TD 0
Vitesse et accélération en coordonnées polaires

Exercice 1 : Dérivées d'un vecteur et coordonnées polaires

Dans un plan muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$, le vecteur unitaire mobile $\vec{u}_r$ est repéré par l'angle $\theta=(\vec{i},\vec{u}_r)$. $\vec{u}_\theta$ est le vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\vec{u}_r$: $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)=\pi/2$.

1) Exprimer $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ puis calculer les dérivées $\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}$ et $\frac{d^2\vec{u}_r}{d\theta^2}$.

2) Exprimer $\frac{d\vec{u}_r}{d\theta}$ et $\frac{d^2\vec{u}_r}{d\theta^2}$ en utilisant la base mobile $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$. Conclure.

3) L'angle θ est fonction du temps. Mêmes questions qu'au 1) pour les dérivées $\frac{d\vec{u}_r}{dt}$ et $\frac{d^2\vec{u}_r}{dt^2}$

Exercice 2 : Vitesse et accélération en coordonnées polaires

Un point M mobile dans le plan est repéré par ses coordonnées polaires (r,θ) qui sont fonction du temps.

1) Exprimer les composantes radiale et ortho-radiale V_r et V_θ de la vitesse $\vec{V}=\frac{d\vec{OM}}{dt}$ et celles a_r et a_θ de l'accélération $\vec{a}=\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$ dans la base mobile $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta)$ liée au point M.

2) Le point M est animé d'un mouvement circulaire. Donner les composantes V_r et V_θ de la vitesse et celles a_r et a_θ de l'accélération $\vec{a}$, dans ce cas particulier.

3) Mêmes questions dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme.

4) On introduit le vecteur vitesse angulaire instantané: $\vec{\omega}=\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_r\Lambda\vec{u}_\theta=\frac{d\theta}{dt}\vec{k}=\omega\vec{k}$.

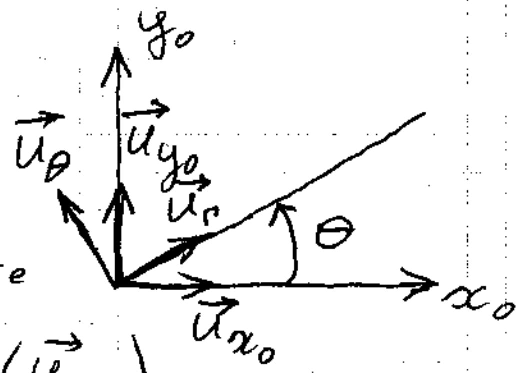
Exprimer $\vec{V}$ et $\vec{a}$ dans les deux cas particuliers de la question 1, à l'aide de $\vec{\omega}$ en s'affranchissant des vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ de la base mobile.

TD 0 : Vitesse et accélération en coordonnées polaires

Exercice 1 : Dérivées d'un vecteur et coordonnées polaires

①

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \vec{u}_{x_0} \cos\theta + \vec{u}_{y_0} \sin\theta \\ \vec{u}_\theta = -\vec{u}_{x_0} \sin\theta + \vec{u}_{y_0} \cos\theta \end{cases}$$



Cette relation peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \vec{u}_r \\ \vec{u}_\theta \end{pmatrix}}_{\text{Base mobile}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{Matrice de rotation d'angle } \theta} \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{u}_{x_0} \\ \vec{u}_{y_0} \end{pmatrix}}_{\text{Base fixe}}$$

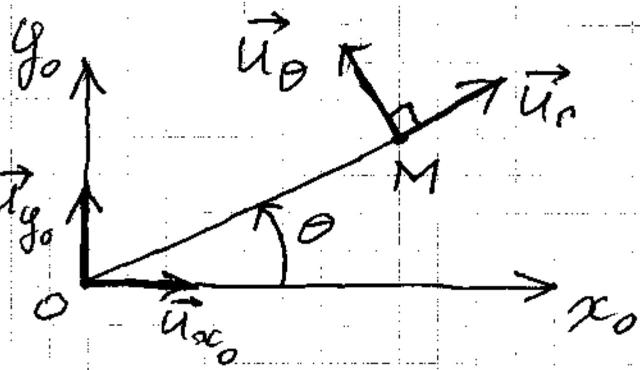
②
$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\vec{u}_{x_0} \sin\theta + \vec{u}_{y_0} \cos\theta = \vec{u}_\theta \\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_{x_0} \cos\theta - \vec{u}_{y_0} \sin\theta = -\vec{u}_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{u}_r}{d\theta^2} = \dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta}\right) = -\vec{u}_{x_0} \cos\theta - \vec{u}_{y_0} \sin\theta = -\vec{u}_r . \\ \dfrac{d^2\vec{u}_\theta}{d\theta^2} = \dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\right) = \vec{u}_{x_0} \sin\theta - \vec{u}_{y_0} \cos\theta = -\vec{u}_\theta \end{cases}$$

③
$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} \times \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \times \dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{u}_r}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\vec{u}_r}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\vec{u}_\theta\right) = \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{\theta} \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} \\ \qquad = \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - \dot{\theta}^2 \vec{u}_r \\ \dfrac{d^2\vec{u}_\theta}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(-\dot{\theta}\vec{u}_r\right) = -\ddot{\theta} \vec{u}_r - \dot{\theta} \dfrac{d\vec{u}_r}{dt} \\ \qquad = -\ddot{\theta} \vec{u}_r - \dot{\theta}^2 \vec{u}_\theta \end{cases}$$

Exercice 2 : Vitesse et accélération en coordonnées polaires



① $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$

$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{V}(M) = \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$

Or $\begin{cases} \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{k} \wedge \vec{u}_r = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_r \end{cases}$ Formule de dérivation dans la base mobile

Finalement on obtient : $\vec{V}(M) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$,

soit $\vec{V}(M) = V_r\vec{u}_r + V_\theta\vec{u}_\theta$, avec $V_r = \dot{r}$, et $V_\theta = r\dot{\theta}$

$\vec{a}(M) = \frac{d\vec{V}(M)}{dt} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$)

avec : $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$

$\Rightarrow \vec{a}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$

② Mouvement circulaire, $r = cte \Rightarrow \dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$

$\vec{a}(M) = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$; $V_r = 0$ et $V_\theta = r\dot{\theta}$

③ Mouvement circulaire uniforme, $\dot{\theta} = cte$, $\ddot{\theta} = 0$.

