) \quad (\text{Cas d'un problème unidimensionnel})$$

$-\lambda S \frac{dT}{dx} \Big|_S$  : traduit la conduction dans le solide et  $KS(T_S - T_\infty)$  : Convection entre le solide et le fluide.

## 2- Transferts thermiques par conduction

### 2.1- Equations générales pour les transferts de chaleur dans les solides

Considérons le problème à une dimension suivant. Soit un barreau, disposé le long de l'axe horizontal  $Ox$ , chauffé à son extrémité en  $x = 0$  à l'aide d'un bec bunsen, cf. Figure 6. Le fait de chauffer vient indiquer qu'un certain flux de chaleur va se transmettre le long de l'axe  $Ox$ , des zones chaudes vers les zones froides. Dans le même temps, si la température est mesurée le long de cet axe horizontal  $Ox$ , alors on constate qu'elle diminue régulièrement en s'éloignant de la source de chaleur (située en  $x = 0$ ).

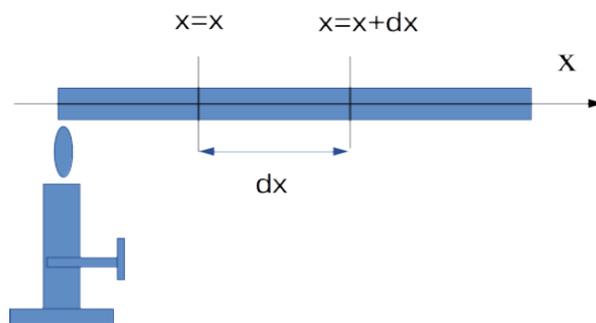


Figure 6 : Géométrie d'un barreau mince pour l'étude de la conduction de la chaleur à une dimension.

Il est alors possible d'exprimer ce flux de puissance thermique (en W) entre deux sections du barreau, située en  $x = x$  et en  $x = x + dx$ , où  $dx$  est donc un élément infinitésimal de longueur sur lequel nous raisonnons ici. Nous pouvons écrire la loi de Fourier sous sa forme différentielle :

$$d\phi_x^e = -\lambda dS_x \frac{\partial T(x)}{\partial x}. \quad (2.1)$$

Cette relation indique simplement que le flux de chaleur transmis est proportionnel à la section du barreau, et qu'il est donc relié au gradient du champ de température. Il existe aussi la constante  $\lambda$ , qui représente la conductivité thermique (exprimée en W/m.K). Il est bien clair que ce flux de chaleur sera plus ou moins important, en fonction du matériau utilisé (par exemple conducteur ou isolant), et le paramètre  $\lambda$  quantifie justement cette propriété là de conduction plus ou moins aisée de la chaleur. Si ce paramètre est élevé (cas d'un bon conducteur de la chaleur), pour une section et pour un gradient fixé par ailleurs, alors le flux de chaleur sera très important. Par contre, dans le cas inverse d'un isolant, alors la conductivité, ainsi que le flux de chaleur, sera donc faible, voire très faible. Enfin, il existe un

signe négatif qui prend en compte le fait que le gradient de température,  $\frac{\partial T(x)}{\partial x}$ , est négatif

(puisque justement le champ de température diminue le long des  $x$  croissants), alors que le flux de puissance thermique est lui manifestement positif, en direction des  $x$  croissants.

L'équation (2.1) est écrite pour le flux de chaleur pénétrant le volume de référence  $Sdx$ , en  $x = x$ . L'indice « e » indique justement le fait qu'il s'agit d'un flux « entrant ». On effectue alors le même raisonnement pour le flux sortant en  $x = x + dx$ , et qui s'écrit :

$$d\phi_{x+dx}^s = -\lambda dS_x \frac{\partial T(x+dx)}{\partial x}, \quad (2.2)$$

soit en utilisant le théorème des accroissements finis :  $T(x+dx) = T(x) + \frac{\partial T}{\partial x} dx$ ,

$$d\phi_{x+dx}^s = -\lambda dS_x \frac{\partial T(x+dx)}{\partial x} = -\lambda dS_x \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda dS_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx, \quad (2.3)$$

$$\text{d'où : } d\phi_x^e = d\phi_{x+dx}^s + \lambda dS_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx. \quad (2.4)$$

L'étape suivante consiste à écrire pour le cas plus général à trois dimensions (non plus un barreau chauffé le long de la direction  $Ox$ , mais pour le cas d'un solide chauffé dans son volume) des équations similaires à (2.4) le long des directions  $Oy$  et  $Oz$ , soit :

$$d\phi_y^e = d\phi_{y+dy}^s + \lambda dS_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy ; \quad d\phi_z^e = d\phi_{z+dz}^s + \lambda dS_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dz. \quad (2.5)$$

Le bilan thermique global est alors écrit, sous la forme suivante :

$$dQ^e = dQ^s + dQ^i, \text{ avec : } dQ^i = \rho dV C_p dT = \rho dx dy dz C_p dT. \quad (2.6)$$

Cette dernière relation exprime donc la conservation de la chaleur, avec d'un côté ce qui entre ( $dQ^e$ ) dans le volume de référence  $dV = dx dy dz$ , et d'autre part ce qui en sort ( $dQ^s$ ), avec la différence :  $dQ^e - dQ^s = dQ^i$ , qui a justement servi à augmenter la température du volume de référence (deuxième partie de l'équation (2.6) qui n'est rien d'autre que la relation fondamentale de la calorimétrie). Dans cette relation,  $C_p$  représente la chaleur massique du solide, par exemple ici écrite à pression constante.

Il reste alors à écrire la relation entre flux de chaleur et chaleur mise en jeu au cours des échanges, relation se mettant sous la forme :  $dQ_x^e = d\phi_x^e \cdot dt$  ;  $dQ_{x+dx}^s = d\phi_{x+dx}^s \cdot dt$ , et des relations similaires écrites le long des axes  $Oy$  et  $Oz$ . A l'aide des équations (2.4) et (2.5), et en notant :  $dS_x = dy dz$  ;  $dS_y = dx dz$  ;  $dS_z = dx dy$ , l'équation de bilan (2.6) peut finalement s'écrire sous la forme :

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \rho C_p \frac{dT}{dt}, \quad (2.7)$$

soit de manière davantage compacte :  $\chi \Delta T = \frac{dT}{dt}$ , où  $\Delta T$  est le laplacien scalaire du champ de température, avec :  $\chi = \frac{\lambda}{\rho C_p}$ , grandeur (parfois notée «  $a$  ») représentant la diffusivité thermique. La Figure 7 fournit quelques indications sur la géométrie, et notamment sur l'élément de volume représentatif en coordonnées cartésiennes.

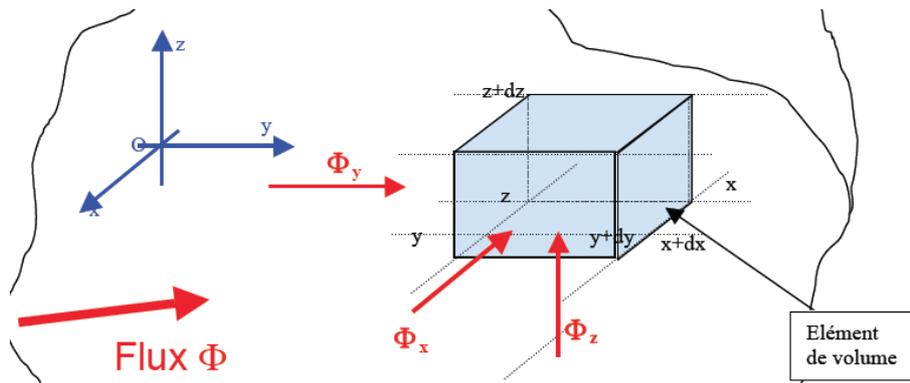


Figure 7 : Géométrie pour le calcul des échanges thermiques en trois dimensions.

L'équation (2.7) est donc l'équation de la chaleur à trois dimensions, en coordonnées cartésiennes, sans terme source, et avec un terme (celui de droite) qui dépend du temps. Lorsqu'il existe en plus une source de chaleur dans le volume de référence, alors l'équation de la chaleur la plus générale s'écrit :

$$Q_s + \lambda \Delta T = \rho C_p \frac{dT}{dt}. \quad (2.8)$$

La production interne de chaleur au sein du matériau peut provenir de différentes sources. Citons par exemple la chaleur produite au sein d'un conducteur électrique par effet Joule, ou bien le cas d'éventuelles réactions chimiques, celui de changements d'état (avec existence de chaleur latente), des phénomènes d'irradiation (avec une production interne de chaleur), etc.

Si de plus le matériau est anisotrope, c'est alors une version modifiée de l'équation (2.7) qui doit être utilisée, sous la forme :

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \rho C_p \frac{dT}{dt}, \quad (2.9)$$

avec des conductivités thermiques qui dépendent des directions principales.

On trouvera dans les quatre premières Tables (A1 à A4) des documents de l'Annexe des valeurs des deux paramètres « thermiques » définis jusqu'ici, à savoir : la capacité calorifique (à pression constante)  $C_p$  et la conductivité thermique  $\lambda$ , ainsi que la masse volumique  $\rho$  des différents matériaux présentés. En fait, il s'agit de deux fluides de référence (l'air et l'eau) pour les deux premières Tables A1 et A2, ainsi que de différents matériaux solides (dans les Tables A3 et A4), d'un côté d'excellents conducteurs thermiques que sont les métaux, et de l'autre de nombreux matériaux isolants utilisés dans les constructions et les bâtiments.

En règle générale, un problème de conduction thermique suppose : 1- la résolution d'une équation différentielle, 2- la connaissance des conditions initiales (à  $t = 0$ ), 3- la connaissance des conditions aux limites spatiales, par exemple à la surface d'un objet ou d'un matériau. En fait, il existe différentes conditions aux limites sur les frontières du corps étudié. On distingue classiquement trois types de conditions aux limites :

- Conditions de Dirichlet (ou condition du 1<sup>er</sup> type) : le champ de température est supposé connu en tout point de la surface de référence. Cette distribution de température est par exemple fournie (ou fixée) en fonction du temps, et pour tous les points de la surface. Le cas le plus élémentaire et le plus courant reste celui de considérer une température de surface constante, uniforme sur l'espace de la surface, et indépendante dans le temps, soit simplement d'écrire  $T_S = \text{cte}$ .
- Conditions de Neumann (ou condition du 2<sup>ème</sup> type) : Cette fois-ci c'est la densité de flux de chaleur qui est supposée connue pour tout point de la surface de référence. Ici encore, le cas le plus simple est de considérer que ce flux est constant,  $\phi_S = \text{cte}$ . Au passage, à cause de la loi de Fourier :  $\phi_x = -\lambda S_x \frac{\partial T}{\partial x}$ , avoir connaissance du flux de chaleur à la surface, fixe celle du gradient de la température dans la direction considérée.
- Conditions de Fourier ou de Robin (ou condition du 3<sup>ème</sup> type) : Il s'agit d'un cas où une surface solide est baignée dans un fluide en mouvement de convection (par exemple mur placé dans l'air environnant). Dans ce cas, c'est la température du fluide vu comme un thermostat qui sera fixée comme référence connue, et qui sera notée le plus souvent  $T_\infty$ .

Il faut noter que les conditions de Dirichlet ou de Neumann se retrouvent aussi en acoustique, le champ de pression acoustique remplaçant celui de température, et le flux de vitesse particulière acoustique venant se mettre à la place du flux de chaleur (ou bien le gradient de pression acoustique, cf. équation d'Euler venant remplacer le

gradient de température, cf. loi de Fourier). Pour davantage de détails, se référer à la section 2.4 sur les analogies électro-acousto-thermique.

## 2.2- Solutions fondamentales de l'équation de la chaleur sans terme source

Habituellement, on commence par traiter les cas des transferts de chaleur les plus simples, pour ensuite rajouter différents termes. Lorsqu'il n'y a pas de terme source,  $Q_s = 0$  (on parle souvent de « conduction morte » par opposition au cas où  $Q_s \neq 0$  qui est celui dit de la « conduction vive »), et lorsque nous sommes en régime stationnaire,  $\frac{d}{dt} \equiv 0$ , alors l'équation de la chaleur se ramène à une simple équation de Poisson :  $\Delta T = 0$ . Il s'agit d'un cas élémentaire, qui permet de résoudre plusieurs problèmes, pour des configurations variées, à savoir : thermique des murs simples ou composés, isolation thermique des canalisations cylindriques (ou des conduites), fonctionnement des réacteurs chimiques sphériques. Le plus souvent pour ces problèmes, qui sont tous solutions de l'équation de Poisson de départ :  $\Delta T = 0$ , il faut utiliser le laplacien scalaire  $\Delta T$ , adéquat. Pour des configurations à une dimension retenues ici,  $\Delta T$  s'écrit :

$$\Delta T = \frac{d^2 T(x)}{dx^2} = 0, \text{ pour un mur simple ou composite ;}$$

$$\Delta T = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0, \text{ pour une canalisation cylindrique simple ou multiple ;}$$

$$\Delta T = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0, \text{ pour un réacteur sphérique simple ou multiple.}$$

Le fait de limiter les configurations à des problèmes à une dimension vient simplifier notablement les calculs. Par exemple, le laplacien est limité pour les coques cylindriques ou sphériques à sa partie radiale, les dépendances angulaires n'y étant pas prises en compte. Au passage, le fait d'aboutir à une équation de Poisson :  $\Delta T = 0$ , permet d'utiliser les nombreuses méthodes numériques développées en électrocinétique pour résoudre des problèmes similaires (ou analogues). Bien entendu, ces méthodes numériques ne s'appliquent pas pour des configurations plus complexes, avec notamment le cas du régime instationnaire (exemple des chocs thermiques).

## 2.3- Transferts thermiques dans les murs et les surfaces planes

Débutons par le cas des murs, simples ou composites, en série ou bien en parallèle. Le cas le plus élémentaire est celui d'un mur simple. Sachant que l'on écrit :  $\Delta T = \frac{d^2 T(x)}{dx^2} = 0$ , on

obtient après deux intégrations le long de l'axe  $Ox$  perpendiculaire à la surface du mur plan :  $T(x) = Ax + B$ . Le profil de température est donc linéaire à l'intérieur du mur, cf. figure 8.

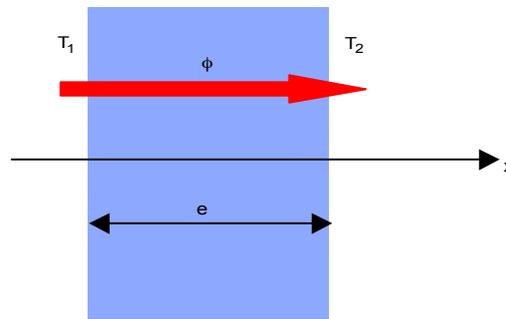


Figure 8 : Configuration pour les échanges de chaleur dans un mur simple.

Pour calculer les deux constantes d'intégration  $A$  et  $B$ , il faut utiliser les conditions aux limites, par exemple :  $T_{(x=0)} = T_1 = B$ , et  $T_{(x=e)} = T_2 = Ae + B = Ae + T_1$ , où  $e$  est l'épaisseur du mur, et où :  $T_1$  et  $T_2$  sont les températures par exemple à l'intérieur et à l'extérieur du mur de l'habitation (avec ici  $T_1 > T_2$ ). On obtient ici :  $\frac{T_2 - T_1}{e} = A$ , soit en revenant à la solution de

départ :  $T(x) = Ax + B = \left(\frac{T_2 - T_1}{e}\right)x + T_1$ . Bien entendu, on retrouve naturellement les deux

conditions aux limites de départ, en  $x = 0$  et en  $x = e$ . Au passage, le profil linéaire de la température à l'intérieur du mur possède une pente négative (du fait que  $T_1 > T_2$ ). Ceci n'est pas surprenant puisque le mur est tourné vers l'extérieur, le long des  $x$  croissants. Le flux de chaleur transmis se calcule directement à partir de la loi de Fourier, écrite ici selon sa variante à une dimension sous la forme :  $\phi = -\lambda S \frac{dT}{dx}$ , soit :  $\phi = -\lambda S \frac{T_2 - T_1}{e} = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{e}$ .

L'analogie formelle présentée dans la section 2.4. permet d'introduire la résistance thermique sous la forme :  $T_1 - T_2 = \frac{e}{\lambda S} \phi \Rightarrow \Delta T = R_{ther} \phi$ , avec :  $R_{ther} = \frac{e}{\lambda S}$ . Dans ces expressions, le flux de chaleur  $\phi$ , joue le rôle de l'intensité électrique  $I$  de la loi d'Ohm ( $\Delta U = R_{elec} I$ ), alors que la chute de température dans le mur  $\Delta T$ , est analogue à la différence de tension électrique  $\Delta U$  dans le circuit. L'unité de la résistance thermique est fournie par le rapport d'une température par un flux thermique. Elle s'exprime en conséquence en K/W. L'usage de l'analogie formelle « électro-thermique » est très utile pour discuter le cas des deux configurations classiques, celle où les murs sont montés en série (dans ce cas le flux thermique est identique dans chaque couche, comme l'est l'intensité électrique dans un circuit série), ou bien celle où les murs sont placés à côté les uns des autres, c'est-à-dire qu'ils sont montés en parallèle (et dans ce cas, le flux de chaleur global est la somme des flux thermiques individuels traversant chacun l'un ou l'autre des différents murs).

Traisons donc le cas des murs composés, et commençons par le cas le plus simple de murs sous forme de plusieurs couches différentes (trois ici), par exemple une épaisseur de briques, puis une autre de plâtre et enfin une troisième d'isolant, cf. Figure 9, pour le cas de la généralisation à  $n$  couches. Les trois couches ont la même surface  $S$ , et par contre ont des épaisseurs et des conductivités thermiques différentes. Enfin les températures aux divers interfaces sont respectivement notées  $T_1, T_2, T_3$  et  $T_4$ . L'équation de Fourier,  $\phi = -\lambda S \frac{\partial T(x)}{\partial x}$ , est alors écrite sous forme de différences finies sur les trois couches, en notant la conservation du flux thermique  $\phi$ . On obtient les relations suivantes :

$$\phi = \frac{\lambda_1 S}{e_1} (T_1 - T_2) = \frac{\lambda_2 S}{e_2} (T_2 - T_3) = \frac{\lambda_3 S}{e_3} (T_3 - T_4). \quad (2.10)$$

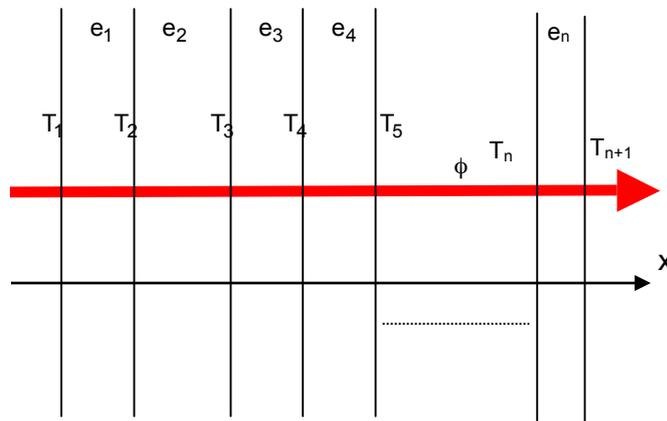


Figure 9 : Configuration pour les échanges de chaleur dans un mur avec différentes couches.

En fait, dans ces expressions le flux thermique  $\phi$ , joue le rôle de l'intensité du courant électrique en électrocinétique, et les différences finies de températures seraient l'analogie des différences de potentiel de part et d'autre de résistances électriques montées en série. Ceci signifie qu'une « loi d'Ohm » généralisée pour les échanges thermiques consiste à écrire la relation  $\Delta U = R_{elec} I$ , sous la forme :  $\Delta T = R_{therm} \phi$ . Ceci indique que d'un point de vue formel, d'après l'équation (2.10), la résistance thermique n'est rien d'autre que :

$$R_{therm}^1 = \frac{e_1}{\lambda_1 S} ; R_{therm}^2 = \frac{e_2}{\lambda_2 S} ; R_{therm}^3 = \frac{e_3}{\lambda_3 S}, \quad (2.11)$$

l'équation (2.10) se mettant dès lors sous la forme :

$$\phi = \frac{T_1 - T_2}{R_1} = \frac{T_2 - T_3}{R_2} = \frac{T_3 - T_4}{R_3}. \quad (2.12)$$

Pour le mur vu globalement, il faut adopter une écriture similaire, en notant :

$$\phi R_{Global} = T_1 - T_4 = T_1 - T_2 + T_2 - T_3 + T_3 - T_4 = \phi(R_1 + R_2 + R_3), \quad (2.13)$$

$$\text{d'où le résultat attendu, à savoir : } R_{Global} = R_1 + R_2 + R_3. \quad (2.14)$$

Les résistances thermiques s'ajoutent pour des murs en série, tout comme pour le cas de résistances électriques, montées en série dans un circuit électrique. On comprend dès lors immédiatement l'intérêt d'une telle relation qui permet d'en tirer le flux échangé par conduction au sein d'un mur composite, sans pour autant connaître les températures des faces de chacune des épaisseurs. Il est en effet très difficile concrètement de faire des mesures de température au sein de l'épaisseur d'un mur.

Pour le cas de murs montés en parallèle (c'est-à-dire placés à côté les uns des autres au lieu d'être empilés, cf. Figure 10), il faut écrire des relations analogues. Ici la surface de chaque mur peut-être différente, mais par contre les températures pour tous les murs seront identiques sur chaque surface,  $T_1$  d'un côté et  $T_2$  de l'autre pour l'ensemble des murs.

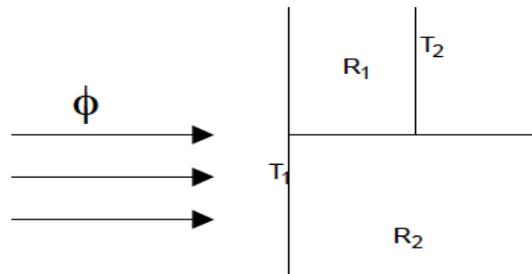


Figure 10 : Cas de deux murs montés côte à côte (c'est-à-dire placés en parallèle).

Par ailleurs, il n'y a pas de conservation du flux thermique dans chaque couche, et à la place il faut écrire que le flux total est la somme des différentes contributions transitant dans les différentes couches. Soit pour le cas d'un mur triple :

$$R_1 = \frac{e_1}{\lambda_1 S_1} ; R_2 = \frac{e_2}{\lambda_2 S_2} ; R_3 = \frac{e_3}{\lambda_3 S_3}, \quad (2.15)$$

$$\text{et : } \phi_1 = \frac{T_1 - T_2}{R_1} ; \phi_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_2} ; \phi_3 = \frac{T_1 - T_2}{R_3}. \quad (2.16)$$

Le fait d'écrire une loi de comportement thermique global sous la forme :

$$\phi = \left( \frac{T_1 - T_2}{R_{Global}} \right) = (\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) = \left( \frac{T_1 - T_2}{R_1} \right) + \left( \frac{T_1 - T_2}{R_2} \right) + \left( \frac{T_1 - T_2}{R_3} \right), \quad (2.17)$$

$$\text{impose par identification : } \frac{1}{R_{Global}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \quad (2.18)$$

Ce sont bien les inverses des résistances thermiques qui s'ajoutent pour un mur en parallèle, comme c'est le cas aussi en électrocinétique pour un circuit électrique avec des résistances électriques en parallèle. L'analogie électro-thermique semble bien complète comme cela est décrit plus en détail dans la section suivante.

Un exemple classique d'application, illustrant au passage la notion de pertes par fuites thermique, est le cas d'un mur isolant traversé par des tirants d'acier, cf. Figure 11.

