

Université du Maine
UFR Sciences

Master IMA 1^{ère} année
(Ingénierie Mécanique et Acoustique)

Transferts de chaleur

B. CASTAGNEDE

Transferts de chaleur

- 1- Introduction aux transferts de chaleur p.
- 2- Transfert de chaleur par conduction p.
 - 2.1- Equations fondamentales p.
 - 2.2- Solutions élémentaires de l'équation de Fourier en régime permanent p.
 - 2.3- Conduction en régime permanent avec source interne de chaleur p.
 - 2.4- Solution fondamentale de l'équation de la chaleur à 2 dimensions en régime permanent p.
 - 2.5- Conduction de la chaleur en régime variable p.
- 3- Transfert thermique par convection p.
 - 3.1- Introduction sur la convection p.
 - 3.2- Equations fondamentales de la convection en régime forcé p.
 - 3.3- Analyse par la loi de similitude p.
 - 3.4- Etude de la couche limite p.
 - 3.5- Cas de la convection libre p.
- 4- Transfert de chaleur par rayonnement p.
 - 4.1- Généralités sur le rayonnement p.
 - 4.2- Lois du rayonnement thermique p.
 - 4.3- Exemples d'échanges de chaleur radiatifs p.
 - 4.4- Transferts de chaleur mixtes p.

Transferts de Chaleur

1. Introduction aux transferts de chaleur

Le contenu du présent cours de thermique principalement consacré aux transferts de chaleur, est différent de celui de thermodynamique appliquée. On peut s'interroger sur le pourquoi de cette différence: En quoi la thermodynamique phénoménologique est-elle incapable d'englober les transferts de chaleur? A cela il existe plusieurs raisons: i) La thermodynamique macroscopique évalue le bilan des échanges de chaleur et de travail (1er principe), et détermine le sens possible de déroulement de ces échanges (2ème principe). En aucune manière, les mécanismes responsables de ces échanges sont analysés en détail. ii) L'objet principal de la thermodynamique est l'étude des échanges de chaleur et de travail s'opérant autour de l'équilibre (au sens mécanique et thermique du terme). Or les transferts de chaleur se déroulent systématiquement en dehors de l'équilibre. iii) En thermodynamique classique, la variable temps n'intervient pas. Par contre, dans l'étude des phénomènes de transfert, le temps est fondamental. On cherchera à calculer l'évolution d'un champ de température, par exemple $T(x, t)$ en fonction d'une (ou de plusieurs) coordonnées spatiales x , mais aussi en fonction du temps. Il existe toutefois un cas limite, le régime établi ou régime permanent, pour lequel le temps n'intervient pas ($\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$). On conçoit finalement que les transferts thermiques et la thermodynamique sont deux parties distinctes, mais néanmoins complémentaires, de l'étude des propriétés thermiques de la matière et des systèmes thermodynamiques.

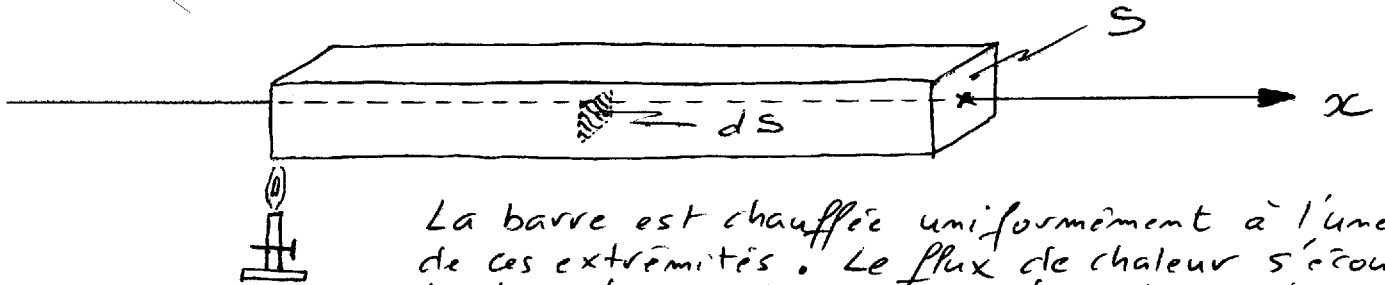
L'étude des mécanismes de transmission de la chaleur n'est pas particulièrement aisée. En effet, il existe plusieurs phénomènes de transfert de la chaleur, à savoir la conduction (principalement dans les solides, dont elle est le mécanisme unique), la convection (dans tous les fluides), et le rayonnement. La convection n'est pas uniquement un mécanisme de transfert de chaleur, puisqu'il se surajoute un transport de masse. Toutefois, de part l'universalité des phénomènes de convection (libre ou forcée) et des applications industrielles, la convection est généralement traitée juste après la conduction. La convection est un phénomène physique plus compliqué que la conduction, car le transfert de chaleur y est intimement lié dans ce cas à la mécanique du fluide en mouvement. En fait la conduction au sens strict ne s'applique qu'aux solides, alors que pour un fluide quelconque, la convection existe pratiquement toujours et se surajoute à la conduction.

Ce dernier point nous fait entrevoir que dans de nombreux cas concrets, nous aurons à faire à des mécanismes mixtes de transferts de chaleur (et de masse), à savoir conduction / convection conduction / rayonnement, convection / rayonnement, ou bien encore la coexistence des 3 mécanismes. Un système de chauffage central par exemple, met en œuvre la convection et la conduction, convection forcée de l'eau dans le radiateur, puis conduction de la chaleur de l'intérieur vers l'extérieur à travers la paroi du radiateur, puis enfin convection libre, en ce qui concerne l'écoulement au sein des cellules de convection de l'air chauffé dans la pièce. Un radiateur électrique met quant à lui en œuvre les 3 mécanismes de transfert, rayonnement thermique dû à la résistance électrique, conduction de la chaleur dans l'armature de l'appareil, et convection libre pour l'échauffement de l'air environnant. Ces mécanismes de transferts mixtes sont bien entendu plus compliqués à étudier que les phénomènes individuels. De tels exemples sont fournis dans les sections 2.5, 3.3 et 4.4. En général, en première approximation, il est possible de négliger l'influence de tel mécanisme par rapport à tel autre en isolant une partie du système. EX: Rayonnement uniquement pour résistance électrique du système de chauffage, convection forcée principalement de l'eau à l'intérieur du radiateur (de chauffage central). Par contre, il existe certains cas où cette partition n'est plus possible. Citons par exemple le cas d'une chambre à combustion ou d'une tuyère de fusée intercontinentale. Dans ces cas, la complexité de la modélisation des échanges thermiques sera à la mesure du niveau de la très haute technologie mise en œuvre.

2. Transfert de chaleur par conduction

2.1- Equations fondamentales

On considère la géométrie élémentaire à 1D constituée d'une barre de longueur très grande le long de l'axe ox , de section S (cf. Figure ci-dessous).



La barre est chauffée uniformément à l'une de ces extrémités. Le flux de chaleur s'écoulant à travers la surface élémentaire dS est proportionnel à la surface elle-même, au gradient de température le long de ox , et peut s'écrire :

$$dq = -\lambda dS \frac{\partial T}{\partial x}$$

Dans cette expression, λ est la conductivité thermique du matériau et s'exprime en $W/m \cdot ^\circ C$. Cette relation est connue sous le nom de loi de Fourier.

Considérons maintenant le problème plus général à 3 dimensions, et isolons par la pensée un volume élémentaire $dV = dx dy dz$, qui reçoit des flux de chaleur servant à élever sa température. Evaluons les flux entrants en $x = x$, $y = y$, $z = z$, et les flux sortants en $x = x + dx$, $y = y + dy$ et $z = z + dz$.

$$dq_x^e = -\lambda dy dz \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$dq_{x+dx}^s = -\lambda dy dz \frac{\partial}{\partial x} \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right)$$

$$= -\lambda dy dz \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda dy dz \frac{dT}{dx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx$$

$$\Rightarrow dq_{x+dx}^s = dq_x^e - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx dy dz$$

$$\text{De même } dq_{y+dy}^s = dq_y^e - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx dy dz$$

$$\text{et } dq_{z+dz}^s = dq_z^e - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dx dy dz$$

Le 1er principe de la thermodynamique indique que pour ce problème, il doit y avoir conservation de la chaleur pour le volume élémentaire dV .

$$dQ^e = dQ^s + dQ^i \Rightarrow dQ^e - dQ^s = dQ^i$$

où dQ^i représente la quantité de chaleur ayant servi à élever la température du volume élémentaire dV , à savoir :

$$dQ^i = C dm dT = \rho C dx dy dz dT$$

De plus $dQ^e = dQ_x^e + dQ_y^e + dQ_z^e$

or $dQ_x^e = dq_{ox}^e dt$, etc

Soit au total après avoir terminé tous les calculs :

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Equation de Fourier 3D, isotrope sans terme source

Cette équation peut prendre diverses autres formes :

* Solide anisotrope : La conductivité thermique est fonction de la direction

$$\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

* Equation de Fourier avec terme source :

$$Q_s + \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

* Autre forme de l'équation de Fourier sans terme source

$$\chi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

avec $\chi = \frac{\lambda}{\rho C}$: diffusivité thermique

* Si l'on étudie le régime permanent ($\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$), on obtient tout simplement l'équation de Laplace :

$$\Delta T = 0 \quad \text{avec } \Delta T : \text{ Laplacien scalaire de } T$$

Note : Pour fixer les idées au niveau des paramètres thermiques usuels à savoir, chaleur spécifique C , conductivité thermique λ (parfois notée R ou K), et de la diffusivité thermique χ (souvent notée avec la lettre grecque Kappa κ), la Table ci-contre fournit les valeurs pour divers matériaux \times .

Ces valeurs sont exprimées avec des cal ou des kcal. Pour passer dans le système International il suffit d'opérer les multiplications :

- | | |
|----------------------------|---|
| 1) $C \times 4,18$ | EX : $C_{eau} = 4,18 \text{ J/g} \cdot ^\circ\text{C}$ |
| 2) $K \times 4,18$ | EX : $K_{eau} = 0,602 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$ |
| 3) $\kappa \times 10^{-4}$ | EX : $\kappa_{eau} = 0,144 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ |

APPENDIX VI

Thermal Properties of some Common Substances

THIS table is intended only to indicate the orders of magnitude likely to occur in practice; for fuller information, and for the variation of the thermal properties with temperature, the International Critical Tables, or other standard works giving physical constants, may be consulted. The values for non-metals are to be regarded as rough average values only, as there may be large differences between the thermal conductivities of different samples of the same substance. The units are c.g.s., calorie, and °C.

<i>Substance</i>	<i>Density</i> ρ	<i>Specific heat</i> c	<i>Conductivity</i> K	<i>Diffusivity</i> κ
Silver	10.49	0.0556	1.00	1.71
Gold	19.30	0.0308	0.70	1.18
Copper	8.94	0.0914	0.93	1.14
Magnesium	1.74	0.240	0.38	0.91
Aluminium	2.70	0.206	0.48	0.86
Zinc	7.14	0.0917	0.27	0.41
Tin	7.30	0.0534	0.15	0.38
Brass (70:30)	8.5	0.09	0.25	0.33
Platinum	21.46	0.0315	0.17	0.25
Lead	11.34	0.0302	0.084	0.25
Mild steel (0.1% C)	7.85	0.118	0.11	0.12
Cast iron	7.4	0.136	0.12	0.12
Bismuth	9.80	0.0292	0.020	0.070
Mercury	13.55	0.0335	0.020	0.044
<i>Non-metals</i>				
Air	0.00129	0.240	0.000058	0.187
Granite	2.6	0.21	0.006	0.011
Limestone	2.5	0.22	0.004	0.007
Sandstone	2.3	0.23	0.006	0.011
Average rock†	0.0042	0.0118
Ice	0.92	0.502	0.0053	0.0115
Glass (crown)	2.4	0.20	0.0028	0.0058
Concrete (1:2:4)	2.3	0.23	0.0022	0.0042
Brick (building)	2.6	0.20	0.0020	0.0038
Snow (fresh)	0.1	0.5	0.00025	0.0050
Soil (average)	2.5	0.2	0.0023	0.0046
Soil (sandy, dry)	1.65	0.19	0.00063	0.0020
Soil (sandy, 8% moist)	1.75	0.24	0.0014	0.0033
Wood (spruce, with grain)	0.41	0.30	0.00055	0.0045
Wood (spruce, across grain)	0.41	0.30	0.00030	0.0024
Water	1.0	1.0	0.00144	0.00144
Ground cork	0.15	0.48	0.0001	0.0014

† Kelvin, cf. § 2.14.

2.2 - Solutions élémentaires de l'équation de Fourier en régime permanent

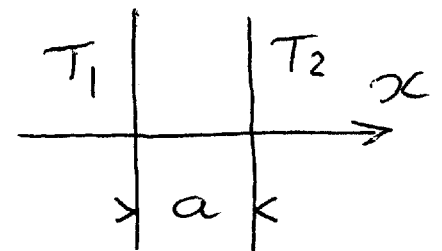
* Cas du mur

Problème à 1D $\Rightarrow T = T(x)$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow T = Ax + B$$

Conditions aux limites : $x=0 \Rightarrow T=T_1 \Rightarrow B=T_1$
 $x=a \Rightarrow T=T_2 \Rightarrow T_2 = Aa + B$

$$T = \frac{T_2 - T_1}{a} x + T_1$$



- Flux thermique à travers la surface S :

$$dq = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{a} dS \Rightarrow q = \lambda \frac{T_1 - T_2}{a} S$$

- Quantité de chaleur transmise à travers le mur :

$$dQ = q dt \Rightarrow Q = q t = \lambda \frac{T_1 - T_2}{a} S t$$

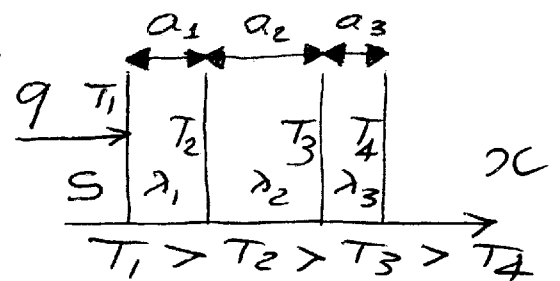
- Conductivité thermique moyenne du mur :

$$\lambda = \frac{qa}{(T_1 - T_2)S} \quad \text{en W/m} \cdot ^\circ\text{C}$$

* Murs composés

- Murs accolés par l'épaisseur

Flux thermique q est constant à travers chaque mur.



$$\Rightarrow q = \lambda_1 S \frac{T_1 - T_2}{a_1} = \lambda_2 S \frac{T_2 - T_3}{a_2} = \lambda_3 S \frac{T_3 - T_4}{a_3}$$

soit en posant : $R_1 = a_1 / \lambda_1 S$; $R_2 = a_2 / \lambda_2 S$; $R_3 = a_3 / \lambda_3 S$

$$\Rightarrow q = (T_1 - T_2) / R_1 = (T_2 - T_3) / R_2 = (T_3 - T_4) / R_3$$

$$= (T_1 - T_4) / R \quad , \quad \text{avec } R = R_1 + R_2 + R_3$$

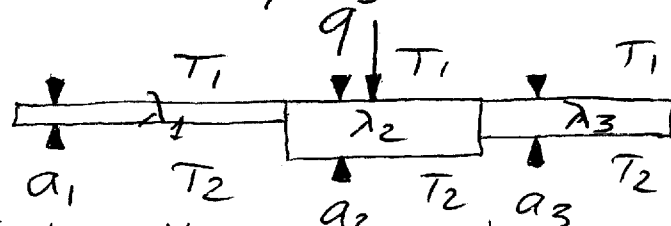
- Murs accolés par le côté

R : Résistance thermique globale

$$q = (T_1 - T_2) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$

$$\text{avec } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

R : Résistance thermique globale



Note : Analogie avec les résistances des circuits électriques

Mur composé épaisseur \leftrightarrow circuit série

Mur composé côté \leftrightarrow circuit parallèle

* Sphère creuse

$$q = \int_S -\lambda \frac{dT}{dr} dS$$

$$= -\lambda \times 4\pi r^2 \frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow q \frac{dr}{r^2} = -4\pi\lambda dT$$

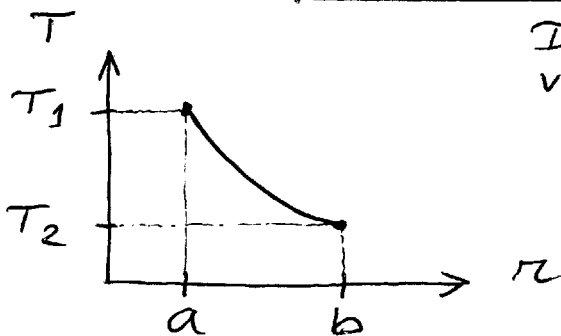
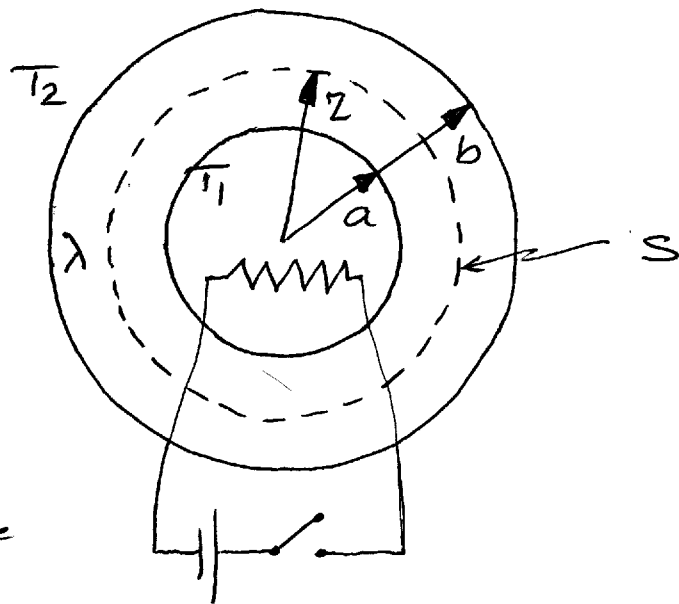
$$\Rightarrow q \left[-\frac{1}{r} \right]_a^b = -4\pi\lambda (T_2 - T_1)$$

$$\Rightarrow q = \frac{4\pi ab}{b-a} (T_1 - T_2)$$

Pour calculer $T(r)$, on intègre de a à r :

$$\Rightarrow q \left[-\frac{1}{r} \right]_a^r = -4\pi\lambda (T - T_1) \Rightarrow T = T_1 + \frac{q}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

$$T = T_1 + \frac{b(a-r)}{r(b-a)} (T_1 - T_2)$$



De la formule ci-dessus, on peut vérifier les conditions aux limites :

$$r = a \Rightarrow T = T_1 \quad \text{CQFD}$$

$$r = b \Rightarrow T = T_2$$

* Cylindre creux (longueur $l \gg b$)

Le calcul est tout à fait similaire :

$$q = -\lambda \times 2\pi r l \frac{dT}{dr}$$

expression valide lorsque l'on est suffisamment éloigné des extrémités du cylindre

$$\Rightarrow q \frac{dr}{r} = -2\pi l \lambda dT \Rightarrow q \ln \frac{b}{a} = 2\pi l \lambda (T_1 - T_2)$$

$$dT = -\frac{q}{2\pi l \lambda} \frac{dr}{r} \Rightarrow T - T_1 = -\frac{q}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r}{a}$$

$$T = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{\ln \frac{r}{a}}{\ln \frac{b}{a}}$$

expression vérifiant les conditions aux limites

$$\begin{cases} r = a \Rightarrow T = T_1 \\ r = b \Rightarrow T = T_2 \end{cases}$$

2.3- Conduction en régime permanent avec source interne de chaleur

L'équation de Fourier prend dans ce cas la forme:

$$Q_s + \lambda \Delta T = 0$$

* Cas d'une paroi plane

$$\Delta T \approx \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow Q_s + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow Q_s \frac{x^2}{2} + \lambda T = Ax + B$$

C.L. $x=0 \Rightarrow T=T_0 \Rightarrow B = \lambda T_0$

$x=e \Rightarrow T=T_0 \Rightarrow A = \frac{1}{e} (Q_s \frac{e^2}{2} + \lambda T_0 - \lambda T_0)$

$\Rightarrow A = \frac{Q_s e}{2}$

$$T = T_0 + \frac{Q_s}{2\lambda} x(e-x)$$

$T_{max} = T_0 + \frac{Q_s e^2}{8\lambda}$ pour $x = \frac{e}{2}$

Calcul de la température moyenne

$$T_{moy} = \frac{1}{e} \int_0^e T dx$$

$$= T_0 + \frac{1}{e} \int_0^e \frac{Q_s}{2\lambda} x(e-x) dx$$

$$= T_0 + \frac{Q_s}{2\lambda e} \left[\int_0^e ex dx - \int_0^e x^2 dx \right] = T_0 + \frac{Q_s}{2\lambda e} \left[\frac{ee^2}{2} - \frac{e^3}{3} \right]$$