$\vec{a}(M) = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$, $V_r = 0$ et $V_\theta = r\dot{\theta} = cte$

④ Cas du mouvement circulaire ($r = cte$)

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ et $\vec{V}(M) = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$,

avec $\vec{u}_\theta = \vec{u}_k \wedge \vec{u}_r$ et $\omega = \dot{\theta}\vec{u}_k$

$\Rightarrow \vec{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = r\dot{\theta}\vec{u}_k \wedge \vec{u}_r = \dot{\theta}\vec{u}_k \wedge r\vec{u}_r$

$= \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

d'où $\vec{V}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

Il s'agit de la formule de dérivation d'un vecteur (ici le vecteur $\overrightarrow{OM}$) dans la base mobile, de vecteur instantanné de rotation $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{u}_k$

On peut aussi effectuer le même type de calcul, cette fois-ci pour l'accélération :

$$\vec{a}(M) = \frac{d\vec{v}(M)}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{a}(M) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)$$

$$\Rightarrow \vec{a}(M) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$$

Il s'agit du résultat pour le calcul de l'accélération pour le cas général d'un mouvement circulaire quelconque. Si de plus, le mouvement est circulaire uniforme, alors $\vec{\omega} = cte$, soit $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0$, et il reste dans ce cas uniquement le deuxième terme :

$$\vec{a}(M) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}).$$

sachant que $\vec{OM} = r\vec{u_r}$, $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{u_k}$ et que $\vec{u_\theta} = \vec{u_k} \wedge \vec{u_r}$, alors on peut écrire :

$$\vec{a}(M) = \dot{\theta}\vec{u_k} \wedge (\dot{\theta}\vec{u_k} \wedge r\vec{u_r}) = \dot{\theta}\vec{u_k} \wedge r\dot{\theta}\vec{u_\theta},$$

soit en notant que $\vec{u_k} \wedge \vec{u_\theta} = -\vec{u_r}$

$$\Rightarrow \vec{a}(M) = -r\dot{\theta}^2\vec{u_r}$$

On peut conclure de ce résultat que l'accélération d'un point au cours d'un mouvement circulaire uniforme est centripète, étant orientée vers le point origine O, ou centre de rotation. De plus, le module du vecteur accélération est proportionnel au carré de la vitesse de rotation, qui est uniforme.

Rappels de cinématique du solide

1- Champ des vitesses du solide indéformable

Pour un solide indéformable, deux points quelconques M et M' sont toujours à la même distance au cours du mouvement, soit :

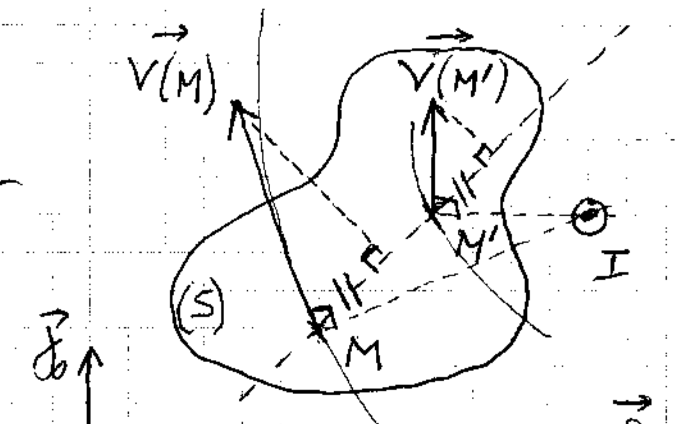
$$\forall M \in S, \forall M' \in S, \left(\overrightarrow{MM'}\right)^2 = \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{MM'} = cte$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MM'} \cdot \frac{d\overrightarrow{MM'}}{dt} = 0, \text{ soit avec } \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MM'} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \overrightarrow{MM'} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM'}}{dt}$$

$$\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{V(M')}$$

Relation d'équiprojectivité des vitesses



La figure ci-contre indique bien que la projection des vecteurs vitesse $\overrightarrow{V(M)}$ et $\overrightarrow{V(M')}$ sur la direction $\overrightarrow{MM'}$ est identique.

Par ailleurs, les vitesses $\overrightarrow{V(M)}$ et $\overrightarrow{V(M')}$ sont par définition tangentes aux trajectoires des points M et M'. En construisant la normale à ces deux trajectoires, il est alors possible de tracer le point I, centre instantané de rotation, point virtuel du solide, tel que à l'instant t (celui de la figure), $V(I) = 0$!

L'existence de ce point I traduit le fait que le solide (S) est soumis à une certaine rotation dans le plan de la figure, d'angle θ, telle que la vitesse instantanée de rotation (au moment t) s'exprime par : $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{k_0}$. C'est cette rotation $\vec{\Omega}$ qui est justement responsable de la différence des vitesses $\overrightarrow{V(M)}$ et $\overrightarrow{V(M')}$, aux points M et M'. D'ailleurs, dans le cas où $\overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{V(M')}$, le mouvement du solide est une simple translation.