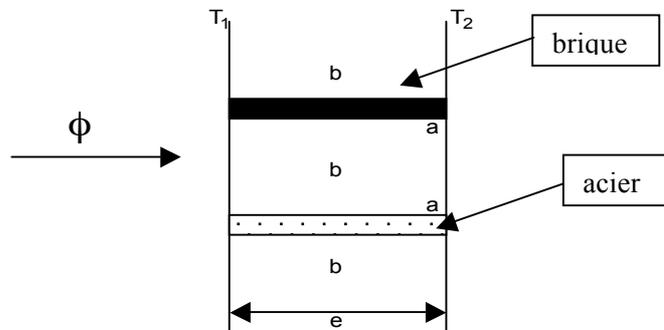


Figure 11 : Configuration pour le cas d'un mur simple traversé par des tirants d'acier.

Cet exemple est traité dans l'exercice 2.2.7. Le résultat indique que la conductivité thermique a triplé avec la présence des tirants d'acier, alors que ceux-ci ne couvrent que 0,2 % de la surface totale. Il s'agit d'une claire illustration de la notion de courts-circuit thermique dans les problèmes d'isolation.

Terminons cette section, en discutant le cas de configurations admettant diverses conditions aux limites (Dirichlet, Neumann, Fourier) présentant de nombreuses applications pratiques qui sont traitées dans les exercices associés.

- Cas d'un mur simple avec condition de type Neumann (par exemple en  $x = e$ )

L'équation de la chaleur reste ici l'équation de Poisson  $\Delta T = \frac{d^2 T(x)}{dx^2} = 0$ , admettant

comme solution une expression linéaire du champ de température sous la forme habituelle :  $T(x) = Ax + B$ . Il existe une condition aux limites de Dirichlet (en  $x = 0$ ) qui impose  $T_{(x=0)} = T_1 = B$ . Pour l'autre surface (en  $x = e$ ), nous admettrons donc une

condition de type Neumann, imposant  $\phi = -\lambda S \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=e} \Rightarrow A = -\frac{\phi}{\lambda S}$ . Au final, l'expression de la température devient donc :  $T(x) = T_1 - \frac{\phi}{\lambda S} x$ . Cette dernière expression est tout à fait compatible avec la relation linéaire standard, écrite ici sous la forme habituelle :  $T(x) = Ax + B = \left( \frac{T_2 - T_1}{e} \right) x + T_1$ , avec cette fois-ci :  $T_2 = T_1 - \frac{\phi}{\lambda S} e$ .

- Cas d'un mur simple avec condition de type Fourier

Ce cas est important car il correspond à plusieurs configurations proches de la réalité. Il s'agit par exemple d'un mur (ou d'une fenêtre plongée dans un milieu fluide, ici le plus souvent l'air ambiant), de températures respectivement de part et d'autre du mur :  $T_{\infty 1}$  et  $T_{\infty 2}$ , températures a priori connues. L'épaisseur du mur est notée  $e$ , et les coefficients de convection de part et d'autre du mur sont connus et respectivement notés  $K_1$  et  $K_2$ , cf. figure 12. Les températures des surfaces du mur sont inconnues, et elles sont notées  $T_1$  et  $T_2$ . Les conditions aux limites s'écrivent : en  $x=0$ ,

$\phi = -\lambda S \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = K_1 S (T_{\infty 1} - T_1)$ , et en  $x=e$ ,  $-\lambda S \left( \frac{dT}{dx} \right)_{x=e} = K_2 S (T_2 - T_{\infty 2})$ . En utilisant

la notion de résistance thermique, il est alors possible d'écrire la loi de Newton pour le milieu 1 sous la forme :  $\phi = K_1 S (T_{\infty 1} - T_1) = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{R_1}$ . Ceci permet de définir la

résistance thermique pour les échanges de convection d'un milieu fluide de coefficient de rayonnement  $K_1$ , sous la forme :  $R_1 = \frac{\Delta T}{\phi} = \frac{1}{K_1 S}$ . On obtient bien entendu un

résultat similaire de l'autre côté du mur, et au final la résistance thermique globale du mur s'écrit comme la somme des trois termes suivants :

$$R_{totale} = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\phi} = \frac{1}{K_1 S} + \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{K_2 S}. \quad (2.19)$$

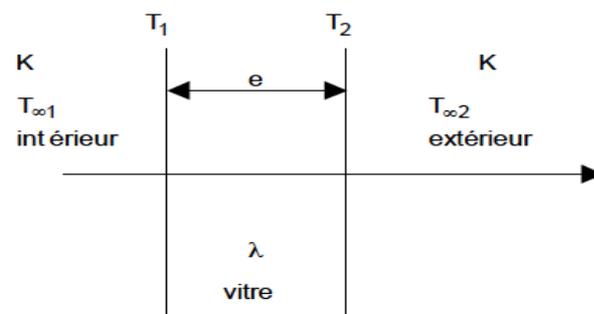


Figure 12 : Configuration d'une vitre entourée de fluides admettant des conditions limites de type Fourier (ou de nature convective).

Dans la plupart des cas traités, on a accès simplement aux températures des thermostats (par exemple celles de l'air extérieur et de l'air intérieur), c'est-à-dire à  $T_{\infty 1}$  et  $T_{\infty 2}$ . Par contre, les températures de surface (celles intérieure et extérieure de la surface de la vitre ou du mur,  $T_1$  et  $T_2$ ), sont elles difficiles à mesurer. Il est toutefois possible de les obtenir par le calcul en écrivant :

$$\phi = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{R_{totale}} = \frac{T_{\infty 1} - T_1}{R_1} = \frac{T_2 - T_{\infty 2}}{R_2}, \quad (2.20)$$

$$\text{d'où : } T_1 = T_{\infty 1} - (T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) \frac{R_1}{R_{totale}}, \quad (2.21)$$

$$\text{et } T_2 = T_{\infty 2} + (T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) \frac{R_2}{R_{totale}}. \quad (2.22)$$

Il est aussi possible d'extraire l'expression finale linéaire du champ de température à l'intérieur du mur, en utilisant uniquement les expressions de  $T_{\infty 1}$  et  $T_{\infty 2}$ , ainsi que celles des diverses résistances, sous la forme :

$$T(x) = (T_{\infty 1} - T_{\infty 2}) \left[ \frac{R}{R_{totale}} \right] \frac{x}{a} + T_{\infty 1} \left[ 1 - \frac{R_1}{R_{totale}} \right] + T_{\infty 2}, \quad (2.23)$$

$$\text{avec : } R = \frac{a}{\lambda S}.$$

Exercices concernés par cette section : On peut citer les exercices 2.2.1 à 2.2.9, ainsi que 2.2.11, 2.2.14, 2.3.2 et 2.3.5. Les neuf premiers exercices correspondent à des applications directes du cours pour des géométries planes, le plus souvent de niveau A : plaque isolante, mur en briques, paroi d'un four, plaque chauffée, mur simple, plaque en cuivre, mur avec tirants d'acier, simple ou double vitrage, paroi d'un turboréacteur. Les deux exercices suivants, 2.2.11 et 2.2.14, traitent le cas d'un mur de barrage, et celui d'un mur double. Enfin les deux derniers, les exercices 2.3.2 et 2.3.5 s'intéressent au cas du mur d'un four de conductivité thermique variable, ainsi qu'à celui de la réciprocity des échanges dans un mur double. Ce sont des exercices, en général, de niveau B (intermédiaire).

#### 2.4- Analogies électro-acousto-thermique

En acoustique, on définit aussi la notion de résistance. Il s'agit par exemple de la résistance à l'écoulement de l'air dans un matériau poreux, monté dans un tube cylindrique, soumis à une différence de pression entre ses deux faces (soit  $\Delta P = P_1 - P_2$ ). Suite à cette différence de pression entre les deux faces, au demeurant qui doit rester très faible pour ne pas venir

endommager le matériau testé, il s'ensuit un flux d'écoulement de l'air  $Q_v$ , tout à fait analogue au flux de chaleur. On définit pour cette configuration la résistivité acoustique du matériau comme étant le rapport :  $\sigma_{acous} = \frac{S\Delta P}{eQ_v}$  où  $S$ ,  $e$  et  $Q_v$ , respectivement représentent

la surface du matériau (section du tube), son épaisseur et le flux d'air qui s'y écoule. Ici l'analogie avec la conduction thermique, tient à ce qu'il existe un flux d'écoulement qui est analogue au flux de chaleur, alors que la différence de pression  $\Delta P$  est l'équivalent de la différence de température  $\Delta T$  de la loi de Fourier (ou de la différence de potentiel de la loi d'Ohm). Dit en d'autres termes, là où en thermique nous définissons la résistance thermique

sous la forme :  $R_{therm} = \frac{T_1 - T_2}{\phi}$ , avec :  $R_{therm} = \frac{e}{\lambda S}$ , en acoustique nous avons à la place :

$R_{acous} = \frac{P_1 - P_2}{Q_v}$  avec :  $R_{acous} = \frac{\sigma e}{S}$ . Ceci permet de construire l'analogie formelle pour les

trois configurations, comme indiqué dans la Table II, ci-après :

Différents cas	Grandeur distribuée	Grandeur conservée	Résistance
Electrique	$\Delta U$	$I$	$\rho \ell / S$
Thermique	$\Delta T$	$\phi$	$e / \lambda S$
Acoustique	$\Delta P$	$Q_v$	$\sigma e / S$

Table II : Analogies thermo-acousto-électrique et correspondances entre grandeurs physiques.

Pour rappel, les différents paramètres de la troisième colonne sont les suivants :

\* Cas électrique :  $\rho$  = résistivité électrique ;  $\ell$  = longueur du conducteur électrique ;  $S$  = section du conducteur électrique.

\* Cas thermique :  $\lambda$  = conductivité thermique ;  $e$  = épaisseur du matériau ;  $S$  = surface du matériau (ou du mur).

\* Cas acoustique :  $\sigma$  = résistivité acoustique ;  $e$  = épaisseur du matériau poreux ;  $S$  = section du matériau poreux monté dans le tube.

La seule singularité dans cette représentation vient de ce qu'en thermique, c'est la conductivité thermique qui est définie, au lieu de la résistivité thermique. Sachant que les deux paramètres sont inverses l'un de l'autre, l'analogie est complète.

Par ailleurs, il existe aussi une analogie formelle pour la structure de l'équation de Fourier et de l'équation d'Euler (en acoustique non dissipative, c'est-à-dire sans perte). Ces deux équations, pour un problème à une dimension, se mettent sous la forme suivante, avec les

notations d'usage :  $\phi = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}$  ;  $\rho \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ . L'équation d'Euler n'est rien d'autre que l'équation du mouvement pour un fluide non visqueux. De fait, cette équation traduit quelque part l'égalité entre variation de la quantité d'accélération et force associée au gradient de pression. La difficulté pour poursuivre l'analogie tient à ce que le temps intervient ici dans l'équation d'Euler, alors que ce n'est pas le cas dans la loi de Fourier. En fait, pour définir la résistance acoustique, nous avons fait appel à des considérations d'écoulement global, alors que l'équation d'Euler fait intervenir les variations de vitesses particulières (ou acoustique) au cours du temps. En régime harmonique, on peut écrire :  $\rho \frac{dv_x}{dt} = j\omega\rho v_x = -\frac{\partial p}{\partial x}$ , où  $\omega$  représente la pulsation angulaire de l'onde acoustique.

## 2.5- Transferts thermiques dans une coque sphérique

Soit une sphère creuse (ou coque sphérique) de rayon intérieur  $a$  et de rayon extérieur  $b$ , cf. figure 13. La partie centrale est remplie d'un fluide chauffé par une résistance électrique l'amenant à une température stable, notée :  $T_0$ . La température de l'extérieur est supposée être :  $T_\infty$ . On suppose que le champ de température admet une symétrie radiale, si bien que la loi de Fourier, cf. équation (2.1), se met ici sous la forme :

$$\phi = -\lambda S \frac{dT(r)}{dr}. \quad (2.24)$$

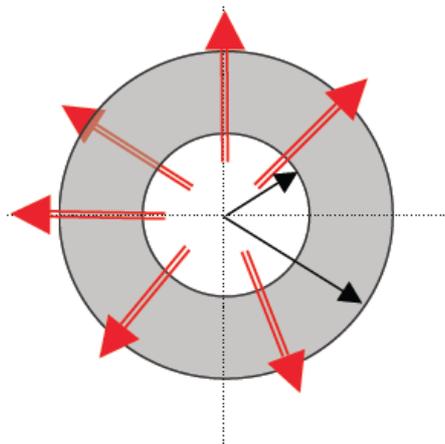


Figure 13 : Géométrie pour une coque sphérique de rayon intérieur  $a$  et de rayon extérieur  $b$ . Le flux de chaleur est de symétrie radiale, comme cela est indiqué par les doubles flèches.

Dans cette expression,  $S$  est une surface sphérique fictive qui vaut :  $S = 4\pi r^2$ , avec  $b > r > a$ . Sachant que le flux est radial, l'expression fournie par l'équation (2.24) peut-être intégrée entre  $a$  et  $b$ , ou bien entre  $a$  et  $r$ . Les calculs fournissent :

$$\phi \int_a^b \frac{dr}{r^2} = -4\pi \lambda \int_{T_0}^{T_\infty} dT(r) \Rightarrow \phi \left( \frac{b-a}{ab} \right) = -4\pi \lambda (T_0 - T_\infty), \quad (2.25)$$

$$\phi \int_a^r \frac{dr}{r^2} = -4\pi \lambda \int_{T_0}^{T(r)} dT(r) \Rightarrow \phi \left( \frac{r-a}{ar} \right) = -4\pi \lambda (T_0 - T(r)). \quad (2.26)$$

L'élimination par substitution du flux de chaleur entre ces deux expressions permet d'écrire le champ de température recherché  $T(r)$ , sous la forme finale :

$$T(r) = T_0 - (T_0 - T_\infty) \frac{b}{r} \left( \frac{r-a}{b-a} \right). \quad (2.27)$$

Cette expression valide les deux conditions aux limites, à savoir :  $T_{(r=a)} = T_0$ , et  $T_{(r=b)} = T_\infty$ .

L'équation (2.25) permet de calculer la résistance thermique pour la coque sphérique. En effet,

$$\phi = \frac{4\pi \lambda ab}{b-a} (T_\infty - T_0) = \frac{\Delta T}{R_{sphère}} \Rightarrow R_{sphère} = \frac{b-a}{4\pi \lambda ab}. \quad (2.28)$$

On constate que cette résistance thermique se comporte en  $e/r_0^2$ , pour une coque mince d'épaisseur  $b-a=e$ , et pour laquelle  $b=r_0+\delta r$ , et  $a=r_0-\delta r$ , avec le rayon moyen de la coque, noté  $r_0 \ll \delta r = e/2$ . Donc pour une épaisseur de coque fixée  $e$ , la résistance thermique dépend de  $1/r_0^2$ , c'est-à-dire qu'elle est inversement proportionnelle au carré du rayon moyen. Ce comportement est manifestement très non linéaire, et c'est ce qui explique la difficulté pour isoler de grandes enveloppes sphériques. Il existe aussi un comportement similaire avec le calorifugeage des conduites cylindriques, à cause de la dépendance en  $\ln(b-a)$ , de la résistance thermique associée, cf. section suivante 2.6.

Exercices concernés par cette section : On peut citer les exercices 2.3.7, 3.2.6, 3.2.7 et 4.2.7. A l'exception du dernier d'entre eux (de niveau C), ils sont tous du niveau B. Ils portent sur l'optimisation d'un bi-couche sphérique, sur les champs de température d'une sphère immergée, sur l'évaluation de la température d'une bille immergée dans un fluide, sur les échanges thermiques dans un réacteur chimique sphérique. Ces exercices proposent un certain nombre d'extensions par rapport aux calculs élémentaires effectués dans cette section. Au passage, la réciprocity des transferts de chaleur n'est pas obtenue pour la géométrie sphérique, tout comme pour les tuyaux et conduites admettant une géométrie cylindrique, contrairement aux résultats validés pour les murs composites (par exemple double, cf. exercice 2.3.5).

## 2.6- Transferts thermiques dans un tuyau

Un calcul tout à fait similaire peut-être proposé pour une conduite (ou un tuyau cylindrique), c'est-à-dire pour une coque cylindrique. On utilise les mêmes notations que dans la section précédente, à savoir  $a$  et  $b$ , pour les rayons intérieur et extérieur, et pour les températures intérieure  $T_0$  (en  $r = a$ ) et extérieure  $T_\infty$  (en  $r = b$ ), avec  $T_0 > T_\infty$ , comme dans la section précédente, sachant que la conduite est chauffée par un fluide circulant à l'intérieur. On commence par écrire la loi de Fourier pour ce cas, en ne conservant que la partie radiale, pour une portion de tuyau de longueur  $L$ , avec  $L \gg b$ . Elle s'écrit ici :

$$\phi = -\lambda S \frac{dT(r)}{dr} = -2\pi r L \lambda \frac{dT(r)}{dr}. \quad (2.29)$$

Cette expression est alors intégrée soit entre  $a$  et  $b$ , ou bien entre  $a$  et  $r$ . Les calculs fournissent :

$$\phi \int_a^b \frac{dr}{r} = -2\pi L \lambda \int_{T_0}^{T_\infty} dT(r) \Rightarrow \phi \ln \frac{b}{a} = 2\pi L \lambda (T_0 - T_\infty), \quad (2.30)$$

$$\phi \int_a^r \frac{dr}{r} = -2\pi L \lambda \int_{T_0}^{T(r)} dT(r) \Rightarrow \phi \ln \frac{r}{a} = 2\pi L \lambda (T_0 - T(r)). \quad (2.31)$$

En éliminant le flux de chaleur entre ces deux expressions, le champ de température recherché  $T(r)$ , est alors directement obtenu sous la forme :

$$T(r) = T_0 - (T_0 - T_\infty) \left( \frac{\ln r - \ln a}{\ln b - \ln a} \right). \quad (2.32)$$

Ici encore, cette expression valide bien les deux conditions aux limites de départ, à savoir :  $T_{(r=a)} = T_0$ , et  $T_{(r=b)} = T_\infty$ .

L'équation (2.30) permet de définir la résistance thermique pour une telle configuration. En effet, il suffit d'écrire que :

$$\phi = \frac{2\pi L \lambda}{\ln(b-a)} (T_0 - T_\infty) = \frac{\Delta T}{R_{cylindre}} \Rightarrow R_{cylindre} = \frac{\ln(b-a)}{2\pi L \lambda}. \quad (2.33)$$

Dans le cas de cylindres concentriques, par exemple pour le calorifugeage des conduites, les résistances thermiques s'ajoutent, car elles sont en série (flux thermique supposé constant dans chaque couche). La Figure 14 présente la géométrie de base d'une telle configuration.

On peut montrer dans ce cas, voir exercice 2.2.10, qu'il existe une épaisseur critique de la couche isolante au-delà de laquelle les performances d'isolation se dégradent, spécialement pour le cas des conduites de petites sections. En fait, tout se passe comme si l'ajout d'épaisseur de calorifugeage était contre productif au-delà de cette épaisseur critique. Au passage, ce phénomène surprenant est lié à la non réciprocity des échanges pour les géométries cylindriques ou sphériques, voir exercice 2.3.7 à ce sujet.

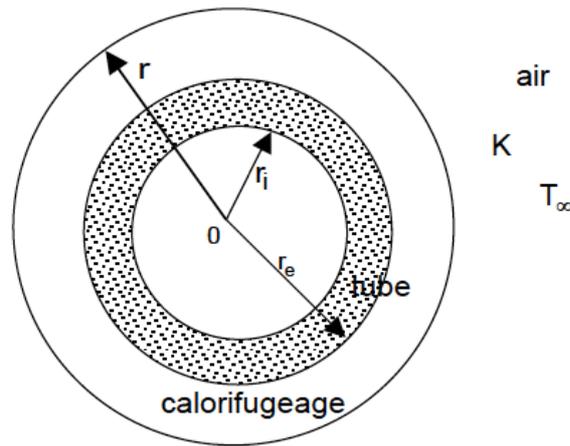


Figure 14 : Géométrie pour le calorifugeage d'une conduite cylindrique.

Exercices concernés par cette section : On peut citer les exercices 2.2.10, 2.2.12, 2.3.6 et 2.3.7, 3.2.8 et 3.2.9. Ils portent sur des configurations classiques, à savoir : calorifugeage d'une canalisation, transferts thermiques dans une ligne à haute tension, non réciprocity des échanges dans une conduite avec deux isolants, distribution des champs de vitesse et de température en convection forcée dans une conduite. Tous sont du niveau B ou C et ils sont donc en général d'un niveau intermédiaire, ou bien sont plus difficiles à résoudre.

## 2.7- Equation de la chaleur avec terme source (plan, cylindre, sphère)

Dans cette section, une source de chaleur, notée  $Q_S$  est introduite (c'est le cas de la conduction dite « vive », par opposition à la conduction « morte », c'est-à-dire sans source de chaleur, cf. sections précédentes). On rencontre ce cas de la présence de sources internes de chaleur dans de nombreux exemples. Citons les résistances électriques, les réacteurs nucléaires, les lits de combustible, les foyers de chaudière, les fours à induction, les fours à micro-ondes, les réacteurs chimiques, la réaction exothermique accompagnant la prise du béton lors de sa coulée, les changements de phase, etc. Notons qu'une source de chaleur peut éventuellement être négative. Cela s'appelle alors un puits de chaleur. C'est le cas par exemple lorsqu'il se produit une réaction chimique endothermique, consommant de la

chaleur. L'équation de la chaleur est écrite ici sans terme dépendant du temps, cf. équation (2.7), sous la forme générale :

$$Q_s + \lambda \Delta T = \rho C_p \frac{dT}{dt} = 0. \quad (2.34)$$

Commençons par le cas élémentaire d'un mur simple, orienté le long de l'axe  $Ox$ , avec une source de chaleur  $Q_s$  située à l'intérieur du mur. Dans ce cas, l'équation (2.34) se réduit à l'expression suivante :

$$Q_s + \lambda \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{Q_s x^2}{2} + \lambda T(x) = Ax + B. \quad (2.35)$$

Le profil du champ de température est manifestement parabolique, avec raccordement des températures pour les deux surfaces de référence, cf. Figure 15. La concavité des courbes obtenues dépend manifestement du signe de la source de chaleur. En absence de la source de chaleur, on retrouve bien évidemment le profil linéaire de la température à l'intérieur du mur.

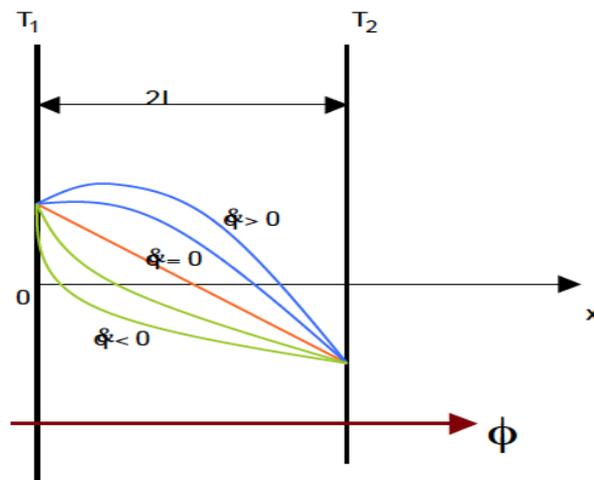


Figure 15 : Profil de température dans une plaque en présence de source de chaleur.

Les deux constantes d'intégration sont alors calculées à l'aide des conditions aux limites. Si l'on suppose que le mur est entouré de part et d'autre d'air à la température :  $T_\infty$ . On obtient finalement :

$$\lambda T_\infty = B ; \frac{Q_s L^2}{2} + \lambda T_\infty = AL + B \Rightarrow A = \frac{Q_s L}{2}. \quad (2.36)$$

Il ne reste alors plus qu'à remettre ces résultats dans l'équation de la chaleur du départ, l'équation (2.35), pour obtenir le résultat recherché sous la forme :

$$T(x) = T_\infty + \frac{Q_s x}{2\lambda} (L - x). \quad (2.37)$$

Il est bien clair que le résultat obtenu valide les deux conditions aux limites, à savoir :  $T_{(x=0)} = T_{\infty} = T_{(x=L)}$ . L'expression obtenue dans l'équation (2.37) présente un profil parabolique symétrique, si bien que le maximum du champ de température  $T(x)$  va se trouver au milieu du mur (pour  $x = +L/2$ ), soit la valeur de :  $T_{\max} = T_{(x=L/2)} = T_{\infty} + \frac{Q_s L^2}{8\lambda}$ .