$\Rightarrow T_{moy} = T_0 + \frac{Q_s e^2}{12\lambda}$

* Cas d'un cylindre plein

$$T = T(r) \Rightarrow \Delta T = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} + \frac{d^2 T}{dr^2}$$

partie du laplacien en coordonnées cylindriques
fonction uniquement de r

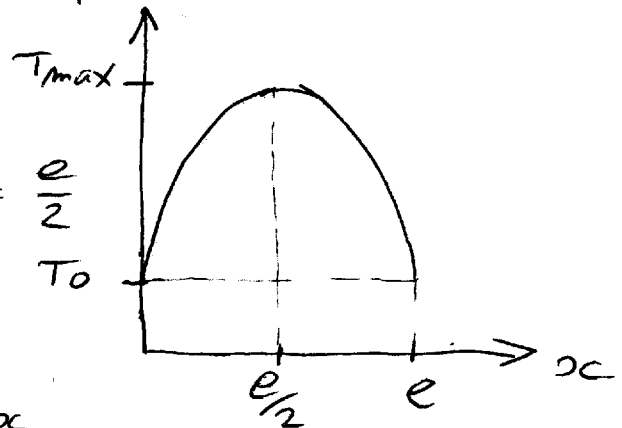
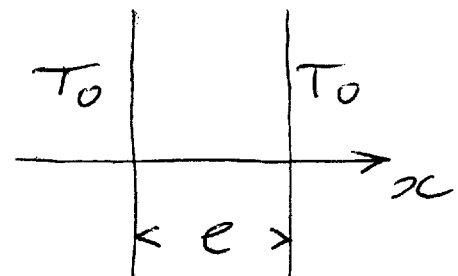
$\Rightarrow Q_s = -\lambda \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) \Rightarrow Q_s r = -\lambda \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right)$

$\Rightarrow Q_s \frac{r^2}{2} = -\lambda r \frac{dT}{dr} \Rightarrow dT = -\frac{Q_s}{2\lambda} r dr$

$\Rightarrow T = -\frac{Q_s r^2}{4\lambda} + A$

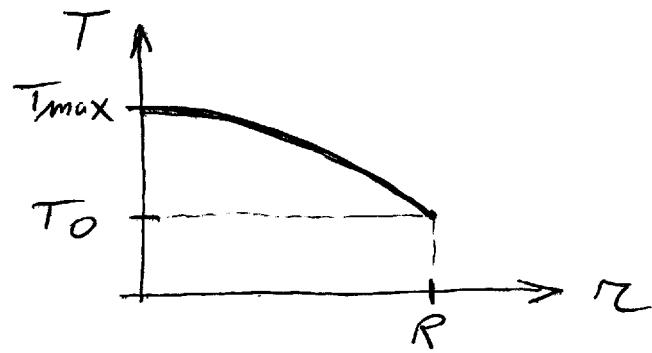
$r=R \Rightarrow T=T_0 \Rightarrow A = T_0 + \frac{Q_s R^2}{4\lambda}$

$\Rightarrow T = T_0 + \frac{Q_s}{4\lambda} (R^2 - r^2)$



$$T_{max} = A = T_0 + \frac{Q_s R^2}{4\lambda}$$

obtenu pour $r = 0$
(au centre du cylindre)



* Cas de la sphère pleine

Les calculs sont tout à fait similaires à ceux du cylindre plein.

$$T = T(r) \Rightarrow \Delta T = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right)$$

partie du laplacien en coordonnées sphériques
fonction uniquement de r

$$\Rightarrow Q_s = -\lambda \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) \Rightarrow Q_s r^2 = -\lambda \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right)$$

$$\Rightarrow Q_s \frac{r^3}{3} = -\lambda r^2 \frac{dT}{dr} \Rightarrow dT = -\frac{Q_s}{3\lambda} r dr$$

$$\Rightarrow T = -\frac{Q_s}{6\lambda} r^2 + A$$

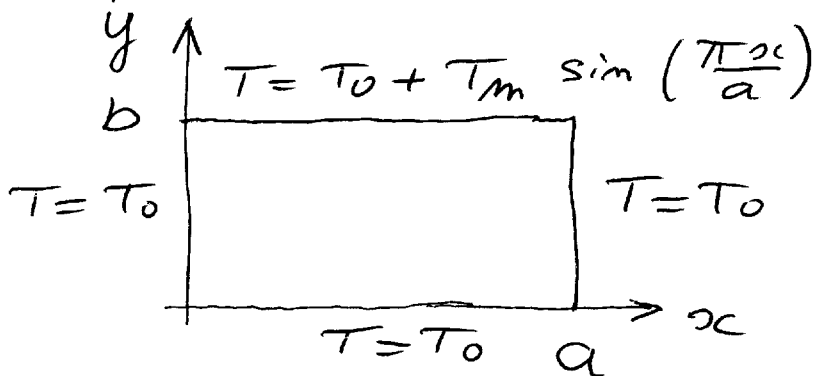
C.L: $r = R \Rightarrow T = T_0 \Rightarrow A = T_0 + \frac{Q_s R^2}{6\lambda}$

$$\Rightarrow \boxed{T = T_0 + \frac{Q_s}{6\lambda} (R^2 - r^2)}$$

$$T_{max} = A = T_0 + \frac{Q_s R^2}{6\lambda} \text{ obtenu pour } r = 0 \text{ (centre de la sphère)}$$

2.4 - Solution fondamentale de l'équation de la chaleur à 2 dimensions en régime permanent

On considère la géométrie élémentaire de la plaque rectangulaire



Pb en régime permanent
sans source

\Rightarrow équation de Laplace

$$\Delta T = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Changement de variable $\theta = T - T_0$ pour rendre les conditions aux limites homogènes.

Méthode de la séparation des variables:

$$\theta(x,y) = X(x)Y(y) \Rightarrow Y \frac{d^2X}{dx^2} + X \frac{d^2Y}{dy^2} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} = \text{cte} = \lambda^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \\ \frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2 Y = 0 \Rightarrow Y(y) = C e^{-\lambda y} + D e^{\lambda y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta(x,y) = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)(C e^{-\lambda y} + D e^{\lambda y})$$

Conditions aux limites sur le pourtour de la plaque:

$$\begin{aligned} \theta = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ (1)} ; \theta = 0 \text{ pour } x = a \text{ (3)} \\ \theta = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ (2)} ; \theta = T_m \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \text{ pour } y = b \text{ (4)} \end{aligned}$$

$$(1) \Rightarrow (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)(C + D) = 0 \quad \forall x \Rightarrow C = -D$$

$$(2) \Rightarrow A(C e^{-\lambda y} + D e^{\lambda y}) = 0 \quad \forall y \Rightarrow A = 0$$

$$(3) \Rightarrow (A \cos \lambda a + B \sin \lambda a)(C e^{-\lambda y} + D e^{\lambda y}) = 0$$

$$\Rightarrow B C \sin \lambda a (e^{-\lambda y} - e^{\lambda y}) = 2 B C \sin \lambda a \operatorname{sh} \lambda y = 0$$

$$\Rightarrow \sin \lambda a = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{a} \quad n = 1, 2, \dots$$

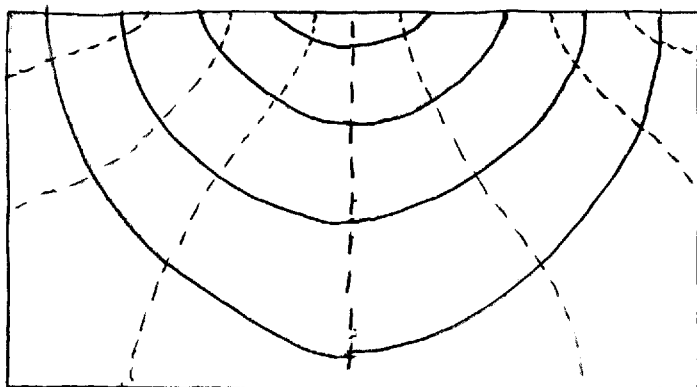
$$\Rightarrow \theta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a}$$

$$(4) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{a} \operatorname{sh} \frac{n\pi b}{a} = T_m \sin \frac{\pi x}{a}$$

Il existe un seul terme de la série pour $n=1$

$$\Rightarrow \theta(x,y) = T_m \frac{\operatorname{sh}(\pi y/a)}{\operatorname{sh}(\pi b/a)} \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$\Rightarrow T(x,y) = T_0 + T_m \frac{\operatorname{sh}(\pi y/a)}{\operatorname{sh}(\pi b/a)} \sin \frac{\pi x}{a}$$



— lignes isothermes
 - - - lignes de flux thermique
 (sont perpendiculaires aux isothermes)

Remarque 1: Dans le cas où la 4^{ème} condition aux limites serait arbitraire quelconque, $\Theta = F(x)$ pour $y = b$ la solution deviendrait:

$$T(x, y) = T_0 + \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\text{sh}(m\pi/a)y}{\text{sh}(m\pi b/a)} \sin \frac{m\pi}{a} x \int_0^a F(x) \sin \frac{m\pi}{a} x$$

Remarque 2: La généralisation de ces résultats au cas 3D ne pose pas en principe de problème insurmontable. Il faut partir de l'équation de Laplace 3D, à savoir:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad , \quad \text{avec les conditions aux limites appropriées.}$$

Remarque 3: Bien souvent pour des géométries ou des conditions aux limites compliquées, une solution analytique n'est pas disponible pour certains problèmes 2 ou 3D. Dans ces cas difficiles, on a recours soit à des méthodes graphiques (utilisation de diverses abaques - voir l'exemple présenté dans la section 2.5), numériques (méthode de relaxation, méthode des différences finies) ou encore aux méthodes dites analogiques. Ces dernières présentent un intérêt de principe et sont toujours fort élégantes. Le point de départ est de remarquer que dans certains cas l'équation de Fourier prend la forme d'équations de la physique mathématique applicable à d'autres phénomènes physiques. On dira alors que les 2 phénomènes sont mathématiquement analogues. Un exemple simple est justement l'équation de Laplace à 2 ou 3 dimensions, s'écrivant $\Delta T = 0$ pour le transfert de chaleur, et dont l'analogie électrique est $\Delta E = 0$, où E est le champ électrique. On pourra dès lors construire l'analogie formelle suivante:

<u>Type de champ de flux</u>	<u>Lignes de potentiel</u>	<u>Lignes de flux</u>
Chaleur	Isothermes	Lignes de flux de chaleur
Electricité	Tension électrique Constante	Lignes de flux électrique

On utilise cette analogie électricité / thermique, car les mesures expérimentales sont beaucoup plus aisées en électricité (mesures de tension électrique, d'intensité électrique) qu'en thermique. Les mesures de quantité de chaleur et de flux de chaleur sont très difficiles à réaliser en un grand nombre de points. De plus les conditions aux limites sont pour les mesures électriques faciles à reproduire par l'utilisation d'éléments conducteurs ou isolants sur les pourtours de la géométrie considérée. Divers systèmes pratiques avec des papiers conducteurs, des stylets enregistreur, etc furent mis au point dans les années 50/60. Aujourd'hui, depuis l'avènement des micro-ordinateurs et gros ordinateurs rapides et puissants, les méthodes numériques ont complètement supplantées les méthodes analogiques.

2.5- Conduction de la chaleur en régime variable

On suppose pour démarrer qu'il n'y a pas de source de chaleur (un exemple avec source est détaillé à la fin de la section).

$$\lambda \Delta T = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \Delta T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

avec $\alpha = \lambda / \rho c$: Diffusivité thermique

On se limite au cas à 1D : Exemple d'un mur soumis à un choc thermique.

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Méthode de séparation des variables $T(t, x) = \zeta(t) X(x)$

$$\Rightarrow \frac{X}{\alpha} \frac{d\zeta}{dt} = \zeta \frac{d^2 X}{dx^2} \Rightarrow \frac{1}{\zeta \alpha} \frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \text{cte} = \mu$$

$$\Rightarrow \frac{d\zeta}{dt} = \mu \zeta \Rightarrow \zeta(t) = C_1 e^{\alpha \mu t}$$

Il faut impérativement $\mu < 0$ pour éviter que l'exponentielle diverge lorsque $t \rightarrow +\infty \Rightarrow \mu = -k^2$

$$\Rightarrow \zeta(t) = C_1 e^{-\alpha k^2 t} \text{ et il reste à intégrer}$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = C_2 \cos kx + C_3 \sin kx$$

$$\Rightarrow T(x, t) = C_1 e^{-\alpha k^2 t} (C_2 \cos kx + C_3 \sin kx) \\ = e^{-\alpha k^2 t} (A \cos kx + B \sin kx)$$

avec $A = C_1 C_2$ et $B = C_1 C_3$.

Cherchons des solutions vérifiant les conditions initiales et les conditions aux limites suivantes :

1) $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ pour $x = 0$

2) $-\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) = (h/\lambda)(T_{x=L})$ pour $x = L$

3) $T = T_0$ pour $t = 0$

1) $\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = e^{-\alpha k^2 t} (-Ak \sin kx + Bk \cos kx) \Big|_{x=0} = 0$

$\Rightarrow B = 0 \Rightarrow T(x, t) = A e^{-\alpha k^2 t} \cos kx$

La 2ème condition indique que la chaleur qui s'écoule par conduction à l'interface doit être égale à celle qui est fournie à ce même interface par convection. Il s'agit donc d'une condition limite type mixte (cf. section 3.3 & 4.4)

2) $\Rightarrow -\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = A e^{-\alpha k^2 t} k \sin kL \\ = \frac{h}{\lambda} (T_{x=L}) = \frac{h}{\lambda} e^{-\alpha k^2 t} A \cos kL$

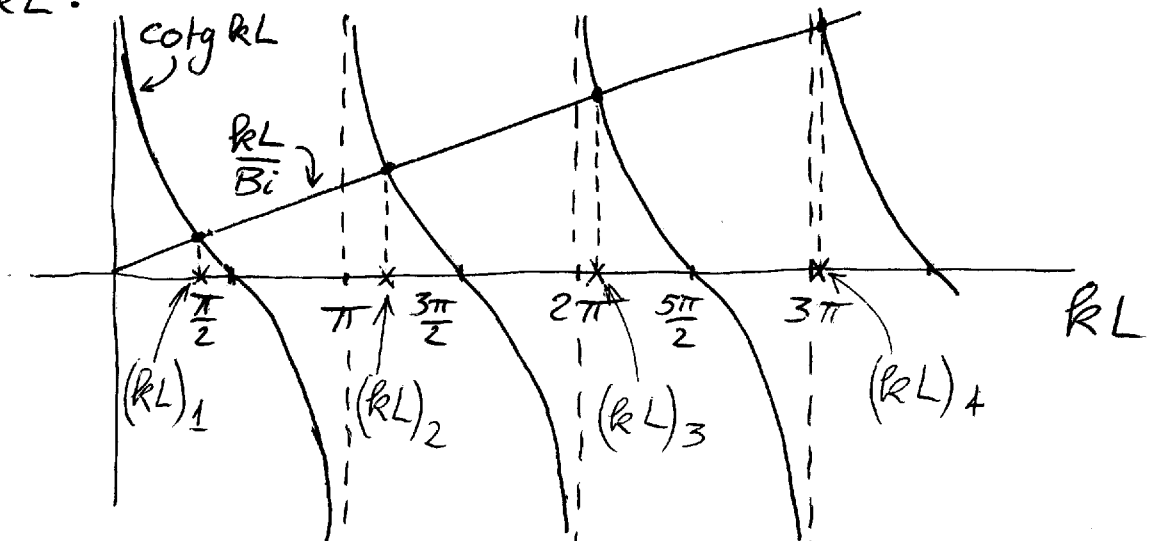
$$\Rightarrow \frac{h}{\lambda} \cos kL = k \sin kL \Rightarrow \cotg kL = \frac{\lambda}{hL} kL$$

avec $\frac{hL}{\lambda}$: Nombre de Biot

Le nombre de Biot est un paramètre adimensionnel mesurant l'importance relative de la résistance thermique à l'intérieur d'un corps solide, et s'écrit comme étant le rapport de la résistance interne à la résistance externe. Dans son expression h est la conductance moyenne par unité de surface liée à la convection, et λ est la conductivité thermique du corps solide. Le nombre de Biot est l'analogie du nombre de Nusselt (défini pour les fluides, cf. section 3.3).
 En définitive, l'équation transcendante s'écrit sous la forme :

$$\cotg kL = \frac{kL}{Bi}$$

Il existe, a priori une infinité de valeurs de kL solution de cette équation (valeurs caractéristiques). Le moyen le plus simple pour les déterminer est d'utiliser une méthode graphique, en traçant $\cotg kL$ et kL/Bi en fonction de kL .



On lit alors directement les diverses solutions qui sont

$$(kL)_1 = 0,86 Bi; \quad (kL)_2 = 3,43 Bi; \quad (kL)_3 = 6,44 Bi \quad \text{etc}$$

On remarque que les solutions se rapprochent de plus en plus de $m\pi$ au fur et à mesure que m augmente.

La solution générale sera donc donnée par :

$$T(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} e^{-X k_m^2 t} \times A_m \cos k_m x$$

Il reste à utiliser la condition initiale 3).

$$3) \Rightarrow T(x, 0) = T_0 = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos k_m x$$

Pour calculer les coefficients A_m , il faut utiliser la propriété d'orthogonalité des termes en $\cos k_m x$, à savoir :

$$\int_0^L \cos k_m x \cos k_n x dx \begin{cases} = 0 & \text{si } m \neq n \\ \neq 0 & \text{si } m = n \end{cases}$$

Dès lors, pour obtenir une valeur particulière de A_m , on multiplie les deux membres de l'expression de $T(x, 0)$ par $\cos k_m x$ et on intègre entre 0 et L :

$$\int_0^L T_0 \cos k_m x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L A_n \cos k_m x \cos k_n x dx$$

Conformément à la relation d'orthogonalité, tous les termes du membre droit disparaissent sauf celui qui comporte la fonction caractéristique $\cos k_m x$ élevée à la puissance 2. On obtient ainsi :

$$\int_0^L T_0 \cos k_m x dx = A_m \int_0^L \cos^2 k_m x dx$$

$$\Rightarrow T_0 \times \frac{1}{k_m} \sin k_m L = A_m \left(\frac{L}{2} + \frac{1}{2k_m} \sin k_m L \cos k_m L \right)$$

$$\Rightarrow A_m = \frac{2 k_m}{L k_m + \sin k_m L \cos k_m L} \times \frac{T_0 \sin k_m L}{k_m}$$

$$= (2 T_0 \sin k_m L) / (L k_m + \sin k_m L \cos k_m L)$$

$$\Rightarrow T(x, t) = T_0 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n^2 \alpha t} \times 2 \frac{\sin k_n L \cos k_n x}{k_n L + \sin k_n L \cos k_n L}$$

La répartition des températures est donc déterminée par cette équation. L'expression finale a la forme d'une série infinie. Cette série a été calculée une fois pour toute et les résultats sont utilisables sous forme d'abaques. La compréhension complète des méthodes permettant d'obtenir les solutions mathématiques, quoique utile, n'est pas indispensable pour comprendre l'emploi des abaques.

Un exemple d'utilisation d'une telle abaque est traité ci-dessous.

Exemple: La surface de la terre est exposée pendant $5\frac{1}{2}$ heures à de l'air froid à -20°C , la température initiale de la surface de la terre étant 14°C . Le coefficient de convection h au-dessus du sol est $10,8 \text{ W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}$. Les propriétés thermiques du sol sont: $\lambda = k = 0,888 \text{ W/m} \cdot ^{\circ}\text{C}$ et $\chi = \alpha = 4,7 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$. Trouver la profondeur pour laquelle la température du sol sera à 0°C après exposition pendant les $5\frac{1}{2}$ heures à -20°C .

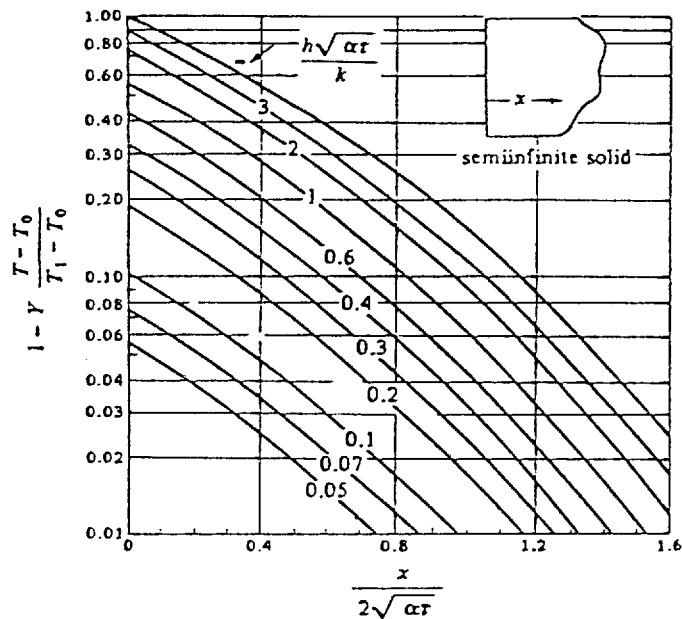


Fig. 2 Unsteady-state heat conduction in a semi-infinite solid with surface convection.