Pour prendre en compte l'influence de $\vec{\Omega}$ pour décrire la différence entre $\overrightarrow{V(M)}$ et $\overrightarrow{V(M')}$, On peut écrire indifféremment l'une ou l'autre des deux expressions :

$$\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{V(M')} = \overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{V(M)} \quad (A)$$ Relation d'équi-projectivité des vitesses

$$\overrightarrow{V(M')} = \overrightarrow{V(M)} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM'} \quad (B)$$ Relation de distribution des vitesses

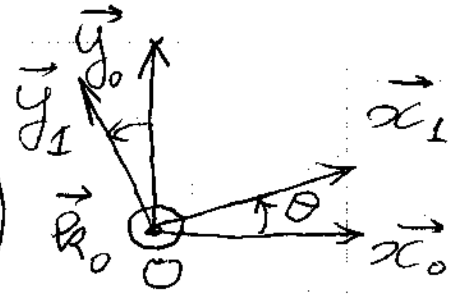
Il est aisé de passer de l'une de ces deux formes à l'autre. Par exemple, pour aller de (A) vers (B), il suffit de rajouter à droite de l'expression (A) le terme du produit mixte $\overrightarrow{MM'} \cdot (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM'})$ qui est forcément nul, puis d'extraire directement la relation (B). Pour aller en sens inverse, de (B) vers (A), il suffit de multiplier à gauche tous les termes par le produit scalaire $\overrightarrow{MM'} \cdot$, puis de constater que $\overrightarrow{MM'} \cdot (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM'})$ est bien nul et donc de retrouver directement l'équation (A).

Au passage, l'équation (B) peut être écrite de façon différente en notant :

$$\overrightarrow{V(M')} - \overrightarrow{V(M)} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM'} \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{MM'}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM'}$$

Sous cette forme, il s'agit d'un autre résultat fondamental, à savoir celui de la dérivation d'un vecteur quelconque dans le repère mobile. Si l'on note $\overrightarrow{MM'} = \|\overrightarrow{MM'}\| \vec{a}$, où $\vec{a}$ est le vecteur unitaire sur la direction de $\overrightarrow{MM'}$, on obtient alors :

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{a}$$



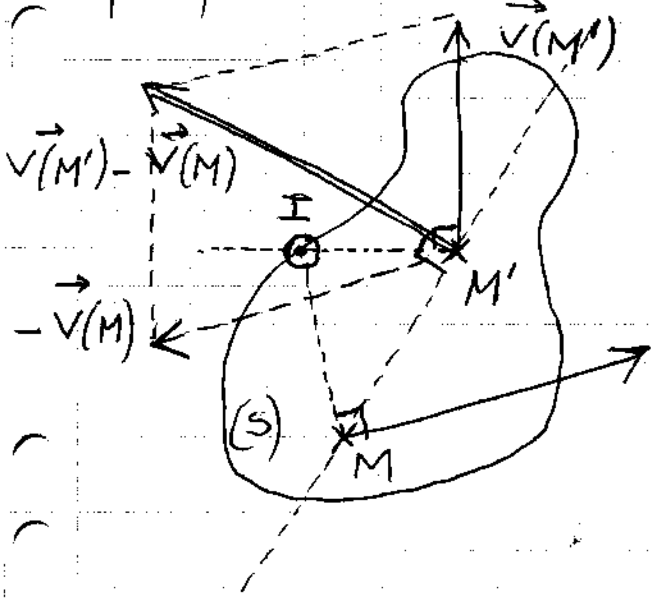
$$\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{k}_0$$

En règle générale, si $(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ et $(O, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_0)$ représentent les référentiel fixe (absolu) et mobile (relatif), alors :

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{i}_1 = \dot{\theta} \vec{k}_0 \wedge \vec{i}_1 = \dot{\theta} \vec{j}_1 \\ \dfrac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{j}_1 = \dot{\theta} \vec{k}_0 \wedge \vec{j}_1 = -\dot{\theta} \vec{i}_1 \end{cases}$$

Au passage, ces relations sont générales, et elles s'appliquent pour le cas de la cinématique du point.

L'expression $\vec{V}(M') - \vec{V}(M) = \vec{\Omega} \wedge \vec{MM'}$ indique que les 3 vecteurs $\vec{V}(M') - \vec{V}(M)$, $\vec{\Omega}$, et $\vec{MM'}$ sont perpendiculaires 2 à 2, cf figure ci-dessous.



De même, on peut écrire :

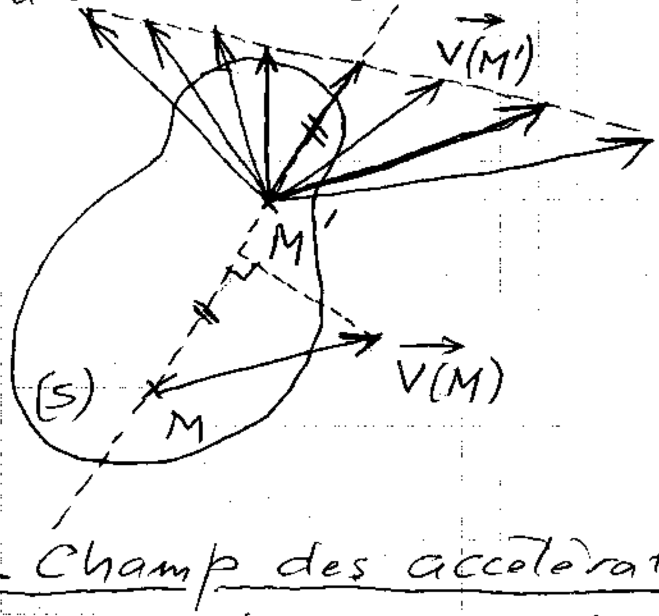
$$\begin{cases} \vec{V}(I) = \vec{V}(M) + \vec{\Omega} \wedge \vec{MI} \\ \vec{V}(I) = \vec{V}(M') + \vec{\Omega} \wedge \vec{M'I} \end{cases}$$

or $\vec{V}(I) = 0$, puisque I représente le CIR (Centre Instantanné de Rotation).

Dès lors, on obtient :

$$\begin{cases} \vec{V}(M) = \vec{\Omega} \wedge \vec{IM} \\ \text{et } \vec{V}(M') = \vec{\Omega} \wedge \vec{IM'} \end{cases}$$

d'où $\vec{V}(M)$, $\vec{\Omega}$ et $\vec{IM}$, ainsi que $\vec{V}(M')$, $\vec{\Omega}$ et $\vec{IM'}$, sont à chaque fois 3 vecteurs perpendiculaires 2 à 2. En règle générale, lorsque $\vec{V}(M)$ est a priori connu, il existe une infinité de possibilités pour le choix de $\vec{V}(M')$, respectant la relation d'équi-projectivité des vitesses, cf. figure ci-dessous.