Lorsque les températures sont différentes sur les deux faces, ce qui est au passage le cas décrit sur la Figure 15 pour une plaque d'épaisseur  $2L$ , alors le résultat final du champ de température s'écrit différemment, se mettant sous la forme suivante :

$$T(x) = T_1 + \left( \frac{T_2 - T_1}{2L} \right) x + \frac{Q_s x}{2\lambda} (2L - x), \quad (2.38)$$

expression permettant de retrouver les conditions aux limites sur chaque face ( $T_1$  en  $x = 0$  et  $T_2$  en  $x = 2L$ ).

On peut venir maintenant reprendre les calculs avec sources de chaleur pour les géométries cylindrique et sphérique, cf. sections 2.5 et 2.6. Considérons tout d'abord le cas d'un cylindre plein de rayon  $R$  et de longueur  $L$  (avec  $L \gg R$ ), immergé dans un fluide ayant la température  $T_{\infty}$ . En repartant de l'équation de la chaleur (2.34) et en notant la partie radiale pour la dépendance du laplacien scalaire, sous l'une ou l'autre des trois formes suivantes (qui sont tout à fait équivalentes entre elles) :

$$\Delta T = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = \frac{1}{r} \left( \frac{dT}{dr} + r \frac{d^2 T}{dr^2} \right) = \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr}, \quad (2.39)$$

on obtient finalement pour ce problème :

$$\int \frac{Q_s r}{\lambda} dr = - \int \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) dr \Rightarrow \frac{Q_s r^2}{2\lambda} = -r \frac{dT}{dr} + A. \quad (2.40)$$

La constante d'intégration  $A$  est ici forcément nulle, à cause de la singularité du terme en  $A/r$  lorsque  $r$  tend vers 0 (ici au centre du cylindre). Il ne reste alors plus qu'à effectuer une deuxième intégration de l'expression (2.40), sous la forme :

$$\int \frac{Q_s r}{2\lambda} dr = - \int \frac{dT}{dr} dr \Rightarrow \frac{Q_s r^2}{4\lambda} = -T(r) + B. \quad (2.41)$$

La constante d'intégration  $B$  s'obtient aisément en évaluant le champ en  $r = R$ , sous la forme :

$$\frac{Q_s R^2}{4\lambda} = -T_{(r=R)} + B, \text{ ce qui permet finalement d'exprimer le champ de température } T(r) \text{ sous}$$

la forme :

$$T(r) = T_{\infty} + \frac{Q_s}{4\lambda} (R^2 - r^2). \quad (2.42)$$

On obtient un profil parabolique caractéristique. Le maximum de la température est obtenu ici au centre du cylindre.

Terminons enfin ces calculs pour le cas d'une sphère pleine de rayon  $R$ , avec une source de chaleur à l'intérieur. La sphère est immergée dans un fluide à la température  $T_{\infty}$ . En repartant de l'équation de la chaleur (2.34) et en notant la partie radiale pour la dépendance du laplacien scalaire, sous l'une ou l'autre des trois formes suivantes (qui sont tout à fait équivalentes entre elles) :

$$\Delta T = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = \frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dT}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (Tr), \quad (2.43)$$

on obtient finalement pour ce problème :

$$\int \frac{Q_s r^2}{\lambda} dr = - \int \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) dr \Rightarrow \frac{Q_s r^3}{3\lambda} = -r^2 \frac{dT}{dr} + A'. \quad (2.44)$$

Ici encore, la constante d'intégration  $A'$  est forcément nulle. Il ne reste alors plus qu'à effectuer la deuxième intégration de l'expression (2.44), sous la forme :

$$\int \frac{Q_s r}{3\lambda} dr = - \int \frac{dT}{dr} dr \Rightarrow \frac{Q_s r^2}{6\lambda} = -T(r) + B. \quad (2.45)$$

Les calculs sont alors terminés, fournissant une expression du champ de température  $T(r)$ , présentant de nouveau un profil parabolique, tout à fait similaire au cas du cylindre, avec seulement un coefficient étant modifié :

$$T(r) = T_{\infty} + \frac{Q_s}{6\lambda} (R^2 - r^2). \quad (2.46)$$

Le maximum de la température est obtenu ici aussi au centre de la sphère.

Exercices concernés par cette section : On peut citer les exercices suivants : 2.3.4, 2.2.11 et 2.2.14. Ce sont tous des exercices de niveau A (facile) ou bien B (moyen).

## 2.8- Equation de la chaleur dans une plaque rectangulaire

Soit une plaque rectangulaire, de côtés  $a$  et  $b$ , le long des axes  $Ox$  et  $Oy$ . On suppose qu'il existe des conditions aux limites homogènes sur trois des côtés qui sont à la température du fluide environnant la plaque, soit  $T_{\infty}$ . Il s'agit des côtés suivants de la plaque :  $x = 0$ ,  $y = 0$  et  $x = a$ , cf. Figure 16.

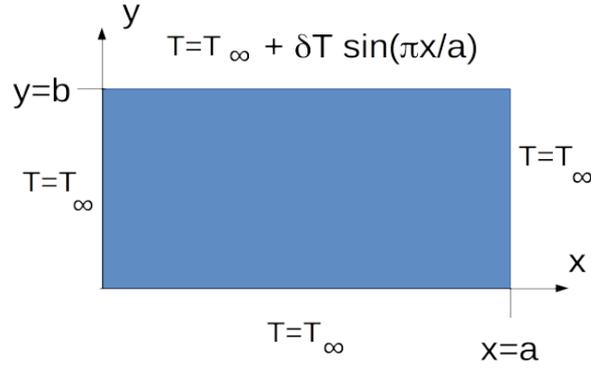


Figure 16 : Plaque rectangulaire de côtés  $a$  et  $b$ , soumise à une température extérieure sur ses quatre côtés.

Le quatrième côté, en  $y = b$ , est soumis à une perturbation sous la forme d'un terme :  $T_{(y=b)} = T_{\infty} + \delta T \sin(\pi x / a)$ . Pour résoudre ce problème, nous devons repartir de l'équation de la chaleur, sans terme source et sans terme dépendant du temps, c'est-à-dire ici de l'équation de Poisson à deux dimensions :  $\Delta T = 0$ . Sachant que la température  $T(x,y)$  dépend des deux variables  $x$  et  $y$ , et après avoir effectué le changement de variable :  $\theta(x,y) = T(x,y) - T_{\infty}$ , pour venir rendre les conditions aux limites homogènes, il reste finalement :

$$\Delta\theta(x,y) = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0. \quad (2.47)$$

Pour résoudre cette équation aux dérivées partielles, il est ici judicieux d'utiliser la méthode de séparation des variables, en écrivant :  $\theta(x,y) = X(x)Y(y)$ , ce qui permet d'obtenir, à la place de l'équation de départ, de simples équations différentielles du second ordre, sous la forme :

$$Y(y)\frac{d^2X(x)}{dx^2} + X(x)\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = -k^2 < 0. \quad (2.48)$$

La première partie de l'équation différentielle s'écrit finalement sous la forme :

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + k^2X(x) = 0 \Rightarrow X(x) = A \cos kx + B \sin kx. \quad (2.49)$$

Il reste à résoudre l'autre morceau de l'équation différentielle (2.48) de départ, qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} - k^2Y(y) = 0 \Rightarrow Y(y) = C \exp(+ky) + D \exp(-ky). \quad (2.50)$$

La solution générale s'écrit donc sous la forme classique :

$$\theta(x,y) = (A \cos kx + B \sin kx)(C \exp(+ky) + D \exp(-ky)). \quad (2.51)$$

Il existe donc quatre constantes arbitraires inconnues, pour quatre conditions aux limites qu'il faut utiliser maintenant. Il s'agit donc d'un problème bien posé. Ecrivons les conditions aux limites homogènes :

$$\forall y \in [0, b], \theta(0, y) = 0 = A(C \exp(+ky) + D \exp(-ky)) \Rightarrow A = 0, \quad (2.52)$$

$$\forall x \in [0, a], \theta(x, 0) = 0 = (B \sin kx)(C + D) \Rightarrow D = -C. \quad (2.53)$$

A ce stade, il ne reste déjà plus que l'expression suivante :

$$\theta(x, y) = 2BC \sin kx \sinh ky = K \sin kx \sinh ky, \text{ avec : } K = 2BC. \quad (2.54)$$

La troisième condition aux limites, s'écrit :

$$\forall y \in [0, b], \theta(a, y) = 0 = K \sin ka \sinh ky \Rightarrow \sin ka = 0, \text{ d'où } ka = n\pi, \quad (2.55)$$

avec :  $n = 1, 2, 3, \dots \infty$ . Ce résultat indique qu'il existe une quantification du champ de température, avec différents modes qui correspondent aux valeurs du paramètre  $n$ . De fait, on retrouve en thermique les concepts de modes, de nombre d'onde, d'orthogonalité et de normalisation pour le calcul des amplitudes modales. A ce stade, nous devons donc noter qu'il existe une infinité de modes thermiques possibles, et réécrire la solution de l'équation (2.54), après avoir utilisé le théorème de superposition, comme combinaison linéaire des différents modes thermiques qui sont ici recevables, sous la forme :

$$\theta_n(x, y) = K_n \sin k_n x \sinh k_n y \Rightarrow \theta(x, y) = \sum_{n=1}^{n=\infty} K_n \sin \frac{n\pi}{a} x \sinh \frac{n\pi}{a} y. \quad (2.56)$$

C'est en fait la quatrième et dernière condition aux limites pour ce problème qui va permettre de calculer les amplitudes modales :  $K_n$ , en écrivant :

$$\forall x \in [0, a], \theta(x, b) = \delta T \sin \frac{\pi x}{a} = \sum_{n=1}^{n=\infty} K_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}. \quad (2.57)$$

Manifestement, cette dernière équation ne peut être valide que pour le cas du premier mode,  $n = 1$ . Cela impose donc de ne conserver que le premier terme de la série, ce qui fournit une évaluation formelle de l'amplitude modale de ce mode, qui s'écrit finalement ici, sous la forme :  $K_1 = \delta T / \sinh \frac{\pi y}{a}$ . Ce résultat est ici à la fois trivial et naturel, puisque la perturbation

du champ de température pour cette dernière condition aux limites a justement été choisie comme étant une demi arche de sinus sur la largeur de la plaque, ce qui est effectivement la solution analytique pour le mode fondamental. Au passage, des concepts similaires existent aussi en vibrations des systèmes et en acoustique. Le problème 2.3.3 propose quelques calculs

complémentaires sur le sujet. Au final, la solution analytique fondamentale pour ce problème canonique s'écrit donc :

$$T(x,y) = T_\infty + \delta T \left( \sin \frac{\pi x}{a} \sinh \frac{\pi y}{a} \right) / \left( \sinh \frac{\pi b}{a} \right). \quad (2.58)$$

Le calcul numérique des lignes isothermes (à température constante) dans la plaque montre qu'elles sont perpendiculaires aux lignes isoflux (à flux de chaleur constant), comme il se doit en référence à la loi de Fourier,  $\phi = -\lambda S \text{grad} T = -\lambda S \vec{\nabla} T$ .

Exercices concernés par cette section : Seul l'exercice 2.3.3 est en relation directe avec cette section. Il reprend les principaux résultats des calculs réalisés ici, et il cherche à les étendre à d'autres conditions aux limites, ou bien à d'autres manières de calculer les champs de température dans la plaque.

## 2.9- Equation de la chaleur avec terme dépendant du temps

L'étude de l'équation de la chaleur, avec terme dépendant du temps, n'est pas la plus aisée, dans le cas général. Il existe pourtant de nombreuses applications pratiques très concrètes, que ce soit pour des problèmes non stationnaires de chauffage, ou de refroidissement (climatisation par exemple), pour l'étude de chocs thermiques (incendies, coulées de lave), etc., voire pour des applications plus exotiques, cf. la « propagation » des pseudo-ondes thermiques. Nous limitons ici l'étude à des cas à une dimension, sans terme source ( $Q_S = 0$ ).

D'un point de vue formel, il faut repartir de l'équation de la chaleur (2.7), sous la forme :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{1}{\chi} \frac{dT}{dt}, \text{ avec : } \chi = \frac{\lambda}{\rho C_p}, \text{ diffusivité thermique. Le plus souvent, on commence par}$$

effectuer un changement de variable pour supprimer les conditions aux limites inhomogènes de type Dirichlet (c'est-à-dire en fixant la température sur chacune des deux surfaces du mur).

Si par exemple, on étudie les transferts de chaleur dans un mur initialement (à  $t = 0$ ), entouré de part et d'autre par un fluide à la température  $T_\infty$  (voir figure 17), alors le changement de variable :  $\theta(x,t) = T(x,t) - T_\infty$ , permet de conserver l'équation différentielle de départ :

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} = \frac{1}{\chi} \frac{d\theta}{dt}, \text{ mais cette fois-ci avec des conditions aux limites homogènes, par exemple :}$$

$\theta_{(x=0)}^{(t=0)} = T_\infty - T_\infty = 0$ . Au passage, ce cas correspond quelque part à considérer, pour un flux thermique  $\phi$  donné fini que la loi de Newton,  $\phi = hS(T_S - T_\infty)$ , du fait qu'ici  $T_S = T_\infty$ , impose

que la conductance  $h$  soit grande, ou bien dit en d'autres termes que le nombre de Biot,  $B_{iot} = hL / \lambda$ , soit lui même suffisamment élevé. Ceci étant dit, pour obtenir une solution

élémentaire de l'équation de la chaleur dans les coordonnées réduites (après le changement de variable  $\theta(x,t) = T(x,t) - T_\infty$ ), il est pertinent d'utiliser ici une nouvelle fois la méthode de

séparation des variables, en notant :  $\theta(x,t) = X(x)\Theta(t)$ . En portant cette solution dans l'équation de la chaleur, on obtient la relation suivante :

$$\Theta(t) \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{X(x)}{\chi} \frac{d\Theta(t)}{dt} \Rightarrow \frac{1}{X(x)} \frac{d^2 X(x)}{dx^2} = \frac{1}{\chi \Theta(t)} \frac{d\Theta}{dt} = -k^2 < 0. \quad (2.59)$$

On retrouve le noyau d'une équation différentielle du second ordre, admettant des solutions spatiale ordinaire (avec des termes en cosinus et en sinus, cf. section précédente), que l'on écrit ici sous la forme de l'équation (2.49) :

$$\frac{d^2 X(x)}{dx^2} + k^2 X(x) = 0 \Rightarrow X(x) = B' \cos kx + C' \sin kx. \quad (2.60)$$

Il reste alors à résoudre l'autre morceau de l'équation (2.59) qui n'est rien d'autre qu'une équation différentielle du premier ordre, s'écrivant :

$$\frac{d\Theta}{dt} = -k^2 \chi \Theta(t) \Rightarrow \Theta(t) = A' \exp(-k^2 \chi t), \quad (2.61)$$

si bien qu'il reste au final :

$$\theta(x,t) = \exp(-k^2 \chi t) (B \cos kx + C \sin kx), \text{ avec : } B = A' B' ; C = A' C'. \quad (2.62)$$

Il faut dès lors utiliser les conditions aux limites (par exemple celles de Dirichlet, cf. Figure 17), ainsi qu'une condition initiale (en  $t = 0$ ), puisque le système va évoluer au cours du temps. Il y a trois grandeurs a priori inconnues pour trois équations, ce qui est correct. Au niveau des conditions aux limites, on va supposer que la première d'entre elle consiste simplement à considérer que :

$$\theta(0,t) = 0 = B \exp(-k^2 \chi t) \Rightarrow B = 0, \quad (2.63)$$

et il reste donc le champ de température sous la forme suivante :

$$\theta(x,t) = C \sin kx \exp(-k^2 \chi t). \quad (2.64)$$

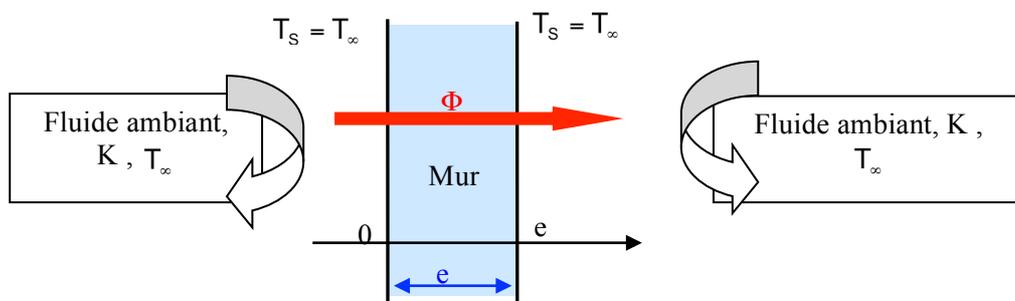


Figure 17 : Configuration type Dirichlet pour des échanges de chaleur non stationnaire dans un mur simple.

Pour la deuxième face du mur, en  $x = +L$ , discutons deux conditions aux limites différentes. Débutons en supposant que cette surface est thermiquement isolée, ce qui signifie que le flux de chaleur soit nul. Or la loi de Fourier,  $\phi = -\lambda S \frac{\partial \theta}{\partial x}$ , indique que si le flux  $\phi$  est nul, alors le gradient de la température,  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ , sera lui aussi égal à zéro, ce qui sera écrit ici avec la

condition :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{(x=+L)} = 0 \Rightarrow \cos kL = 0 \Rightarrow kL = \left( n - \frac{1}{2} \right) \pi, \text{ avec } n = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (2.65)$$

Il faut donc ici encore indexer le « nombre d'onde » thermique, en le notant :  $k_n$ . Il ne reste plus qu'à écrire la solution générale après emploi du théorème de superposition, sous la forme :

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n \sin k_n x \exp(-k_n^2 \chi t). \quad (2.66)$$

Cette expression (2.66) permet d'exprimer la condition initiale qui est prise sous la forme :

$$\forall x, \theta(x,0) = \theta_0 \Rightarrow \theta_0 = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n \sin k_n x. \quad (2.67)$$

Les amplitudes modales  $C_n$ , sont alors calculées par un procédé classique de normalisation qui consiste pour un mode considéré à calculer l'intégrale suivante sur l'épaisseur  $L$  du mur :

$$\int_0^L \theta_0 \sin k_m x dx = \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^L C_n \sin k_n x \sin k_m x dx. \quad (2.68)$$

Cette intégrale est connue sous le nom de relation d'orthogonalité, car seuls le mode d'ordre identique ( $m = n$ ) contribue pour un terme qui est différent de zéro et qui vaut :

$$\int_0^L \theta_0 \sin k_n x dx = C_n \int_0^L \sin^2 k_n x dx \Rightarrow \frac{\theta_0}{(n - \frac{1}{2})\pi} = C_n \frac{L}{2}. \quad (2.69)$$

Au final, la solution générale peut donc se mettre sous la forme :

$$\theta(x,t) = \left( \frac{2\theta_0}{\pi L} \right) \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{(n - \frac{1}{2})} \sin \left( n - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L} x \exp \left( - \left( n - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2}{L^2} \chi t \right). \quad (2.70)$$

Cette solution sera utilisée notamment dans l'exercice 2.3.9, dans lequel on définit le nombre de Fourier  $F_o = \chi t_0 / L^2$ , avec :  $t_0$  qui représente la durée d'exposition de la modification de la condition aux limites en  $x = 0$ . Ici dans la Figure 18, tirée de l'ouvrage de André B. Vriendt, « La transmission de la chaleur », édition G. Morin (1992), c'est le rapport de  $\theta / \theta_0$ , qui est tracé en fonction du nombre de Fourier  $F_o = \chi t / L^2$ , où  $t$  représente simplement le temps ordinaire, et non pas la durée d'exposition à une source extérieure.

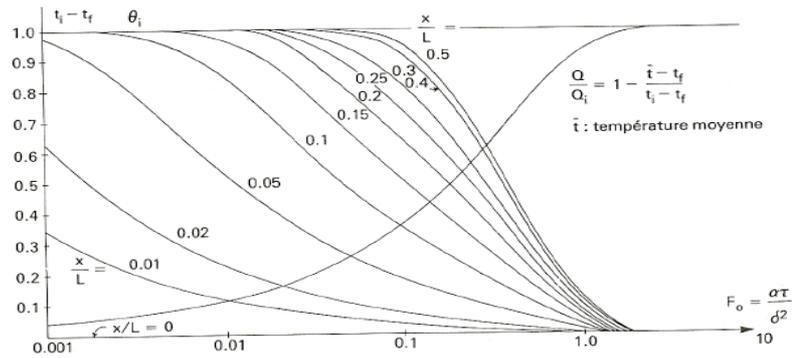


Figure 18 : Profils de température dans un mur simple soumis à des conditions de type Dirichlet sur les deux surfaces.

Sur la Figure 18, on peut noter plusieurs points. Une première remarque tient à ce que la température pour le plan médian (pour  $x/L = 0,5$ ), commence à changer de manière notable à partir de  $F_o = \chi t / L^2 = 0,05$ . Par ailleurs, le régime stationnaire est pratiquement atteint à partir de  $F_o = 1,5$ , c'est-à-dire que pour cette valeur on observe  $\theta = T - T_\infty = 0$ , soit  $T = T_\infty$ . Il est également possible de représenter la distribution des températures en fonction de la variable réduite  $2x/L$ , pour diverses valeurs du nombre de Fourier. Des allures caractéristiques des résultats obtenus sont tracées sur la Figure 19.

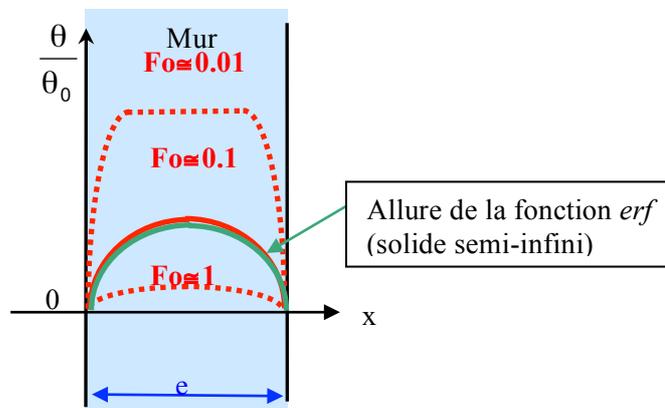


Figure 19 : Profils de distribution de la température dans un mur soumis à des conditions aux limites de Dirichlet sur chacune des surfaces, en fonction du nombre de Fourier.

Pour de très faibles valeurs du nombre de Fourier (typiquement de l'ordre de  $F_o = 0,01$ ), il faut alors prendre en compte un très grand nombre de termes (ou de modes) dans la série fournie par l'équation (2.70). Dans ce cas, on observe un profil avec un plateau caractéristique autour de la valeur de la température du milieu du mur, cf. profil du haut. A la limite, lorsque  $F_o = 0$ , le terme exponentiel n'intervient plus dans l'équation (2.70). Il ne reste alors plus que

la série infinie des termes en sinus, avec les amplitudes correspondantes, ce qui n'est rien d'autre que la décomposition en série de Fourier de la fonction porte  $\Pi(t)$ . Pour des valeurs plus grandes du nombre de Fourier (de l'ordre de  $F_0 = 0,1$ ), alors il se dessine un profil sinusoïdal, et c'est donc le terme en sinus qui prédomine dans la solution de l'équation (2.70). Enfin, lorsque le nombre de Fourier est plus grand encore (par exemple de l'ordre de l'unité,  $F_0 = 1$ , voire plus), le régime permanent est atteint, et les premiers termes de la série deviennent prépondérants (dans certains cas, il est même possible de ne conserver que le tout premier terme de la série, cf. application numérique proposée dans l'exercice 2.3.9).