Solution:

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{10,8 \times 4,7 \times 10^{-7} \times 5,5 \times 3600}{0,888} = 1,173$$

$$1-y = \frac{T-T_1}{T_1-T_0} = \frac{273,15 - 287,16}{253,16 - 287,16} = 0,411$$

Lecture sur le graphe $\Rightarrow \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = 0,2$

$$\Rightarrow x = 0,2 \times 2 \times [4,7 \times 10^{-7} \times 5,5 \times 3600]^{\frac{1}{2}} = 0,0385$$

$$\underline{\underline{x = 3,85 \text{ cm}}}$$

Autre solution possible à l'équation de la chaleur 1D en régime variable

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Une autre solution fondamentale de cette équation est:

$$T = t^{-1/2} e^{-x^2/4\alpha t} \quad \text{En effet:}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{2t^{3/2}} e^{-x^2/4\alpha t} + \frac{x^2}{4\alpha t^{5/2}} e^{-x^2/4\alpha t}$$

et

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -\frac{1}{2\alpha t^{3/2}} e^{-x^2/4\alpha t} + \frac{x^2}{4\alpha^2 t^{5/2}} e^{-x^2/4\alpha t} \quad \text{CQFD}$$

Cette solution possède les propriétés suivantes:

$$T \rightarrow 0 \text{ pour } t \rightarrow 0 \text{ avec } x \neq 0$$

$$T \rightarrow \infty \text{ pour } t \rightarrow 0 \text{ avec } x = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T dx = 2(\pi\alpha)^{1/2} \text{ pour } t > 0$$

Physiquement, cette solution peut être regardée comme la libération de la quantité de chaleur $2\rho c (\pi\alpha)^{1/2}$ par unité de surface sur le plan $x=0$ à $t=0$. De façon évidente, d'autres solutions peuvent être obtenues, soit en différenciant, soit en intégrant cette solution fondamentale. Considérons par exemple l'intégration:

$$\underbrace{\int_0^x t^{-1/2} e^{-x^2/4\alpha t} dx}_{I}, \quad \text{et utilisons le changement de variable } \xi = x/2(\alpha t)^{1/2}$$

$$\Rightarrow I = 2\alpha^{1/2} \int_0^{x/2(\alpha t)^{1/2}} e^{-\xi^2} d\xi$$

Soit en notant :

$$\text{erf } x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad \text{fonction erreur (Intégrale de Gauss)}$$

Sous cette forme, nous venons de montrer que

$$A \text{ erf } \frac{x}{2(\alpha t)^{1/2}}, \quad \text{où } A \text{ est une constante arbitraire}$$

est une solution de l'équation de la chaleur.

La fonction d'erreur possède les propriétés suivantes:

$$\text{erf } 0 = 0; \quad \text{erf } \infty = 1 \quad (\text{cf Figure})$$

$$-\text{erf }(-x) = \text{erf } x$$

L'obtention de la fonction erreur $\text{erf}(x)$ est générale pour les problèmes en régime variable. Nous détaillons ci-dessous la solution du problème d'un demi-espace avec terme source.

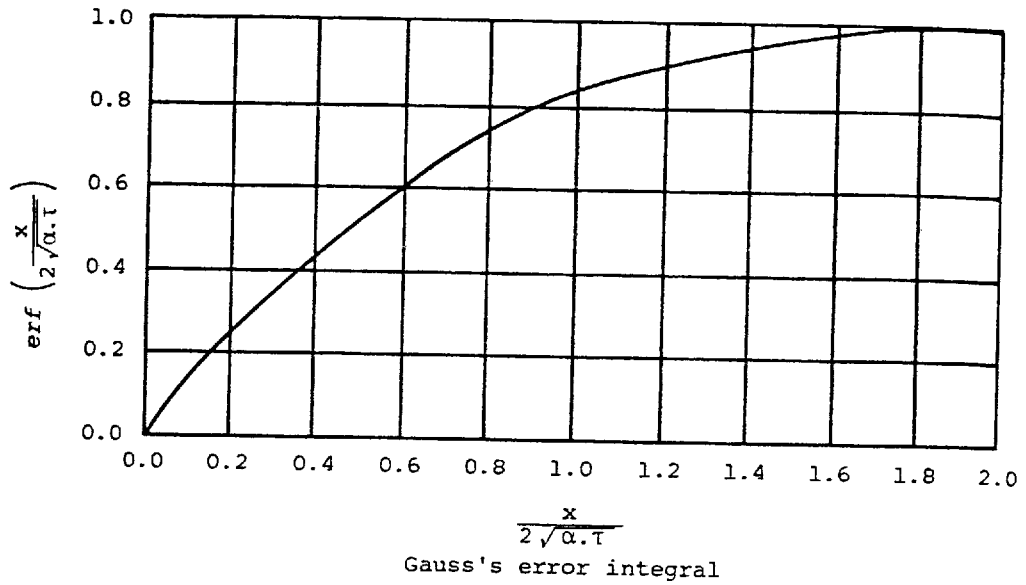


Table 1: The Complimentary Error Function

$$\text{erfc}(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-u^2} du$$

η	$\text{erfc}(\eta)$	η	$\text{erfc}(\eta)$
0.0	1.0000	1.1	0.11980
0.05	0.9436	1.2	0.08969
0.1	0.8875	1.3	0.06599
0.15	0.8320	1.4	0.04772
0.2	0.7773	1.5	0.03390
0.25	0.7237	1.6	0.02365
0.3	0.6714	1.7	0.01621
0.35	0.6206	1.8	0.01091
0.4	0.5716	1.9	0.00721
0.45	0.5245	2.0	0.00468
0.5	0.4795	2.1	0.00298
0.55	0.4367	2.2	0.00186
0.6	0.3961	2.3	0.001143
0.65	0.3580	2.4	0.000689
0.7	0.3222	2.5	0.000407
0.75	0.2889	2.6	0.000236
0.8	0.2579	2.7	0.000134
0.85	0.2293	2.8	0.000075
0.9	0.2031	2.9	0.000041
0.95	0.1791	3.0	0.000022
1.00	0.1573		

Régime variable avec terme source. L'équation de la chaleur prend la forme (cas 1D):

$$Q_s + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow \frac{Q_s}{\lambda} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Soient les conditions aux limites suivantes:

$$T = a + bx \quad \text{pour } t = 0 \quad (1)$$

$$T = 0 \quad \text{pour } x = 0 \quad t > 0 \quad (2)$$

Effectuons le changement de variable: $\theta = T - \frac{Q_s}{2\lambda} x^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{Q_s}{\lambda} \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

On s'est ramené par ce changement de variable à l'équation de la chaleur sans terme source. La solution de cette équation vient d'être établie ci-dessus: $\theta = A \operatorname{erf} [x / 2(\alpha t)^{1/2}]$

$$(1): t = 0 \Rightarrow T = a \quad \Rightarrow \theta|_{t=0} = A = a + bx + \frac{Q_s}{2\lambda} x^2$$

$$\Rightarrow \theta = \left(a + bx + \frac{Q_s}{2\lambda} x^2 \right) \operatorname{erf} \frac{x}{2(\alpha t)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(x, t) = \left(a + bx + \frac{Q_s}{2\lambda} x^2 \right) \operatorname{erf} \frac{x}{2(\alpha t)^{1/2}} + \frac{Q_s}{2\lambda} x^2}$$

La 2ème condition aux limites $T|_{x=0} = 0$ est automatiquement vérifiée puisque $\operatorname{erf} 0 = 0$ CQFD

3. Transferts thermiques par convection

3.1 - Introduction sur la convection

Les processus de transmission de la chaleur dans un fluide se compliquent par rapport à ceux dans les solides du fait de la possibilité de mouvement du fluide. Un corps chauffé plongé dans un fluide en mouvement se refroidit beaucoup plus vite que dans un fluide immobile, où la chaleur n'est évacuée que grâce à la conduction. On emploie pour le mouvement d'un fluide inégalement chauffé le terme convection.

On distingue deux types de convection, à savoir :

- i) la convection forcée, lorsque il y a un écoulement provoqué du fluide (EX: refroidissement de tuyère par fluide caloporteur, échauffement d'un radiateur de chauffage central, etc).
- ii) la convection libre, où le fluide, au départ au repos, se déplace par suite d'échanges thermiques et de dilatation du fluide liée aux variations de température (EX: chauffage d'une pièce par convection)

La quantité de chaleur transmise par convection entre une paroi solide et un fluide est exprimée par l'équation de Newton (analogue à la loi de Fourier pour la conduction) :

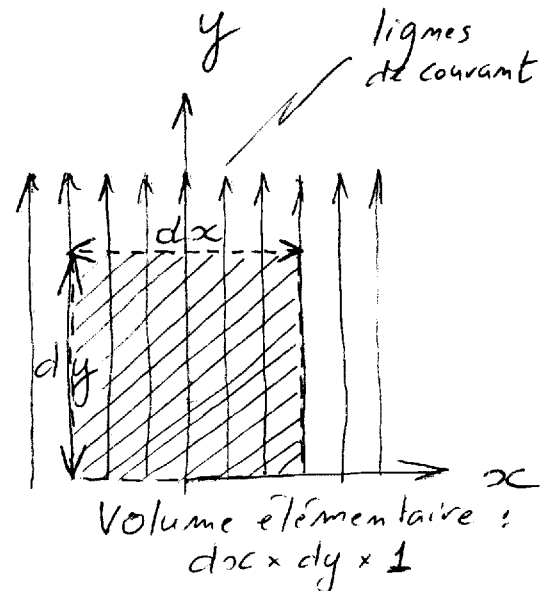
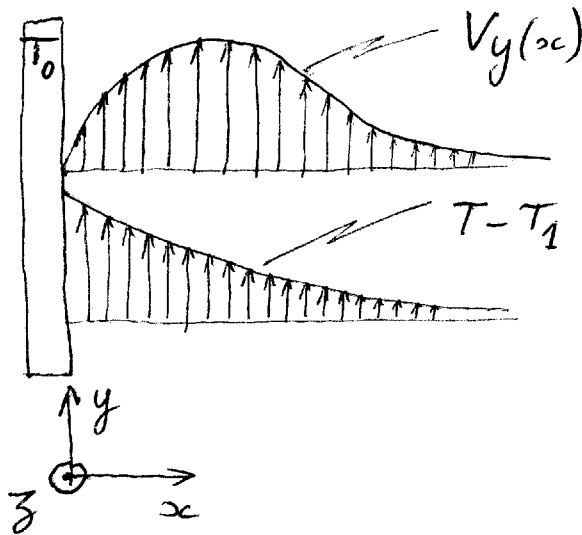
$$q = h S (T_s - T_f)$$

Sous cette forme, l'équation de la convection est d'une simplicité trompeuse. En effet, cette équation n'est rien d'autre que la relation de définition de la conductance thermique moyenne h par effet de convection. Ce coefficient h est en réalité une fonction complexe de l'écoulement du fluide (Pour avoir une description complète du phénomène de convection, nous ne pourrions pas faire l'économie de la mécanique des fluides), des propriétés thermiques du milieu, et de la géométrie du système. Cette équation de définition est impuissante à expliquer le mécanisme de l'écoulement de la chaleur par convection. En plus des équations de la mécanique des fluides, il faudra aussi une équation de transfert de la chaleur, généralisation de l'équation de Fourier à un fluide en convection. Ces équations seront en général couplées. Le couplage sera responsable du transfert de chaleur lié au mouvement. Il sera aussi la cause en convection libre du mouvement du fluide associé aux variations de température. Le problème de la convection libre est en fait extrêmement compliqué, et la connaissance précise des distributions spatiales des températures, ainsi que celle du champ des vitesses est en général très difficile à obtenir. La naissance des cellules de convection sera prédite par plusieurs nombres adimensionnels. Il faut noter que la prédiction exacte de la forme des cellules de convection est une question épineuse, sortant du cadre de ce cours.

3.2 - Equations fondamentales de la convection en régime forcé

On considère le cas particulier de la convection forcée le long d'une plaque solide maintenue à la température T_0 supérieure à celle du fluide. La plaque est supposée de taille infinie le long de l'axe des y et des z . Le régime est supposé laminaire et permanent ($\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$).

Les champs de température et de vitesses auront une allure proche de celle dessinée sur la Figure. Le mouvement du fluide s'effectue principalement le long de l'axe vertical. Une composante en vitesse de long de x (V_{xc}) peut toutefois exister. La température du fluide au repos (ou bien température du fluide pour $x \rightarrow +\infty$) est égale à T_1 avec $T_0 > T_1$.



* Equation de continuité

La masse de fluide contenue dans un volume élémentaire $dx dy dz$ doit être constante

$$m = \rho dV = \rho dx dy dz = cte$$

Le problème est supposé invariant suivant $z \Rightarrow dz = 1$ (longueur unité suivant z)

$$\Rightarrow \frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} dx dy + \rho dx \frac{d(dy)}{dt} + \rho dy \frac{d(dx)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} dx dy + \rho dx dV_y + \rho dy dV_x = 0$$

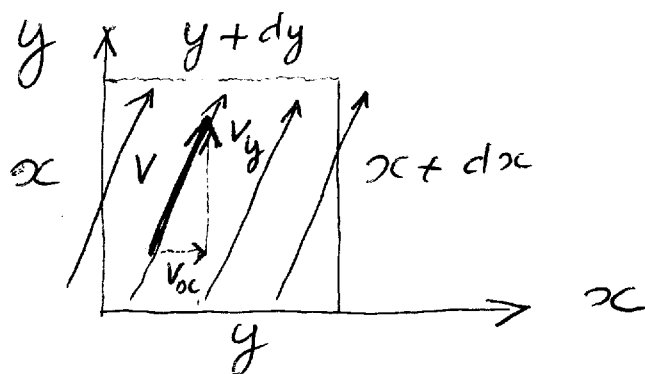
$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} dx dy + \rho dx dy \left(\frac{dV_y}{dy} + \frac{dV_x}{dx} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \frac{dV_x}{dx} + \frac{dV_y}{dy} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{Régime permanent} \\ \text{Fluide incompressible} \end{array} \quad \frac{d\rho}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dV_x}{dx} + \frac{dV_y}{dy} = 0}$$

* Equation de Navier-Stokes

$$\Sigma F = \frac{d(mv)}{dt}$$



Variations de la quantité de mouvement entre i) x et $x+dx$ ii) y et $y+dy$

- Quantité de mouvement face inférieure ($y = y$):
 - Masse entrant par la face inférieure: $m_y = \rho V_y dx$
 - Quantité de mouvement entrant par la face inférieure, calculée dans la direction y : $P_y = (\rho V_y dx) \cdot V_y = \rho V_y^2 dx$
 - De même pour la face côté gauche ($x = x$):
 - Masse entrante: $m_x = \rho V_x dy$
 - Quantité de mouvement: $P_x = (\rho V_x dy) \cdot V_y$ dans la direction y
 - Quantité de mouvement sortant face supérieure ($y = y + dy$) dans la direction y :

$$P_{y+dy} = m_{y+dy} \cdot V_{y+dy} = \left[m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy \right] \left[V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy \right]$$

$$= \left(\rho V_y dx + \frac{\partial \rho V_y}{\partial y} dy dx \right) \left(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} dy \right)$$

Soit en négligeant le terme du 2^{ème} ordre en $dx dy$:

$$P_{y+dy} \approx \left(\rho V_y^2 + \rho V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} dy + V_y \frac{\partial \rho V_y}{\partial y} dy \right) dx$$
 - De même pour $P_{x+dx} = m_{x+dx} \cdot V_{y+dx}$ dans la direction y

$$P_{x+dx} = \left(\rho V_x dy + \frac{\partial \rho V_x}{\partial x} dx dy \right) \left(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx \right)$$

$$\approx \left(\rho V_x V_y + \rho V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} dx + V_y \frac{\partial \rho V_x}{\partial x} dx \right) dy$$
- $$P_{Total} = P_{x+dx} - P_x + P_{y+dy} - P_y$$
- $$\Rightarrow P_T = \left(\rho V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + \rho V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_y \left[\frac{\partial \rho V_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho V_x}{\partial x} \right] \right) dx dy$$
- Les forces extérieures peuvent être :
- Force d'inertie ou de pesanteur
 - (Cas de la convection libre \Rightarrow terme aditionnel)
 - Force dynamique ou de pression
 - Force de frottement visqueux ou de frottement à la paroi.

cf. Equation de continuité

Pour la convection forcée, les forces de pesanteur sont supposées négligeables, et seules les forces de frottement sont prises en compte.

- Contrainte de cisaillement en x : $\tau_{oxy} = \mu \frac{dv_y}{dx}$

- Force en $x = x$:

$$F_x = \tau_{oxy} dy = \mu \frac{dv_y}{dx} dy$$

↑
coefficient de viscosité
dynamique

$$F_{x+dx} = F_x + \frac{\partial F_x}{\partial x} dx = \tau_{oxy} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{oxy}) dx$$

$$F_T = F_{x+dx} - F_x = \left(\tau_{oxy} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{oxy}) - \tau_{oxy} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{oxy})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

Au total, équation de Navier - Stokes pour fluide incompressible :

$$\rho \left[v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right] = \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

* Equation de Fourier généralisée

Dans l'équation de la chaleur classique, il se surajoute un terme produit du champ de vitesse par le gradient de la température, à savoir pour le cas du problème 2D qui nous intéresse ici :

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Dans le cas du régime permanent (le seul qui nous intéresse ici) $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$, et en remarquant que le champ de température T n'est pas fonction de y , on obtient :

$$\rho c_p \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

La démonstration générale de ce résultat (c'est à dire de l'introduction du terme $\vec{v} \cdot \text{grad } T$) n'est pas triviale et ne sera pas donnée (cf. Landau et Lifchitz, Mécanique des fluides, § 49 et 50, pp. 229-240). On comprend néanmoins intuitivement ce résultat. Par exemple, dans le cas du refroidissement d'une conduite, ce refroidissement est d'autant plus efficace que :

- i) La différence de température paroi / fluide est grande
- ii) La vitesse d'écoulement du fluide est importante.

Récapitulatif : Nous avons 3 équations :

- Equation de Navier - Stokes
- Equation de Fourier modifiée
- Equation de continuité (conservation de la masse)

$$V_{xc} \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$V_{xc} \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

avec: $\nu = \frac{\mu}{\rho}$: viscosité cinématique
 $\chi = \lambda / \rho C_p$: diffusivité thermique

En convection forcée, ces équations avec les conditions aux limites correspondantes sont entièrement suffisantes pour décrire complètement la répartition de température ainsi que le champ de vitesses. Il s'agit d'équations aux dérivées partielles non linéaires (cf. Navier-Stokes) et couplées (cf. Fourier). Dans la pratique, on ne sait les résoudre que pour des cas bien particuliers, et les calculs sont toujours extrêmement difficiles.

Il est toutefois possible, sans prétendre obtenir une connaissance complète des champs de température et de vitesses, d'effectuer un certain nombre de calculs prédictifs. Pour cela, nous abandonnons l'intégralité de la description (3 équations différentielles couplées + conditions aux limites adéquates). Un outil puissant, la loi de similitude, fournit un certain nombre d'éléments.

3.3 - Analyse par la loi de similitude

En mécanique des fluides, il a été montré (O. Reynolds 1888) qu'il existait un nombre caractéristique sans dimension, le nombre de Reynolds $R = U l / \nu$ suffisant pour décrire la nature de l'écoulement d'un fluide à une vitesse d'écoulement U et pour une géométrie donnée l . Par exemple, pour des conduites de section circulaire, $R \approx 2200$ fixe la limite entre écoulement laminaire et écoulement turbulent (cf. diagramme de Molly).

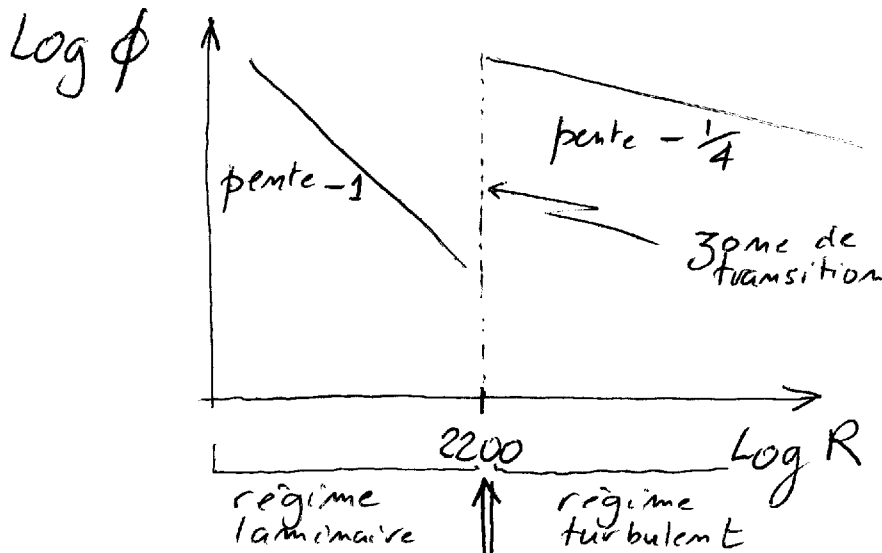


Diagramme de Molly

Nombre de Reynolds critique

La loi de similitude nous indique que des écoulements (notamment le type de régime, les champs de vitesses) peuvent être déduits les uns des autres par la simple connaissance du nombre de Reynolds. Deux écoulements ayant le même coefficient R , mais étant réalisés dans des conditions différentes (différents fluides, différentes sections des tuyaux, différentes vitesses d'écoulement) sont dits semblables (loi de similitude O. Reynolds 1883).