Il existe en particulier un cas pour lequel les deux vitesses sont identiques, $\vec{V}(M') = \vec{V}(M)$, correspondant à une simple translation du solide. De part et d'autre de cette vitesse particulière, le solide (S) sera en rotation dans un sens, ou bien dans l'autre.

2- Champ des accélérations

La relation de distribution des vitesses :

$$\vec{V}(M') = \vec{V}(M) + \vec{\Omega} \wedge \vec{MM'},$$

indique que nous avons affaire à un champ de torseur, de résultante $\vec{\Omega}$ et de moment exprimé en M, $\vec{V}(M)$. Cette relation peut être dérivée par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{V}(M')}{dt} = \frac{d\vec{V}(M)}{dt} + \vec{\Omega}\wedge\frac{d\vec{MM'}}{dt} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{MM'}$$

$$\Rightarrow \vec{a}(M') = \vec{a}(M) + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{MM'}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{MM'},$$

relation dans laquelle nous avons utilisé la formule de dérivation d'un vecteur dans le référentiel mobile :

$$\frac{d\vec{MM'}}{dt} = \vec{\Omega}\wedge\vec{MM'} .$$

La relation obtenue n'est pas celle d'un torseur à cause de termes nouveaux. Par contre si $\vec{\Omega} = cte$ (cas de la vitesse de rotation uniforme), alors

$$\vec{a}(M') = \vec{a}(M) + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{V}(M') - \vec{V}(M)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\vec{V}(M') - \vec{V}(M)\right) = \vec{\Omega}\left(\vec{V}(M') - \vec{V}(M)\right)$$

On retrouve dans ce cas une formule de dérivation dans le repère mobile, tout à fait analogue à ce que l'on a déjà vu. Une autre manière de voir, toujours dans ce cas où $\vec{\Omega} = cte$, consiste à développer le double produit vectoriel $\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{MM'})$:

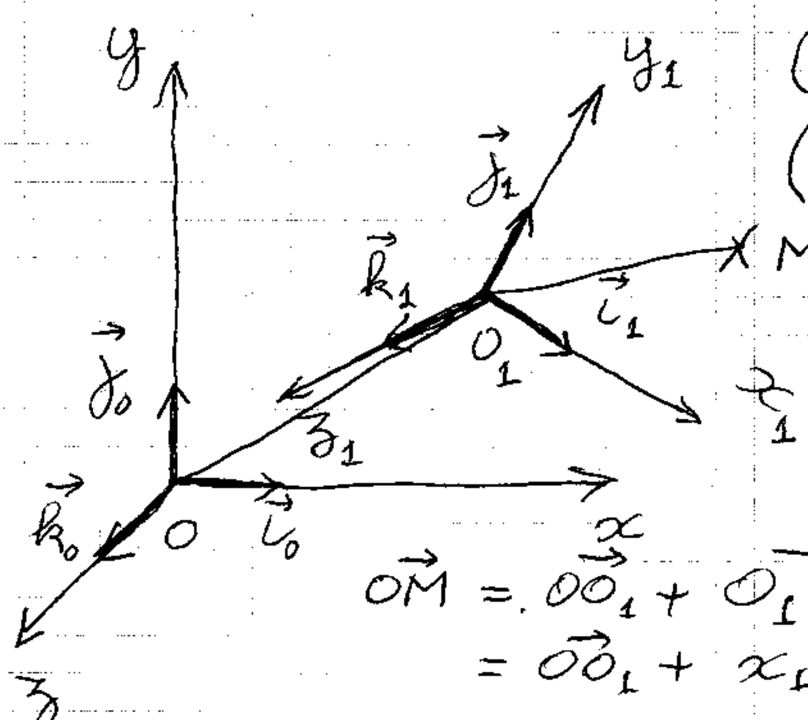
$$\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{MM'}) = \vec{MM'}(\vec{\Omega})^2 - \vec{\Omega}\underbrace{(\vec{\Omega}\cdot\vec{MM'})}_{=0 \text{ car } \vec{\Omega}\perp\vec{MM'}}$$

Dans ce cas, la différence d'accélération entre les deux points M et M', s'écrit donc :

$$\vec{a}(M') - \vec{a}(M) = \vec{MM'}(\vec{\Omega})^2$$

On retrouve bien le résultat classique lié à la force centrifuge (ou accélération centripète) à savoir proportionnelle à la vitesse de rotation par le carré, et proportionnelle à la distance entre les deux points M et M', orientée le long de ce vecteur.

3- Loi de composition des vitesses



$(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$: Référentiel absolu

$(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$: Référentiel relatif

$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{R_1/R_0}$: angle instantanné de rotation

$$\vec{OM} = \vec{OO_1} + \vec{O_1M}$$
$$= \vec{OO_1} + x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$$

$$\vec{V}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{OO_1}}{dt} + \vec{i}_1\frac{dx_1}{dt} + \vec{j}_1\frac{dy_1}{dt} + \vec{k}_1\frac{dz_1}{dt}$$
$$+ x_1\frac{d\vec{i}_1}{dt} + y_1\frac{d\vec{j}_1}{dt} + z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt}$$

or $\frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\Omega}\wedge\vec{i}_1$; $\frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\Omega}\wedge\vec{j}_1$; $\frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\Omega}\wedge\vec{k}_1$

relation de dérivation dans le repère mobile.

$$\Rightarrow \vec{V}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_{R_0} = \frac{d\vec{OO_1}}{dt}\Big|_{R_0} + \vec{\Omega}\wedge\underbrace{(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1)}_{\vec{O_1M}}$$
$$+ \vec{i}_1\frac{dx_1}{dt} + \vec{j}_1\frac{dy_1}{dt} + \vec{k}_1\frac{dz_1}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{V_a}(M) = \vec{V_a}(O_1) + \vec{\Omega}\wedge\vec{O_1M} + \vec{V_r}(M)$$