Un autre cas, est celui où la surface située en  $x = +L$  est soumise à une condition mixte avec de la convection (ou condition de Fourier). On repart ici de la solution générale, c'est-à-dire l'équation (2.66) sous la forme :

$$\theta(x,t) = C \sin kx \exp(-k^2 \chi t). \quad (2.71)$$

La nouvelle condition aux limites, en  $x = +L$ , s'écrit dorénavant :

$$\phi = -\lambda S \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{(x=+L)} = S h (T - T_\infty) = S h \theta \Big|_{(x=+L)} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{(x=+L)} = \left(-\frac{h}{\lambda}\right) \theta \Big|_{(x=+L)}, \quad (2.72)$$

ce qui aboutit à la relation suivante :

$$\tan kL = -\frac{\lambda k}{h} = -\frac{\lambda}{hL} kL = -kL / B_i, \quad (2.73)$$

où :  $\frac{hL}{\lambda}$  représente le nombre de Biot. L'équation (2.73) admet elle aussi une infinité de solutions du fait que la fonction tangente admet une infinité de branches qui seront toutes interceptées par la droite de pente négative  $-kL / B_i$ . Les solutions pour les différents modes thermiques se calculent en fonction de la valeur du nombre de Biot. La résolution graphique de l'équation (2.73) indique que les premiers modes seront fournis par :

$$(kL)_1 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon_1 ; (kL)_2 = \frac{3\pi}{2} + \varepsilon_2 ; (kL)_3 = \frac{5\pi}{2} + \varepsilon_3 ; \dots ; (kL)_n = (2n-1) \frac{\pi}{2} + \varepsilon_n,$$

avec  $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2 \ll \varepsilon_3 ; \dots ; \ll \varepsilon_n$ .

Le nombre de Biot est un paramètre particulièrement important en thermique. En effet, sa valeur détermine le type de solution analytique qu'il sera possible d'utiliser. Le nombre de Biot par définition est le rapport de la résistance thermique liée à la loi de Fourier divisée par celle relative à la loi de Newton, c'est-à-dire :  $B_{iot} = \frac{R_{Fourier}}{R_{Newton}} = \left(\frac{L}{\lambda S}\right) / \left(\frac{1}{hS}\right) = \frac{hL}{\lambda}$ . Le

paramètre  $L$  est une longueur caractéristique qui dépend de la forme de l'objet considéré. Il s'agit du rapport entre le volume spécifique  $V$  de l'objet et sa surface spécifique d'échange  $S$ . Selon les cas, ce paramètre vaudra  $e/2$  pour un échangeur thermique à deux surfaces planes d'épaisseur  $e$ ,  $R/2$  pour un cylindre de rayon  $R$ ,  $R/3$  pour une sphère de rayon  $R$ ,  $e$  pour un mur plan d'épaisseur  $e$ . Dans tous les cas, cette longueur caractéristique est reliée à la dimension de l'objet pour décrire le rapport des échanges thermiques de volume (loi de Fourier de la conduction) à ceux de surface (loi de Newton de convection). Le fait que le nombre de Biot puisse être très petit indique que la résistance thermique de volume (conduction) doit être elle-même faible. Or la loi de Fourier, écrite de manière synthétique sous la forme :  $\phi = \Delta T / R_{\text{Fourier}}$ , impose pour un flux de chaleur fini que  $\Delta T$  soit lui même de l'ordre de grandeur de la résistance  $R_{\text{Fourier}}$ . Dit en d'autres termes, si cette résistance est donc très faible, alors les écarts de température  $\Delta T$  à l'intérieur du solide considéré, le seront eux aussi. Cela signifie que la température de l'objet sera homogène pour ces calculs. Ce résultat vient simplifier énormément les raisonnements, puisque dès lors il suffit d'écrire une simple loi de conservation de l'énergie thermique, en prenant en compte le fait que toute la chaleur apportée par convection vient réchauffer (ou refroidir, selon le type d'applications étudiées) le corps en question. On écrira par exemple une équation de bilan sous la forme simplifiée :

$$dQ = \phi dt = hS(T - T_{\infty}) dt = -\rho VC_p dT \Rightarrow \frac{dT}{T - T_{\infty}} = -\frac{hS}{\rho VC_p} dt . \quad (2.74)$$

Il s'agit d'une simple équation différentielle du premier ordre, à coefficient constant qui s'intègre aisément :

$$\ln(T - T_{\infty}) = Cte - \frac{hS}{\rho VC_p} t \Rightarrow T = T_{\infty} + A \exp\left(-\frac{hS}{\rho VC_p} t\right). \quad (2.75)$$

Enfin, il est intéressant à ce stade de noter que le produit entre nombre de Biot et nombre de Fourier, redonne un nouveau nombre sans dimension qui s'écrit justement :

$$B_{\text{iot}} F_{\text{ourier}} = \frac{hL}{\lambda} \frac{at}{L^2} = \frac{hL}{\lambda} \frac{\lambda t}{\rho C_p L^2} = \frac{hS}{\rho VC_p} t . \quad (2.76)$$

Ce résultat indique simplement que l'argument de la fonction exponentielle dans l'équation (2.75) est donc sans unité, ce qui permet d'introduire le fait que le rapport :  $\tau = \rho VC_p / hS$ , possède la dimension d'un temps (il s'agit d'une constante de temps caractéristique du phénomène thermique étudié. De fait, ce temps  $\tau$ , fournit un ordre de grandeur de la durée nécessaire pour qu'un équilibre thermique puisse s'établir entre le corps solide, et le fluide environnant (tout du moins si les conditions aux limites ne changent pas au cours du temps). C'est donc naturel qu'il existe une myriade d'applications concrètes de grande importance à partir de ce formalisme élémentaire. Notons pour terminer cette section que ce cas des

résistances internes négligeables est présenté de manière assez différentes par les auteurs anglo-saxons qui utilisent bien volontiers le concept de « lumped capacitance method », qu'il est possible de traduire par « méthode de la capacité en bloc ». Cette expression traduit bien le même phénomène, à savoir qu'elle sous-entend l'évolution en bloc des températures dans les solides (champ de température homogène, et donc absence de transfert de chaleur ou de réarrangement interne, cf. loi de Fourier), seule une variation globale pouvant être observée.

Les exercices concernés par cette section sont assez nombreux : On peut citer les exercices suivants, 2.2.13, 2.3.1, 2.3.8, 4.2.8, 4.2.9, 4.2.10, 4.2.11 et 4.2.13. Il faut souligner que de nombreux de ces exercices (ou problèmes) présentent justement des solutions analytiques simples, pour le cas où le nombre de Biot est très petit devant l'unité, le champ de température se limitant à la solution d'une équation différentielle du premier ordre, sous la forme d'une exponentielle décroissante (par exemple, cf. équation 2.75). On peut citer les cas du thermomètre à résistance métallique, celui du fer à repasser, ainsi que la série des problèmes 4.2.8 à 4.2.11, durée de survie d'un marin plongé dans l'eau, durée de congélation et de surgélation, plasturgie pour pièces plastiques.

#### 2.10- Applications au cas d'un choc thermique (ou bien cas du solide semi-infini)

En fait d'autres solutions sont également possibles. Par exemple, pour des problèmes avec des chocs thermiques, il est souvent possible de ne pas appliquer la méthode de séparation des variables. Il existe effectivement une solution heuristique générale à l'équation de la chaleur,

$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{d\theta}{dt}$ , avec  $a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$  qui représente la diffusivité, à savoir :

$$\theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4at}\right). \quad (2.77)$$

Cette solution permet d'écrire :

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{x}{2at} \exp\left(\frac{-x^2}{4at}\right), \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \left\{ -\frac{1}{2at\sqrt{t}} + \frac{x^2}{4a^2t^2\sqrt{t}} \right\} \exp\left(\frac{-x^2}{4at}\right), \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{1}{2t\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4at}\right) + \frac{x^2}{4at^2\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-x^2}{4at}\right). \quad (2.80)$$

Les relations (2.79) et (2.80) vérifient bien l'équation de la chaleur de départ :  $\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{d\theta}{dt}$ .

Il est alors possible d'effectuer le changement de variable :  $u = \frac{x}{2\sqrt{at}} \Rightarrow u^2 = \frac{x^2}{4at}$ . Au passage, ce changement de variable est directement lié à l'inverse de la racine carrée du nombre de Fourier, puisque :  $F_o = a t / x^2$ , soit :  $u^2 = F_o / 4$ .

Soit en notant les dérivées partielles suivantes et en utilisant les règles habituelles de chaînage pour les calculer :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{d\theta}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{at}} \frac{d\theta}{du} ; \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{d^2 \theta}{du^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{4at} \frac{d^2 \theta}{du^2}, \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{d\theta}{du} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{u}{2t} \frac{d\theta}{du} \Rightarrow \frac{1}{4at} \frac{d^2 \theta}{du^2} = \frac{1}{a} \frac{d\theta}{du} \left( -\frac{u}{2t} \right), \quad (2.82)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d^2 \theta}{du^2} + u \frac{d\theta}{du} = 0. \quad (2.83)$$

Il s'agit en réalité d'une équation différentielle du premier ordre. Un simple changement de variable suffit à s'en convaincre, en posant :  $y = \frac{d\theta}{du} \Rightarrow \frac{dy}{du} + 2uy = 0$ . Il ne reste alors plus qu'à intégrer cette dernière équation, sous la forme :

$$\int \frac{dy}{y} = -\int 2u du \Rightarrow \ln y = -u^2 + cte \Rightarrow y = y_0 \exp(-u^2). \quad (2.84)$$

Sachant que :  $\theta = \int y du = y_0 \int \exp(-u^2) du$ , il est alors possible d'établir que :

$$\theta(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right) \Rightarrow \theta(u) = A \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-\xi^2) d\xi. \quad (2.85)$$

En fait la solution fondamentale fournie par l'équation (2.84) est aussi valide, à cause des bonnes propriétés de la fonction exponentielle, soit par dérivation, soit par intégration, soit la solution finale fournie dans l'équation (2.85) sous la forme de la fonction de Gauss (ou fonction d'erreur), sous la forme :  $\theta(u) = A \operatorname{erf}(u)$ . La fonction de Gauss  $\operatorname{erf}(u)$  est uniformément croissante, débutant à zéro (pour  $u = 0$ ) et convergeant vers l'unité (pour  $u$  qui tend vers l'infini), cf. Table III ci-dessous et tracé succinct sur la Figure 20. En revenant aux variables de départ, on trouve finalement l'expression suivante pour l'évolution de la température :

$$T(x,t) = T_S + (T_S - T_0) \operatorname{erf}(u). \quad (2.86)$$

u	erf(u)	u	erf(u)	u	erf(u)
0,0	0	0,7	0,6778	1,8	0,98909
0,05	0,0564	0,75	0,7111	1,9	0,99279
0,1	0,1125	0,8	0,7421	2,0	0,99532
0,15	0,1680	0,85	0,7707	2,1	0,99702
0,2	0,2227	0,9	0,7969	2,2	0,99814
0,25	0,2763	0,95	0,8209	2,3	0,998857
0,3	0,3286	1,0	0,8427	2,4	0,999311
0,35	0,3794	1,1	0,8802	2,5	0,999593
0,4	0,4284	1,2	0,9103	2,6	0,999764
0,45	0,4755	1,3	0,9340	2,7	0,999866
0,5	0,5205	1,4	0,9523	2,8	0,999925
0,55	0,5633	1,5	0,9661	2,9	0,999959
0,6	0,6039	1,6	0,9764	3,0	0,999978
0,65	0,6420	1,7	0,9838	Infini	1

Table III : Valeurs numériques pour la fonction d'erreur (ou fonction de Gauss).

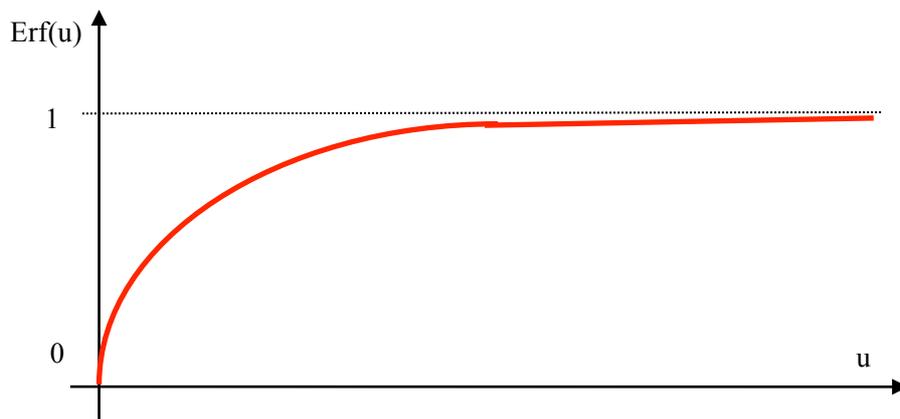


Figure 20 : Tracé de la fonction erreur (ou fonction de Gauss,  $erf(u)$ , en fonction de la variable  $u = x / 2\sqrt{at}$ ).

Il est possible aussi de calculer le flux de chaleur échangé. D'après la loi de Fourier, on peut écrire :  $\phi = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda S \frac{\partial \theta}{\partial x}$ . Or l'équation (2.81a) indique que :  $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{at}} \frac{d\theta}{du}$ , relation qui peut être transformée sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{at}} \frac{d\theta}{du} = \frac{1}{2\sqrt{at}} \theta_0 \frac{d}{du} (erf(u)) = \frac{1}{2\sqrt{at}} \theta_0 \frac{d}{du} \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-\xi^2) d\xi \right). \quad (2.87)$$

Finalement, l'équation (2.87) peut se mettre sous une forme davantage compacte,

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\theta_0}{\sqrt{\pi at}} \exp(-u^2) = \frac{\theta_0}{\sqrt{\pi at}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right), \quad (2.88)$$

permettant in fine de calculer le flux transmis au sein du mur, qui se met donc sous la forme :

$$\phi = -\frac{\lambda S \theta_0}{\sqrt{\pi a t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right). \quad (2.89)$$

Le flux qu'il est souvent intéressant d'évaluer pour cette configuration est celui échangé en surface, et qui s'écrit simplement sous la forme :

$$\phi = \frac{\lambda S (T_s - T_0)}{\sqrt{\pi a t}}. \quad (2.90)$$

Une application pratique pour cette dernière expression fut proposée en 1897 par Lord Kelvin pour essayer d'estimer l'âge de la terre, à l'aide de ce modèle de solide semi-infini (voir Figure 21). Avec les données géophysiques connues de l'époque, Lord Kelvin aboutit à un ordre de grandeur d'environ 100 millions d'années, ce qui est manifestement beaucoup trop peu, puisque l'âge de la planète terre couramment admis est à la place, plutôt 4,53 milliards d'années. Pour effectuer ce calcul, il suffit d'inverser l'équation (2.90) pour extraire la durée (le paramètre  $t$ ), en faisant usage de la loi de Fourier. Ce calcul simple aboutit à la relation suivante, directement utilisable pour l'application numérique :

$$t = (T_s - T_0)^2 / \pi a \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2. \quad (2.91)$$

L'application numérique peut être effectuée avec les données suivantes :  $T_s = 0^\circ\text{C}$  ;  $T_0 = 3870^\circ\text{C}$  (cette donnée est une estimation de la valeur de la température du

centre de la terre, ou du moins de sa température initiale) :  $\frac{\partial T}{\partial x} = 1^\circ\text{C} / 30 \text{ m}$  ,

$a = 1,177 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}$  , soit  $t = 36 \ 450 \ 000 \text{ s}$ , ce qui correspond effectivement à environ 100 millions d'années. L'écart manifeste qui existe avec la durée réelle de l'existence de la terre vient de ce que les sources de chaleur interne de celle-ci, notamment d'origine nucléaire, ne sont pas prises en compte dans le modèle de Kelvin, ce qui aboutit bien évidemment à une grossière sous-estimation dans le calcul.

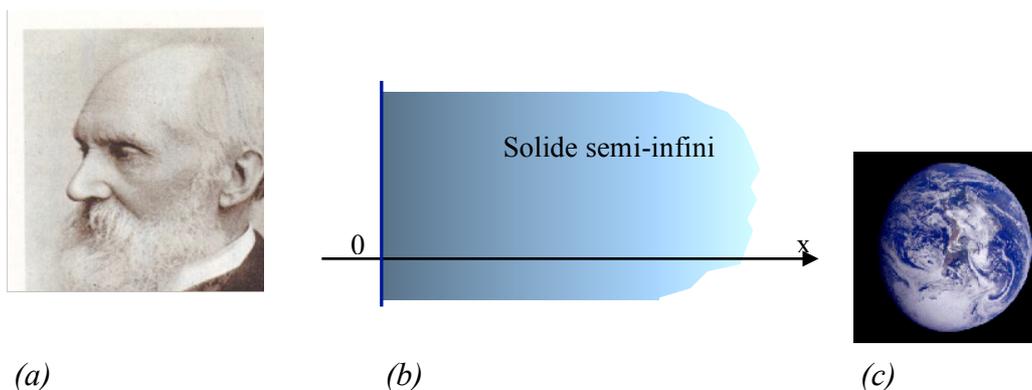


Figure 21 : Modèle proposé par Lord Kelvin pour une estimation de l'âge de la terre. (a) Photo de Lord Kelvin ; (b) Modèle de solide semi-infini. (c) Image de la terre.

Terminons cette section en discutant la notion de température de contact et introduisons le concept d'effusivité thermique. Lorsque deux solides semi-infinis (c'est-à-dire de grande taille), initialement à des températures uniformes  $T_{10}$  et  $T_{20}$ , sont soudainement mis en contact, il s'établit rapidement un équilibre avec une température de contact  $T_c$ , commune aux deux solides en contact. La Figure 22 propose une illustration de cet effet.

L'équation (2.90) est alors réécrite, en notant l'expression de la diffusivité,  $a = \lambda / \rho C_p$ , sous la forme modifiée :

$$\phi = \frac{\lambda S(T - T_0)}{\sqrt{\pi a t}} = \frac{\sqrt{\lambda \rho C_p} S(T - T_0)}{\sqrt{\pi t}}, \quad (2.92)$$

soit en notant :  $\beta = \sqrt{\lambda \rho C_p}$ , l'effusivité thermique, on obtient finalement l'expression du flux thermique sous la forme :

$$\phi = \frac{\beta S(T - T_0)}{\sqrt{\pi t}}. \quad (2.93)$$

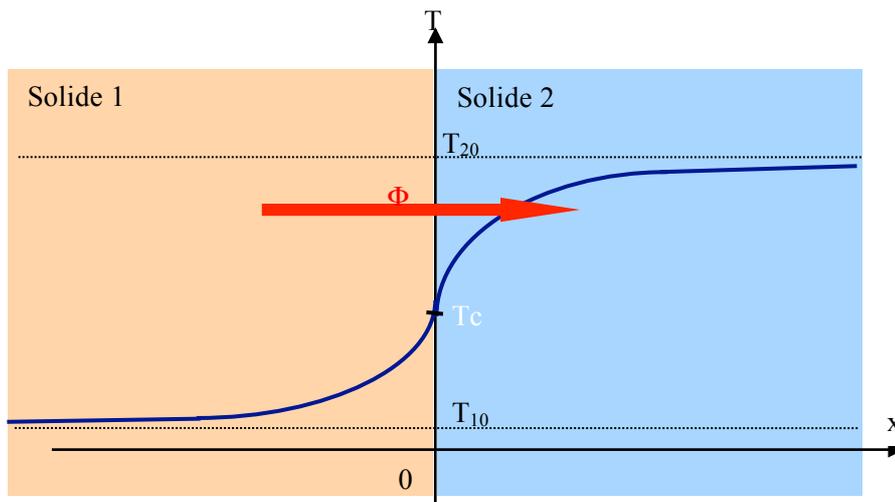


Figure 22 : Schéma de principe pour l'établissement de la température de contact, entre deux solides semi-infinis.

Il est intéressant de noter la dépendance temporelle du flux échangé qui est donc inversement proportionnelle à la racine carrée du temps. Le flux d'échange est donc rapide au début du contact, alors que par la suite on arrive bien à un certain équilibre comme cela est mis en évidence sur le tracé de la Figure 22. La Table IV ci-dessous présente quelques valeurs

d'effusivité thermique, pour des matériaux ordinaires. L'effusivité thermique s'exprime en  $J m^{-2} K^{-1} s^{-1/2}$ .

Cuivre	$36.10^3$	Brique	$1,4.10^3$
Argent	$31,7.10^3$	Pierre	$2,1.10^3$
Aluminium	$24,6.10^3$	Eau	$1,6.10^3$
Acier doux	$13,9.10^3$	Glace	$2,05.10^3$
Fonte	$14,7.10^3$	Sol sec	$0,8.10^3$
Mercure	$3,9.10^3$	Sol humide	$1,0.10^3$
Bois	$0,4.10^3$	Laine de verre	24
Verre	$1,5.10^3$	Liège en plaques	120
		Air	5,6

Table IV : Valeurs de l'effusivité thermique pour différents matériaux.

Revenons au problème du contact entre deux solides semi-infinis. Il est alors possible d'exprimer la valeur des flux de chaleurs échangées par les deux solides, grandeurs qui doivent naturellement être identiques, soit la relation suivante :

$$\phi_1 = \frac{\beta_1 S(T_{10} - T_C)}{\sqrt{\pi t}} = \phi_2 = \frac{\beta_2 S(T_C - T_{20})}{\sqrt{\pi t}} \Rightarrow T_C = \frac{\beta_1 T_{10} + \beta_2 T_{20}}{\beta_1 + \beta_2}. \quad (2.94)$$

Le résultat obtenu est particulièrement simple. Il indique que la température de contact n'est rien d'autre que le barycentre des deux températures initiales des solides de départ, affectées d'une pondération dont le coefficient est justement l'effusivité thermique de chaque solide. Une application simple et élémentaire de ce concept est l'appréciation des températures de contact avec la main de divers matériaux. Le rendu du toucher d'un meuble en bois, de celui d'une cheminée en marbre ou encore d'un radiateur en fonte, ne fournissent pas du tout les mêmes indications. Pour les trois exemples retenus, et partant de la température de la main à  $37^\circ C$  et de son effusivité (essentiellement constituée d'eau)  $\beta_{eau} = 1600 \text{ USI}$ , on obtient : Pour le bois,  $\beta_b = 400 \text{ USI} \Rightarrow T_C = 33^\circ C$  ; Pour le marbre,  $\beta_m = 2500 \text{ USI} \Rightarrow T_C = 26^\circ C$  ; Pour la fonte (ou l'acier),  $\beta_a = 14000 \text{ USI} \Rightarrow T_C = 21^\circ C$ . Donc en conclusion, on remarque que c'est le matériau qui possède la plus grande effusivité qui impose sa « température ».

Exercices concernés par cette section : Nous avons retenu pour cette section deux exercices (ou problèmes) spécifiques, à savoir 2.3.9 et 2.3.10. Il s'agit du cas du transfert de chaleur dans un mur de béton au cours d'un incendie, et de celui de l'étude des « pseudo » ondes thermiques.

### 3- Transferts thermiques par convection (libre et forcée)

#### 3.1- Equations générales pour les transferts de chaleur dans les fluides

Les équations régissant les échanges thermiques par conduction, essentiellement loi de Fourier, équation de la chaleur, et diverses équations différentielle ou intégrale de bilan thermique, sont particulièrement rigoureuses et cadrées. Par exemple, les paramètres pertinents que sont : la conductivité thermique ou bien la capacité calorifique (évaluée à pression constante) sont connues précisément. Ce sont des valeurs fixes, même si le plus souvent elles varient avec la température, mais ces grandeurs là sont disponibles avec précision, à la fois pour les solides (isolants ou conducteurs), mais aussi pour les fluides (légers ou lourds, comme l'air et l'eau), cf. tables A1 à A4 rassemblées dans l'Annexe. Pour les transferts de chaleur par convection, l'équivalent de la loi de Fourier, est la loi dite de Newton qui lui ressemble beaucoup en apparence et qui s'écrit :

$$\phi = hS(T_s - T_\infty). \quad (3.1)$$

Par rapport à la loi de Fourier,  $\phi = -\lambda S \frac{\partial \theta}{\partial x}$ , les différences ne sautent pas aux yeux. On peut certes tout de suite noter que le rapport  $h\ell / \lambda$  est sans dimension. C'est d'ailleurs au passage le nombre de Biot, introduit à la section précédente 2.10, pour la configuration du refroidissement d'un solide par convection. Dans le cas d'un fluide pour lequel coexistent mécanismes de conduction et de convection, une quantité analogue, avec la même expression, sera aussi définie mais elle portera le nombre de Nusselt. Dans les deux cas, les nombres de Biot et de Nusselt, assurent la liaison entre conduction et convection à travers les lois de Fourier et de Newton respectivement. Des ordres de grandeur très approximatifs pour la conductance  $h$  (notée aussi souvent coefficient de convection  $K$ ) sont fournies dans la Table V suivante.