L'idée est de savoir si ce type d'analyse peut être transposée au cas de la convection en régime forcé. Ici les problèmes sont plus compliqués (voir les Equations fondamentales). Le nombre de Reynolds est-il un paramètre toujours pertinent? Existe-t-il d'autres paramètres adimensionnels nécessaires à la description des phénomènes? Peut-on prédire quand est-ce que l'on passe du régime laminaire au régime turbulent? etc. En convection forcée, il faut noter que la turbulence est observable pour des vitesses faibles, à partir du moment où le corps solide produit un flux thermique important. Ce cas existe aussi en convection libre (EX: Plaque chauffante, dans certaines conditions, poussée à son maximum).

Le calcul qui suit précise la relation qui existe entre différentes grandeurs adimensionnelles. Ce calcul utilise l'équation aux dimensions. On commence par relever l'ensemble des grandeurs caractéristiques apparaissant dans les équations (1) à (3) de la théorie de la convection, et à écrire leurs unités:

$$\lambda : \left[\frac{H}{LT} \right] \quad \rho : \left[\frac{M}{L^3} \right]$$

$$l : [L] \quad U : \left[\frac{L}{T} \right]$$

$$C_p : \left[\frac{H}{MT} \right] \quad \mu : \left[\frac{M}{LT} \right]$$

On cherche alors une relation entre le coefficient de conductance (ϕ , équation de Newton) et l'ensemble de ces paramètres:

$$h = cte \cdot \lambda^a l^b C_p^c \rho^d U^e \mu^f$$

$$\Rightarrow \left[\frac{H}{L^2 T} \right] = c \left[\frac{H}{LT} \right]^a [L]^b \left[\frac{H}{MT} \right]^c \left[\frac{M}{L^3} \right]^d \left[\frac{L}{T} \right]^e \left[\frac{M}{LT} \right]^f$$

$$\Sigma H: 1 = a + c \Rightarrow \underline{c = 1 - a}$$

$$\Sigma T: -1 = -a - e - f$$

$$\Sigma L: -2 = -a + b - 3d + e - f$$

$$\Sigma M: -1 = -a - c$$

$$\Sigma M: 0 = -c + d + f \Rightarrow f + d = c \Rightarrow f = 1 - a - e$$

$$\text{et } -2 = -a + b - 3e + e - f \Rightarrow b = a + 2e + f - 2$$

$$\Rightarrow b = a + 2e + 1 - a - e$$

Soit au total :

$$\begin{aligned} h &= \text{cte} \times \lambda^a \frac{\ell^e}{\ell} \frac{c_p^e}{c_p^a} \rho^e U^e \frac{\mu}{\mu \mu^e} \\ &= \text{cte} \times \left(\frac{\lambda}{c_p \mu} \right)^a \left(\frac{\ell \rho U}{\mu} \right)^e \times \frac{c_p \mu}{\ell} \\ \Rightarrow \frac{h \ell}{\lambda} &= \text{cte} \times \left(\frac{c_p \mu}{\lambda} \right)^{-a} \left(\frac{\ell U}{\nu} \right)^e \left(\frac{c_p \mu}{\lambda} \right) \\ \Rightarrow \left(\frac{h \ell}{\lambda} \right) &= \text{cte} \times \left(\frac{c_p \mu}{\lambda} \right)^{1-a} \left(\frac{\ell U}{\nu} \right)^e \end{aligned}$$

Il s'agit d'une relation du type $N = f(P, R)$, dans laquelle il existe en plus du nombre de Reynolds $R = \ell U / \nu$, deux autres paramètres adimensionnels, à savoir le nombre de Prandtl $P = c_p \mu / \lambda$, et le nombre de Nusselt $N = h \ell / \lambda$. Le nombre de Prandtl est le rapport de deux propriétés de transport moléculaire, la viscosité cinématique $\nu = \mu / \rho$ qui affecte la distribution des vitesses, et la diffusivité thermique $\chi = \lambda / c_p \rho$ qui affecte le profil des températures. En d'autres termes, c'est un paramètre adimensionnel reliant la répartition des températures à celle des vitesses. On peut aussi définir le nombre de Nusselt d'une manière différente :

Loi de Fourier pour la conduction :

$$q = -\lambda S \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Loi de Newton pour la convection :

$$\begin{aligned} q &= h S (T_1 - T_0) \\ \Rightarrow N = \frac{h \ell}{\lambda} &= \frac{-\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0}}{\frac{T_1 - T_0}{\ell}} = \frac{\partial \left(\frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \right)}{\partial \left(\frac{y}{L} \right)} \Big|_{y=0} \end{aligned}$$

Sous cette forme, le nombre de Nusselt est égal au rapport du gradient de température à l'interface fluide-solide au gradient de température de référence.

On peut donc s'attendre, dans des systèmes géométriquement semblables et ayant des champs de température semblables, à avoir les mêmes valeurs numériques du nombre de Nusselt N , ce qui est confirmé par des résultats expérimentaux.

D'après l'analyse ci-dessus, nous avons établi la relation formelle $N = f(P, R)$. Il resterait pour une configuration géométrique donnée, et pour un fluide particulier à trouver la relation exacte entre les 3 paramètres. Ceci est en général impossible par le calcul, sauf dans des cas très particuliers (cf. discussion suivante sur la couche limite). Le plus souvent, c'est l'expérience qui fournit cette relation. Il existe une très grande variété de telles formules empiriques. Voici quelques exemples en convection forcée :

* Plaque plane, régime laminaire $N = 0,332 P^{1/3} R^{1/2}$
(cf. paragraphe suivant)

* Plaque plane, régime mixte $N = (0,037 R^{4/5} - 872) P^{1/3}$

* Tube, formule de Sieder et Tate
(régime laminaire) $N = 1,86 \left(\frac{d}{l} \right) R P^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0,14}$

* Tube, formule de Hausen
(régime laminaire) $N = 3,66 + \frac{0,0668 \left(\frac{d}{l} \right) R P}{1 + 0,04 \left(\left(\frac{d}{l} \right) R P \right)^{2/3}}$

* Tube, formule de Dittus-Boelter
(régime turbulent) $N = 0,023 R^{4/5} P^{2/5}$

Il faut noter que chaque équation n'est valide que dans un certain domaine des nombre de Reynolds et de Prandtl. A partir de l'une ou l'autre de ces formules (il en existe beaucoup d'autres), il est possible d'effectuer des calculs précis sur des cas concrets.

Exemple : De l'eau circule à une vitesse de 20 cm/sec dans une conduite de 3 m de longueur et 2,54 cm de diamètre. La surface de la conduite est maintenue à 80°C. L'eau pénètre à 60°C. En utilisant la Table ci-contre, calculer la température de l'eau à la sortie de la conduite.

Solution : Le flux thermique perdu par la conduite est égal à celui récupéré par l'eau :

$$q = h \pi d L (T_s - T_e) = \dot{m} C_p (T_o - T_i)$$

$$\text{avec } T_e = \frac{T_i + T_o}{2} ; \dot{m} = \rho U \frac{\pi}{4} d^2$$

$$\Rightarrow h \pi d L \left[T_s - \left(\frac{T_i + T_o}{2} \right) \right] = \rho U \frac{\pi}{4} d^2 C_p (T_o - T_i)$$

Puisque T_o est l'inconnue, l'équation (1) sera résolue de manière itérative, car $h = h(T_e)$, $C_p = C_p(T_e)$ et $\rho = \rho(T_e)$.

Pour démarrer, on pose $T_e = 60^\circ\text{C}$. Les propriétés de l'eau à cette température sont (cf Table) :

$$\rho = 985 \text{ kg/m}^3 \quad \mu = 4,71 \times 10^{-4} \text{ kg/m.s}$$

$$\lambda = 0,651 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C} \quad C_p = 4,18 \text{ kJ/kg} \cdot ^\circ\text{C}$$

$$P = 3,02$$

Le nombre de Reynolds est calculé :

$$R = \frac{\rho U d}{\mu} = \frac{985 \times 0,02 \times 0,0254}{4,71 \times 10^{-4}} = 1062$$

L'écoulement est donc laminaire, et le nombre de Nusselt peut-être calculé avec la formule de Sieder et Tate

$$N = 1,86 \left(\left(\frac{d}{L} \right) R P \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0,14} \quad \text{où } \mu_s \text{ est la viscosité de l'eau à la température de la paroi de la conduit}$$

cette équation est valide lorsque :

$$1) \quad 0,48 < P < 16700$$

$$2) \quad \left(\frac{d}{L} \right) R P > 10$$

La 1ère condition est remplie, et il reste à vérifier la seconde :

$$\left(\frac{d}{L} \right) R P = \left(\frac{0,0254}{3} \right) \times 1062 \times 3,02 = 27,16 > 10 \quad \text{CQFD}$$

Table fournit $\mu_s = 3,55 \times 10^{-4} \text{ kg/m.s}$ à 80°C

$$\Rightarrow N = 1,86 (27,16)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{4,71}{3,55} \right)^{0,14} = 5,816$$

$$\text{or } N = \frac{hd}{\lambda} \Rightarrow h = \frac{N\lambda}{d} = \frac{5,816 \times 0,651}{0,0254} = 149,1 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

Utilisation equation (1) $\Rightarrow T_0 = 71,98^\circ\text{C}$

Puis on reprend une nouvelle fois tous les calculs :

$$T_0 = 71,98^\circ\text{C} \Rightarrow T_e = \frac{60 + 71,98}{2} = 66^\circ\text{C}$$

$$\Rightarrow \rho = 982 \text{ kg/m}^3 \quad \mu = 4,36 \times 10^{-4} \text{ kg/m}\cdot\text{s}$$

$$\lambda = 0,656 \text{ W/m}\cdot^\circ\text{C} \quad c_p = 4,18 \text{ kJ/kg}\cdot^\circ\text{C}$$

$$P = 2,78$$

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{982 \times 0,02 \times 0,0254}{4,36 \times 10^{-4}} = 1144$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d}{L}\right) RP = \left(\frac{0,0254}{3}\right) 1144 \times 2,78 = 26,93$$

$$\Rightarrow N = 1,86 (26,93)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{4,36}{3,55}\right)^{0,14} = 5,74$$

$$\Rightarrow h = \frac{N\lambda}{d} = \frac{5,74 \cdot 0,656}{0,0254} = 148,2 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$$

Utilisation equation (1) $\Rightarrow T_0 = 71,92^\circ\text{C}$

Résultat voisin de celui de la 1ère itération \Rightarrow On arrête les calculs.

T (°C)	T (K)	ρ (kg/m ³)	c_p (kJ/kg·K)	$\mu \times 10^3$ (Pa·s, or kg/m·s)	k (W/m·K)	N_{Pr}	$\beta \times 10^4$ (1/K)	$(g\beta\rho^2/\mu^2) \times 10^{-8}$ (1/K·m ³)
0	273.2	999.6	4.229	1.786	0.5694	13.3	-0.630	
15.6	288.8	998.0	4.187	1.131	0.5884	8.07	1.44	10.93
26.7	299.9	996.4	4.183	0.860	0.6109	5.89	2.34	30.70
37.8	311.0	994.7	4.183	0.682	0.6283	4.51	3.24	68.0
65.6	338.8	981.9	4.187	0.432	0.6629	2.72	5.04	256.2
93.3	366.5	962.7	4.229	0.3066	0.6802	1.91	6.66	642
121.1	394.3	943.5	4.271	0.2381	0.6836	1.49	8.46	1,300
148.9	422.1	917.9	4.312	0.1935	0.6836	1.22	10.08	2,231
204.4	477.6	858.6	4.522	0.1384	0.6611	0.950	14.04	5,308
260.0	533.2	784.9	4.982	0.1042	0.6040	0.859	19.8	11,030
315.6	588.8	679.2	6.322	0.0862	0.5071	1.07	31.5	19,260

3.4 - Etude de la couche limite

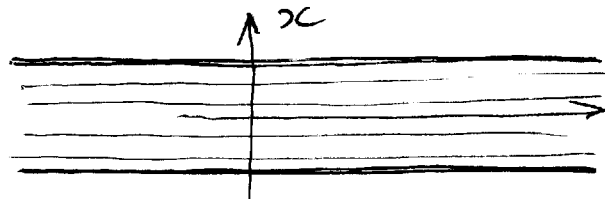
L'étude complète de la couche limite date de la fin du 19^{ème} siècle (travail de L. Prandtl). Nous nous limitons ici à établir la loi de dépendance du nombre de Nusselt par rapport aux nombres de Prandtl P et de Reynolds R pour les grandes valeurs de P et de R (limite asymptotique).

On démarre à partir des équations de la convection, et l'on évalue les équivalents des divers termes pour chaque équation.

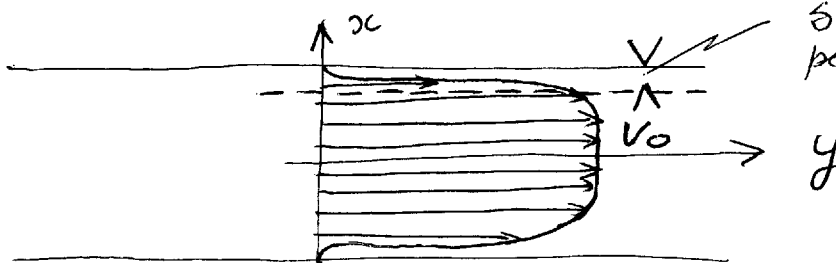
* Equation de Navier-Stokes

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

avec $\nu = \frac{\mu}{\rho}$: viscosité cinématique



Lorsque R est grand, juste avant la turbulence, le profil des vitesses est le suivant



δ : épaisseur de peau liée à la viscosité

On définit l'épaisseur de peau δ liée à la viscosité comme étant la distance à la paroi telle que $\Delta v_y \sim v_0$. On peut dès lors évaluer asymptotiquement les divers termes, sachant que :

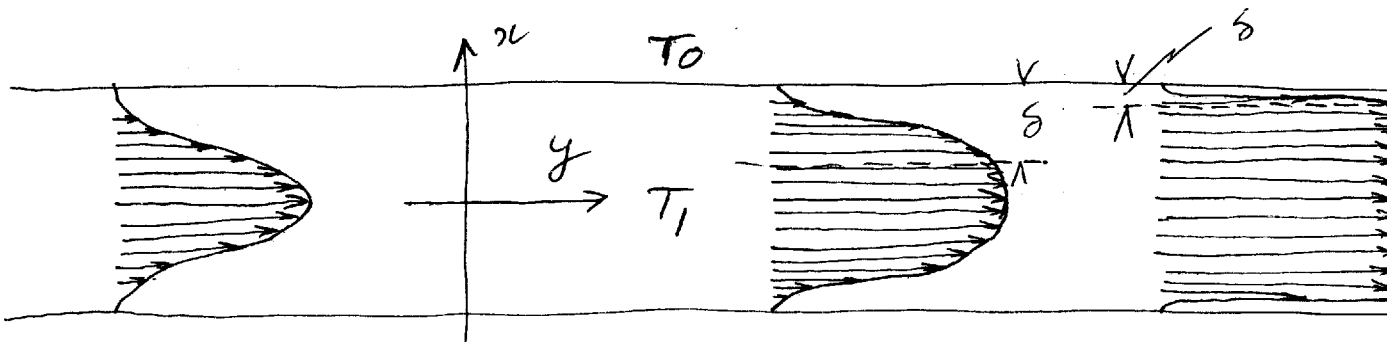
$$v_y \gg v_x \Rightarrow v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \text{ négligeable}$$

$$v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \sim v_0 \frac{\Delta v_y}{l} = \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \sim \nu \frac{\Delta v_y}{\delta^2}$$

$$\Rightarrow \delta^2 \sim \frac{\nu l}{v_0} = \frac{\nu}{v_0} \times l^2 = \frac{l^2}{R}$$

$$\delta \sim \frac{l}{\sqrt{R}}$$

l'épaisseur de peau de viscosité diminue lorsque R augmente par sa racine carrée



Profil parabolique
loi de Poiseuille
Faibles R

R intermédiaires

épaisseur de peau
très faible
forts nombres R

* Equation de Fourier

$$V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec } \chi = \frac{\lambda}{\rho C_p}$$

$$\chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \sim \chi \frac{T_1 - T_0}{\delta'^2}$$

diffusivité thermique

$$V_y \frac{\partial T}{\partial y} \sim U_0 \left(\frac{\delta'}{\delta} \right) \frac{T_1 - T_0}{l}$$

δ' : épaisseur de peau thermique
 $\delta' \neq \delta$ mais $\delta' \sim \delta$

↑ variation de la vitesse V_y sur la distance δ'

Le terme $V_x \frac{\partial T}{\partial x}$ est négligeable car $V_x \ll V_y$

Par comparaison des deux termes restants, on obtient :

$$\frac{\chi}{\delta'^2} \sim U_0 \frac{\delta'}{\delta} \frac{1}{l} \Rightarrow \delta'^3 \sim \chi \frac{\delta l}{U_0}$$

$$\text{or } \delta \sim \frac{l}{\sqrt{R}} \Rightarrow \delta'^3 \sim \chi \frac{l}{\sqrt{R}} \frac{l}{U_0} = \chi \frac{l^2}{\sqrt{R} U_0}$$

$$\Rightarrow \delta'^3 \sim \frac{1}{P} \frac{l^3}{R^{3/2}} \quad \left(P = \frac{U}{\chi} \right) \Rightarrow \boxed{\delta' \sim \frac{l}{P^{1/3} R^{1/2}}}$$

Ce résultat montre que l'épaisseur de peau thermique suit la même loi de dépendance en $R^{1/2}$ que l'épaisseur de peau de viscosité. Il se surajoute la variation en $P^{1/3}$. De toute façon, pour évacuer un max de chaleur, il faut augmenter la vitesse d'écoulement (pour diminuer δ').

$$\text{De plus } N = \frac{h l}{\lambda} \quad \text{et } q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \sim \lambda \frac{T_1 - T_0}{\delta'}$$

$$\text{Soit par identification: } q = h (T_1 - T_0)$$

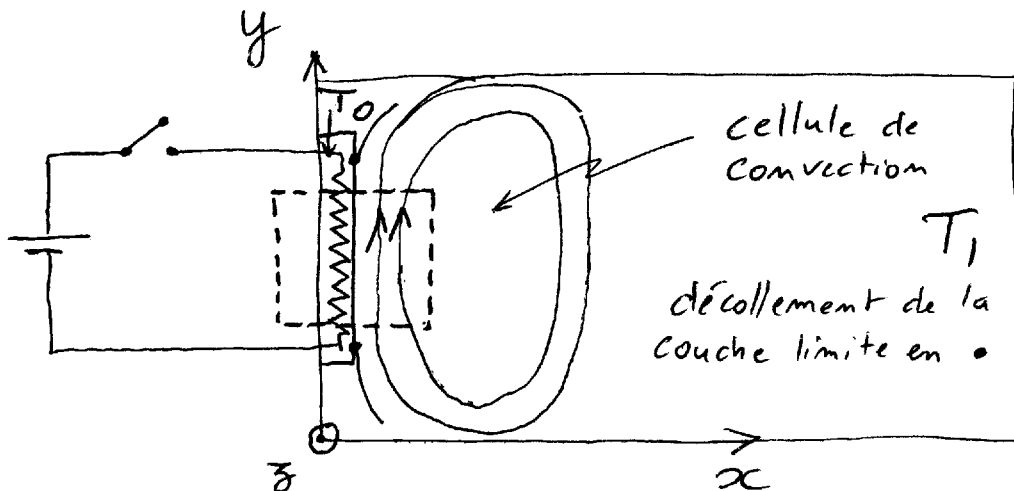
$$h \sim \frac{\lambda}{\delta'} \Rightarrow N = \frac{h l}{\lambda} = \frac{\lambda}{\delta'} \frac{l}{\lambda} = \frac{l}{\delta'}$$

$$\Rightarrow \boxed{N = cte \times R^{1/2} P^{1/3}}$$

Relation entre le nombre de Nusselt et les nombres de Prandtl et de Reynolds. Limite asymptotique pour un écoulement laminaire s'effectuant à grandes valeurs de P et de R . (cf. Table de formules section 3.3)

3.5 - Cas de la Convection libre

Considérons la géométrie la plus élémentaire pour étudier la convection libre. Soit une plaque verticale solide chauffée et immergée dans un récipient de grande taille (cf. Figure)



Au voisinage de la plaque, et en négligeant les effets de bord (dans le domaine pointillés par exemple), l'écoulement est laminaire plan, sans décollement de la couche limite. Dans ce cas simple, les équations fondamentales de la convection forcée sont transposables à ceci près qu'il va y avoir un terme additionnel dans l'équation de Navier-Stokes. Il existe en effet une force supplémentaire liée à la pesanteur et aux variations de la masse volumique du fluide dues aux différences de température. L'équation de Navier-Stokes s'écrit dès lors :

$$\rho \left[v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \right] = \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \alpha \rho g (T - T_0)$$

où $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ et où $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \text{cte}$ représente le coefficient de dilatation à pression constante (fluide incompressible).