La loi de composition des vitesses s'écrit simplement :

$$\vec{V_a}(M) = \vec{V_r}(M) + \vec{V_e}(M),$$

avec : $\vec{V_e}(M) = \vec{V_a}(O_1) + \vec{\Omega}\wedge\vec{O_1M}$

De plus : $\left(\frac{d\vec{O_1M}}{dt}\right)_{/R_0} = \left(\frac{d\vec{O_1M}}{dt}\right)_{/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0}\wedge\vec{O_1M}$

4- Loi de composition des accélérations

En résumé, nous avons finalement écrit :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right)_{/R_0} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{/R_0}$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right)_{/R_0} + \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

$$\overrightarrow{V_a}(M) = \vec{V_a}(O_1) + \vec{V_r}(M) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

Passons dorénavant à l'accélération :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{V_a}(M)}{dt}\right)_{/R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{V(O_1)}}{dt}\right)_{/R_0} + \left(\frac{d\overrightarrow{V_r(M)}}{dt}\right)_{/R_0} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$
$$+ \vec{\Omega} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{/R_0})$$

avec : $\vec{V_a}(M) = \vec{V_a}(O_1) + \overrightarrow{V_r}(M) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}$

et $\left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{/R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{/R_1} + \overrightarrow{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M}$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{v_r}(M)}{dt}\right)_{/R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{v_r}(M)}{dt}\right)_{/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \overrightarrow{V_r}(M)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\overrightarrow{V_a(M)}}{dt}\right)_{/R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{V_a(O_1)}}{dt}\right)_{/R_0} + \left(\frac{d\overrightarrow{V_r(M)}}{dt}\right)_{/R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{V_r}(M)$$
$$+ \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{/R_1} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_1M})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{a_a}(M) = \overrightarrow{a_a}(O_1) + \overrightarrow{a_r}(M) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r}(M)$$
$$+ \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r}(M) + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_1M})$$

On peut alors écrire : $\vec{a_a}(M) = \vec{a_r}(M) + \vec{a_e}(M) + \vec{a_c}(M)$

avec : $\overrightarrow{a_c}(M) = 2\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{V_r}(M)$

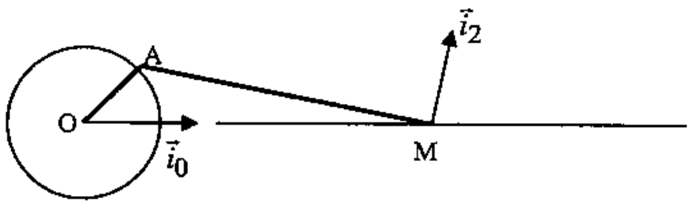
$$\vec{a_e}(M) = \overrightarrow{a_a}(O_1) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_1M})$$

4 - Système bielle-manivelle

On étudie le mouvement d'une barre AM (appelée bielle) de longueur L dont l'extrémité A est soumise à un mouvement circulaire grâce une barre OA (manivelle) de longueur a (a < L) qui tourne autour du point fixe O avec une vitesse angulaire constante ω. On appelle $R_0(O;\vec{i}_0,\vec{j}_0,\vec{k}_0)$ le référentiel fixe, $R_1(O;\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_0)$ le référentiel lié à OA et $R_2(M;\vec{i}_2,\vec{j}_2,\vec{k}_0)$ le référentiel lié à la bielle MA dont l'extrémité M (d'abscisse x_M) est astreinte à se déplacer sur l'axe $(O;\vec{i}_0)$.

On note : $\vec{i}_1 = \overrightarrow{OA}/OA$, $\vec{j}_2 = \overrightarrow{MA}/MA$

On pose : $\theta = (\vec{i}_0,\overrightarrow{OA})$ et $\varphi = (\vec{i}_0,\vec{i}_2)$ autour de $\vec{k}_0$.



1 - Montrer que :

$$a\sin\theta = L\cos\varphi$$

$$x_M = a\cos\theta + L\sin\varphi$$

2 - A l'instant t = 0, $\theta = 0$. Déterminer $\theta(t)$ et $\varphi(t)$.

3 - Exprimer les torseurs cinématiques en A $[\vartheta_{01}]$ de la manivelle et $[\vartheta_{02}]$ de la bielle.

4 - On note, quand il existe, Δ_{02} l'axe de rotation instantanée du solide R_2 dans son mouvement par rapport à R_0.