Convection naturelle	Air, gaz	5 à 50
Convection forcée	Air, gaz	10 à 500
	Eau	100 à 15000
	huile	50 à 1500
	Métaux liquides	50 à 1500
Ebullition	eau	5000 à 25000
	liquides	2500 à 50000
Condensation	Vapeur d'eau	4000 à 50000
	Vapeur quelconque (condensation en gouttes)	50000 à 400000
	Vapeur quelconque (condensation en film)	400 à 10000

Table V : Ordres de grandeur du paramètre  $h$  de conductance thermique.

La différence majeure entre les deux expressions, et par voie de conséquence entre la conductivité thermique  $\lambda$  de la loi de Fourier, et la conductance thermique  $h$  de la loi de Newton, tient à ce que la conductance thermique, contrairement à la conductivité, est éminemment variable, dépendant d'un très grand nombre de paramètres. On peut citer, la vitesse d'écoulement du fluide  $U$ , sa masse volumique  $\rho$ , sa viscosité  $\mu$ , sa chaleur massique  $C_p$ , mais aussi sa conductivité thermique  $\lambda$ , de la géométrie et de la configuration retenue, de la nature de l'écoulement (laminaire ou turbulent, cf. Figure 23a & 23b), de la température, etc. En bref, il n'existe pas de table fournissant des valeurs de la conductance  $h$ , comme celles présentées dans l'Annexe pour la conductivité  $\lambda$ , et chaque cas doit donc être étudié de manière séparée. Finalement l'équation (3.1) est particulièrement rudimentaire. Elle indique juste que le flux de chaleur transmis au fluide (ou fourni par lui selon les valeurs des températures) est proportionnel à ce fameux paramètre de conductance thermique  $h$ , à la surface d'échange  $S$  entre fluide et solide, ainsi qu'à la différence de température  $(T_s - T_\infty)$  entre les deux. On comprend aisément les difficultés. Sachant que l'on considère les échanges thermiques en présence d'écoulement, il est bien clair que cet écoulement va venir influencer la manière dont la chaleur va pouvoir circuler et s'évacuer. Le paramètre de conductance thermique, sera par exemple fortement modifié en fonction de la vitesse du fluide, augmentant avec la vitesse moyenne. Il faut donc décrire les phénomènes en assurant un certain couplage entre l'équation du mouvement (c'est-à-dire l'équation de Navier-Stokes pour un fluide avec une certaine viscosité), et l'équation de la chaleur dite « généralisée » qui prend en compte un terme convectif associé au mouvement du fluide.

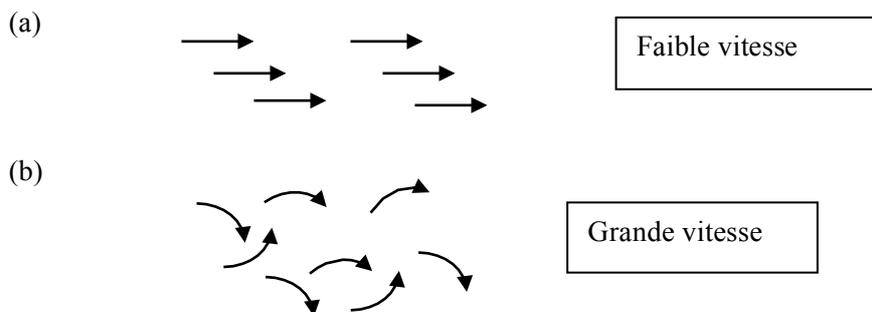


Figure 23 : Notion d'écoulement laminaire (a) pour une faible vitesse du fluide en mouvement ou bien turbulent (b) pour une vitesse plus grande du fluide.

Dans cette partie des rappels de cours, nous nous limiterons à décrire des problèmes à une ou deux dimensions. En effet, de nombreuses configurations qui relèvent de la convection forcée, se déroulent pour des géométries confinées. Par exemple, le cas d'une conduite cylindrique, avec un écoulement de liquide à l'intérieur, relève d'un problème à une dimension. Celui d'une ailette plane de refroidissement porte sur une configuration à deux dimensions, etc. En bref, il ne sera pas utile ici d'attaquer des problèmes à 3 dimensions, et toutes les équations présentées le seront en deux dimensions.

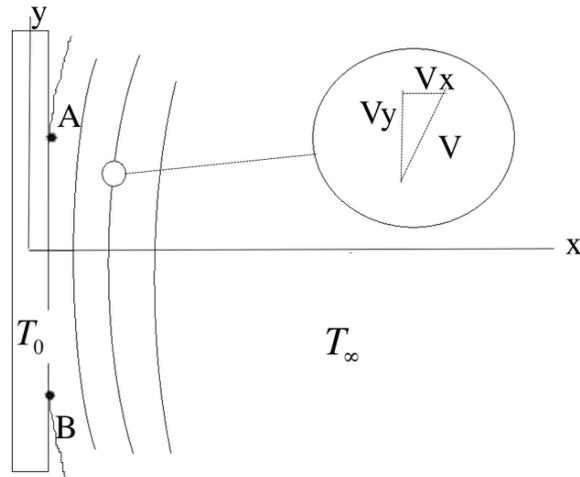


Figure 24 : Écoulement laminaire à deux dimensions d'un fluide chauffé par une plaque rectangulaire verticale.

Les équations fondamentales décrivant les transferts thermiques en convection forcée sont au nombre de trois : Equation de conservation de la masse, équation du mouvement (ou équation de Navier-Stokes), et équation de la chaleur généralisée. La Figure 24 décrit la géométrie 2D envisagée, pour un écoulement laminaire (les différents tracés correspondent aux lignes de champ). Une plaque solide s'étend le long de l'axe  $Oy$ , à l'infini le long de cet axe mais aussi le long de l'axe  $Oz$  perpendiculaire au plan de la Figure. Le fluide s'écoule dans le demi-plan  $Ox$  (avec  $x > 0$ ). Les lignes de champ sont principalement orientées le long de l'axe  $Oy$ , même s'il existe aussi par endroits une composante de la vitesse le long de l'axe  $Ox$ . Les composantes de la vitesse le long de ces deux axes, sont notées  $V_x$  et  $V_y$ , respectivement, avec  $V_y \gg V_x$ . Les points  $A$  et  $B$  de la Figure sont respectivement un point de décollement et un point d'arrêt de la ligne de champ (trajectoire d'écoulement). La plaque est maintenue à la température  $T_0$ , alors que le fluide est à la température  $T_\infty$ , pour des valeurs de  $x$  suffisamment grandes.

La première équation n'est donc rien d'autre que la relation de conservation de la masse.

Normalement, elle s'écrit :  $\frac{d\rho}{dt} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ . En fait, elle sera écrite de manière beaucoup

plus simple ici. Précisons d'ailleurs les hypothèses retenues :

- Fluide lourd incompressible
- Absence de force extérieure
- Absence de forces de pression
- Prise en compte d'une seule viscosité (ou tout du moins d'une viscosité globale)
- Configuration à deux dimensions uniquement
- Equation du mouvement avec Navier-Stokes, écrite le long de l'écoulement

Dans le cadre de ces hypothèses, l'équation de conservation de la masse se réduit à :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 . \quad (3.2)$$

Il s'agit d'une équation dite de continuité, qui assure simplement le lien entre les deux composantes du champ de vitesse, pour l'écoulement du fluide.

Pour l'équation de Navier-Stokes, repartons de son expression la plus générale, écrite ici sous sa forme avec les opérateurs vectoriels gradient, divergence et laplacien vectoriel :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -grad p + \left( \eta + \frac{\mu}{3} \right) grad div \vec{V} + \mu \Delta \vec{V} + \rho \vec{F}_{ext} . \quad (3.3)$$

Cette équation peut aussi être réécrite en utilisant la relation vectorielle suivante :

$$\Delta \vec{V} = grad div \vec{V} - rot rot \vec{V} , \quad (3.4)$$

soit finalement pour l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -grad p + \left( \eta + \frac{4\mu}{3} \right) grad div \vec{V} - \mu rot rot \vec{V} + \rho \vec{F}_{ext} . \quad (3.5)$$

Ces trois équations peuvent bien entendu être écrites sous une forme plus compacte et plus claire, à l'aide simplement de l'opérateur Nabla de dérivation spatiale sous des formes tout à fait équivalentes :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \left( \eta + \frac{\mu}{3} \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \mu (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} + \rho \vec{F}_{ext} , \quad (3.6)$$

$$\Delta \vec{V} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) , \quad (3.7)$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \left( \eta + \frac{4\mu}{3} \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) + \rho \vec{F}_{ext} , \quad (3.8)$$

où le symbole  $\cdot$  , représente le produit scalaire et où  $\times$  représente le produit vectoriel.

En utilisant les hypothèses de départ (absence de forces de pression et absence de force extérieure), l'équation du mouvement (3.8) peut se ramener à une expression beaucoup plus simple, à savoir :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \left( \eta + \frac{4\mu}{3} \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \mu \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) . \quad (3.9)$$

Par ailleurs, le champ de vitesse sera évalué, comme cela a été expliqué un peu plus haut le long de l'axe de l'écoulement, c'est-à-dire le long de l'axe  $Oy$ . Il suffit donc ici de retranscrire l'équation (3.9) dans sa version à deux dimensions beaucoup plus simple, d'autant que pour

un champ de vitesse laminaire le dernier terme de l'équation disparaît,  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0$ . Il reste donc au final, après avoir regroupé les deux viscosités en un seul terme (noté  $\mu$ ) :

$$\rho \frac{dV_y}{dt} = \mu \left( \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right). \quad (3.10)$$

C'est cette forme à deux dimensions de l'équation du mouvement qui sera essentiellement utilisée dans le reste de l'ouvrage. Par contre, pour la convection libre, cf. section 3.6, il faudra venir rajouter un terme correspondant à la force ascensionnelle. Le second membre de l'équation (3.10) comporte deux termes. En fait et même si comme cela était noté plus haut,  $V_y \gg V_x$ , on a surtout ici :  $\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} \gg \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}$ , si bien qu'il ne faut conserver que le premier terme et garder négligeable le second.

L'étape suivante consiste à utiliser la formulation de la dérivée particulière. Il s'agit de noter que la quantité étudiée,  $V_y$ , est une fonction de plusieurs variables, à savoir :  $x$ ,  $y$  et  $t$ . Il est alors possible d'écrire la différentielle  $dV_y$  sous la forme suivante, en utilisant les règles de dérivation usuelles :

$$dV_y = \frac{\partial V_y}{\partial x} dx + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy + \frac{\partial V_y}{\partial t} dt. \quad (3.11)$$

Si l'on divise tous les termes de cette équation par  $dt$ , et en notant :  $V_x = \frac{dx}{dt}$  ;  $V_y = \frac{dy}{dt}$ , alors on obtient formellement l'équation suivante :

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y}. \quad (3.12)$$

Cette dernière équation (3.12) fait donc le lien entre différentielle totale du champ de vitesse et différentielle partielle. De plus lorsque le régime est stationnaire, ce qui correspond à de très nombreuses applications en thermique de l'ingénieur, alors on note :  $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ . L'équation de Navier-Stokes sera donc finalement écrite sous la forme d'une équation aux dérivées partielles, non linéaire, que nous utiliserons tout le temps, et qui s'écrit ici finalement :

$$\rho \left( V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}. \quad (3.13)$$

La troisième et dernière équation que nous devons introduire ici est l'équation dite de la chaleur « généralisée ». Elle prend en compte la vitesse de l'écoulement du fluide. Pour

l'établir, il faut repartir de l'équation de la chaleur, avec terme dépendant du temps :

$$\lambda \Delta T = \rho C_p \frac{dT}{dt}, \text{ sans terme source et à deux dimensions :}$$

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \rho C_p \frac{dT}{dt}. \quad (3.14)$$

Ici encore, il faut noter que les variations latérales (le long de l'axe  $Ox$ ) de la température sont plus importantes que celles le long de la direction d'écoulement (axe  $Oy$ ), ce qui se traduit par

l'inégalité forte :  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \gg \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ , ce qui justifie de négliger le deuxième terme du premier

membre de l'équation (3.14). Sachant de plus que le champ de température  $T$  est une fonction de  $x$ ,  $y$  et  $t$ , il est alors possible d'effectuer un calcul similaire à celui qui vient d'être réalisé pour la vitesse, en écrivant :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (3.15)$$

soit pour un régime stationnaire,  $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$  :

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \rho C_p \left( V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (3.16)$$

soit en notant que :  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \gg \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ , il ne reste finalement plus que :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho C_p \left( V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (3.17)$$

L'équation (3.17) peut-être écrite d'une manière plus compacte, mettant en valeur le rôle de la vitesse du fluide, ainsi que l'influence du gradient du champ de température sous la forme suivante :

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho C_p (\vec{V} \cdot \vec{\nabla} T) = \rho C_p \vec{V} \cdot g \overline{rad} T. \quad (3.18)$$

Les deux équations (3.13) et (3.17) sont centrales pour la suite des rappels de cours sur la convection. Il s'agit des équations à deux dimensions pour le mouvement du fluide (équation de Navier-Stokes simplifiée), et équation de la chaleur « généralisée ». Les deux ont exactement la même structure. Il s'agit d'équations aux dérivées partielles, non linéaires. En plus de ces deux équations de base, l'équation (3.2), ou équation de continuité (obtenue à partir de la relation de conservation de la masse pour un fluide non compressible), assure le

passage d'une coordonnée du champ de vitesse vers l'autre, lorsque l'on a connaissance de l'une d'entre elles.

### 3.2- Couplage entre écoulement du fluide et transfert de chaleur

Finalement, il est possible de réécrire les deux équations de base (3.13) et (3.17) sous une forme un peu plus compacte encore, en notant :

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = \left( \frac{\mu}{\rho} \right) \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}, \text{ avec : } \nu = \frac{\mu}{\rho}, \text{ viscosité cinématique, et :} \quad (3.19)$$

$$V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} = \left( \frac{\lambda}{\rho C_p} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{ avec : } \chi = \frac{\lambda}{\rho C_p}, \text{ diffusivité thermique.} \quad (3.20)$$

Sous la forme des équations (3.19) et (3.20), la correspondance est parfaite, seuls les champs de température et de vitesse permutant, ainsi que les paramètres de viscosité cinématique et de diffusivité thermique. Dit en d'autres termes, ces deux équations ont exactement la même structure, ce qui permet de traiter très rapidement certains exercices basés sur l'équation aux dimensions (voir par exemple exercice 3.2.3), ainsi que la section 3.4 sur le sujet. Par ailleurs, sachant que la température est connectée à la vitesse du fluide par l'intermédiaire de l'équation (3.20) de la chaleur « généralisée », alors il est bien clair que dans l'équation du mouvement (3.19), et même si elle n'apparaît pas explicitement, la vitesse du fluide sera en retour affectée par la distribution du champ de température.

### 3.3- Description des applications classiques (plaque, tube, barreau, ailette)

Les applications classiques de la convection forcée en sciences de l'ingénieur touchent le plus souvent à des problèmes couplés, soit à une ou bien à deux dimensions, portant sur des géométries relativement simples, pour être ici en mesure de modéliser les phénomènes à un niveau relativement élémentaire. Spécifiquement, nous allons aborder quatre grandes classes de problèmes classiques, à savoir :

- Ecoulement d'un fluide sur une surface plane à deux dimensions (I)
- Ecoulement d'un fluide caloporteur à l'intérieur d'un tube (II)
- Echanges thermiques d'un fluide autour d'un barreau (III)
- Echanges thermiques d'un fluide, et refroidissement des ailettes (IV)

La première classe d'applications (I) est constitutive de tout ce qui a été décrit jusqu'à présent. Il s'agit d'un problème à deux dimensions, par nature plus compliqué à résoudre que les trois classes d'applications qui suivent, qui sont toutes, ou du moins la plupart, des

configurations à une dimension. Pour ce cas, nous avons bien noté que le champ de température réduit :  $\theta(x,y) = T(x,y) - T_\infty > 0$ , le long de l'axe latéral  $Ox$  aura un profil décroissant si la température en  $x=0$ , notée  $T_0$ , est supérieure à  $T_\infty$ , passant de  $\theta(0,y) = T_0 - T_\infty > 0$  sur la plaque, à  $\theta(x \gg 1,y) = T_\infty - T_\infty = 0$  loin de la plaque. Le profil de la composante  $V_y$  le long de l'axe  $Ox$  est une courbe en cloche dissymétrique. En  $x = 0$ , par définition  $V_y = 0$ , puis elle passe par un maximum pour une certaine abscisse, avant de diminuer à nouveau, puis de tendre vers zéro suffisamment loin de la plaque (lorsque  $x \gg l$ ).

Dans le cadre de la deuxième classe d'applications (II), correspondant à l'écoulement d'un fluide caloporteur dans un tuyau, par exemple cylindrique, alors à la place du profil du champ de vitesse décrit par une courbe en cloche dissymétrique de l'application (I), on retrouvera un profil de Poiseuille parabolique et symétrique, comme il se doit. Les applications potentielles de ce deuxième cas sont innombrables, et plusieurs exercices ou problèmes seront proposés. On parle ici de systèmes de chauffage ou de climatisation.

La troisième classe d'applications (III) est canonique, dans le sens où il s'agit de configurations de base, correspondant à un barreau monté entre deux murs (ou deux thermostats, c'est-à-dire des solides de grands volumes ayant des températures fixes au cours du temps). Dans ce cas, c'est l'écoulement de l'air autour du barreau qui vient modifier par convection les résultats du profil de température en fonction de la coordonnée le long de l'axe du barreau, par rapport où cas où seul le mécanisme de conduction est pris en compte.

Enfin, la quatrième classe d'applications (IV) touche à la théorie des échanges thermiques dans les ailettes, qu'elles soient planes, cylindriques ou autres. Ici encore, les applications potentielles sont nombreuses, et il est important de bien savoir résoudre ce type de problèmes là pour quelques configurations fondamentales.

### 3.4- Théorie de la similitude, équations aux dimensions, nombres caractéristiques sans dimension

C'est en 1883 qu'Ostwald Reynolds introduisit la loi de la similitude. Suite à des études expérimentales approfondies, O. Reynolds s'était rendu compte que la zone de transition entre régime laminaire et régime turbulent se produit toujours autour de  $R_e = 2200$ , avec :  $R_e = \ell U \rho / \mu$ . Dans cette définition,  $\ell$  est une dimension caractéristique (par exemple le rayon du tube),  $U$  la vitesse moyenne d'écoulement,  $\rho$  la masse volumique du fluide, et  $\mu$  sa viscosité. Lorsque Reynolds changeait de fluide, venant ainsi modifier les paramètres de viscosité ou de masse volumique, ou bien le rayon du tuyau, alors qu'elle que soit la configuration, c'est toujours pour le nombre critique de Reynolds, c'est-à-dire pour la valeur de 2200 environ que se produisait la transition entre régime laminaire et régime turbulent. De

tels états différents par la nature du fluide ou la section des tuyaux aboutissant aux mêmes résultats en termes de nombre de Reynolds sont dits des états semblables. Dans le classique diagramme de Moody qui présente cette transition de manière universelle, on représente en général le logarithme de la perte de charge en fonction du logarithme du nombre de Reynolds (ou de la vitesse d'écoulement). En régime laminaire, dans cette représentation log-log, la pente est -1, alors que pour le régime turbulent, elle est plutôt située autour de -1/4. En fait, les résultats fins notamment sur les pentes dépendent aussi de la rugosité intérieure des tubes. Par contre, dans tous les cas, la transition critique existe bel et bien pour  $R_c = 2200$  environ, et il s'agit d'une zone de discontinuité bien franche.

Comme indiqué plus haut, la conductance thermique  $h$  de la convection forcée doit a priori être affectée par la vitesse moyenne d'écoulement  $U$  du fluide concerné. Donc ce paramètre qui est aussi lié à la masse volumique du fluide  $\rho$  et à sa viscosité  $\mu$ , doit quelque part être lié au nombre de Reynolds. La question est alors de savoir si d'autres paramètres influent, et quelle relation fonctionnelle il est possible de construire. Sachant que tous les paramètres du modèle possèdent leur propre unité (ou dimension), à l'exception des nombres caractéristiques tels que Reynolds, Biot ou bien Nusselt, qui eux sont sans unité, l'idée est alors d'essayer de construire une relation fonctionnelle faisant intervenir tous les paramètres et toutes les grandeurs physiques associées aux deux équations fondamentales (3.19) et (3.20), ou bien (3.13) et (3.17). De manière exhaustive, il est alors possible d'écrire une telle relation fonctionnelle sous la forme :

$$h = cte \cdot \ell^a U^b \rho^c C_p^d \lambda^e \mu^f . \quad (3.21)$$

Bien entendu, chaque grandeur possède une dimension particulière, et les exposants retenus ( $a, b, c, d, e, f$ ) de l'équation fonctionnelle doivent être compatibles entre eux. L'équation (3.21) en termes de dimensions (notées [ ] ) s'écrit :

$$\left[ \frac{H}{tL^2T} \right] = [L]^a \left[ \frac{L}{t} \right]^b \left[ \frac{M}{L^3} \right]^c \left[ \frac{H}{MT} \right]^d \left[ \frac{H}{tLT} \right]^e \left[ \frac{M}{Lt} \right]^f , \quad (3.22)$$

où :  $[L]$ ,  $[M]$ ,  $[t]$ ,  $[H]$ ,  $[T]$  , représentent respectivement les dimensions d'une longueur, d'une masse, d'un temps, d'une quantité de chaleur, d'une température. Il ne reste alors plus qu'à écrire l'ensemble des équations dérivées de (3.22) pour chacune des unités (ou dimensions) de base. Sachant que :  $[h] = \left[ \frac{H}{tL^2T} \right]$  , on obtient finalement :

$$* [L] \Rightarrow -2 = a + b - 3c - e - f , \quad (3.23a)$$

$$* [M] \Rightarrow 0 = c - d + f , \quad (3.23b)$$

$$* [t] \Rightarrow -1 = -b - e - f , \quad (3.23c)$$

$$*[H] \Rightarrow +1 = d + e, \quad (3.23d)$$

$$*[T] \Rightarrow -1 = -d - e. \quad (3.23e)$$

Les deux équations (3.23d) et (3.23e) sont identiques. Cela n'est pas étonnant, car température et quantité de chaleur sont directement connectées par l'équation fondamentale de la calorimétrie. Cela signifie qu'il n'y a que quatre relations indépendantes pour six puissances inconnues. Il s'agit donc d'un système sous déterminé, et toutes les puissances s'exprimeront finalement en fonction de deux d'entre elles uniquement. Si l'on choisit de ne conserver que les deux derniers exposants  $e$  et  $f$ , alors les quatre équations fournissent dans l'ordre inversé de celui de la liste des équations (3.23), les relations suivantes :

$$(3.23d) \Rightarrow d = 1 - e,$$

$$(3.23c) \Rightarrow b = 1 - e - f,$$

$$(3.23b) \Rightarrow c = d - f = 1 - e - f,$$

$$(3.23a) \Rightarrow 2 = -a - b + 3c + e + f = -a - 1 + e + f + 3 - 3e - 3f + e + f = -a + 2 - e - f,$$

soit finalement :  $a = e - f$ . Il ne reste plus alors qu'à retourner à l'équation fonctionnelle de départ (3.21) qui s'écrit finalement :

$$h = cte \cdot \ell^{-e-f} U^{1-e-f} \rho^{1-e-f} C_p^{1-e} \lambda^e \mu^f = cte \cdot \frac{\ell^{1-e-f} U^{1-e-f} \rho^{1-e-f}}{\mu^{1-e-f}} \cdot \frac{C_p^{1-e} \lambda^e \mu^{1-e}}{\ell^1}, \quad (3.24)$$

$$\Rightarrow \frac{h\ell}{\lambda} = cte \cdot \left( \frac{\ell U \rho}{\mu} \right)^{1-e-f} \cdot C_p^{1-e} \lambda^{e-1} \mu^{1-e} = cte \cdot \left( \frac{\ell U \rho}{\mu} \right)^{1-e-f} \cdot \left( \frac{C_p \mu}{\lambda} \right)^{1-e}, \quad (3.25)$$

soit finalement :  $N_u = cte (R_e)^\alpha \cdot (P_r)^\beta$ , avec :  $N_u = \frac{h\ell}{\lambda}$ , et où  $\alpha, \beta$  sont des exposants

arbitraires. Ce calcul peut être refait en choisissant un ordre différent et quelconque des exposants ( $a, b, c, d, e, f$ ), ou bien en choisissant d'autres grandeurs pivots pour exprimer toutes les autres ( $a$  et  $b$  par exemple au lieu de  $e$  et  $f$ , ou bien toute autre paire arbitraire des exposants). A chaque tentative, ce sont exactement les mêmes résultats qui seront obtenus, c'est-à-dire une relation fonctionnelle universelle du type de :

$$N_u = cte (R_e)^\alpha \cdot (P_r)^\beta, \text{ avec } \alpha, \beta, \text{ deux puissances arbitraires.} \quad (3.26)$$

La relation fonctionnelle de l'équation (3.26) est tout à fait générique. Selon les cas de l'écoulement laminaire ou turbulent, à la surface d'une plaque plane ou bien à l'intérieur d'un tuyau cylindrique, de très nombreuses autres relations ont pu être proposées. Très souvent, elles conservent l'allure générale de l'équation (3.26), avec des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , qui prennent des valeurs différentes (toujours inférieures à l'unité), ainsi que des valeurs de la

constante numérique devant l'expression qui change aussi. Les deux dernières Tables A5 et A6 de l'Annexe fournissent quelques unes de ces relations pour des cas types simples.