Les deux autres équations sont inchangées. La convection libre sera donc entièrement contenue dans les 3 équations suivantes :

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \alpha \rho g (T - T_0) \quad (1')$$

$$\rho c_p \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2')$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad + \text{conditions aux limites}$$

Note : ces équations ne s'appliquent en fait qu'au cas à 2 dimensions. La plaque chauffante et le bain doivent s'étendre à l'infini le long de la direction z .

La résolution rigoureuse de ce système est encore plus délicate que pour le cas de la convection forcée (Fourier et Navier-Stokes sont 2 équations aux dérivées partielles couplées non linéaires) et n'a pu être analytiquement menée à bien que pour des cas particuliers très limités (on trouvera un exemple dans Landau et Lifchitz, Mécanique des fluides, p. 270). Nous ne chercherons pas à reproduire ici ce type de calculs.

En convection forcée nous avions pu montrer une relation fonctionnelle entre les nombres de Reynolds (R), de Prandtl (P) et de Nusselt (N) du type: $N = f(P, R)$. Qu'en est-il en convection libre? A priori il n'y a pas de raison pour que le nombre de Reynolds intervienne dans la description du phénomène, puisque la convection libre est caractérisée par une vitesse moyenne du fluide relativement faible. La turbulence peut malgré tout se produire (lorsque la plaque est vigoureusement chauffée), et un autre paramètre adimensionnel doit intervenir à la place du nombre de Reynolds.

Pour mettre en évidence ce nouveau paramètre, on a recours à la loi de similitude. Soient 2 configurations de convection libre semblables A et B, c'est à dire possédant les mêmes champs de vitesses et de température. Pour le système A, l'équation (1') s'écrit:

$$\rho^A \left(v_x^A \frac{\partial v_y^A}{\partial x^A} + v_y^A \frac{\partial v_x^A}{\partial y^A} \right) = \mu^A \frac{\partial^2 v_y^A}{\partial x_A^2} + \rho^A g^A \alpha^A (T - T_0)^A$$

Considérons maintenant le système B relié au système A par les équations suivantes indiquant les transformations associées à chaque grandeur (relation de similitude).

$$v_x^B = C_v v_x^A$$

$$\alpha^B = C_\alpha \alpha^A$$

$$v_y^B = C_v v_y^A$$

$$(T - T_0)^B = C_T (T - T_0)^A$$

$$x_B = C_L x_A$$

$$\mu^B = C_\mu \mu^A$$

$$y^B = C_L y^A$$

$$\rho^B = C_\rho \rho^A$$

$$g^B = C_g g^A$$

, avec tous les termes C étant sans dimension

La signification est par exemple pour $\rho^B = C_\rho \rho^A$, que la masse volumique du fluide B est C_ρ fois celle du fluide A, etc pour les autres quantités.

Mais de plus B vérifie l'équation de Navier-Stokes:

$$\rho^B \left(v_x^B \frac{\partial v_y^B}{\partial x^B} + v_y^B \frac{\partial v_x^B}{\partial y^B} \right) = \mu^B \frac{\partial^2 v_y^B}{\partial x_B^2} + \rho^B g^B \alpha^B (T - T_0)^B$$

$$\Rightarrow \frac{c_g c_v^2}{c_L} \left[\rho_A \left(v_x^A \frac{\partial v_y^A}{\partial x^A} + v_y^A \frac{\partial v_x^A}{\partial y^A} \right) \right] =$$

$$= \frac{c_m c_v}{c_L^2} \left(\mu^A \frac{\partial^2 v_y^A}{\partial x^A^2} \right) + c_T c_p c_g c_\alpha \left(\rho_A g_A \alpha_A (T - T_0)_A \right)$$

Par identification avec la 1ere equation de Navier - Stokes, on obtient la relation suivante (equation de similitude)

$$\frac{c_g c_v^2}{c_L} = \frac{c_m c_v}{c_L^2} = c_T c_p c_g c_\alpha$$

On revient des lors aux variables de depart en A et B :

$$\frac{\rho_B v_B^2 / L_B}{\rho_A v_A^2 / L_A} = \frac{\mu_B v_B / L_B^2}{\mu_A v_A / L_A^2} = \frac{\rho_B g_B \alpha_B (T - T_0)_B}{\rho_A g_A \alpha_A (T - T_0)_A}$$

* Comparaison entre le 1er et le 2em terme :

$$\frac{\rho_B v_B L_B}{\mu_B} = \frac{\rho_A v_A L_A}{\mu_A} \Rightarrow R_A = R_B \quad \text{egalite des nombres de Reynolds}$$

Cette egalite signifie que les rapports des forces d'inertie aux forces de viscosite sont identiques en des points correspondants

* Comparaison entre le 2eme et le 3eme terme

$$\frac{\rho_B g_B \alpha_B (T - T_0)_B L_B^2}{\mu_B v_B} = \frac{\rho_A g_A \alpha_A (T - T_0)_A L_A^2}{\mu_A v_A}$$

Cette egalite signifie que les rapports des forces ascensionnelles aux forces de viscosite sont egaux pour les deux fluides. Si l'on elimine v_B et v_A a partir de l'equation precedente d'egalite des nombres de Reynolds, on obtient :

$$\frac{\rho_B^2 g_B \alpha_B (T - T_0)_B L_B^3}{\mu_B^2} = \frac{\rho_A^2 g_A \alpha_A (T - T_0)_A L_A^3}{\mu_A^2}$$

On peut montrer que ce nouveau parametre $\frac{\rho^2 g \alpha (T - T_0) L^3}{\mu^2}$ est sans dimension.

ρ : kg / m ³	μ : kg / m . s	α : 1 / K
L : m	$T - T_0$: K	g : m / s ²

$$\left[\frac{\rho^2 g \alpha (T - T_0) L^3}{\mu^2} \right] = \frac{m}{s^2} \left(\frac{kg}{m^3} \right)^2 \frac{1}{K} \frac{K m^3}{kg^2} m^2 s^2$$

$$= 0 \quad \text{CQFD}$$

Un tel nombre adimensionnel $\frac{\rho^2 g \alpha (T - T_0) L^3}{\mu^2}$ est dit nombre de Grashof, et l'égalité des M^2 nombres de Grashof indique la similitude dynamique.

En convection libre, le nombre de Reynolds est superflu, et sera avantageusement remplacé par le nombre de Grashof. On écrira la relation fonctionnelle liant N , P et G sous la forme : $N = f(P, G)$.

Le produit $GP = \frac{g \alpha L^3 (T - T_0)}{\nu^2}$ doit atteindre une certaine valeur pour que la convection libre s'installe :

Ex: $GP > 1710$ Pour 2 plans solides maintenus à température constante.

$GP > 1100$ Même configuration, mais surface supérieure du fluide libre.

La turbulence en convection libre s'observe pour $G > 50.000$. De très nombreuses relations fonctionnelles du type $N = f(P, G)$ ont été proposées (cf. Exemples ci-dessous).

Table 2.

Constants for use with Eq. (1) for Nusselt Number

Physical Geometry	(Gr Pr)	a	m	Ref.
Vertical planes and cylinders [vertical height $L < 1$ m (3 ft)]				
	$< 10^4$	1.36	$\frac{1}{5}$	(P1)
	$10^4 - 10^9$	0.59	$\frac{1}{4}$	(M1)
	$> 10^9$	0.13	$\frac{1}{3}$	(M1)
Horizontal cylinders [diameter D used for L and $D < 0.20$ m (0.66 ft)]				
	$< 10^{-5}$	0.49	0	(P1)
	$10^{-3} - 10^{-3}$	0.71	$\frac{1}{25}$	(P1)
	$10^{-3} - 1$	1.09	$\frac{1}{10}$	(P1)
	$1 - 10^4$	1.09	$\frac{1}{5}$	(P1)
	$10^4 - 10^9$	0.53	$\frac{1}{4}$	(M1)
	$> 10^9$	0.13	$\frac{1}{3}$	(P1)
Horizontal plates				
Upper surface of heated plates or lower surface of cooled plates	$10^5 - 2 \times 10^7$	0.54	$\frac{1}{4}$	(M1)
	$2 \times 10^7 - 3 \times 10^{10}$	0.14	$\frac{1}{5}$	(M1)
Lower surface of heated plates or upper surface of cooled plates	$10^5 - 10^{11}$	0.58	$\frac{1}{5}$	(F1)

For a vertical plate at constant temperature and having a height of less than 3 ft, the average natural convective heat transfer coefficient is given by the following equation

$$Nu = \frac{hL}{k} = a \left(\frac{L^3 \rho^2 g \beta \Delta T}{\mu^2} \frac{C_p \mu}{k} \right)^m$$

$$= a(GrPr)^m$$

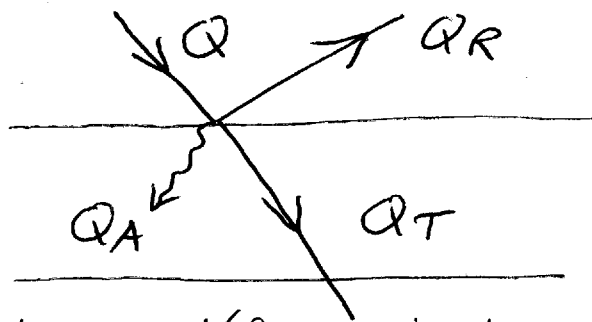
4 - Transfert de chaleur par rayonnement

4.1 - Généralités sur le rayonnement

Le rayonnement thermique est un processus complexe associé au fait que l'énergie se transforme deux fois. Tout d'abord l'énergie thermique se transforme en émission d'ondes électromagnétiques qui se propagent jusqu'au corps absorbant, où elles sont à nouveau transformées en chaleur au contact de celui-ci. Les ondes thermiques (ou Infra-Rouge) ont une position bien précise dans le spectre des ondes EM, étant situées juste en dessous de la lumière rouge visible (cf. Tableau).

		λ en mm
Rayons cosmiques	5×10^{-11}	
Rayons gamma	$0,5 \times 10^{-9}$	
Rayons X	10^{-8}	
UV	2×10^{-5}	
lumière visible	$0,4 \times 10^{-3}$	} facteur 1 en $\Delta \lambda$
IR	$0,8 \times 10^{-3}$	
Ondes radio	$0,8$	
	2×10^5	

Lorsqu'un flux rayonnant IR frappe un certain corps, une partie de ce flux est réfléchi, une autre est transmise, et une troisième est absorbée (cf. Figure)



La conservation de l'énergie implique la relation

$$Q = Q_R + Q_A + Q_T$$

Pour la partie réfléchi on distingue : i) la réflexion spéculaire pour laquelle l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, ii) la réflexion diffuse pour laquelle le faisceau

Réfléchi est composé de rayons répartis dans le demi espace. Une surface produisant une réflexion spéculaire est dite brillante, celle aboutissant à une réflexion diffuse est dite mate.

On définit de plus les quantités suivantes

- Pouvoir réflecteur : $R = Q_R / Q$
- EX : • Quartz imperméable aux IR, mais transparent à la lumière visible et aux UV.
- Sel gemme opaque à l'UV, mais laisse passer IR.
- Verre usuel transparent à la lumière et opaque UV.
- Pouvoir d'absorption : $A = Q_A / Q$
- Pouvoir de transmission : $T = Q_T / Q$

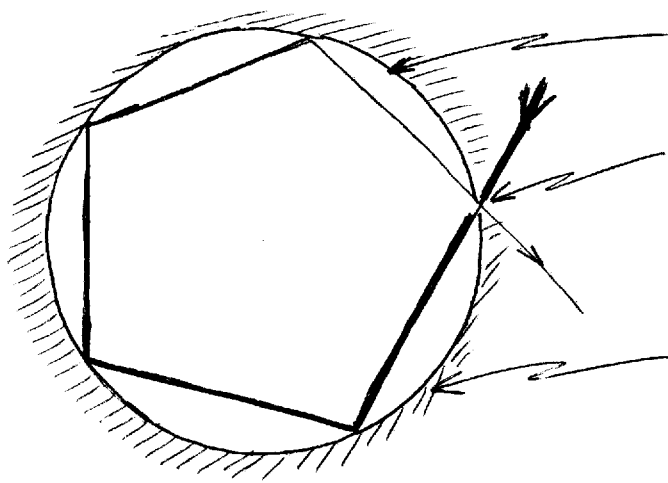
Conservation de l'énergie \Rightarrow $\boxed{R + T + A = 1}$

Examinons les cas particuliers liés à cette expression

- $T = 0 \Rightarrow A + R = 1$ Pas d'absorption, cas des solides et des liquides, corps dits gris
- $R = 0 \Rightarrow A + T = 1$ Pas de réflexion, cas des gaz
- $T = 1 \Rightarrow A = R = 0$ Cas des corps dits transparents ou diathermiques
- $R = 1 \Rightarrow A = T = 0$ Cas des corps dits blancs ou miroirs
- $A = 1 \Rightarrow R = T = 0$ Cas des corps dits noirs

Ces cas limites n'existent pas dans la nature, mais sont pourtant fort utiles (surtout le concept de corps noir) pour l'établissement de la théorie du rayonnement, et sont largement utilisés dans les calculs liés aux échanges de chaleur radiative.

EX : Réalisation d'un corps noir



matériau dont l'intérieur est très absorbant

ouverture de très petite taille pour limiter la probabilité de re-sortie du faisceau lumineux

cavité cylindrique ou sphérique percée d'un petit trou.

4.2 - Lois du rayonnement thermique

* Loi de Planck (1900)

La loi de Planck indique la répartition de l'intensité des ondes EM en fonction de la température dans le cas du spectre de diffusion du corps noir.

$$I_{0\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1 \right]}$$

avec: $h = 6,625 \times 10^{-34}$ J/s : constante de Planck
 $k = 1,380 \times 10^{-23}$ J/°K : constante de Boltzmann
 λ : longueur d'onde (en m)
 $c = 2,998 \times 10^8$ m/s : vitesse de la lumière dans le vide
 T : température en degré Kelvin (°K)

Cette relation se démontre (voir Bruhat, Thermodynamique pp. 627-629) à partir de considérations tirées de la physique quantique (intervention de la constante de Planck, énergie d'un quantum élémentaire de matière) et de la physique statistique (liaison avec la répartition de Boltzmann). Il s'agit là d'une loi universelle qui s'applique au corps noir. L'allure des courbes $I_{0\lambda} = f(\lambda, T)$ est donnée ci-dessous.

Sur ces courbes isothermes, on constate:

- 1) Il existe un maximum de l'intensité pour une certaine longueur d'onde.
- 2) L'intensité de ce maximum croît avec la température par sa puissance 5 (cf. loi de Wien).
- 3) La position exacte du maximum de $I_{0\lambda}$ en fonction de λ , fluctue avec T . Plus la température est élevée, et plus l'abscisse (en longueur d'onde) du maximum diminue (cf. loi de Wien).
- 4) L'aire hachurée sur la Figure permet de calculer l'énergie $dE_{0\lambda, T}$ émise par unité de surface et de temps à la température T dans l'intervalle $d\lambda$ de longueur d'onde, à savoir:

$$dE_{0\lambda, T} = I_{0\lambda} d\lambda$$

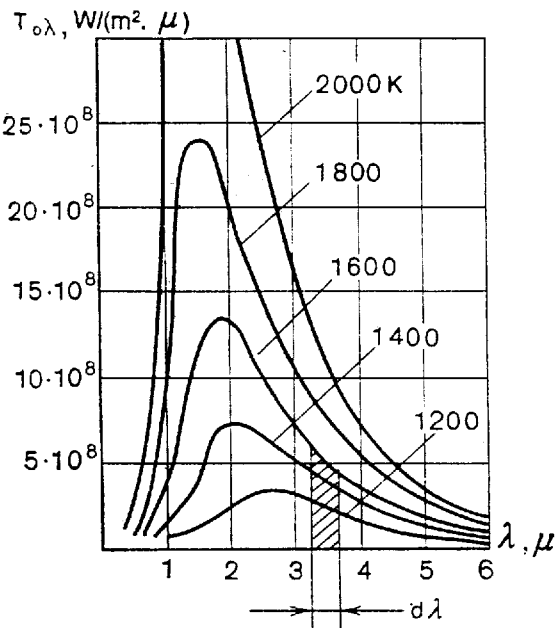
Pour les calculs numériques, on a intérêt à écrire la loi de Planck sous la forme:

$$I_{0\lambda} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left[\exp\left(\frac{C_2}{\lambda T}\right) - 1 \right]}$$

avec:

$$C_1 = 2\pi c^2 h = 3,74 \times 10^{-10} \text{ W} \cdot \text{m}$$

$$C_2 = hc/k = 0,01438 \text{ m} / \text{°K}$$



* Loi de Wien

Elle permet de calculer le déplacement du maximum de $I_{0\lambda}$ en fonction de λ et de T . Elle est obtenue en annulant la dérivée de $I_{0\lambda}$ en fonction de λ :

$$\frac{dI_{0\lambda}}{d\lambda} = 0 \Rightarrow e^{-c_2/\lambda T} + c_2/(5\lambda T) - 1 = 0$$

équation du type $e^{-x} + \frac{x}{5} - 1 = 0$
qui est résolue de manière itérative.

On remarque que cette équation admet la solution triviale $X=0$. Il existe une autre solution pour X voisin de 5, car dans ce cas e^{-X} est négligeable. On débute avec $X=5$ pour calculer e^{-X} et trouver numériquement la nouvelle valeur de X , et ainsi de suite. On trouve :

$$\begin{aligned} X_0 &= 5; \\ X_1 &= 5(1 - e^{-5}) = 4,966310265 \\ X_2 &= 5(1 - e^{-X_1}) = 4,9650593 \\ X_3 &= 5(1 - e^{-X_2}) = 4,965112315 \\ X_4 &= 5(1 - e^{-X_3}) = 4,965114165 \end{aligned}$$

D'où $X = c_2/\lambda T \approx 4,965$

$\Rightarrow \lambda_{\max} T = 2,8978 \text{ mm} \cdot \text{K}$ Expression numérique de la loi de Wien

$$\lambda_{\max} = 0,0028978 / T \quad (\text{en m})$$

Cette valeur est alors réinjectée dans la loi de Planck

$$\Rightarrow I_{0\lambda_{\max}} = \frac{c_1}{\lambda_{\max}^5 [e^{c_2/\lambda_{\max} T} - 1]} = \frac{c_1}{(0,0028978)^5 [e^{(c_2/0,0028978)} - 1]}$$

$\Rightarrow I_{0\lambda_{\max}} = c_3 T^5$ c'est à dire que l'intensité maximale est proportionnelle à la cinquième puissance de la température absolue du corps noir.

* Loi de Stefan - Boltzmann

La loi de Stefan - Boltzmann exprime la quantité globale de l'énergie émise par unité de surface et de temps d'un corps noir. Cette loi fut établie empiriquement par Stefan en 1879, et démontrée théoriquement en 1884 par Boltzmann.

$$E_0 = \int_0^{\infty} I_{0\lambda} d\lambda = c_1 \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^5 [\exp(\frac{c_2}{\lambda T}) - 1]}$$

changement de variable $X = c_2/\lambda T$

$$\Rightarrow dX = -c_2 d\lambda / \lambda^2 T \Rightarrow d\lambda = -\frac{\lambda^2 T}{c_2} dX$$

mais $\lambda = c_2/X T \Rightarrow d\lambda = -\frac{c_2^2 T}{X^2 T^2 c_2} dX = -\frac{c_2}{X^2 T} dX$

$$\Rightarrow E_0 = c_1 \int_0^{\infty} \frac{T^4}{c_2^4} \frac{X^3}{e^X - 1} dX = c_1 \frac{T^4}{c_2^4} \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{X^3}{e^X - 1} dX}_I$$

L'intégrale I se calcule en développant l'intégrande en série, et en intégrant chaque terme de la série d'intégrales par parties :

$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} \cdot \frac{1}{1 - e^{-x}} = e^{-x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^3 e^{-x} e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^3 e^{-(n+1)x} dx$$

$$I' = - \left[\frac{x^3}{n+1} e^{-(n+1)x} \right]_0^{\infty} + \frac{3}{n+1} \int_0^{\infty} x^2 e^{-(n+1)x} dx$$

$$\Rightarrow I' = \frac{3}{n+1} \int_0^{\infty} x^2 e^{-(n+1)x} dx = \frac{3!}{(n+1)^2} \int_0^{\infty} x e^{-(n+1)x} dx$$

$$= \frac{3!}{(n+1)^3} \int_0^{\infty} e^{-(n+1)x} dx = \frac{3!}{(n+1)^4}$$

$$\Rightarrow I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3!}{(n+1)^4} = 6 \left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots \right) = \frac{\pi^4}{15} = 6,494$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{c_1}{c_2} \times 6,494 T^4 \Rightarrow \boxed{E_0 = \sigma_0 T^4}$$

loi de Stefan
Boltzmann

avec $\sigma_0 = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$

σ_0 : constante de Stefan - Boltzmann

La quantité totale de l'énergie rayonnée par un corps noir est proportionnelle à la 4^{ème} puissance de la température de ce corps.