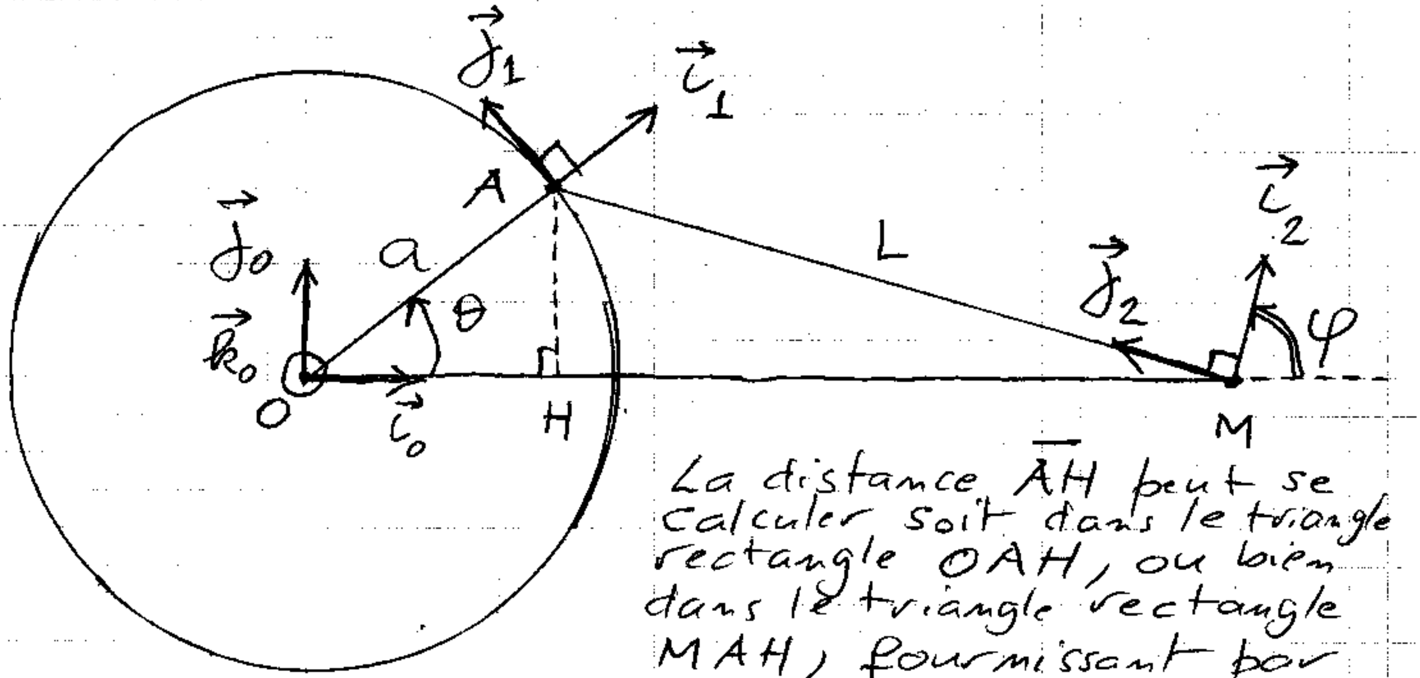
a) On appelle I_{02} le point d'intersection de Δ_{02} avec le plan $(O;\vec{i}_0,\vec{j}_0)$. Préciser $\vec{V}_0(I_{02})$.

b) Placer graphiquement I_{02} sur une figure ; justifier.

5 - Calculer la vitesse de M pour les valeurs de θ suivantes : $\pi/2$, π et $3\pi/2$

TD1 : Etude d'un système bielle - manivelle

(1)



La distance $\overline{AH}$ peut se calculer soit dans le triangle rectangle OAH, ou bien dans le triangle rectangle MAH, fournissant par inspection :

$$a \sin\theta = L\cos\varphi = \overline{AH}.$$

De même, on peut écrire $x_M = \overline{OM} = \overline{OH} + \overline{HM}$, soit par inspection :

$$x_M = a\cos\theta + L\sin\varphi$$

(2) Pour $t=0$, on a : $\theta = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$, d'où : $\theta(t) = \omega t$. Par ailleurs, $L\cos\varphi = a \sin\omega t$
$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{a}{L}\sin\omega t$, d'où :

$$\varphi(t) = \cos^{-1}\left(\frac{a}{L}\sin\omega t\right)$$

(3) Torseur cinématique en A de la manivelle

$$[\theta_{01}] \begin{cases} \text{Résultante} : \omega\vec{k}_0 \\ \text{Moment} : \vec{V}_A = \vec{V}_0 + \vec{\Omega}_{01}\wedge\vec{OA} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_A = \omega\vec{k}_0 \wedge a\vec{i}_1 = \omega a\vec{j}_1$$

Torseur cinématique en M de la bielle

$$[\theta_{02}] \begin{cases} \text{Résultante} : \dot{\varphi}\vec{k}_0 \\ \text{Moment} : \vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{\Omega}_{02}\wedge\vec{AM} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{V}_M = \omega a\vec{j}_1 + \dot{\varphi}\vec{k}_0 \wedge -L\vec{j}_2$$

d'où : $\vec{V}_M = \omega a\vec{j}_1 + L\dot{\varphi}\vec{i}_2$

avec : $\begin{cases} \vec{\jmath}_1 = \vec{\jmath}_0 \cos\theta - \vec{\imath}_0 \sin\theta \\ \vec{\imath}_2 = \vec{\imath}_0 \cos\varphi + \vec{\jmath}_0 \sin\varphi \end{cases}$

$$\Rightarrow \vec{V}_M = \omega a (\vec{\jmath}_0 \cos\theta - \vec{\imath}_0 \sin\theta) + L\dot{\varphi}(\vec{\imath}_0 \cos\varphi + \vec{\jmath}_0 \sin\varphi)$$

$$\Rightarrow \vec{V}_M = (\omega a \cos\theta + L\dot{\varphi} \sin\varphi)\vec{\jmath}_0 + (-\omega a \sin\theta + L\dot{\varphi}\cos\varphi)\vec{\imath}_0$$

Mais nous avons aussi la relation :

$$L\cos\varphi = a\sin\omega t,$$

dont la dérivation temporelle fournit :

$$-L\dot{\varphi}\sin\varphi = a\omega\cos\omega t$$

$$\Rightarrow \omega a \cos\theta + L\dot{\varphi}\sin\varphi = 0$$

D'où $\vec{V}_M \parallel \vec{\imath}_0$ CQFD. Il reste finalement :

$$\vec{V}_M = (-\omega a \sin\theta + L\dot{\varphi}\cos\varphi)\vec{\imath}_0 ,$$

avec $L\dot{\varphi} = -\dfrac{\omega a \cos\theta}{\sin\varphi}$

$$\Rightarrow \vec{V}_M = -\omega a [\cos\theta \operatorname{cotan}\varphi + \sin\theta]\vec{\imath}_0$$