En résumé, la loi de Newton régit les échanges par convection. La convectance thermique  $h$  n'est pas une donnée intrinsèque, et elle dépend d'un très grand nombre de paramètres, cf. l'équation (3.21). La relation (3.26) permet de calculer pour un grand nombre de configurations différentes le nombre de Nusselt, en fonction du nombre de Reynolds et du nombre de Prandtl pour le fluide considéré. Il est alors possible d'évaluer la convectance thermique  $h$ , à partir de sa définition via le nombre de Nusselt, et d'en déduire le flux de chaleur échangé par convection. Ces calculs sont moins directs que ceux liés aux transferts thermiques par conduction. Ils sont de plus davantage aléatoires, car ils dépendent fortement des relations fonctionnelles de départ qui sont retenues. La section suivante, consacrée à l'étude des couches limites visqueuse et thermique permet de calculer de manière analytique avec précision les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ , dans un cas simple.

Exercices concernés par cette section : On peut citer les exercices suivants, 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3. Tous sont de niveau A et ils sont donc simples à résoudre. Ils s'appuient tous sur la notion des nombres caractéristiques (sans dimension) associés à la convection forcée, à savoir : le nombre de Nusselt, le nombre de Reynolds et le nombre de Prandtl.

### 3.5- Théorie de la similitude, application aux couches limites

Pour un écoulement dans un tube de rayon  $R$ , les couches limites visqueuse et thermique représentent les zones où vitesse d'écoulement et température excédentaire passent l'une et l'autre de zéro en ( $x = 0$ ), vers une valeur moyenne, soit  $U_0$  pour la vitesse d'écoulement, soit  $T_0 - T_\infty$  pour la température excédentaire. Pour traiter ce problème, il faut repartir des équations (3.19) et (3.20) pour lesquelles on note ici qu'il existe un terme prépondérant dans leurs premiers membres dans chacune d'entre elles :

$$V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}, \text{ avec : } V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} \ll V_y \frac{\partial V_y}{\partial y}, \Rightarrow V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \approx \nu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2}, \quad (3.27)$$

$$V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{ avec : } V_x \frac{\partial T}{\partial x} \ll V_y \frac{\partial T}{\partial y}, \Rightarrow V_y \frac{\partial T}{\partial y} \approx \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (3.28)$$

Les deux équations obtenues avec cette approximation, sont alors traitées sous forme de différences finies sur les épaisseurs de couche limites visqueuse (notée  $\delta$ ) et thermique (notée  $\delta'$ ). Commençons par l'équation du mouvement (3.27) :

$$V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \approx \nu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} \Rightarrow U_0 \frac{\Delta V}{\ell} \approx \nu \frac{\Delta V}{\delta^2} \Rightarrow \delta^2 \approx \frac{\nu \ell}{U_0} \approx \frac{\ell^2}{R_e}, \quad (3.29)$$

avec le nombre de Reynolds défini précédemment :  $R_e = \ell U \rho / \mu$ . Le résultat obtenu dans l'équation (3.29) indique que l'épaisseur de couche limite visqueuse  $\delta$  est donc proportionnelle à l'inverse de la racine carrée du nombre de Reynolds ( $\delta \approx \ell / \sqrt{R_e}$ ), où le paramètre  $\ell$  représente une longueur caractéristique, a priori arbitraire prise le long de la direction d'écoulement (ici le long de  $Oy$ ). Cette épaisseur de couche limite visqueuse correspond à la zone de transition pour le gradient de vitesse du fluide, passant d'une valeur nulle sur la paroi (en  $z = 0$  sur la Figure 25), à la valeur moyenne (notée  $v_\infty$  sur la Figure 25)

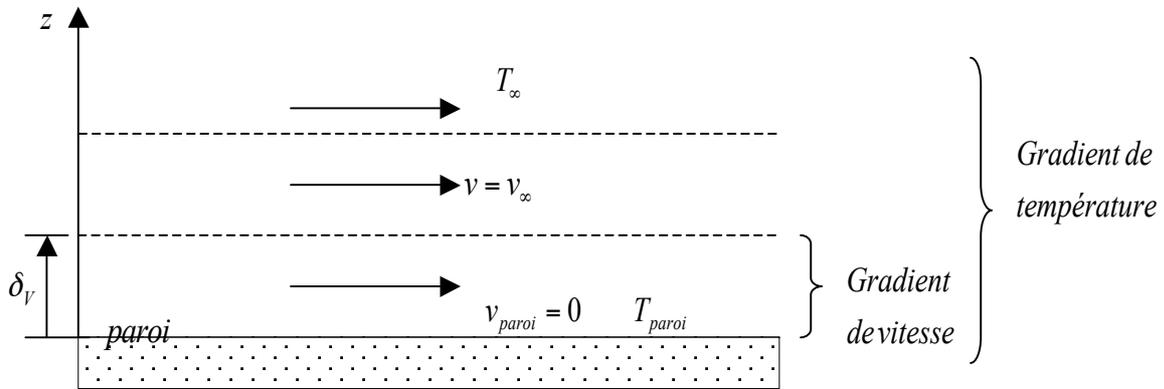


Figure 25 : Notion de couche limite visqueuse et thermique.

L'équation de la chaleur (3.28) est elle aussi traitée par différence finie sur l'épaisseur de couche limite thermique  $\delta'$ . Par contre, il faut ici faire attention car comme les deux épaisseurs de couches limites sont différentes ( $\delta' \neq \delta$ ), alors il faut en tenir compte, par une simple proportion, dans l'évaluation de la zone de transition pour la vitesse d'écoulement à l'intérieur de la couche limite thermique. En bref, on obtient :

$$V_y \frac{\partial T}{\partial y} \approx \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow U_0 \left( \frac{\delta'}{\delta} \right) \frac{\Delta T}{\ell} \approx \chi \frac{\Delta T}{\delta'^2} \Rightarrow \delta'^3 \approx \frac{\chi \delta \ell}{U_0}. \quad (3.30)$$

Sachant que :  $\delta \approx \ell / \sqrt{R_e}$ , cf. Figure 26 pour le profil des vitesses sur l'épaisseur de couche limite visqueuse en régime laminaire, l'équation (3.30) est alors réécrite sous la forme :

$$\delta'^3 \approx \frac{\chi \delta \ell}{U_0} \cdot \frac{\ell}{\nu} \cdot \frac{\nu}{\nu} = \frac{\chi}{\nu} \cdot \frac{1}{R_e} \cdot \delta \ell^2 = \frac{\ell^3}{P_r R_e^{3/2}} \Rightarrow \delta' \approx \frac{\ell}{P_r^{1/3} R_e^{1/2}}. \quad (3.31)$$

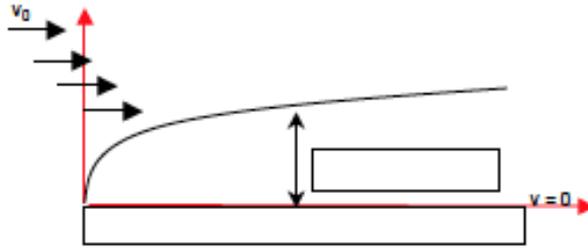


Figure 26 : Profil des vitesses sur l'épaisseur de couche limite visqueuse, pour un écoulement de type laminaire.

Dans ces expressions, le nombre de Prandtl est noté par sa définition :  $Pr = \frac{\nu}{\chi} = \frac{\mu C_P}{\lambda}$ .

Pour terminer les calculs, il faut retourner au nombre de Nusselt, par le biais des équations définissant le flux de chaleur en conduction (loi de Fourier) et en convection (loi de Newton), écrites ici encore sous forme de différences finies. Pour cela, il faut évaluer le flux de chaleur radial (représenté par exemple le long de l'axe  $z$  sur la Figure 27. Sur l'épaisseur de couche limite thermique, l'écart de température s'écrit donc :  $\Delta T = T_s - T_\infty$ . Les expressions du flux de chaleur  $\phi$ , sont dès lors les suivantes :

$$|\phi| = \lambda S \frac{\Delta T}{\delta'} ; |\phi| = h S \Delta T \Rightarrow h \approx \frac{\lambda}{\delta'} \Rightarrow N_u = \frac{h \ell}{\lambda} \approx \frac{\ell}{\delta'} . \quad (3.32)$$

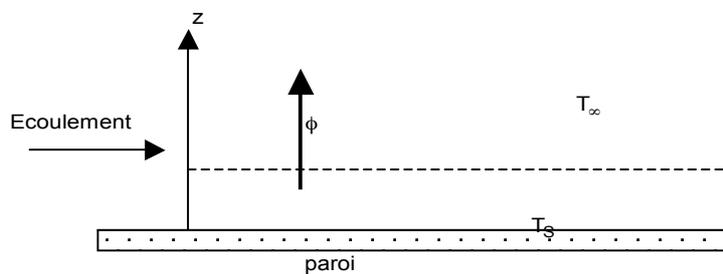


Figure 27 : Flux de chaleur radial, perpendiculaire à la direction de l'écoulement du fluide, évalué sur l'épaisseur de couche limite thermique.

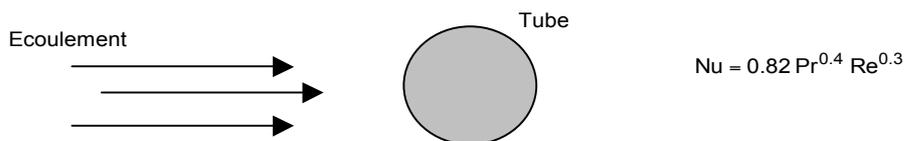
Cette dernière équation indique simplement que le nombre de Nusselt peut donc finalement se mettre sous la forme :

$$N_u \approx A . Pr^{1/3} Re^{1/2} . \quad (3.33)$$

Ce résultat est très important. Il s'applique à un écoulement laminaire au dessus d'une plaque plane infinie. Il indique que le nombre de Nusselt est donc proportionnel à une constante, et qu'il dépend de la racine carrée du nombre de Reynolds, ainsi que de la racine cubique du

nombre de Prandtl. En fait, la constante  $A$ , pour cette configuration vaut 0,332. Pour d'autres configurations, il faudra utiliser d'autres valeurs de cette constante, ainsi que d'autres valeurs des exposants caractéristiques,  $\alpha$ ,  $\beta$ , de l'équation (3.26), cf. les deux dernières Tables A5 et A6 de l'Annexe pour des lois de variations du coefficient de Nusselt, à la fois en convection forcée, mais aussi en convection libre (voir à ce sujet la section suivante). La Figure 28 présente le cas classique de la convection forcée autour d'un tube cylindrique (en écoulement laminaire ou turbulent).

(a)



(b)

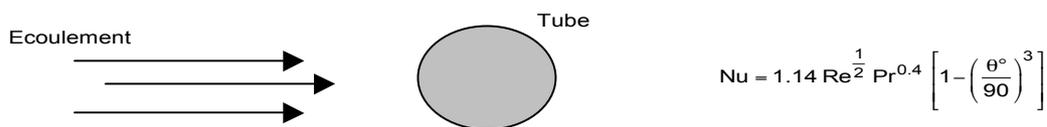


Figure 28 : Exemple de l'écoulement autour d'un tube, avec relation fonctionnelle proposée entre nombre de Nusselt, et nombres de Prandtl et de Reynolds : (a) cas d'un écoulement laminaire, et (b) cas d'un écoulement turbulent.

En présence d'écoulement turbulent, l'allure du profil de vitesse est assez différent, notamment il existe une position particulière pour laquelle la zone de turbulence débute. La Figure 29 illustre ce phénomène.

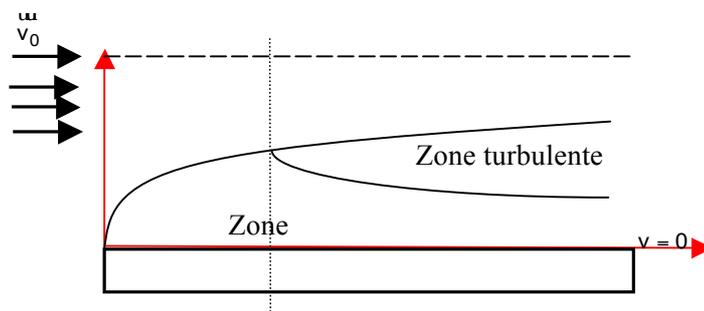


Figure 29 : Profil pour un écoulement turbulent, avec transformation de la couche limite visqueuse et transition du régime laminaire vers le régime turbulent.

Les deux dernières Tables A5 et A6 de l'Annexe fournissent des résultats caractéristiques pour des écoulements laminaires ou turbulents dans différentes configurations. La relation

générique pour un écoulement laminaire s'effectuant le long d'une paroi plane, fournit la classique relation :  $Nu = 0,332 Re^{1/2}Pr^{1/3}$ . En fait, le coefficient qui vaut 0,332 est déduit de l'expérience. Des calculs basés sur l'évolution d'un volume intégré, ou bien d'un volume élémentaire fournissent des résultats légèrement supérieurs, à savoir 0,4 ou bien 0,36 respectivement pour l'un ou l'autre de ces deux cas limites. D'autres résultats existent pour d'autres configurations. On peut citer par exemple le cas de la convection autour d'une sphère. Lorsque les phénomènes sont étudiés avec la sphère immergée dans un liquide avec un nombre de Reynolds faible (compris entre 1 et 2000), alors la relation fonctionnelle s'écrit :  $Nu = (0,97+0,68 Re^{1/2})Pr^{1/3}$ . Pour la même sphère plongée cette fois-ci dans un gaz avec un nombre de Reynolds encore plus faible (compris entre 1 et 25), alors il faut prendre :  $Nu = (2,22 + 0,48 Re^{1/2})Pr$ . De nombreuses autres relations de ce type existent dans la littérature spécialisée pour des écoulements (laminaires ou turbulents) à la surface de plaques (ou d'échangeurs thermiques), autour de tubes ou de sphères, etc. Elles sont utilisées en fonction des configurations finalement retenues.

### 3.6- Equations fondamentales pour la convection libre

Pour étudier les équations fondamentales de la convection libre, en deux dimensions, il faut reprendre l'exemple décrit à la section 3.1 d'une plaque plane d'extension infinie le long de l'axe  $Oy$  (dans le sens de l'écoulement) et le long de l'axe  $Oz$  (perpendiculaire au plan de la Figure). Au contact de la plaque, il peut exister des points de décollement de la couche limite visqueuse, ce qui permet de construire une cellule de convection qui se développe le long de l'axe  $Ox$ . L'équation de la chaleur « généralisée » (3.28) reste inchangée, alors qu'il faut ajouter un nouveau terme dans l'équation du mouvement (3.27), cf. Figure 30 pour un schéma de principe. Ce terme correspond à la force ascensionnelle (ou force d'Archimède) due au gradient de température au sein du fluide en mouvement, et au coefficient de dilatation isobare :  $\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P=cte}$  (ici  $V$  note le volume et non pas la vitesse qui est elle le plus souvent indexée par une direction). Cette force s'écrit au final :  $\alpha \rho g (T - T_0)$ , avec  $g = 9,81 m/s^2$ , si bien que les équations fondamentales de la convection libre (ici à deux dimensions) se mettent sous la forme :

$$\rho \left( V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \alpha \rho g (T - T_0), \quad (3.34)$$

$$\rho C_p \left( V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (3.35)$$

Au passage, en convection forcée, le couplage entre champ de vitesse et champ de température apparaissait directement dans l'équation de la chaleur (par exemple sous sa forme

compacte, cf. équation (3.18) :  $\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho C_p (\vec{V} \cdot \vec{\nabla} T) = \rho C_p \vec{V} \cdot g \vec{rad} T$  ), mais pas dans l'équation du mouvement. Ici, une différence notable est bien que les deux champs sont intimement mélangés dans les deux équations, incluant l'équation du mouvement (3.34).

La résolution exacte des équations (3.34) et (3.35) est très difficile, et par exemple la prédiction des cellules de convection n'est pas du tout évidente. De nouveau, ces deux équations aux dérivées partielles sont couplées, et elles sont non linéaires.

Une question que l'on peut se poser est de connaître la relation fonctionnelle existante entre le nombre de Nusselt et d'autres nombres caractéristiques (sans dimension) tels que le nombre de Reynolds et le nombre de Prandtl, comme établi en convection forcée. Dans le cas présent de la convection libre, il n'y a pas forcément d'écoulement d'ensemble du fluide, bien établi,

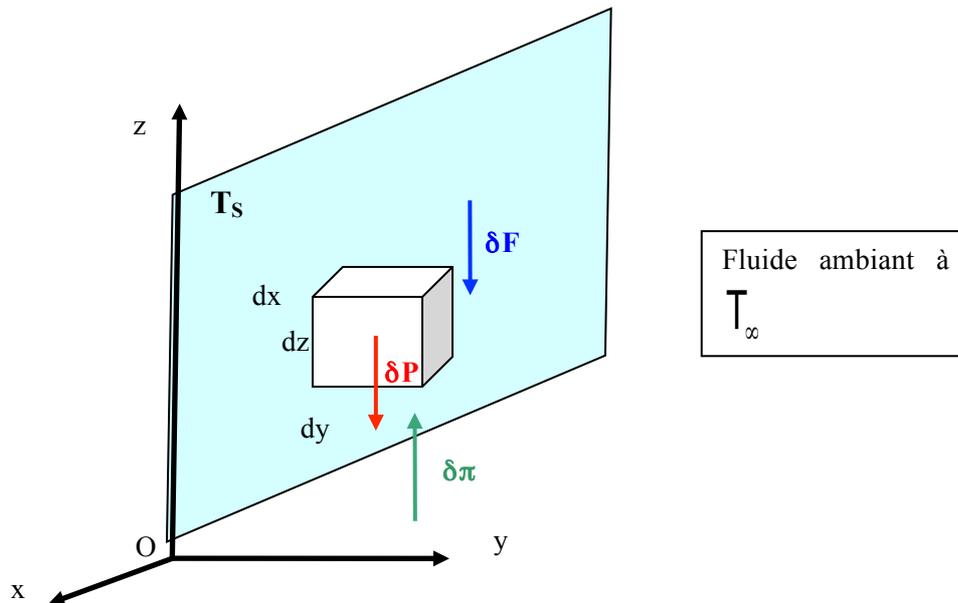


Figure 30 : Mise en équilibre d'un élément représentatif du fluide avec notamment les forces de pesanteur  $\delta P$ , celle de frottement avec la paroi  $\delta F$ , ainsi que la force ascensionnelle (ou force d'Archimède)  $\delta \pi$ .

et il n'est donc pas bien évident qu'il faille utiliser le nombre de Reynolds. Par ailleurs, avec l'introduction dans l'équation du mouvement du terme de force ascensionnelle,  $\alpha \rho g (T - T_0)$ , de nouvelles grandeurs apparaissent. Il est certainement pertinent ici de faire une analyse dimensionnelle des nouvelles équations, dans le cadre de la théorie de la similitude. En fait,

nous allons nous concentrer sur l'équation du mouvement (3.34), en notant que l'équation aux dimensions s'écrit :

$$\left[ \rho V_x \frac{V_y}{\ell} \right] = \left[ \mu \frac{V_y}{\ell^2} \right] = [\alpha \rho g \Delta T]. \quad (3.36)$$

Commençons par évaluer les deux premiers termes :

$$\left[ \rho V_x \frac{V_y}{\ell} \right] = \left[ \mu \frac{V_y}{\ell^2} \right] \Rightarrow [\rho V_x] = \left[ \frac{\mu}{\ell} \right] \Rightarrow \left[ \frac{\rho V_x \ell}{\mu} \right] = 1. \quad (3.37)$$

Cette équation exprime simplement la conservation du nombre de Reynolds pour deux états semblables, qui est donc bien sans unité (dimension qui vaut 1).

Si l'on évalue maintenant les deux derniers termes de l'équation (3.36), on obtient :

$$\left[ \mu \frac{V_y}{\ell^2} \right] = [\alpha \rho g \Delta T] \Rightarrow \left[ \frac{\alpha \rho g \Delta T \ell^2}{\mu V_y} \right] = 1, \quad (3.38)$$

soit en ayant noté que :  $[V_x] = [\mu / \rho \ell]$ , on obtient finalement le résultat suivant :

$$\left[ \frac{\alpha \rho^2 g \Delta T \ell^3}{\mu^2} \right] = 1. \quad (3.39)$$

Nous avons ainsi défini un nouveau nombre caractéristique sans dimension. Il s'agit du nombre de Grashof. C'est lui, à la place du nombre de Reynolds qui vient gérer la convection libre. Les relations fonctionnelles entre nombre de Nusselt, nombre de Grashof et nombre de Prandtl s'écrivent toutes sous une forme voisine de l'équation (3.26) correspondante en convection forcée, à savoir :

$$N_u \approx A' \cdot P_r^{\alpha'} G_r^{\beta'}. \quad (3.40)$$

Dans le cas présent, en convection libre le nombre de Grashof est simplement venu remplacer le nombre de Reynolds. De plus, il faut noter que les deux exposants sont systématiquement identiques ( $\alpha' = \beta'$ ). On trouvera des valeurs numériques pour différentes configurations dans la dernière Table A6 de l'Annexe, à ce sujet.

La turbulence peut parfois être observée en convection libre. On peut voir par exemple, dans certaines conditions, des volutes (voire des instabilités) au sein du liquide s'installer lorsque une plaque chauffante est utilisée pour venir le réchauffer. Ces phénomènes se produisent pour de fortes valeurs du nombre de Grashof, typiquement supérieures à 50 000.

Pour terminer cette section, notons qu'il est parfois possible d'introduire un autre nombre sans dimension, le nombre de Rayleigh, qui est simplement le produit du nombre de Prandtl avec le nombre de Grashof :  $Ra = Pr Gr$ . Des relations fonctionnelles simples entre le nombre de Nusselt et le nombre de Rayleigh, ont été proposées, sous la forme ;  $N_u = A Ra^n$ .