Note : Cette loi s'applique aussi à des corps gris

$$E = \epsilon E_0 = \epsilon \sigma_0 T^4$$

avec $\epsilon \in [0, 1]$: degré de noirceur du corps gris

Une autre démonstration de la loi de Stefan - Boltzmann est possible à partir de considérations thermodynamiques. Pour un gaz photonique (de photons) à l'équilibre, la pression de radiation p s'exprime par la relation :

$$p = u/3 \quad \text{avec } u : \text{énergie interne par unité de volume}$$

Le facteur $1/3$ s'explique par l'équipartition des mouvements photoniques le long des 3 coordonnées spatiales x, y et z .

1^{er} principe : $dU = \delta Q + \delta W = Tds - pdv$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T - p \quad (1)$$

Introduisons l'énergie libre $F = U - TS$

$$\Rightarrow dF = Tds - pdv - Tds - sdt = -pdv - sdt$$

F différentielle totale exacte

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T$$

que l'on utilise dans l'équation (1)

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P$$

Mais $U = uV \Rightarrow \frac{dU}{dV} = u + V \frac{du}{dV}$

u n'est fonction que de T (1ere loi de Joule pour un gaz parfait) et $p = \frac{4}{3}u$

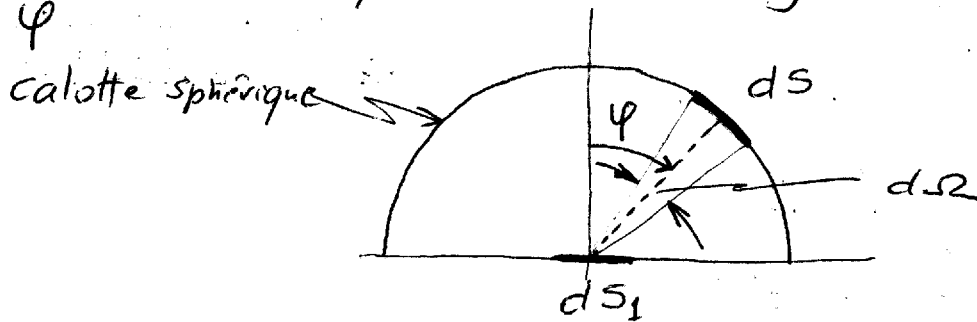
$$\Rightarrow u + \frac{4}{3}u = \frac{1}{3} T \frac{du}{dT} \Rightarrow T \frac{du}{dT} = 4u$$

Soit en intégrant $u = \sigma_0 T^4$ CQFD

Note: La méthode thermodynamique ne détermine pas la valeur de la constante de Stefan - Boltzmann σ_0 .

* Loi de Lambert (ou loi du cosinus)

La loi de Lambert indique que la quantité d'énergie rayonnante transmise dans la direction φ par rapport à la normale à l'élément dS est proportionnelle à l'angle solide $d\Omega$ dans lequel est émis le rayonnement et à $\cos \varphi$.



$$dQ_\varphi = E_m d\Omega \cos \varphi dS_1$$

Par définition $d\Omega = \frac{dS}{r^2}$ (analogue à l'angle plan) $d\theta = \frac{dL}{dr}$

Sur la calotte sphérique, l'élément de surface

$$dS = r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$$

$$\Rightarrow dQ_\varphi = E_m \sin \varphi \cos \varphi d\varphi d\theta dS_1$$

Soit pour la demi-sphère totale :

$$\begin{aligned} dQ &= \int dQ_\varphi = E_m dS_1 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \\ &= 2\pi E_m dS_1 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d(\sin \varphi) \\ &= 2\pi E_m dS_1 \left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_0^{\pi/2} = \pi E_m dS_1 \end{aligned}$$

Ce résultat est à comparer avec celui tiré de la définition élémentaire de la quantité totale d'énergie du rayonnement transmise par diffusion par l'élément de surface dS_1 :

$$dQ = E dS_1 = \sigma_0 T^4 dS_1$$

$$\Rightarrow E_m = E / \pi$$

relation indiquant que le flux rayonnant dans la direction à la normale est π fois inférieur au rayonnement par diffusion de $1/2$ sphère

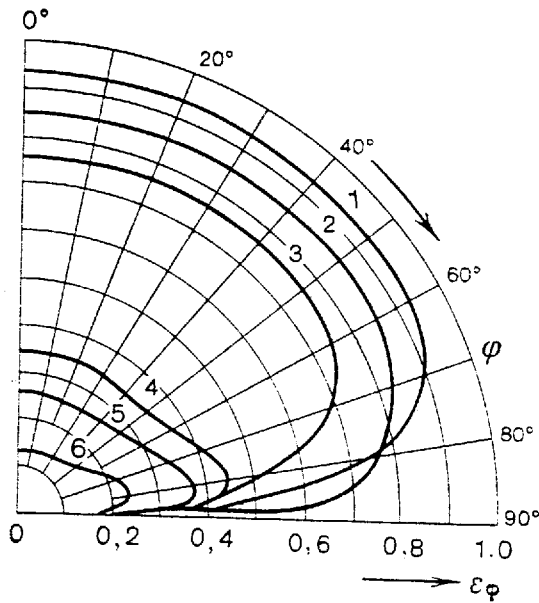
Finalement, la quantité d'énergie émise dans la direction φ par rapport à la normale peut maintenant s'écrire :

$$dQ_\varphi = \frac{E}{\pi} d\Omega \cos\varphi dS_1 \quad \text{pour un corps noir}$$

$$dQ_\varphi = \varepsilon_\varphi \frac{E}{\pi} d\Omega \cos\varphi dS_1 \quad \text{pour un corps gris}$$

avec $\varepsilon_\varphi = E_\varphi / E_{0\varphi}$

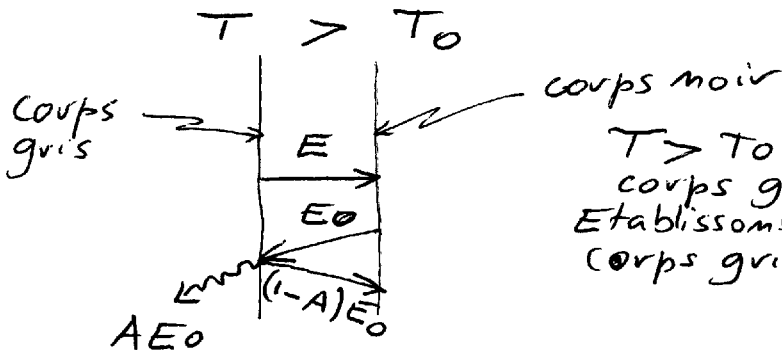
La loi de Lambert est rigoureusement vérifiée pour le corps noir. Un corps gris vérifiant la loi de Lambert doit avoir ε_φ indépendant de φ . Il existe très peu de tels corps gris (φ). Courbes écarts à la loi de Lambert :



Ecarts de la loi de Lambert:
 1 — bois; 2 — corindon; 3 — cuivre oxydé;
 4 — bismuth; 5 — alumine-bronze; 6 — laiton

* Loi de Kirchhoff

La loi de Kirchhoff établit la relation entre les pouvoirs d'émission et d'absorption d'un corps qui n'a pas besoin d'être nécessairement noir.



$T > T_0 \Rightarrow$ transfert radiatif du corps gris vers le corps noir
 Établissons le bilan de chaleur pour le corps gris :

$$q = E - A E_0$$

flux de chaleur ($q = \frac{dQ}{dS}$)

Lorsque $T = T_0$ (équilibre) $\Rightarrow q = 0 \Rightarrow \frac{E}{A} = E_0$

Loi de Kirchhoff est valide pour n'importe quel corps :

$$\frac{E_1}{A_1} = \frac{E_2}{A_2} = \dots = \frac{E_n}{A_n} = E_0$$

Conséquence : $E = \epsilon \sigma_0 T^4$

Or $E = A \epsilon_0 = A (\sigma_0 T^4) \Rightarrow \boxed{E = A}$

Le degré de noirceur est identique au pouvoir d'absorption à la température donnée.

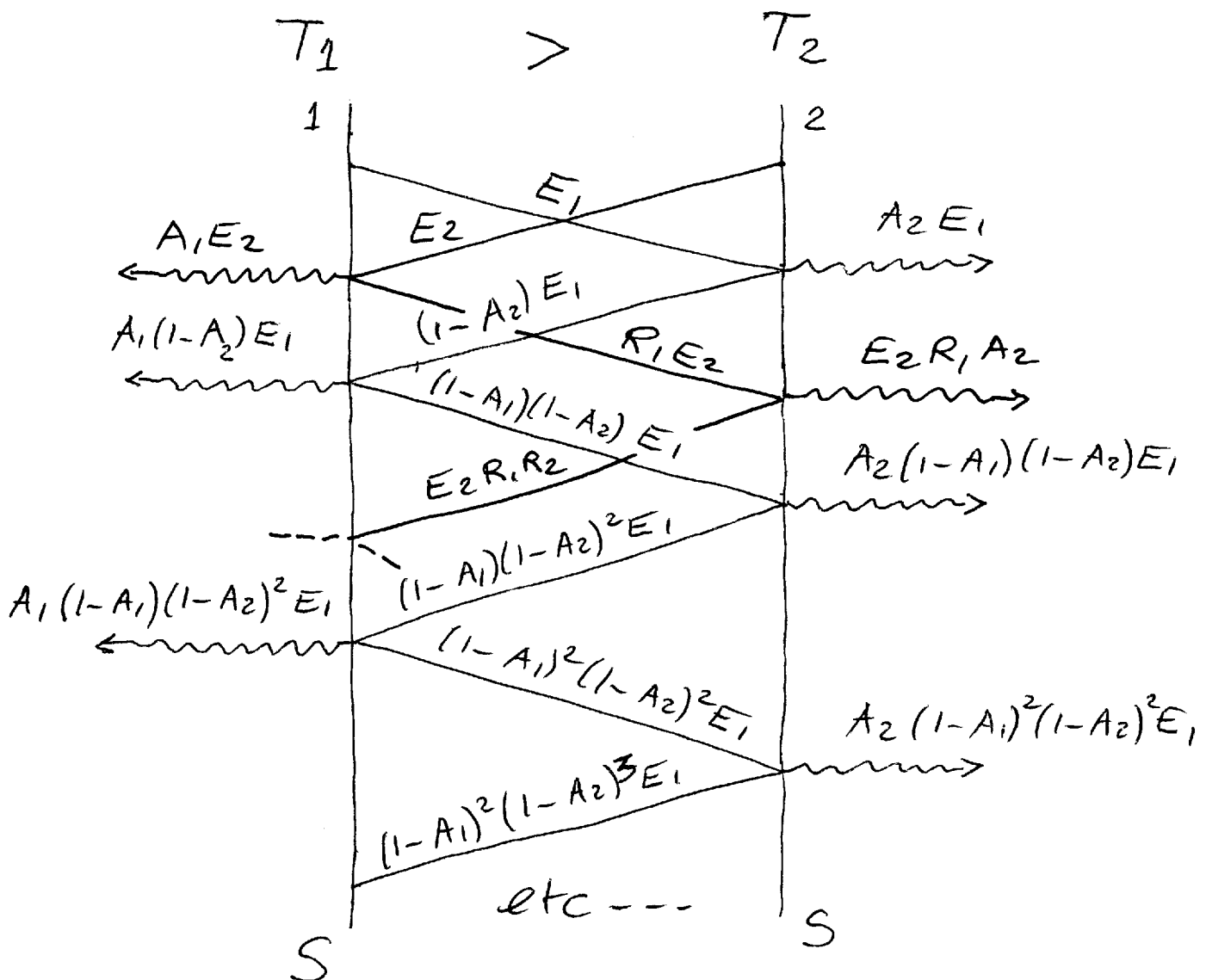
Remarque : La loi de Kirchhoff indique qu'un corps ayant un faible pouvoir d'absorption possède aussi un faible pouvoir émissif. Cette propriété est utilisée avec profit pour les parois de thermos et de vases Dewar qui sont toujours recouvertes d'un amalgame d'aluminium et d'argent ($\epsilon \approx 0,02$ à $0,03$).

4.3 - Exemples d'échanges de chaleur radiatifs

* Problème de deux plaques parallèles

On suppose que les deux plaques sont séparées par un milieu diathermique (ou transparent) et qu'il n'y a pas de perte.

$\Rightarrow A + R = 1 ; D = 0$



Bilan thermique

Posons $R_1 = 1 - A_1$; $R_2 = 1 - A_2$

Calculons la quantité d'énergie émise par le corps 1 et absorbée par le corps 2 :

$$Q_1 = S [E_1 A_2 + E_1 A_2 R_1 R_2 + E_1 A_2 R_1^2 R_2^2 + \dots]$$

$$= S \sum_{n=0}^{\infty} E_1 A_2 (R_1 R_2)^n = S E_1 A_2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (R_1 R_2)^n}_{\text{Somme géométrique de raison } R_1 R_2}$$

si $R_1, R_2 < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (R_1 R_2)^n = \frac{1}{1 - R_1 R_2}$

$$\Rightarrow Q_1 = S E_1 A_2 / (1 - R_1 R_2)$$

Calculons de la même manière (tracé rouge sur la Figure) la quantité d'énergie du rayonnement propre du corps qui lui revient pour être de nouveau absorbée :

$$Q_2^0 = S (E_2 A_2 R_1 + E_2 A_2 R_1^2 R_2 + E_2 A_2 R_1^3 R_2^2 + \dots)$$

$$= S E_2 A_2 R_1 / (1 - R_1 R_2)$$

La quantité d'énergie émise par le corps 2 est $Q_2 = E_2 S$
Bilan d'énergie relatif au corps 2. Calculons Q , ensemble des chaleurs reçues par le corps 2 :

$$Q = Q_1 + Q_2^0 - Q_2 = S \left(\frac{E_1 A_1}{1 - R_1 R_2} + \frac{E_2 A_2 R_1}{1 - R_1 R_2} - E_2 \right)$$

$$= \frac{S}{1 - R_1 R_2} (E_1 A_2 + E_2 A_2 R_1 - E_2 + E_2 R_1 R_2)$$

$$= \frac{S}{1 - R_1 R_2} (E_1 A_2 + E_2 A_2 (1 - A_1) - E_2 + E_2 (1 - A_1) (1 - A_2))$$

$$\Rightarrow Q = \frac{S}{1 - R_1 R_2} (E_1 A_2 - E_2 A_1)$$

avec $E_1 = \sigma_0 T_1^4$ et $E_2 = \sigma_0 T_2^4$

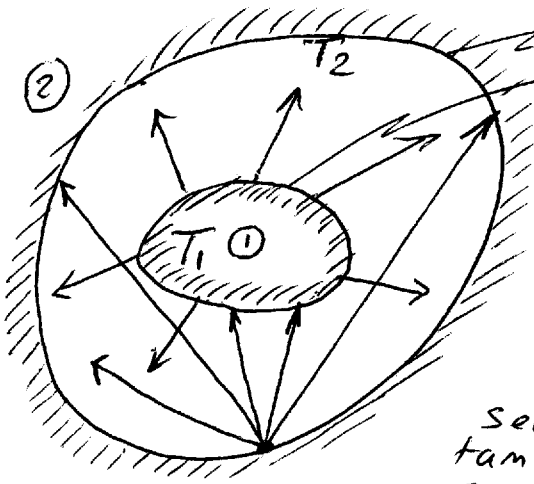
$$\Rightarrow \boxed{Q = \epsilon_{\text{réduit}} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) S}$$

avec $\epsilon_{\text{réduit}}$: coefficient de noirceur réduit

$$\epsilon_{\text{réduit}} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

* Problème d'un corps à l'intérieur d'une enveloppe

A partir d'un raisonnement tout à fait similaire à celui du calcul précédent, on peut montrer que :



$$Q = \epsilon'_{\text{réduit}} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) S_1$$

avec $\epsilon'_{\text{réduit}} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1} + \left(\frac{S_1}{S_2}\right)\left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)}$

Pour établir ce résultat, il faut seulement tenir compte de la circonstance suivante : le 1er corps reçoit seulement la part $\beta E_{1,R_2}$ de l'énergie réfléchiée par l'enveloppe, alors que le reste, égal à $(1-\beta) E_{1,R_2}$ passe outre et vient frapper de nouveau la surface de l'enveloppe. Dans ces expressions $\beta = \frac{S_1}{S_2}$. Il faut noter que ce résultat est particulièrement général puisque :

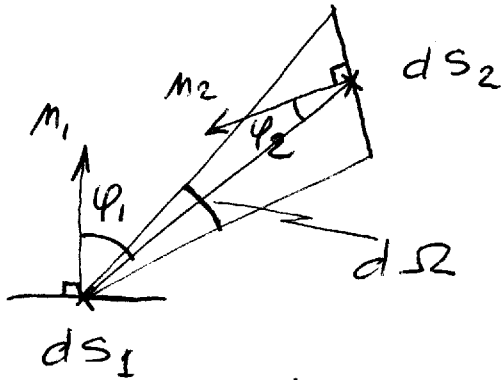
- 1) La forme des deux corps est arbitraire.
- 2) La position du corps 1 par rapport à l'enveloppe est quelconque.

Une seule condition est imposée : la surface du corps 1 doit être partout convexe (il ne doit pas rayonner vers lui-même), et celle de l'enveloppe doit être partout concave.

* Echange radiatif entre deux corps disposés arbitrairement

Expression de l'angle solide $d\Omega$:

$$d\Omega = dS_2 \times \cos \varphi_2 / r^2$$



Considérons la loi de Lambert qui exprime l'énergie émise par diffusion par l'élément dS_1 vers dS_2 :

$$dQ_1 = \frac{E_1}{\pi} d\Omega \cos \varphi_1 dS_1$$

$$\Rightarrow dQ_2 = \sigma_0 T_1^4 \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dS_1 dS_2$$

Energie absorbée par le 2eme élément :

$$dQ_{2 \rightarrow 1} = A_2 dQ_1 = A_2 \sigma_0 T_1^4 \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dS_1 dS_2$$

De même :

$$dQ_{1 \rightarrow 2} = A_1 dQ_2 = A_1 \sigma_0 T_2^4 \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dS_1 dS_2$$

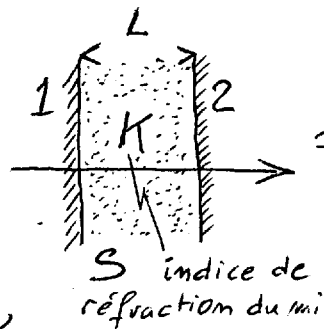
$$dQ = dQ_{2 \rightarrow 1} - dQ_{1 \rightarrow 2} = \epsilon''_{\text{réduit}} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dS_1 dS_2$$

$$\Rightarrow Q = \epsilon''_{\text{réduit}} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) \int_{S_1} dS_1 \int_{S_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dS_2$$

$Q = \epsilon''_{\text{réduit}} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) F_{12}$ Intégrale possédant la dimension d'une Surface : Surface de radiation mutuelle

4.4 - Transfert de chaleur mixte

* Echange de chaleur par rayonnement et conduction



Dans le cas d'un milieu non diffusif compris entre deux surfaces planes (1 et 2), le problème est caractérisé par cinq paramètres sans dimension, à savoir: le degré de noirceur des 2 corps ϵ_1 et ϵ_2 , la température relative de la surface froide $\Theta = T_2/T_1$, l'épaisseur optique caractéristique de la couche du milieu KL , et le paramètre $N = \lambda h / 4 \sigma_0 T_1^3$. Ce dernier coefficient définit l'intensité mutuelle du transfert de chaleur par conduction et rayonnement: pour $N \rightarrow \infty$, la chaleur est transmise par conduction seulement, et pour $N \rightarrow 0$ par rayonnement uniquement.

• Couche optiquement mince ($KL \rightarrow 0$)

Le rayonnement n'est pas absorbé par le milieu, mais transmis intégralement d'une plaque à l'autre (milieu diathermique). Dans ce cas simple $q = q_{\text{ray}} + q_{\text{conduc}}$

$$\Rightarrow q = \epsilon_{\text{réduit}} \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) + \frac{\lambda}{L} (T_1 - T_2)$$

• Couche optiquement épaisse ($KL \rightarrow +\infty$)

On retrouve une expression analogue mais le degré de noirceur réduit ne figure plus dans la formule, étant remplacé par une autre constante:

$$q = C \sigma_0 (T_1^4 - T_2^4) + \frac{\lambda}{L} (T_1 - T_2)$$

• Dans le cas général d'une épaisseur optique finie de la couche, le rayonnement de la surface pénètre profondément dans le volume du milieu où il est partiellement absorbé, ce qui influe sur la distribution de la température. Ceci à son tour modifie les conditions de transfert de chaleur par conduction; il en résulte que le flux global ne peut plus s'obtenir par simple sommation des composantes radiatives et conductive calculée indépendamment l'une de l'autre.