4) Recherche du centre instantané de rotation I, de coordonnées x_I, y_I

On commence par écrire la relation de distribution des vitesses entre I et M :

$$\vec{V}_I = \vec{V}_M + \vec{\Omega}_{02} \wedge \vec{MI}$$

$$= -\omega a (\cos\theta \operatorname{cotan}\varphi + \sin\theta)\vec{\imath}_0 + \dot{\varphi}\vec{k}_0 \wedge [(x_I - x_M)\vec{\imath}_0 + y_I \vec{\jmath}_0]$$

$$= -\omega a (\cos\theta \operatorname{cotan}\varphi + \sin\theta)\vec{\imath}_0 + \dot{\varphi}(x_I - (a\cos\theta + L\sin\varphi))\vec{\jmath}_0 - \dot{\varphi} y_I \vec{\imath}_0$$

$$\Rightarrow \vec{V}_I = [-\omega a(\cos\theta \operatorname{cotan}\varphi + \sin\theta) - \dot{\varphi} y_I]\vec{\imath}_0 + [\dot{\varphi} x_I - \dot{\varphi}(a\cos\theta + L\sin\varphi)]\vec{\jmath}_0$$

or I est par définition le centre instantané de rotation $\Rightarrow \vec{V}_I = \vec{0}$

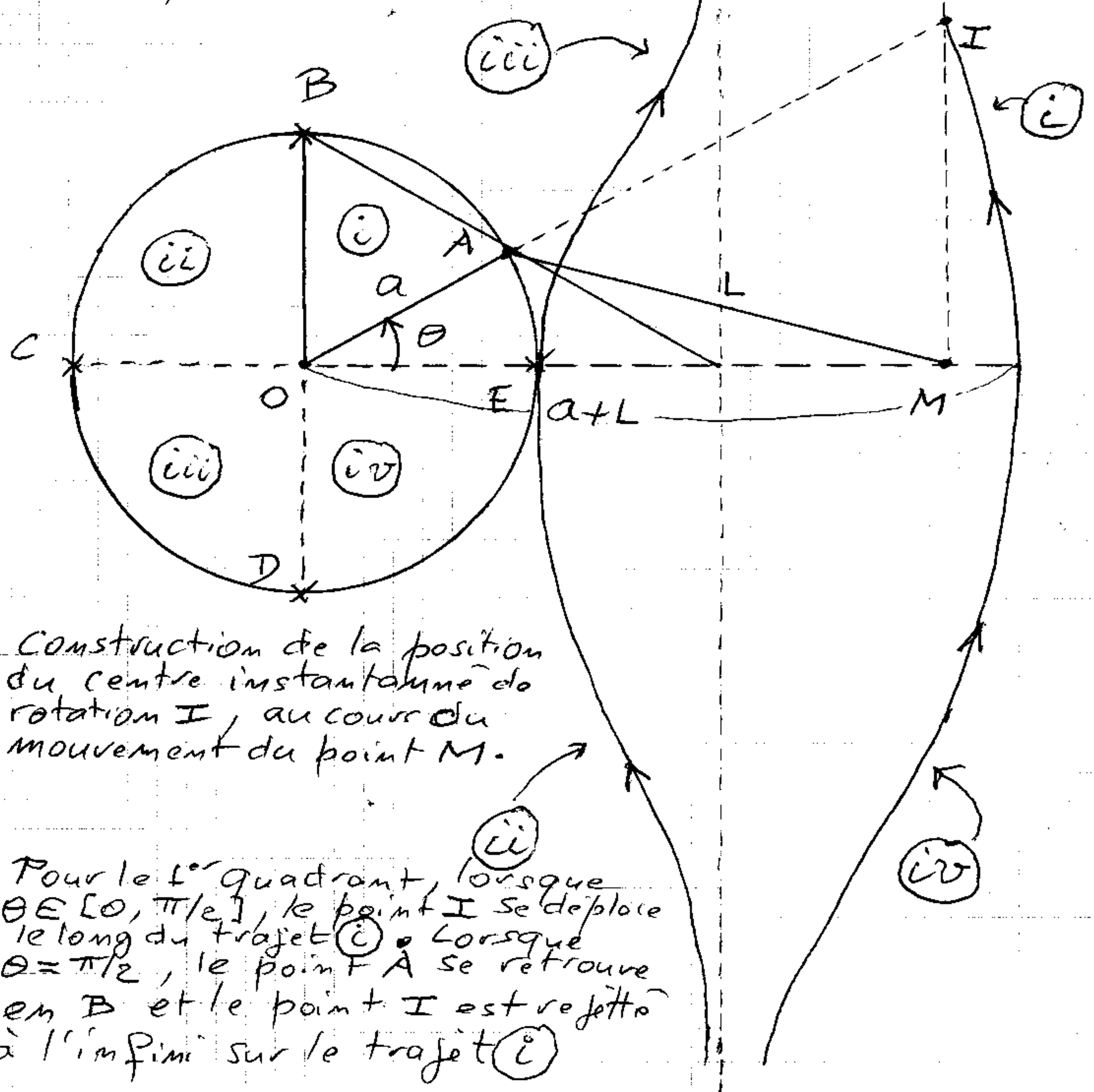
$$\Rightarrow \begin{cases} y_I = -\dfrac{\omega a}{\dot\varphi}\left(\cos\theta \,\mathrm{cotan}\,\varphi + \sin\theta\right) \\ x_I = a\cos\theta + L\sin\varphi \end{cases}$$

or $\dot\varphi = -\dfrac{a\omega\cos\theta}{L\sin\varphi}$

$$\Rightarrow \quad y_I = \frac{L\sin\varphi}{\cos\theta}\left(\cos\theta\,\mathrm{cotan}\,\varphi + \sin\theta\right)$$

$$y_I = L\cos\varphi + L\sin\varphi\tan\theta$$
$$= a\sin\theta + L\sin\varphi\tan\theta\ ,$$

soit finalement la relation $y_I = x_I \tan\theta$



Construction de la position du centre instantané de rotation I, au cours du mouvement du point M.