On trouvera quelques unes de ces expressions dans la table VI suivante, avec les amplitudes  $A$  et les exposants  $n$  du nombre de Rayleigh.

$Ra$	$A$	$N$
$10^{-3} < Ra < 5 \cdot 10^2$	1.18	1/8
$5 \cdot 10^2 < Ra < 2 \cdot 10^7$	0.54	1/4
$2 \cdot 10^7 < Ra < 10^{13}$	0.135	1/3

Table VI : Valeurs de l'exposant caractéristique  $n$  et terme d'amplitude  $A$  pour la relation fonctionnelle fournissant le nombre de Rayleigh.

Lord Rayleigh, prix Nobel de physique de 1902 est très connu pour ses nombreux travaux pionniers en acoustique et vibrations, cf. son ouvrage en deux volumes « The theory of sound » 1877. C'est intéressant de noter qu'il a donc laissé son nom aussi indirectement en thermique.

Exercice concerné par cette section : Il n'y en a qu'un seul, c'est l'exercice 3.2.4 portant sur la convection libre et forcée d'une lampe ordinaire. En fait, il s'agit pour l'essentiel d'une simple application numérique pour les deux configurations (en convection forcée, puis en convection libre).

### 3.7- Transferts thermiques pour un fluide en écoulement dans un tuyau

Il s'agit d'une configuration générique. L'eau pénètre dans le tuyau à la température  $T_i$ , et elle ressort à la température  $T_o$ . La conduite est chauffée en surface, ce qui produit un flux de chaleur vers le fluide,  $\phi = hS(T_s - T_{eau})$ , qui est disponible pour venir réchauffer le fluide en écoulement (cf. Figure 31 pour les notations).

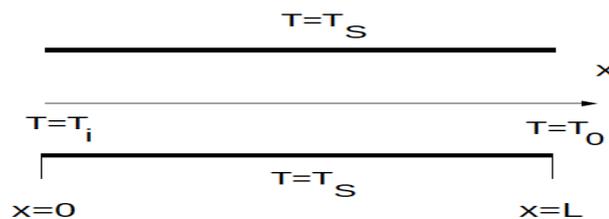


Figure 31 : Configuration pour l'écoulement d'un fluide dans une conduite réchauffée en surface.

Il suffit alors d'écrire un bilan thermique général, en utilisant la loi fondamentale de la calorimétrie pour évaluer la quantité de chaleur nécessaire pour réchauffer le fluide. Ce bilan thermique peut être écrit sous forme d'une différence finie, et alors une procédure itérative est nécessaire pour résoudre numériquement le problème. Il est aussi possible d'écrire à la place un bilan sous forme infinitésimale pour une couche de fluide d'épaisseur  $dx$  (où  $Ox$  indique la direction de l'écoulement du fluide dans le tuyau), cf. calculs menés dans l'exercice 3.2.5. Si l'on se limite ici au cas du bilan thermique global écrit par différence finie sur toute la longueur du tuyau, il faut écrire :

$$\phi = h\pi dL(T_S - T_{eau}) = \dot{m}C_p(T_o - T_i), \text{ avec : } T_{eau} = \frac{1}{2}(T_o + T_i) ; \dot{m} = \rho U \frac{\pi}{4} d^2, \quad (3.41)$$

équation qui est réécrite sous une forme plus compacte :

$$hL\left(T_S - \frac{1}{2}(T_o + T_i)\right) = \rho U \frac{d}{4} C_p (T_o - T_i), \quad (3.42)$$

permettant finalement d'obtenir une expression « formelle » du résultat, sous la forme :

$$T_o = \frac{hLT_S + \left(\rho U \frac{d}{4} C_p - \frac{hL}{2}\right) T_i}{\left(\rho U \frac{d}{4} C_p + \frac{hL}{2}\right)}. \quad (3.43)$$

Bien évidemment, ce résultat ne peut pas fournir directement la valeur de la température  $T_o$  de sortie du fluide de la conduite. En effet, pour calculer la conductance  $h$ , il faut utiliser le nombre de Nusselt, qui lui-même fait intervenir le nombre de Reynolds et le nombre de Prandtl. Dit en d'autres termes, l'équation (3.43) fait intervenir de nombreux paramètres physiques ( $h, \rho, C_p, \mu, P_r$ ), qui dépendent tous de la température (voir les Tables A1 et A2 de l'Annexe pour les valeurs de ces paramètres pour l'eau et pour l'air). Dès lors, il faut utiliser une méthode itérative. Ceci étant dans le cas d'espèce qui nous intéresse ici, on peut constater en effectuant les applications numériques pour ce type de problème que la convergence est assurée pratiquement au bout de quelques (2 ou 3 maximum) itérations. De nouveau, une équation de bilan thermique analogue à l'équation (3.41), mais écrite sous forme différentielle pour une couche de fluide d'épaisseur  $dx$ , permet aussi de résoudre ce problème de manière expéditive et davantage rigoureuse (sans avoir à ressortir à une procédure itérative). C'est d'ailleurs exactement ce qui est proposé dans l'exercice 3.2.5

Exercice concerné par cette section : On peut citer l'exercice 3.2.5 qui porte sur le champ de température moyen pour le fluide circulant dans une conduite chauffée en surface.

### 3.8- Transferts thermiques pour un barreau immergé dans un fluide

La configuration de base est fournie sur la Figure 32. Un barreau cylindrique de rayon  $R$  et de longueur  $L$  est encastré entre deux murs épais qui jouent le rôle de thermostats, c'est-à-dire que leurs températures sont supposées constantes, par exemple  $T_1$  pour l'un et  $T_2$  pour l'autre (avec  $T_2 > T_1$ ), ou bien toutes autres températures de référence, mais qui restent a priori fixes. Un flux de chaleur s'écoule donc dans le barreau en partant du mur le plus chaud, en direction de mur le plus froid. De plus, le barreau peut aussi échanger de la chaleur par convection avec le fluide qui l'entoure.

Il faut ici aussi partir d'une équation de bilan thermique pour une tranche  $dx$  du barreau qui s'écrit en considérant que le flux de chaleur qui pénètre en  $x = x$ , est égal à ce qui ressort en  $x = x + dx$ , modifié par le flux de chaleur ayant pénétré par convection vers le fluide sur la surface  $S = Pdx$  de la section infinitésimale concernée du tube. On peut donc écrire (voir aussi la section suivante sur la thermique des ailettes) ce bilan sous forme différentielle :

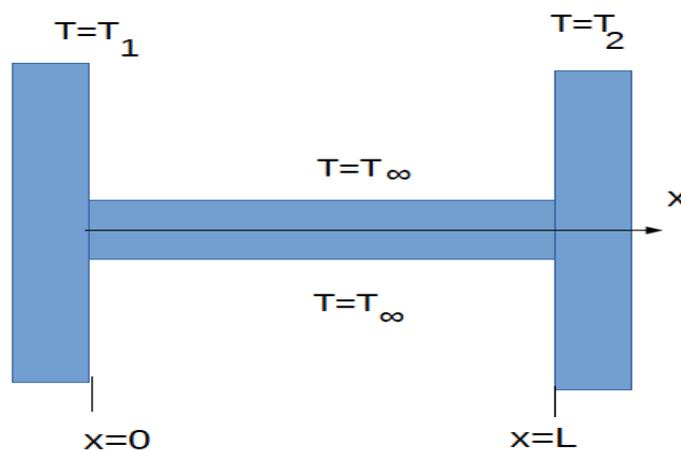


Figure 32 : Barreau cylindrique encastré entre deux murs, visus comme des thermostats de températures  $T_1$  et  $T_2$ . Un certain flux de chaleur est alors évacué par convection avec le fluide environnant.

$$-\lambda S \frac{dT(x)}{dx} = -\lambda S \frac{dT(x+dx)}{dx} + hPdx(T - T_\infty), \quad (3.44)$$

avec  $P$  : périmètre du tube, ce qui permet d'aboutir à l'équation différentielle générique pour ce type de problème qui est mise sous la forme suivante :

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{\lambda S}(T - T_\infty) = 0. \quad (3.45)$$

Soit en posant :  $\theta(x) = T(x) - T_\infty$  , et en notant :  $m^2 = hP / \lambda S$  , on obtient finalement l'expression classique :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0. \quad (3.46)$$

Cette équation différentielle du second ordre à coefficient constant, admet des solutions qui peuvent indifféremment s'écrire sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes :

$$\theta(x) = A \exp(+\beta x) + B \exp(-\beta x), \quad (3.47)$$

$$\theta(x) = A' \sinh(\beta x) + B' \cosh(\beta x). \quad (3.48)$$

Les constantes  $A, B, A', B'$ , sont alors déterminées par les conditions aux limites aux deux extrémités du barreau. Il s'agit d'un problème bien posé puisque a priori il y a deux inconnues pour deux conditions.

Exercices concernés par cette section : On peut citer les exercices 4.2.1 et 4.2.2 qui portent sur les transferts de chaleur dans un barreau simple, ou bien composite. Il s'agit de petits exercices du niveau B (moyen) ou bien C (avancé), qui restent accessibles.

### 3.9- Application à la thermique des ailettes (planes, cylindriques)

Une classe d'applications très importante concerne l'utilisation de surfaces auxiliaires ou ailettes. Ici l'on ne cherche pas à isoler thermiquement, mais l'objectif est au contraire d'augmenter le transfert de chaleur, le refroidissement de l'ailette (par exemple cas des radiateurs pour le chauffage central) étant assuré par un mécanisme convectif avec l'air environnant qui récupère le flux de chaleur cédé par les ailettes du radiateur. Il existe de très nombreuses configurations très différentes. On peut citer par exemple les cas suivants : ailettes pour le refroidissement des moteurs, pour les applications en informatique et en micro-électronique cf. Figure 33), échangeurs thermiques dans les centrales électriques, radiateurs pour tous les systèmes individuels ou collectifs de chauffage, etc. Les ailettes peuvent se présenter sous de multiples formes et géométries selon les applications visées. De même, elles peuvent être fixées à la surface mère de différentes manières, et être placées dans des milieux fluides de natures variables.

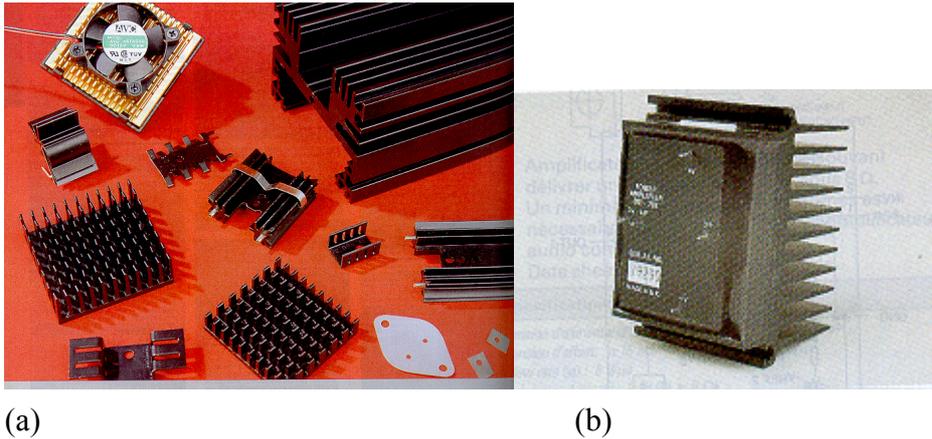


Figure 33 : Exemples de radiateurs utilisés en micro-électronique et en informatique pour le refroidissement de pièces sensibles soumises à des échauffements importants pendant le fonctionnement des appareils : (a) différentes formes et différentes tailles de radiateurs ; (b) radiateur d'un amplificateur de puissance (photos empruntées dans un catalogue de la société Bioblock).

Dans le cadre des rappels de cours présentés ici, nous nous limiterons à quelques configurations essentielles, dont la plus élémentaire reste celle de la géométrie plane. Pour le cas d'une ailette plane, les calculs sont à fait similaires à ceux de la section précédente pour la thermique d'un barreau conducteur encastré, à ceci près que la géométrie est différente, ainsi que les conditions aux limites pour l'extrémité libre, qui devront être discutées en grand détail. Il faut commencer par écrire l'équation de bilan thermique, voir la Figure 34 pour la géométrie et les notations retenues. Il existe un certain nombre d'hypothèses de base pour traiter ce problème. On suppose que le régime thermique est permanent. Par ailleurs, la longueur  $L$  de l'ailette est prise grande devant son épaisseur  $e$ . Au passage, cette hypothèse implique que la température est uniforme sur la section de l'ailette, et qu'elle n'est donc en conséquence qu'une fonction de la coordonnée spatiale  $x$  (cf. Figure 34). Cela signifie donc qu'une simple modélisation à une dimension (le long de l'axe  $Ox$ , c'est-à-dire suivant sa longueur) sera suffisante. Il existe d'autres hypothèses implicites ou pas qui sont listées ici :

- Ailette constituée d'un matériau homogène et isotrope.
- Conductivité  $\lambda$ , épaisseur  $e$  et section  $S = \ell e$  de l'ailette constante.
- Conductance thermique  $h$  du fluide ambiant ainsi que sa température  $T_\infty$  connues.
- Paroi mère où l'ailette est montée possédant une température de surface  $T_0$  constante.
- Absence de source de chaleur interne (dans l'ailette ou bien dans la paroi).
- Effets de bord et de contacts négligeables.

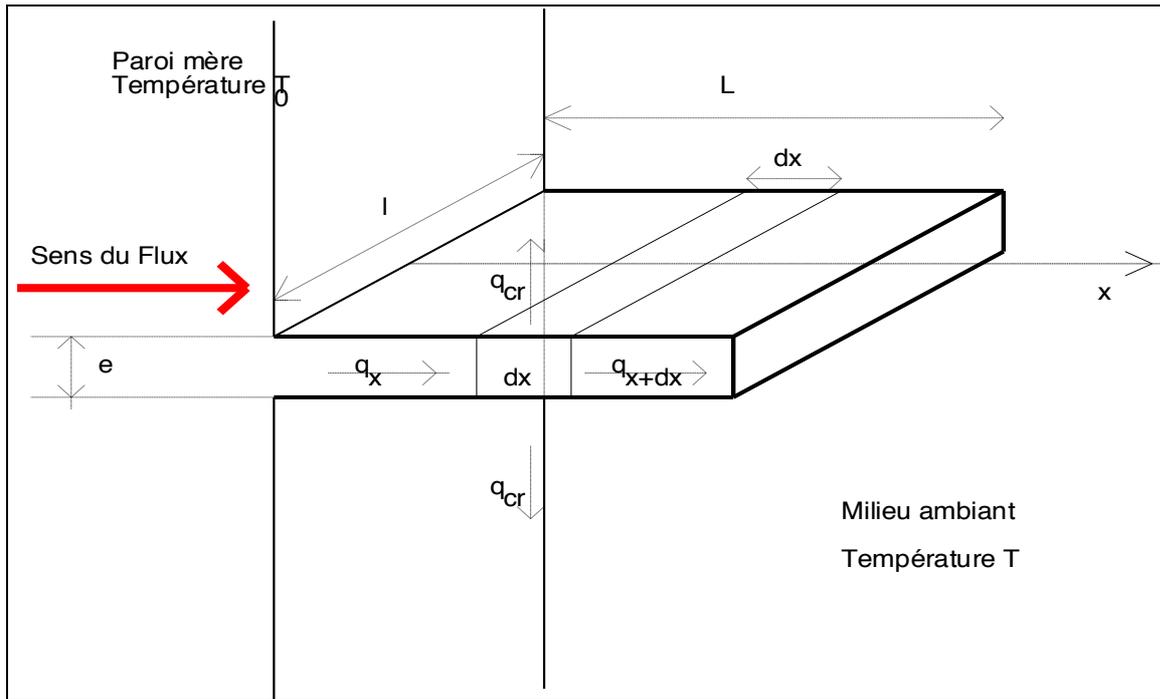


Figure 34 : Géométrie et notations pour l'ailette plane utilisée dans la modélisation.

Pour une tranche de l'ailette de longueur infinitésimale  $dx$ , prise le long de l'axe  $Ox$ , le bilan thermique s'écrit simplement en indiquant que le flux entrant en  $x = x$  est égal au flux sortant en  $x = x + dx$  auquel il faut ajouter le flux de chaleur perdu par convection (en évaluant correctement la surface d'échange en contact avec l'air environnant de la tranche d'épaisseur  $dx$ , soit ici  $Pdx$ , où  $P$  désigne le périmètre de l'ailette parallélépipédique). Au final, le bilan peut se mettre sous la forme suivante (à la fois sur les quantités de chaleur échangées, ou bien sur les flux thermiques associés) :  $q_x = q_{x+dx} + q_{convection} \Rightarrow \phi_x = \phi_{x+dx} + \phi_{convection}$ . Il faut alors faire appel à la loi de Fourier pour la conduction à l'intérieur de l'ailette, ainsi qu'à la loi de Newton pour la convection, ce qui permet d'écrire finalement :

$$-\lambda S \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x} = -\lambda S \frac{dT}{dx} \Big|_{x=x+dx} + hPdx(T - T_\infty). \quad (3.49)$$

Il ne reste plus qu'à utiliser le théorème des accroissements finis pour pouvoir écrire finalement :

$$-\lambda S \frac{dT}{dx} = -\lambda S \left( \frac{dT}{dx} + \frac{d^2T}{dx^2} dx \right) + hPdx(T - T_\infty) \Rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} - \frac{hP}{\lambda S} (T - T_\infty) = 0. \quad (3.50)$$

Soit avec le changement de variable :  $\theta(x) = T(x) - T_\infty$ , et en notant :  $\beta^2 = \frac{hP}{\lambda S} \approx \frac{2h}{\lambda e}$  :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - \beta^2\theta = 0. \quad (3.51)$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants, admettant une solution sous la forme, par exemple écrite ici :  $\theta(x) = A \exp(+\beta x) + B \exp(-\beta x)$ , cf. résultat de la section précédente. Il ne reste plus alors qu'à déterminer les coefficients  $A$  et  $B$ , en utilisant les conditions aux limites. Nous allons discuter plusieurs cas différents.

- Cas d'une ailette infinie (ou du moins très longue)

C'est le cas trivial pour lequel les résultats sont les plus simples. En effet, la condition limite à l'extrémité est simplement de noter que :  $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow T \rightarrow T_\infty$ . En outre, pour la base de l'ailette,  $\theta \rightarrow \theta_0 \Rightarrow T \rightarrow T_0$ . Dès lors,  $A=0$ , et  $B = \theta_0$ . Dans ce cas, il ne reste plus qu'un seul terme de la solution, et la répartition des températures le long de l'ailette est une simple exponentielle décroissante le long de son axe  $Ox$ , qui s'écrit finalement :

$$\theta(x) = \theta_0 \exp(-\beta x) \Rightarrow T(x) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \exp(-\beta x). \quad (3.52)$$

Dans ce cas, le flux de chaleur échangé avec la paroi mère s'écrit :

$$\phi = -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \lambda S \beta \theta_0. \quad (3.53)$$

- Cas d'une ailette de longueur finie isolée thermiquement à son extrémité

Si l'on cherche à optimiser la forme de l'ailette, il faut rechercher l'obtention d'une configuration pour laquelle le flux de chaleur à son extrémité soit le plus faible possible, à la limite qu'il soit nul, ce qui indique alors que toute la chaleur a été évacuée sur le pourtour de l'ailette. C'est ce second cas limite que nous étudions maintenant. Pour ce faire, il est très utile d'écrire les solutions de l'équation (3.51), non plus à l'aide de fonctions exponentielles, mais à la place en utilisant les fonctions hyperboliques  $\sinh(\beta x)$  et  $\cosh(\beta x)$ , sous la forme :

$$\theta(x) = M \sinh(\beta x) + N \cosh(\beta x). \quad (3.54)$$

Ici encore, il faut déterminer les constantes  $M$  et  $N$ , en utilisant les conditions aux limites. Celle de la base de l'ailette (en  $x = 0$ ) reste inchangée :  $\theta \rightarrow \theta_0 \Rightarrow T \rightarrow T_0$ , soit  $N = \theta_0$ . Si l'ailette n'évacue aucune quantité de chaleur à son extrémité (en  $x = +L$ ), alors :

$$\phi = -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=+L} = 0, \text{ avec : } \frac{dT}{dx} = M \beta \cosh(\beta x) + \theta_0 \beta \sinh(\beta x), \quad (3.55)$$

d'où :

$$M \beta \cosh(\beta L) + \theta_0 \beta \sinh(\beta L) \Rightarrow M = -\theta_0 \tanh(\beta L). \quad (3.56)$$

Au final, il reste donc :

$$\theta(x) = \theta_0 \left\{ -\tanh(\beta L) \sinh(\beta x) + \cosh(\beta x) \right\} = \theta_0 \cosh(\beta(L-x)) / \cosh(\beta L). \quad (3.57)$$

Les profils de température réduits  $\theta(x)/\theta_0$  obtenus sont tracés sur la Figure 35, en fonction de la distance réduite  $x/L$  le long de l'ailette, suivant différentes valeurs du paramètre  $\beta L$ . Rappelons que  $\beta = \sqrt{\frac{2h}{\lambda \ell}}$ , cette grandeur est donc liée au coefficient de convection  $h$ , à la conductivité thermique  $\lambda$ , et à la largeur de l'ailette  $\ell$ .

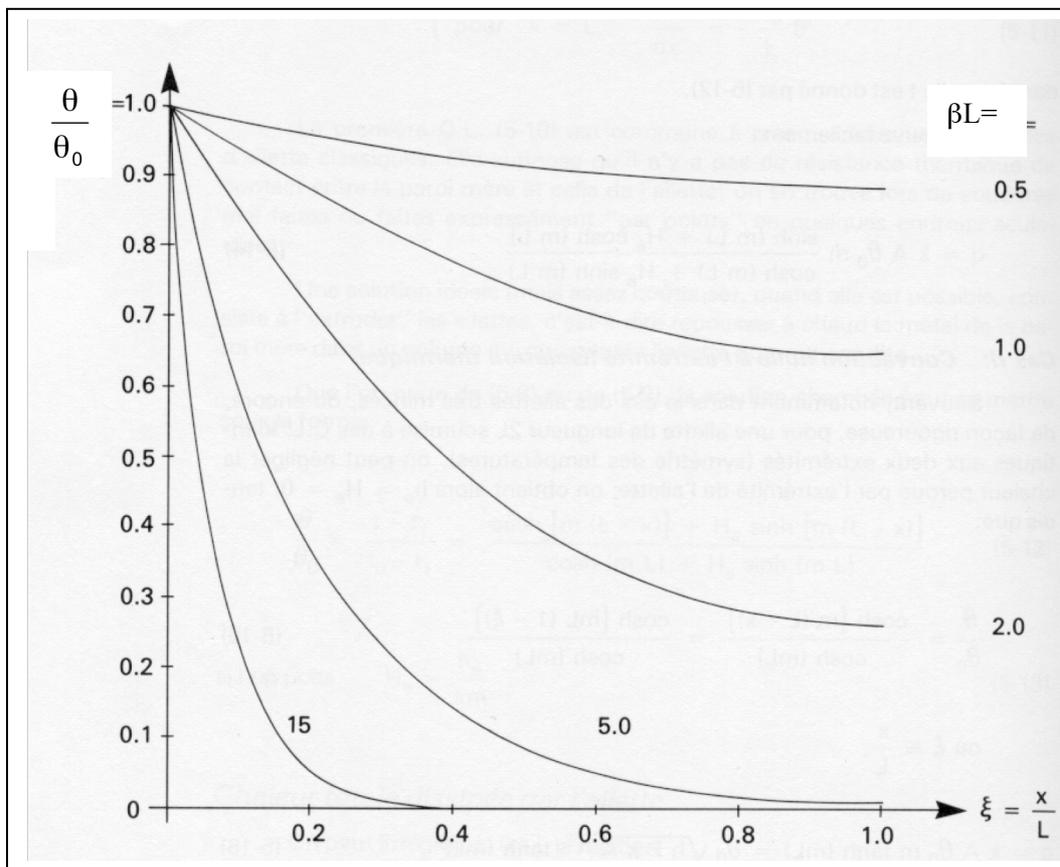


Figure 35 : Tracé des profils de température réduits  $\theta(x)/\theta_0$ , en fonction de la coordonnée réduite le long de l'ailette  $x/L$ , pour diverses valeurs du paramètre  $\beta L$ .