* Echange de chaleur par rayonnement et convection

Le problème est si compliqué que l'analyse n'a pu porter que sur quelques cas très simplifiés. On considère généralement que les flux de chaleur par rayonnement et par convection sont indépendants et peuvent tout simplement être ajoutés. Ceci implique que l'on ne tient pas compte de l'influence de l'échange radiatif sur les profils de vitesse et de température liés à la convection. Cette hypothèse simplificatrice ne peut être acceptable que lorsque le flux par rayonnement est de manière significative plus faible que celui par convection. Malheureusement, cette condition est loin d'être systématiquement vérifiée.

6. Thermoélasticité linéaire d'un solide isotrope

6.1 - Lois de Hooke - Duhamel

Un solide isotrope subissant une augmentation de température $\Delta T = T - T_0$, libre de se dilater, voit sa longueur passer de l_0 à l , avec :

$$l = l_0 (1 + \alpha (T - T_0)), \text{ où } \alpha = \text{coefficient de dilatation.}$$

A priori, si le solide est isotrope, un élément de longueur l pris le long d'une direction arbitraire quelconque dans le solide suivra la même loi de variation. On peut dès lors calculer la déformation :

$$\epsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \alpha (T - T_0).$$

Seules les composantes diagonales du tenseur de déformation $\underline{\underline{\epsilon}}$, à savoir ϵ_{11} , ϵ_{22} et ϵ_{33} seront affectées par le phénomène de dilatation. Les composantes de cisaillement ϵ_{12} , ϵ_{13} et ϵ_{23} seront inchangées. On peut dès lors écrire la loi de Hooke - Duhamel sous la forme :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha (T - T_0) \delta_{ij} \quad (1)$$

Note 1 : Le coefficient de dilatation α est toujours très faible. Il s'exprime en $10^{-6}/^\circ\text{C}$

$$\alpha_{\text{alu}} = 23 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C} ; \alpha_{\text{acier}} = 13 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$$

$$\alpha_{\text{verre}} \approx 5 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C} ; \alpha_{\text{plexiglass}} \approx 80 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$$

$$\alpha_{\text{béton}} \approx 15 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C} ; \alpha_{\text{caoutchouc}} \approx 150 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$$

On utilise pour certaines applications mettant en jeu des variations de température importantes un alliage, l'INVAR, dont le coefficient de dilatation α est faible ($\alpha_{\text{INVAR}} \approx 1 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$)
+ Table n°2 p. 73 D. Bellet & J.J. Barrau.

Note 2 : Dans la loi de Hooke - Duhamel écrite ci-dessus, E , ν et α sont des fonctions de la température.

$E_{\text{acier}} \approx 200 \text{ GPa}$ pour $T \in] -150^\circ\text{C}, 300^\circ\text{C}[$
Ensuite E_{acier} décroît à peu près linéairement avec T pour atteindre $E_{\text{acier}} = 140 \text{ GPa}$ pour $T = 1200^\circ\text{C}$
($T_{\text{fusion}} \approx 1400^\circ\text{C}$)

$\nu_{\text{acier}} \approx 0,29$ à $T = 20^\circ\text{C}$; $\nu_{\text{acier}} \approx 0,32$ à $T = 350^\circ\text{C}$

Au delà ν_{acier} décroît.

Pour inverser l'équation de Hooke - Duhamel, il faut tout d'abord prendre la trace de (1):

$$\epsilon_{ii} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ii} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\ell\ell} \delta_{ii} + \alpha(T-T_0) \delta_{ii}$$

$$\text{avec } \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

$$\Rightarrow \epsilon_{ii} = \left(\frac{1+\nu}{E} - 3 \frac{\nu}{E} \right) \sigma_{ii} + 3\alpha(T-T_0)$$

$$\Rightarrow \epsilon_{ii} = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{ii} + 3\alpha(T-T_0)$$

$$\Rightarrow \sigma_{ii} = \frac{E}{1-2\nu} \epsilon_{ii} - \frac{3E}{1-2\nu} \alpha(T-T_0)$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{\ell\ell} \delta_{ij} - \frac{E\alpha}{1+\nu} (T-T_0) \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1+\nu} \frac{E}{1-2\nu} \epsilon_{\ell\ell} \delta_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \times \frac{3E}{1-2\nu} \alpha(T-T_0) \delta_{ij}$$

$$- \frac{E\alpha}{1+\nu} (T-T_0) \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{\ell\ell} \delta_{ij} - \left[\frac{3\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E(1-2\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right] \alpha(T-T_0) \delta_{ij}$$

$$\text{or } \frac{3\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E(1-2\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = - \frac{E(1+\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = - \frac{E}{1-2\nu} = -K,$$

avec $K = 3\lambda + 2\mu$: coefficient de compressibilité

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{\ell\ell} \delta_{ij} - K\alpha(T-T_0) \delta_{ij}} \quad (2)$$

6.2 - Etude des cas limites plans:

Cas des déformations planes $\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$

Les composantes du tenseur des contraintes $\bar{\sigma}$, sont fournies par l'équation (2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = 2\mu \epsilon_{11} + \lambda (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) - K\alpha(T-T_0) \quad (3) \\ \sigma_{22} = 2\mu \epsilon_{22} + \lambda (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) - K\alpha(T-T_0) \quad (4) \\ \sigma_{33} = \lambda (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) - K\alpha(T-T_0) \\ \sigma_{12} = 2\mu \epsilon_{12} \Rightarrow \epsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \end{array} \right.$$

$$(3) \Rightarrow \sigma_{11} + K\alpha(T-T_0) = (2\mu + \lambda) \epsilon_{11} + \lambda \epsilon_{22}$$

$$(4) \Rightarrow \sigma_{22} + K\alpha(T-T_0) = \lambda \epsilon_{11} + (2\mu + \lambda) \epsilon_{22}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{11} = \frac{\begin{vmatrix} \sigma_{11} + K\alpha(T-T_0) & \lambda \\ \sigma_{22} + K\alpha(T-T_0) & 2\mu + \lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda \\ \lambda & 2\mu + \lambda \end{vmatrix}} = \frac{(2\mu + \lambda)\sigma_{11} - \lambda\sigma_{22} + 2\mu K\alpha(T-T_0)}{(2\mu + \lambda)^2 - \lambda^2}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{11} = \frac{2\mu + \lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \sigma_{11} - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \sigma_{22} + \frac{\kappa}{2(\lambda + \mu)} \alpha (T - T_0)$$

$$\text{or } \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} ; \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

D'où:

$$\frac{2\mu + \lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} = \frac{2E(1-2\nu) + 2E\nu}{E(1-2\nu) + 2E\nu} \times \frac{2(1+\nu)}{4E} = \frac{(1-\nu)(1+\nu)}{E}$$

$$\frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} = \frac{2E\nu}{E(1-2\nu) + 2E\nu} \times \frac{2(1+\nu)}{4E} = \frac{\nu(1+\nu)}{E}$$

$$\frac{\kappa}{2(\lambda + \mu)} = \frac{3\lambda + 2\mu}{2\lambda + 2\mu} = \frac{6E\nu + 2E(1-2\nu)}{4E\nu + 2E(1-2\nu)} = (1+\nu)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \epsilon_{11} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right) [(1-\nu)\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}] + (1+\nu)\alpha(T-T_0) \\ \text{De même:} \\ \epsilon_{22} = \left(\frac{1+\nu}{E}\right) [(1-\nu)\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}] + (1+\nu)\alpha(T-T_0) \end{cases}$$

Pour remonter aux contraintes, il suffit de revenir à leur définition (i.e. équation (2)):

$$\begin{cases} \sigma_{11} = (2\mu + \lambda)\epsilon_{11} + \lambda\epsilon_{22} - \kappa\alpha(T-T_0) \\ \sigma_{22} = (2\mu + \lambda)\epsilon_{22} + \lambda\epsilon_{11} - \kappa\alpha(T-T_0) \\ \sigma_{33} = \lambda(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) - \kappa\alpha(T-T_0) \end{cases}$$

$$\text{avec } \lambda + 2\mu = \frac{2E\nu + 2E(1-2\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (1-\nu)$$

$$\lambda = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \nu$$

$$\kappa = 3\lambda + 2\mu = \frac{6E\nu + 2E(1-2\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2E(1+\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{E}{1-2\nu}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_{11} + \nu\epsilon_{22}] - \frac{E\alpha}{1-2\nu} (T-T_0) \\ \sigma_{22} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_{22} + \nu\epsilon_{11}] - \frac{E\alpha}{1-2\nu} (T-T_0) \\ \sigma_{33} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \nu(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) - \frac{E\alpha}{1-2\nu} (T-T_0) \end{cases}$$

Cas des contraintes planes $\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$
 Les composantes du tenseur des déformations $\vec{\epsilon}$, sont $\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}$ fournies par l'équation (1):

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \alpha (T - T_0) & (5) \\ \varepsilon_{22} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \alpha (T - T_0) & (6) \\ \varepsilon_{33} = & - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \alpha (T - T_0) \\ \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} \Rightarrow \sigma_{12} = 2\mu \varepsilon_{12} \end{cases}$$

$$(5) \Rightarrow \varepsilon_{11} - \alpha (T - T_0) = \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22}$$

$$(6) \Rightarrow \varepsilon_{22} - \alpha (T - T_0) = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} + \frac{1}{E} \sigma_{22}$$

$$\Rightarrow \sigma_{11} = \frac{\begin{vmatrix} E(\varepsilon_{11} - \alpha(T - T_0)) & -\nu \\ E(\varepsilon_{22} - \alpha(T - T_0)) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \nu \\ -\nu & 1 \end{vmatrix}} = \frac{E\varepsilon_{11} + E\nu\varepsilon_{22} - E(1+\nu)\alpha(T - T_0)}{1 - \nu^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_{11} + \frac{E\nu}{1 - \nu^2} \varepsilon_{22} - \frac{E\alpha}{1 - \nu} (T - T_0)$$

$$\Rightarrow \sigma_{11} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) - \frac{E\alpha}{1 - \nu} (T - T_0)$$

De même:

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}) - \frac{E\alpha}{1 - \nu} (T - T_0)$$

6.3 - Equations du mouvement de Navier-Duhamel

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \delta_i$$

$$\text{or } \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ee} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - K\alpha (T - T_0) \delta_{ij}$$

$$\text{avec } \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ et } \varepsilon_{ee} = u_{e,e}$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij,j} = \lambda u_{e,ej} \delta_{ij} + \mu (u_{i,jj} + u_{j,ij}) - K\alpha T_{,i} = \rho \delta_i - f_i$$

$$\text{or } u_{e,ej} = u_{j,ij} = \sum_{e=1}^3 \frac{\partial^2 u_e}{\partial x_e \partial x_j}$$

$$\Rightarrow (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu (u_{i,jj}) - K\alpha T_{,i} = \rho \delta_i - f_i$$

$$\Rightarrow (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} - K\alpha \text{grad} T = \rho \vec{\gamma} - \vec{f}$$

$$\text{or } \nabla^2 \vec{u} = \Delta \vec{u} = \text{grad}(\text{div} \vec{u}) - \text{rot}(\text{rot} \vec{u})$$

$$\Rightarrow (\lambda + 2\mu) \text{grad}(\text{div} \vec{u}) - \mu \text{rot}(\text{rot} \vec{u}) - (3\lambda + 2\mu) \alpha \text{grad} T = \rho \vec{\gamma} - \vec{f}$$

6.4 - Equation de Beltrami - Michell

Il s'agit pour la thermoélasticité de la généralisation de l'équation de Beltrami (cf section 4.3.2). Celle-ci peut s'établir à l'aide des équations écrites sous forme vectorielle :

Equation du mouvement : $\text{div } \vec{\sigma} = -\vec{f}$

Equation de Hooke - Duhamel : $\vec{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \vec{\sigma} - \frac{\nu}{E} \Delta \mathbf{I} + \alpha(T-T_0)\mathbf{I}$

On utilise alors l'équation de compatibilité cinématique (cf section 1.2.4) du champ de déformation :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{\epsilon} = 0 \Rightarrow \vec{\text{rot}} \left(\vec{\text{rot}} \left(\frac{1+\nu}{E} \vec{\sigma} - \frac{\nu}{E} \Delta \mathbf{I} + \alpha(T-T_0)\mathbf{I} \right) \right) = 0$$

or $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{\sigma}) = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{\sigma} - \nabla^2 \vec{\sigma} + \vec{\text{grad}}^t \text{div} \vec{\sigma} - \vec{\text{grad}} \vec{\text{grad}} \Delta$

et $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \Delta \mathbf{I}) = -\vec{\text{grad}} \vec{\text{grad}} \Delta - \nabla^2(\Delta \mathbf{I})$

$$\Rightarrow \frac{1+\nu}{E} \left\{ \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{\sigma} - \nabla^2 \vec{\sigma} + \vec{\text{grad}}^t \text{div} \vec{\sigma} - \vec{\text{grad}} \vec{\text{grad}} \Delta \right\} - \frac{\nu}{E} \left(-\vec{\text{grad}} \vec{\text{grad}} \Delta - \nabla^2(\Delta \mathbf{I}) \right) + \alpha \left(-\vec{\text{grad}} \vec{\text{grad}} T - \nabla^2(T\mathbf{I}) \right) = 0$$

$$\Rightarrow (1+\nu) \left(-\vec{\text{grad}} \vec{f} - \vec{\text{grad}}^t \vec{f} - \Delta \vec{\sigma} \right) = \vec{\text{grad}} \vec{\text{grad}} \Delta - \nu \Delta(\Delta \mathbf{I}) - \alpha E \vec{\text{grad}} \vec{\text{grad}} T - \alpha E \Delta(T\mathbf{I})$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \vec{\text{grad}} \vec{\text{grad}} \Delta - \frac{\nu}{1+\nu} \Delta \Delta \mathbf{I} = -\vec{\text{grad}} \vec{f} - \vec{\text{grad}}^t \vec{f} - \frac{\alpha E}{1+\nu} \vec{\text{grad}} \vec{\text{grad}} T - \frac{\alpha E}{1+\nu} \Delta(T\mathbf{I})$$

← termes additionnels

$$-\vec{\text{grad}} \vec{f} - \vec{\text{grad}}^t \vec{f} = \Delta \vec{\sigma} - \frac{1}{1+\nu} \Delta(\nu \Delta - \alpha E T)\mathbf{I} + \frac{1}{1+\nu} \vec{\text{grad}} \vec{\text{grad}} (\Delta + \alpha E T)$$

Equation de Beltrami - Michell

Une autre façon de procéder consiste à considérer les équations écrites sous forme développées :

Equation du mouvement : $\sigma_{ij,j} = -f_i$

Equation de Hooke - Duhamel : $\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\ell\ell} \delta_{ij} + \alpha(T-T_0)\delta_{ij}$

L'équation de compatibilité dynamique :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{\Sigma} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{\Sigma} - \Delta \vec{\Sigma} + \vec{\text{grad}}^t \text{div} \vec{\Sigma} - \vec{\text{grad}} \text{grad} \Sigma = 0$$

devient :

$$\varepsilon_{ij, kk} + \varepsilon_{kk, ij} = \varepsilon_{ik, jk} + \varepsilon_{jk, ik}$$

$$\varepsilon_{ik, jk} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ik, jk} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll, jk} \delta_{ik} + \alpha T_{, jk} \delta_{ik}$$

$$\varepsilon_{jk, ik} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{jk, ik} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll, ik} \delta_{jk} + \alpha T_{, ik} \delta_{jk}$$

$$\varepsilon_{kk, ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{kk, ij} - \frac{3\nu}{E} \sigma_{ll, ij} + 3\alpha T_{, ij}$$

$$\varepsilon_{ij, kk} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij, kk} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll, kk} \delta_{ij} + \alpha T_{, kk} \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{kk, ij} + 3\alpha T_{, ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij, kk} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll, kk} \delta_{ij} + \alpha T_{, kk} \delta_{ij}$$

$$= \frac{1+\nu}{E} (-f_{ijj} - f_{jii}) - \frac{\nu}{E} (\sigma_{ll, jk} \delta_{ik} + \sigma_{ll, ik} \delta_{jk}) + \alpha (T_{, jk} \delta_{ik} + T_{, ik} \delta_{jk})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{E} \sigma_{kk, ij} + \alpha T_{, ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij, kk} - \frac{\nu}{E} \sigma_{ll, kk} \delta_{ij} + \alpha T_{, kk} \delta_{ij} = \frac{1+\nu}{E} (-f_{ijj} - f_{jii})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\nu} \sigma_{kk, ij} + \frac{\alpha E}{1+\nu} T_{, ij} + \sigma_{ij, kk} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{ll, kk} \delta_{ij} = -f_{ijj} - f_{jii} + \frac{\alpha E}{1+\nu} T_{, kk} \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \left[-f_{ijj} - f_{jii} = \sigma_{ij, kk} - \frac{1}{1+\nu} (\nu \sigma_{ll, kk} - \alpha E T_{, kk}) \delta_{ij} + \frac{1}{1+\nu} (\sigma_{kk, ij} + \alpha E T_{, ij}) \right]$$

On retrouve bien l'expression précédente de l'équation de Beltrami-Michell écrite avec ses composantes.

En prenant la trace de cette équation, on obtient :

$$-2f_{i, ii} = \sigma_{ii, kk} + \left(\frac{1}{1+\nu} - \frac{3\nu}{1+\nu} \right) \sigma_{ll, kk} + \frac{4\alpha E}{1+\nu} T_{, kk}$$

$$\Rightarrow \left[\text{div} \vec{f} = -\frac{1-\nu}{1+\nu} \Delta \rho - \frac{2\alpha E}{1+\nu} \Delta T \right]$$

relation à comparer avec l'équation correspondante pour l'équation de Beltrami (cf section 4.3.2)

6.5 - Champs de température sans contrainte

Lorsqu'un solide est chauffé de façon uniforme, i.e., $T(M) = T$ ($\forall M$), il n'y a pas d'apparition de contrainte d'origine thermique. Par contre, si le champ de température n'est pas uniforme, certaines zones se dilatent plus que d'autres, et cela crée des contraintes d'origine thermique. On peut se poser la question suivante. Dans quelles conditions pour le champ de température, n'observe-t-on pas de contraintes thermiques?

Pas de contrainte $\Rightarrow \sigma \equiv 0$ et $\Delta \equiv 0$
Or il n'y a pas de force extérieure $\Rightarrow f = 0$

$$\text{D'où Beltrami} \Rightarrow \frac{\alpha E}{1+\nu} (\Delta T + \text{grad grad } T) \equiv 0$$

D'où toutes les dérivées secondes de T par rapport à x, y et z doivent être nulles. Une solution est de prendre

$$T - T_0 = ax + by + cz + d$$

$$\Rightarrow \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \alpha(T - T_0) \delta_{ij} \\ = \alpha(ax + by + cz + d) \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{11} = u_{1,1} = \alpha(ax + by + cz + d)$$

$$\Rightarrow u_1 = \alpha \frac{x^2}{2} + \alpha(by + cz + d)x + A$$

De même:

$$\epsilon_{22} = u_{2,2} = \alpha(ax + by + cz + d)$$

$$\Rightarrow u_2 = \alpha \frac{y^2}{2} + \alpha(ax + cz + d)y + B$$

et $\epsilon_{33} = u_{3,3} = \alpha(ax + by + cz + d)$

$$\Rightarrow u_3 = \alpha \frac{z^2}{2} + \alpha(ax + by + d)z + C$$

De plus: $w_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$

$$\Rightarrow \begin{cases} w_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} - u_{2,1}) = \frac{1}{2} \alpha (bx - ay) \\ w_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} - u_{3,1}) = \frac{1}{2} \alpha (cx - az) \\ w_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} - u_{3,2}) = \frac{1}{2} \alpha (cy - bz) \end{cases}$$

Note: Le cas d'un échauffement uniforme $T - T_0 = d$

$$\Rightarrow a = b = c \Rightarrow \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \alpha d$$

$$\Rightarrow u_1 = \alpha dx; u_2 = \alpha dy; u_3 = \alpha dz$$

$w_{12} = w_{13} = w_{23} = 0$, est un champ de température admissible (sans contrainte).

6.6 - Considérations générales sur la résolution d'un problème de thermoélasticité

Si l'on connaît les quantités suivantes :

- 1) La géométrie des solides constituant la structure
- 2) Les caractéristiques mécaniques (E, ν) et thermique (α, c, λ) des matériaux
- 3) Les liaisons mécaniques internes et externes
- 4) Les conditions aux limites de chargement mécanique et thermique

On peut calculer en tout point M de la structure :

- 1) Les 3 composantes du champ de déplacement $\vec{u}(M)$
- 2) Les 3 composantes du vecteur rotation $\vec{\Omega}(M)$
- 3) Les 6 composantes du tenseur des déformations $\vec{\epsilon}(M)$
- 4) Les 6 composantes du tenseur des contraintes $\vec{\sigma}(M)$,

soit 18 fonctions de $M(x, y, z)$ et de t .