Ces résultats indiquent que le rapport  $\theta/\theta_0$  diminue rapidement lorsque le produit  $\beta L$  est grand, ce qui correspond à une ailette longue et large à la fois, présentant donc une grande surface d'échange. Dans le même temps, il est aussi favorable de disposer d'un matériau de faible conductivité thermique, et d'un coefficient de conductance élevée, ce qui renforce

d'autant l'évacuation de la chaleur. Il est ici aussi possible d'exprimer le flux évacué à la base de l'ailette. On obtient finalement :

$$\phi = -\lambda S \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \lambda S \beta \theta_0 \tanh(\beta L). \quad (3.58)$$

Les résultats obtenus, à la fois en termes de profils de température, ou bien pour le flux échangé avec la base de l'ailette, sont bien entendu compatibles avec ceux du cas limite d'une ailette très longue. Il suffit en effet de faire tendre la longueur de l'ailette vers l'infini pour les retrouver.

Dans le cas général, pour une ailette de longueur finie n'admettant pas d'être thermiquement isolée à son extrémité, les calculs et les résultats précédents peuvent se généraliser. On obtient finalement les résultats suivants :

$$\theta(x) = \theta_0 \left\{ \frac{\cosh(\beta(L-x)) + u \sinh(\beta(L-x))}{\cosh(\beta L) + u \sinh(\beta L)} \right\}, \quad (3.59)$$

$$\text{et } \phi = \lambda S \beta \theta_0 \left\{ \frac{\sinh(\beta L) + u \cosh(\beta L)}{\cosh(\beta L) + u \sinh(\beta L)} \right\}, \quad (3.60)$$

avec :  $u = \frac{h}{\lambda \beta} = \sqrt{\frac{he}{2\lambda}} = \sqrt{Biot}$ . Le fait de retrouver ici le nombre de Biot (pour un échangeur

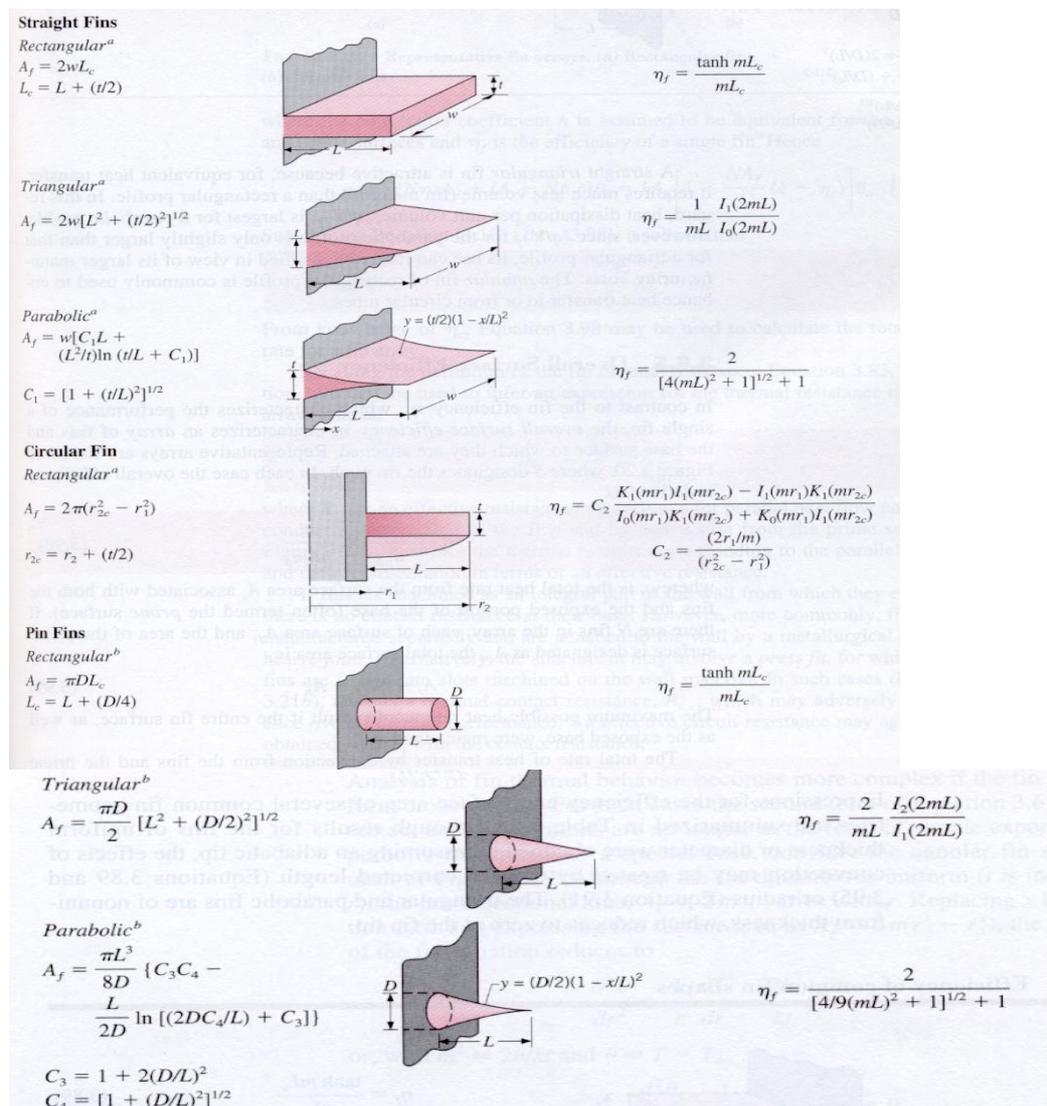
thermique d'épaisseur  $e$ ) n'a pas de quoi surprendre puisque les phénomènes étudiés sont en permanence reliés à l'équilibre des échanges thermiques entre conduction et convection, d'où la présence du nombre de Biot, ou alternativement de celle du nombre de Nusselt.

Il est possible aussi d'effectuer un dernier point sur l'efficacité  $\varphi$  d'une ailette. Par définition, il s'agit du quotient du flux de chaleur quittant la base de l'ailette par rapport au même flux en absence de l'ailette. Pour le cas de l'ailette isolée thermiquement à son extrémité, il faudrait écrire :

$$\varphi = \frac{\lambda S \beta \theta_0 \tanh(\beta L)}{h S' \theta_0} = \{ \tanh(\beta L) \} / \beta L. \quad (3.61)$$

Lorsque le produit  $\beta L$  est petit, alors le paramètre d'efficacité tend vers 1, puisque  $\tanh(\beta L) \approx \beta L$ , lorsque  $\beta L \rightarrow 0$ . Ce résultat est tout à fait normal puisque lorsque  $\beta L \rightarrow 0$ , la Figure 35 indique que  $\theta / \theta_0 \rightarrow 1$ , si bien que toute l'ailette se retrouve à la température  $T_0$  de la paroi mère (ou bien celle de la base de l'ailette).

Exercices concernés par cette section : On peut citer les exercices 4.2.3 et 4.2.4 qui portent respectivement sur les transferts de chaleur dans une ailette plane, ou bien dans une ailette cylindrique. Par rapport à la section précédente qui portait sur les transferts de chaleur dans un barreau maintenu entre deux murs jouant le rôle de thermostats, pour la théorie des ailettes, les conditions aux limites pour l'extrémité libre sont différentes, ce qui aboutit à des solutions spécifiques.



### 3.10- Autres exemples d'application pour des échanges thermiques

Il existe enfin trois exercices (ou problèmes), à savoir : 4.2.5, 4.2.6 et 4.2.12 qui ne rentrent finalement dans aucune section du cours. Il s'agit de configurations particulières relatives : à la manipulation d'objets dans un four à l'aide d'une tige, à la modélisation élémentaire d'un système de chauffage central, et au bilan thermique global – isolation d'une maison.

### Références bibliographiques en langue française :

- 1- Henri Poincaré, Théorie analytique de la propagation de la chaleur, 316 pages, Editions Jacques Gabay, Paris (2008), fac-similé de l'édition originale datant de 1895.
- 2- Anne-Marie Bianchi, Yves Fautrelle et Jacqueline Etay, Transferts thermiques, 550 pages, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Grenoble (2004).
- 3- Dominique Marchio et Paul Reboux, Introduction aux transferts thermiques, 210 pages, Presses des Mines – Transvalor (2008).
- 4- André Giovannini et Benoît Bédard, Transfert de chaleur, 504 pages, Editions Cépadués, Paris (2012).
- 5- Jean-Luc Battaglia, Andrzej Kusiak et Jean-Rodolphe Puiggali, Introduction aux transferts thermiques, 272 pages, Editions Dunod, Paris (2014).
- 6- Jean Taine, Franc Enguehard et Estelle Iacona, Transferts thermiques, 464 pages, Editions Dunod, Paris (2014).
- 7- Jean-François Sacadura, Transferts thermiques, 766 pages, Editions Tec et Doc – Lavoisier, Paris (2015).
- 8- Jean-Michel Bergheau et Roland Fortunier, Simulation numérique des transferts thermiques, 248 pages, Editions Hermès – Lavoisier, Paris (2004).
- 9- Bruno Chéron, Transferts thermiques, 310 pages, Editions Ellipses, Paris (1999).
- 10- José Quin, Transferts thermiques, 201 pages, Editions Casteilla, Paris (1998).

### Références bibliographiques en langue anglaise :

- 1- John H. Lienhard IV et John Lienhard V, A heat transfer textbook, 762 pages, Phlogiston Press (2003).
- 2- Chris Long et Naser Sagma, Heat Transfer, 312 pages, BookBoon Edition (2009).
- 3- Charles Robert Darling et Spon Chamberlain, Heat for engineers, 460 pages, BookBoon Edition (1912).
- 4- Convection and Conduction Heat Transfer, Amimul Ahsan, 394 pages, InTech Edition (2011).
- 5- Vyacheslay S. Vikhrenko, Heat Conduction : Basic Research, 350 pages, InTech Edition (2011).
- 6- Latif M. Jiji, Heat convection, 444 pages, Springer Verlag Edition (2009).
- 7- Adrian Bejan et Allan D. Kraus, 1481 pages, Heat Transfer Handbook, Wiley (2003).
- 8- Frank Kreith, Raj M. Manglik et Mark S. Bohan, Principles of Heat Transfer, 784 pages, Cengage Learning Edition (2011).
- 9- C.P. Kothandaraman, Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 729 pages, New Age International Publishers (2006).
- 10- Theodore L. Bergman, Adrienne S. Lavine, Frank P. Incropera et David P. Dewitt, Fundamentals of Heat and Mass transfer, 1076 pages, John Wiley and Sons (2011).

Table A1 : Propriétés de l'air à la pression atmosphérique

T (en K)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\lambda$ (W/m.K)	$\mu$ (kg/m.s) $\times 10^5$	$C_p$ (kJ/kg.K)	Pr
100	3,601	$9,24 \cdot 10^{-3}$	0,692	1,027	0,770
200	1,768	$1,81 \cdot 10^{-2}$	1,329	1,006	0,739
300	1,177	$2,62 \cdot 10^{-2}$	1,846	1,006	0,708
400	0,883	$3,37 \cdot 10^{-2}$	2,286	1,014	0,689
500	0,705	$4,04 \cdot 10^{-2}$	2,671	1,030	0,680
600	0,588	$4,66 \cdot 10^{-2}$	3,018	1,055	0,680
700	0,503	$5,23 \cdot 10^{-2}$	3,332	1,075	0,684
800	0,441	$5,78 \cdot 10^{-2}$	3,625	1,098	0,689
900	0,393	$6,28 \cdot 10^{-2}$	3,899	1,121	0,696
1000	0,352	$6,75 \cdot 10^{-2}$	4,152	1,142	0,702
1200	0,295	$7,82 \cdot 10^{-2}$	4,69	1,179	0,707
1400	0,252	$8,91 \cdot 10^{-2}$	5,17	1,214	0,705
1600	0,221	0,100	5,63	1,248	0,705
1800	0,197	0,111	6,07	1,287	0,704
2000	0,176	0,124	6,50	1,338	0,702
2200	0,160	0,139	6,93	1,419	0,707
2400	0,146	0,161	7,35	1,574	0,718

Table A2 : Propriétés de l'eau (liquide saturé)

T (en °C)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	$\lambda$ (W/m.K)	$\mu$ (kg/m.s) $\times 10^3$	$C_p$ (kJ/kg.K)	Pr
0	999,8	0,566	1,79	4,225	13,25
4,44	999,8	0,575	1,55	4,208	11,35
10	999,2	0,585	1,31	4,195	9,40
15,56	998,6	0,595	1,12	4,186	7,88
21,11	997,4	0,604	0,98	4,179	6,78
32,22	994,9	0,623	0,765	4,174	5,12
43,33	990,6	0,637	0,616	4,174	4,04
54,44	985,7	0,649	0,513	4,179	3,30
65,55	980,3	0,659	0,43	4,183	2,73
76,67	973,7	0,668	0,372	4,191	2,33
87,78	966,7	0,675	0,327	4,199	2,03
104,4	955,1	0,684	0,267	4,216	1,66
126,7	937,2	0,685	0,219	4,250	1,36
148,9	918,0	0,684	0,186	4,296	1,17
204,4	859,4	0,665	0,136	4,467	1,00
232,2	825,7	0,646	0,120	4,585	0,85
260	785,2	0,616	0,107	4,731	0,718

Table A3 : Propriétés des métaux (à température ambiante, 20°C)

Métal	T <sub>f</sub> (°C)	ρ (kg/m <sup>3</sup> )	λ (W/m.K)	C <sub>p</sub> (kJ/kg.K)	α x 10 <sup>6</sup> (K <sup>-1</sup> )
Aluminium	660	2700	238	917	23,5
Antimoine	631	6680	23,8	209	9
Argent	962	10500	425	234	19,1
Chrome	1860	7100	91,3	461	6,5
Cuivre	1085	8960	397	386	17
Etain	232	7300	73,2	456	15,2
Gallium	29,7	5910	41	377	18,3
Indium	156,6	7300	80	243	24,8
Magnésium	649	1740	155	1038	26
Manganèse	1244	7400	7,8	486	23
Mercure	-38,9	13546	8,65	138	61
Nickel	1455	8900	88,5	452	13,3
Or	1064	19300	315,5	130	14,1
Platine	1768	21450	73,4	134	9
Plomb	327	11680	34,9	130	29
Rhodium	1962	12400	148	243	8,5
Silicium	1412	2340	138,5	729	7,6
Titane	1667	4500	21,6	528	8,9
Zinc	419	7140	119,5	394	31

Table A4 : Propriétés de divers matériaux (isolants thermiques)

Matériau	Température (°C)	ρ (kg/m <sup>3</sup> )	λ (W/m.K)	C <sub>p</sub> (kJ/kg.K)	α (K <sup>-1</sup> )
Brique standard	20	1600	0,69	0,84	5,2
Brique chromée	200	3000	2,32	0,84	9,2
Brique cheminée	500	2000	1,04	0,96	5,4
Brique réfractaire	500	2300	1,28	0,96	5,8
Brique spéciale	200	2600	1,00	0,96	5,4
Pierre pour béton	20	1900 à 2300	1,37	0,88	6,8 à 8,2
Béton plein	20	2300	1,75	0,96	7
Glace à vitre	20	2700	0,78	0,84	3,4
Plâtre, gypse	20	1440	0,48	0,84	4,0
Granit	100 à 300	2640	1,73 à 3,98	0,82	8 à 18
Calcaire	100 à 300	2500	1,26 à 1,33	0,90	5,6 à 5,9
Marbre	100 à 300	2500 à 2700	2,07 à 2,94	0,80	61
Grès	40	2160 à 2300	1,83	0,71	11,2 à 12
Sapin	23	420	0,11	2,72	0,96
Chêne	30	540	0,166	2,4	1,28
Pin maritime	23	640	0,147	2,8	0,82
Liège	80	40 à 150	0,04 à 0,06	2,01	0,2 à 0,3
Terre sèche	20	2000	0,14	0,837	2 à 4
Laine de roche	20	140 à 240	0,04 à 0,065	0,84	0,2 à 0,3
Laine de verre	20	60 à 65	0,035 à 0,07	0,84	0,22

Table A5 : Relations fonctionnelles avec le nombre de Nusselt (convection forcée)

Configuration (géométrie, écoulement)	Relation fonctionnelle	Restriction ou commentaire
Plaque, laminaire	$Nu = 0,332 Re^{1/2} Pr^{1/3}$	$Re < 5 \cdot 10^5$ ; $Pr < 50$
Plaque, laminaire	$Nu = 0,564 Re^{1/3} Pr^{1/3}$	$Re < 5 \cdot 10^5$ ; $Pr \ll 1$
Plaque, laminaire	$Nu = 0,339 Re^{1/2} Pr^{1/3}$	$Re < 5 \cdot 10^5$ ; $Pr > 100$
Plaque, turbulent	$Nu = (0,037 Re^{4/5} - 871) Pr^{1/3}$	$Re < 10^7$
Tube, turbulent	$Nu = 0,023 Re^{4/5} Pr^{2/5}$	Chauffage du tube
Tube, turbulent	$Nu = 0,023 Re^{4/5} Pr^{1/3}$	Refroidissement du tube

Table A6 : Relations fonctionnelles avec le nombre de Nusselt (convection libre)

Configuration (géométrie, écoulement)	Relation fonctionnelle	Restriction ou commentaire
Plaque ou cylindre, vertical	$Nu = 1,36 Gr^{1/5} Pr^{1/5}$	$Gr \cdot Pr < 10^4$
Plaque ou cylindre, vertical	$Nu = 0,59 Gr^{1/4} Pr^{1/4}$	$10^4 < Gr \cdot Pr < 10^9$
Plaque ou cylindre, vertical	$Nu = 0,13 Gr^{1/3} Pr^{1/3}$	$Gr \cdot Pr > 10^9$
Cylindre, horizontal	$Nu = 1,09 Gr^{1/5} Pr^{1/5}$	$1 < Gr \cdot Pr < 10^4$
Cylindre, horizontal	$Nu = 0,53 Gr^{1/4} Pr^{1/4}$	$10^4 < Gr \cdot Pr < 10^9$
Cylindre, horizontal	$Nu = 0,13 Gr^{1/3} Pr^{1/3}$	$Gr \cdot Pr > 10^9$

Partie B : Liste exhaustive des exercices et des problèmes traités dans l'ouvrage  
« Thermique de l'ingénieur », avec rappels de cours

1- Introduction sur les échanges thermiques

2- Transferts thermiques par conduction

2.1- Rappels de cours

2.2- Exercices avec éléments de solution : Partie 1 – Solutions élémentaires ..... 82

2.2.1- Transferts de chaleur dans une plaque isolante (A) ..... 87

2.2.2- Isolation thermique d'un mur en briques (A) ..... 87

2.2.3- Isolation thermique des parois d'un four (A) ..... 88

2.2.4- Bilan thermique pour une plaque uniformément chauffée (A) ..... 88

2.2.5- Isolation thermique d'un mur simple (A) ..... 89

2.2.6- Transferts de chaleur dans une plaque de cuivre (A) ..... 89

2.2.7- Transferts de chaleur dans un mur avec tirants d'acier (A) ..... 90

2.2.8- Isolation thermique d'une fenêtre avec simple ou double vitrage (B) ..... 90

2.2.9- Thermique d'une tuyère de turboréacteur (A) ..... 92

2.2.10- Calorifugeage d'une canalisation (B) ..... 93

2.2.11- Transferts de chaleur pour le béton d'un petit barrage (A) ..... 94

2.2.12- Transferts de chaleur dans une ligne à haute tension (B) ..... 95

2.2.13- Etude thermique d'un thermomètre à résistance métallique (A) ..... 96

2.2.14- Transferts de chaleur dans un mur double (B) ..... 97

2.3- Exercices avec éléments de solution : Partie 2 – Etude d'autres cas ..... 100

2.3.1- Etude thermique d'un fer à repasser (B) ..... 109

2.3.2- Etude thermique d'un four ayant une conductivité variable (B) ..... 110

2.3.3- Conduction de la chaleur dans une plaque rectangulaire (B) ..... 111

2.3.4- Conduction de la chaleur dans un tube avec une source de chaleur (B) ..... 113

2.3.5- Réciprocité des échanges thermiques dans un mur double (B) ..... 114

2.3.6- Calorifugeage d'une conduite avec deux isolants thermiques (B) ..... 115

2.3.7- Optimisation thermique d'un élément bicouche sphérique (B) ..... 117

2.3.8- Conduction de la chaleur en régime dépendant du temps (B) ..... 118

2.3.9- Transferts de chaleur d'un mur en béton au cours d'un incendie (B) ..... 120

2.3.10- Choc thermique périodique – Notion de pseudo-onde thermique (B) ..... 122

3- Transferts thermiques par convection (libre ou forcée)

3.1- Rappels de cours

3.2- Exercices avec éléments de solution ..... 124

3.2.1- Quelques questions à propos du nombre de Prandtl (A) .....	132
3.2.2- Quelques questions sur le nombre de Nusselt (A) .....	133
3.2.3- Nombres caractéristiques en convection forcée (A) .....	133
3.2.4- Convection libre et forcée pour une lampe ordinaire (B) .....	134
3.2.5- Convection forcée d'une conduite chauffée en surface (B) .....	135
3.2.6- Champ de température d'une sphère immergée dans un fluide (B) .....	136
3.2.7- Evolution de la température d'une bille immergée dans un fluide (B) .....	138
3.2.8- Champs de vitesse et de température en convection forcée (C) .....	139
3.2.9- Convection forcée dans une conduite - Distribution radiale du champ de température pour le fluide en écoulement (C) .....	142
 4- Transferts thermiques mixtes (conduction et convection)	
4.1- Rappels de cours (mise en perspective)	
4.2- Exercices avec éléments de solution .....	145
4.2.1- Transferts de chaleur dans un barreau encastré entre deux murs (C) .....	152
4.2.2- Transferts de chaleur dans un barreau composite (B) .....	153
4.2.3- Transferts de chaleur dans une ailette plane (B) .....	155
4.2.4- Transferts de chaleur dans une ailette cylindrique (B) .....	156
4.2.5- Manipulation d'objets dans un four à l'aide d'une tige (B) .....	157
4.2.6- Modélisation élémentaire d'un système de chauffage central et optimisation de la position du radiateur par rapport à la fenêtre (C) .....	158
4.2.7- Echanges thermiques dans un réacteur chimique sphérique (C) .....	160
4.2.8- Calcul de la durée de vie d'un marin tombé à l'eau à 10 °C sans protection, ou bien d'un homme enfermé dans un frigo (C) .....	162
4.2.9- Calcul de la durée de congélation (réfrigérateur usuel) et de surgélation (installation industrielle) pour des fruits (C) .....	170
4.2.10- Plasturgie pour pièces de géométrie cylindrique ou sphérique (C) .....	173
4.2.11- Thermodynamique du moulage et effets thermiques associés (C) .....	175
4.2.12- Bilan thermique global et isolation d'une maison (C) .....	178
4.2.13- Refroidissement d'un fil ou d'une bille d'acier plongée dans l'air (C) .....	180

*Il y a trois sortes d'exercices, qui sont notés avec les lettres (A), (B) ou (C). Les exercices de la catégorie (A) correspondent à des applications directes du cours, et en général ils sont brefs. Ceux du niveau (B) sont déjà plus consistants, correspondant à des configurations spécifiques ou bien à des développements prenant plus de temps pour les traiter. Enfin, la catégorie (C) est relative à de véritables petits problèmes, nécessitant davantage d'efforts pour les résoudre complètement.*