Le champ de température $T(M)$ est déterminé au préalable à l'aide de l'équation de la chaleur :

$$\chi \Delta T = \dot{T}, \text{ avec } \chi = \lambda / \rho c$$

λ : conductivité thermique (W/m.°C)
 χ : diffusivité thermique (m²/s)

ρ : masse volumique (kg/m³)

c : capacité calorifique (cal/kg.°C)

Il faut donc, pour résoudre complètement le problème, 18 équations scalaires locales (fonction du point M considéré) indépendantes qui sont :

- 1) Les relations de définition de $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u}$ (3 équations)
- 2) Les relations de définition des déformations :

$$\epsilon = \frac{1}{2} (\text{grad } \vec{u} + \text{grad } {}^t \vec{u}), \text{ ou bien les relations de compatibilité cinématique : } \text{rot } \text{rot } \vec{\epsilon} = 0 \quad (6 \text{ équations})$$

- 3) Les relations locales d'équilibre $\sigma_{ij,j} + f_i = \rho f_i$ (3 équations)

- 4) Les relations entre contraintes et déformations, i.e. les lois de Hooke - Duhamel :

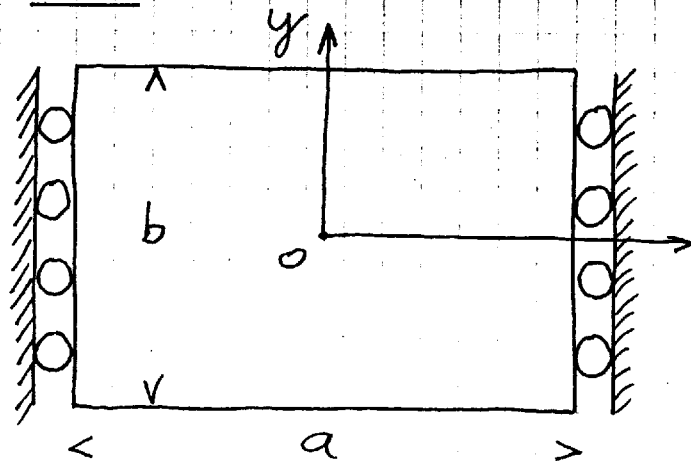
$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \alpha (T - T_0) \delta_{ij}$$

ou bien
$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} - \kappa \alpha (T - T_0) \delta_{ij}$$
 (6 équations)

Nous aboutissons au total à un système de 18 équations scalaires locales à 18 inconnues. En règle générale, les problèmes de thermo-élasticité n'admettent de solutions analytiques que dans des cas très particuliers.

Remarque : Lorsque le champ de température est déterminé, le problème de thermoélasticité se ramène formellement à un simple problème d'élasticité pour lequel on remplace la force volumique f de l'équation de Navier par $f - \kappa \alpha \text{grad } T$ dans l'équation de Navier - Duhamel.

6.7 - Contraintes thermiques dans une plaque rectangulaire



Matériau: E, ν, α

Géométrie: a, b, h

L'assemblage est réalisé à la température T_0 sans jeu ni serrage. On porte le bord $y = -b/2$ à la température $T = T_1$ et le bord $y = +b/2$ à la température $T = T_2$

On veut calculer: $T, \vec{u}, \vec{\sigma}, \vec{\epsilon}$ et \vec{J}

Du fait que $T = T(y)$, l'équation de la chaleur s'écrit:

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = 0 \Rightarrow T(y) = Ay + B$$

$$T(y = -b/2) = T_1 = A(-b/2) + B$$

$$T(y = +b/2) = T_2 = A(b/2) + B$$

$$\Rightarrow 2B = T_1 + T_2 \Rightarrow B = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

$$T_2 - T_1 = Ab \Rightarrow A = \frac{T_2 - T_1}{b}$$

$$\Rightarrow T(y) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_2 - T_1}{b} y$$

Du fait que la plaque est fixe le long de Ox , $\epsilon_{xx} = \epsilon_{11} = 0$. On est donc en déformations planes.

Les formules de la section 6.2 indiquent:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{22} = \epsilon_{33} &= (1 + \nu) \alpha (T - T_0) \\ \epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{pas de chargement} \\ \text{mécanique} \Rightarrow \\ \text{déformation d'origine} \\ \text{thermique} \\ \text{uniquement} \end{array}$$

$$\sigma_{11} = \lambda (\epsilon_{22} + \epsilon_{33}) - \nu \alpha (T - T_0)$$

$$= 2\lambda (1 + \nu) \alpha (T - T_0) - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0)$$

$$= \alpha (T - T_0) [2\lambda (1 + \nu) - 3\lambda - 2\mu]$$

$$= \alpha (T - T_0) \left[\frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \times (2\nu - 1) - \frac{2E}{2(1 + \nu)} \right] =$$

$$\Rightarrow \sigma_{11} = \alpha (T - T_0) \frac{E}{1 + \nu} (-1 - \nu) \Rightarrow \underline{\underline{\sigma_{11} = -E\alpha (T - T_0)}}$$

De même:

$$\sigma_{22} = 2\mu \epsilon_{22} + \lambda (\epsilon_{22} + \epsilon_{33}) - \nu \alpha (T - T_0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sigma_{22} &= (2\mu + 2\lambda)(1+\nu)\alpha(T-T_0) - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T-T_0) \\ &= (2\mu\nu + 2\lambda\nu - \lambda)\alpha(T-T_0) \\ &= \left\{ \frac{2E\nu}{2(1+\nu)} \left(\frac{1-2\nu}{1-2\nu} \right) + \frac{2E\nu^2}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right\} \alpha(T-T_0) \\ &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\nu(1-2\nu) + 2\nu^2 - \nu) \alpha(T-T_0) \Rightarrow \underline{\underline{\sigma_{22} = 0}} \end{aligned}$$

$$\sigma_{33} = 2\mu \varepsilon_{33} + \lambda(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) - \kappa \alpha(T-T_0) = \sigma_{22} = 0$$

$$\sigma_{12} = 2\mu \varepsilon_{12} = 0 = \sigma_{13} = \sigma_{23}$$

$$\varepsilon_{11} = 0 \Rightarrow u_1 = \int \varepsilon_{11} dx = 0$$

$$\varepsilon_{22} = (1+\nu)\alpha(T-T_0) \Rightarrow u_2 = (1+\nu)\alpha \int (T-T_0) dy$$

$$\text{avec } T = T(y) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_2 - T_1}{b} y$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_2 &= (1+\nu)\alpha \left[\left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_0 \right) y + \left(\frac{T_2 - T_1}{b} \right) \int y dy \right] \\ &= (1+\nu)\alpha \left[\left(\frac{T_1 + T_2}{2} - T_0 \right) y + \left(\frac{T_2 - T_1}{b} \right) \frac{y^2}{2} \right] \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{33} = (1+\nu)\alpha(T-T_0) \Rightarrow u_3 = (1+\nu)\alpha \int (T-T_0) dz$$

$$\Rightarrow u_3 = (1+\nu)\alpha(T-T_0) z$$

$$\text{Enfin } \Omega_{12} = \Omega_{13} = \Omega_{23} = 0$$

6.8 - Contraintes thermiques dans une coque sphérique

On remarque que le champ de déplacement possède la symétrie sphérique, et ne dépend donc que de la coordonnée radiale r . D'où :

$$u_i = \varphi(r) x_i \quad \text{avec } r = \sqrt{x_i x_i} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$$\text{D'où : } u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi(r)}{\partial x_j} x_i + \varphi(r) \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \frac{d\varphi(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_j} x_i + \varphi(r) \delta_{ij}$$

$$\text{avec : } \frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} = \frac{x_1}{r}$$

$$\Rightarrow u_{i,j} = \varphi'(r) \left(\frac{x_j x_i}{r} \right) + \varphi(r) \delta_{ij}$$

L'équation du mouvement de Navier-Duhamel s'écrit à l'équilibre (cf section 6.3) :

$$(\lambda + \mu) u_{j,j} + \mu u_{i,jj} - \kappa \alpha T_{,i} = 0, \quad (1)$$

et met donc en oeuvre le calcul de $u_{j,j,i}$ et de $u_{i,j,j}$

$$u_{i,j,j} = \frac{\partial \varphi'(r)}{\partial x_i} \frac{x_i x_i}{r} + \frac{\varphi'(r)}{r^2} \left[x_i \frac{\partial x_i}{\partial x_i} r - x_i x_i \frac{\partial r}{\partial x_i} \right] + \frac{\partial \varphi(r)}{\partial x_i} \sin$$

$$= \varphi''(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{x_i x_i}{r} + \frac{\varphi'(r)}{r^2} \left[(x_i \delta_{ii} + x_i x_i) r - x_i x_i \frac{\partial r}{\partial x_i} \right] + \varphi'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i}$$

$$\Rightarrow u_{i,j,j} = \varphi''(r) \left(\frac{x_i^2}{r^2} \right) x_i + 2 \frac{\varphi'(r)}{r} x_i \sin + \frac{\varphi'(r)}{r} x_i - \varphi'(r) \frac{x_i^2}{r^2} x_i$$

$$\Rightarrow u_{i,j,j} = u_{i,11} + u_{i,22} + u_{i,33} =$$

$$= \varphi''(r) \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{r^2} \right) x_i + 2 \frac{\varphi'(r)}{r} (x_1 \delta_{i1} + x_2 \delta_{i2} + x_3 \delta_{i3})$$

$$+ 3 \frac{\varphi'(r)}{r} x_i - \varphi'(r) \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{r^2} \right) x_i$$

$$\Rightarrow u_{i,j,j} = \left[\varphi''(r) + \frac{4}{r} \varphi'(r) \right] x_i$$

De même, on calcule $u_{j,j,i}$:

$$u_{1,1} = \frac{\partial \varphi(r)}{\partial x_1} x_1 + \varphi(r) = \varphi'(r) \frac{\partial r}{\partial x_1} x_1 + \varphi(r) = \varphi'(r) \frac{x_1^2}{r} + \varphi(r)$$

$$\Rightarrow u_{1,1i} = \frac{\partial \varphi'(r)}{\partial x_i} \frac{x_1^2}{r} + \frac{\varphi'(r)}{r^2} \left[2x_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_i} r - x_1^2 \frac{\partial r}{\partial x_i} \right] + \varphi'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i}$$

$$= \varphi''(r) \frac{x_1^2}{r^2} x_i + \frac{\varphi'(r)}{r^2} \left[2x_1 r \delta_{i1} - \frac{x_1^2}{r} x_i \right] + \varphi'(r) \frac{x_1}{r}$$

$$\Rightarrow u_{j,j,i} = u_{1,1i} + u_{2,2i} + u_{3,3i} =$$

$$= \varphi''(r) \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{r^2} \right) x_i + 2 \frac{\varphi'(r)}{r} (x_1 \delta_{i1} + x_2 \delta_{i2} + x_3 \delta_{i3})$$

$$- \frac{\varphi'(r)}{r^2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) x_i + 3 \frac{\varphi'(r)}{r} x_i$$

$$\Rightarrow u_{j,j,i} = \left[\varphi''(r) + \frac{4}{r} \varphi'(r) \right] x_i, \text{ si bien que l'équation (1) devient:}$$

$$(\lambda + 2\mu) \left(\varphi''(r) + \frac{4}{r} \varphi'(r) \right) - \frac{\kappa \alpha}{r} T' = 0$$

L'équation sans second membre (sans le terme $\frac{\kappa \alpha}{r} T'$) s'écrit:

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{4}{r} \frac{d\varphi}{dr} = 0 \Rightarrow \varphi(r) = A_1 + \frac{A_2}{r^3}$$

Une solution particulière de l'équation complète est:

$$\varphi(r) = \frac{\kappa \alpha}{\lambda + 2\mu} \varphi_0(r), \text{ avec } \varphi_0(r) = \frac{1}{r^3} \int_{r_1}^r T(r) r^2 dr$$

Vérification:

$$\varphi_0'(r) = \frac{1}{r^6} \left[T(r) r^2 \times r^3 - \left(\frac{1}{r^3} \int_{r_1}^r T(r) r^2 dr \right) \times 3r^2 \times r^3 \right] = \frac{T(r)}{r} - 3 \frac{\varphi_0}{r}$$

$$\Rightarrow r \varphi_0'(r) + 3 \varphi_0(r) = T(r) \Rightarrow T'(r) = r \varphi_0''(r) + 4 \varphi_0'(r)$$

$$\Rightarrow (\lambda + 2\mu) \frac{\kappa \alpha}{(\lambda + 2\mu)} \left(\varphi_0''(r) + \frac{4}{r} \varphi_0'(r) \right) - \frac{\kappa \alpha}{r} (r \varphi_0''(r) + 4 \varphi_0'(r)) = 0$$

CQFD

Passons à l'équation de Hooke-Duhamel:

$$u_i = \varphi(r) x_i \Rightarrow u_{i,j} = \varphi(r) \delta_{ij} + \varphi'(r) \frac{x_i x_j}{r}$$

$$\text{or } \sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{\ell\ell} \delta_{ij} - \kappa\alpha (T - T_0) \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{\ell\ell} \delta_{ij} + 2\mu \left(\varphi(r) \delta_{ij} + \varphi'(r) \frac{x_i x_j}{r} \right) - \kappa\alpha (T - T_0) \delta_{ij}$$

et $\varepsilon_{\ell\ell} = 3\varphi(r) + r\varphi'(r)$

La contrainte radiale $\sigma_r = \sigma_{ij} \frac{x_i}{r} \frac{x_j}{r}$ s'écrit:

$$\sigma_r = \lambda \varepsilon_{\ell\ell} \frac{x_i x_j}{r^2} \delta_{ij} + 2\mu \left(\varphi(r) \frac{x_i x_j}{r^2} \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{r^2} \frac{x_i x_j}{r} \varphi'(r) \right) - \kappa\alpha (T - T_0) \frac{x_i x_j}{r^2} \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \sigma_r = \lambda \varepsilon_{\ell\ell} + 2\mu (\varphi(r) + r\varphi'(r)) - \kappa\alpha (T - T_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_r = (3\lambda + 2\mu)\varphi(r) + (\lambda + 2\mu)r\varphi'(r) - \kappa\alpha (T - T_0)} \quad (2)$$

De même la contrainte tangentielle $\sigma_\theta = \sigma_{ij} m_i m_j$ avec $m_i m_j = 1$ si $i=j$ et $m_i m_j = 0$ si $i \neq j$ s'écrit:

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \lambda \varepsilon_{\ell\ell} m_i m_j \delta_{ij} + 2\mu \left(\varphi(r) m_i m_j \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{r} m_i m_j \varphi'(r) \right) \\ &\quad - \kappa\alpha (T - T_0) m_i m_j \delta_{ij} \\ &= \lambda \varepsilon_{\ell\ell} + 2\mu \varphi(r) - \kappa\alpha (T - T_0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_\theta = (3\lambda + 2\mu)\varphi(r) + \lambda r\varphi'(r) - \kappa\alpha (T - T_0)} \quad (3)$$

Soit en prenant la solution générale en $\varphi(r)$:

$$\varphi(r) = A_1 + \frac{A_2}{r^3} + \frac{\kappa\alpha}{\lambda + 2\mu} \varphi_0(r) \Rightarrow \varphi'(r) = -3 \frac{A_2}{r^4} + \frac{\kappa\alpha}{\lambda + 2\mu} \varphi_0'(r),$$

que l'on injecte dans l'équation (2) fournissant σ_r :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (3\lambda + 2\mu) \left[A_1 + \frac{A_2}{r^3} + \frac{\kappa\alpha}{\lambda + 2\mu} \varphi_0(r) \right] + (\lambda + 2\mu)r \left[-3 \frac{A_2}{r^4} + \frac{\kappa\alpha}{\lambda + 2\mu} \varphi_0'(r) \right] \\ &\quad - \kappa\alpha (r\varphi_0'(r) + 3\varphi_0(r)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_r = (3\lambda + 2\mu) A_1 - \frac{4\mu}{r^3} A_2 - \frac{4\mu\beta}{\lambda + 2\mu} \varphi_0(r)} \quad \text{avec } \beta = \kappa\alpha$$

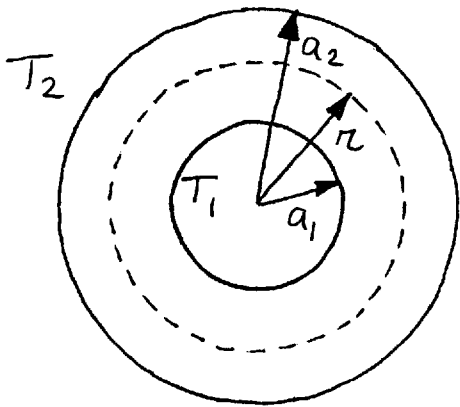
On suppose de plus que la coque est libre sur ses 2 surfaces intérieure ($r = a_1$) et extérieure ($r = a_2$), avec $a_2 > a_1$:

$$\sigma_r(r = a_1) = \sigma_r(r = a_2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (3\lambda + 2\mu) A_1 - \frac{4\mu}{a_1^3} A_2 - \frac{4\mu\beta}{\lambda + 2\mu} \varphi_0(a_1) = 0 \\ (3\lambda + 2\mu) A_1 - \frac{4\mu}{a_2^3} A_2 - \frac{4\mu\beta}{\lambda + 2\mu} \varphi_0(a_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_2 = \frac{\beta a_1^3 a_2^3 [\varphi_0(a_2) - \varphi_0(a_1)]}{(\lambda + 2\mu)(a_2^3 - a_1^3)} \\ A_1 = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \times \frac{4\mu/\beta [a_2^3 \varphi_0(a_2) - a_1^3 \varphi_0(a_1)]}{(\lambda + 2\mu)(a_2^3 - a_1^3)} \end{cases}$$

Il faut aussi résoudre le problème de transport de chaleur entre les deux surfaces de la coque (cf cours de licence, polycopié p. 7)



$$q = \int_S -\lambda \frac{dT}{dr} ds = -4\pi\lambda r^2 \frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow q \times \frac{dr}{r^2} = -4\pi\lambda^{th} dT$$

$$\Rightarrow q \left[-\frac{1}{r} \right]_{a_1}^{a_2} = -4\pi\lambda^{th} (T_2 - T_1)$$

$$\Rightarrow q = \frac{4\pi\lambda a_1 a_2}{a_2 - a_1} (T_1 - T_2)$$

Pour calculer $T(r)$, on intègre de q , à r :

$$\Rightarrow q \left[-\frac{1}{r} \right]_{a_1}^r = -4\pi\lambda^{th} (T - T_1) \Rightarrow T = T_1 + \frac{q}{4\pi\lambda^{th}} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a_1} \right)$$

$$\Rightarrow T = T_1 + \frac{a_2(a_1 - r)}{r(a_2 - a_1)} (T_1 - T_2)$$

En fait, on suppose que la surface extérieure de la coque est à la température ambiante T_0 , et que la surface intérieure est chauffée à $T = T_0 + \Delta T$, avec $\Delta T = cte$ ($T_2 = T_0$ et $T_1 = T_0 + \Delta T$)

$$\Rightarrow T - T_0 = \frac{\Delta T a_1}{a_2 - a_1} \left(\frac{a_2}{r} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \varphi_0(r) = \frac{1}{r^3} \int_{a_1}^r \frac{\Delta T a_1}{a_2 - a_1} \left(\frac{a_2}{r} - 1 \right) r^2 dr$$

$$\Rightarrow \varphi_0(r) = \frac{\Delta T a_1}{a_2 - a_1} \times \frac{1}{r^3} \left[\frac{a_2(r^2 - a_1^2)}{2} - \frac{r^3 - a_1^3}{3} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \varphi_0(a_2) &= \frac{\Delta T a_1}{a_2 - a_1} \times \frac{1}{a_2^3} \left[\frac{a_2(a_2^2 - a_1^2)}{2} - \frac{a_2^3 - a_1^3}{3} \right] \\ &= \frac{\Delta T a_1}{a_2^3} \left[\frac{a_2(a_2 + a_1)}{2} - \frac{a_2^2 + a_1 a_2 + a_1^2}{3} \right] \end{aligned}$$

$$\text{et } \varphi_0(a_1) = 0$$

Il me reste plus qu'à finir les calculs, et l'on trouve :

$$\left[\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu} \frac{a_1 a_2}{a_2^3 - a_1^3} \left[a_1 + a_2 - \frac{1}{r} (a_2^2 + a_1 a_2 + a_1^2) + \frac{a_1^2 a_2^2}{r^3} \right] \\ \sigma_\theta &= \frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu} \frac{a_1 a_2}{a_2^3 - a_1^3} \left[a_1 + a_2 - \frac{1}{2r} (a_2^2 + a_1 a_2 + a_1^2) - \frac{a_1^2 a_2^2}{2r^3} \right] \end{aligned} \right]$$

CQFD (cf. Sokolnikoff p. 363).

Ce résultat est dû à Duhamel et date de 1838.

Note: Pour une sphère pleine ($a_1 = 0$), on a $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$, et il ne peut y avoir de contrainte thermique, résultat tout à fait logique.