Pour le 1er quadrant, lorsque $\theta \in [0, \pi/2]$, le point I se déplace le long du trajet (i). Lorsque $\theta = \pi/2$, le point A se retrouve en B et le point I est rejetté à l'infini sur le trajet (i)

(5) On peut calculer l'expression de $\vec{V}_M$ et de $\vec{a}_M$ pour différentes valeurs de l'angle θ.
Pour commencer, sachant que $\vec{V}_M$ vaut :

$$\vec{V}_M = -\omega a [\cos\theta \cotan\varphi + \sin\theta] \vec{i}_0$$

$$\vec{a}_M = -\omega a \left[-\dot{\theta}\sin\theta \cotan\varphi + \dot{\varphi}\frac{\cos\theta}{\sin^2\varphi} + \dot{\theta}\cos\theta\right] \vec{i}_0$$

$$\vec{a}_M = \omega^2 a \left[\sin\theta \cotan\varphi - \frac{a}{L}\frac{\cos^2\theta}{\sin^3\varphi} - \cos\theta\right]$$

- Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\vec{V}_M = -\omega a \vec{i}_0$, $\vec{\gamma}_M = (a\omega^2 \cotan\varphi)\vec{i}_0$
- Pour $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $\vec{V}_M = \omega a \vec{i}_0$, $\vec{a}_M = (-a\omega^2 \cotan\varphi)\vec{i}_0$
- Pour $\theta = \pi$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\vec{V}_M = 0$, $\vec{a}_M = a\omega^2\left(1+\frac{a}{L}\right)\vec{i}_0$

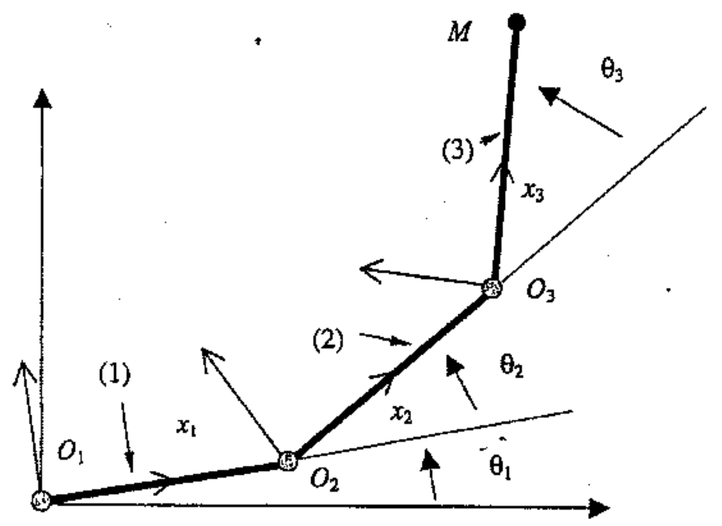
(4) (suite)

Dès que $\theta > \pi/2$, on bascule dans le 2ème quadrant, noté (ii). La trajectoire de I bascule alors en partant de $-$ l'infini sur la portion (ii), puis le point I remonte. Lorsque le point A se retrouve en C, alors le centre instantané de rotation I est situé quelque part sur l'axe horizontal. Au delà du point C, sur la portion (iii) CD, le point I continue de remonter sur la trajectoire (iii).
Au point D, on observe de nouveau comme en B une bascule entre les portions (iii) et (iv) avec au point D, le point I qui part à l'infini, soit vers $+\infty$ sur la portion (iii) lorsque $\theta = 3\pi/2 - \varepsilon$, ou bien vers $-\infty$ sur la portion (iv) lorsque $\theta = 3\pi/2 + \varepsilon$.

Université du Maine. UFR Sciences et Techniques
UE MECANIQUE 222A

TD3 : *Cinématique du solide*
Etude d'un système de 3 biellettes et d'un train épicycloïdal

Exercice 1. Système de 3 biellettes.

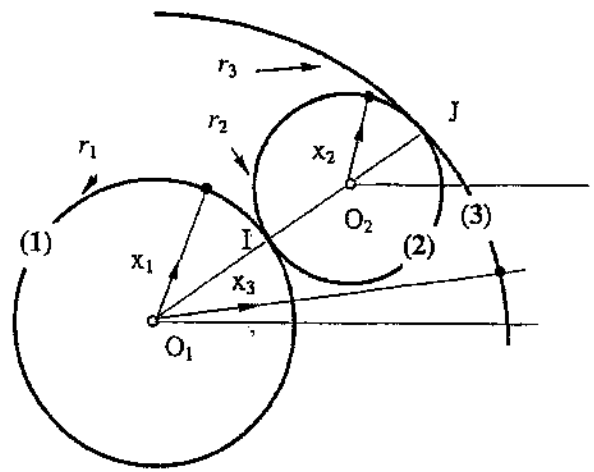


Les biellettes (1), (2) et (3) sont reliées les unes aux autres par leurs extrémités comme le montre la figure ci-dessus. Les liaisons entre biellettes sont des liaisons pivots.

Pour chaque biellette, écrire le torseur cinématique absolu au point O_i dans les repères (i) liés à chaque biellette. Exprimer la vitesse absolue du point extrémité M.

Exercice 2. Etude d'un train épicycloïdal.

Un train épicycloïdal est composé d'un planétaire (1), d'une couronne (3) et d'un satellite (2) en contact permanent avec le planétaire et la couronne.



1. A partir des repères liés aux solides, définir les variables de situation pour les 3 solides et en déduire les torseurs cinématiques absolus des solides. Pourquoi est-il pratique d'introduire le solide (4) constitué par la barre O_1O_2 ?

Désormais, on suppose le <u>non glissement aux points I et J.</u>

2. En déduire les relations entre les vitesses angulaires des solides
3. Planétaire et couronne ayant même vitesse angulaire, calculer la vitesse angulaire orbitale du satellite
4. La couronne étant fixe, exprimer en fonction des rayons r_1 et r_3 le rapport de réduction du train. Ce rapport est défini par le rapport entre la vitesse orbitale du satellite (sortie) et la vitesse angulaire du planétaire (entrée).

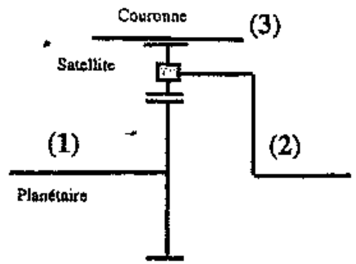
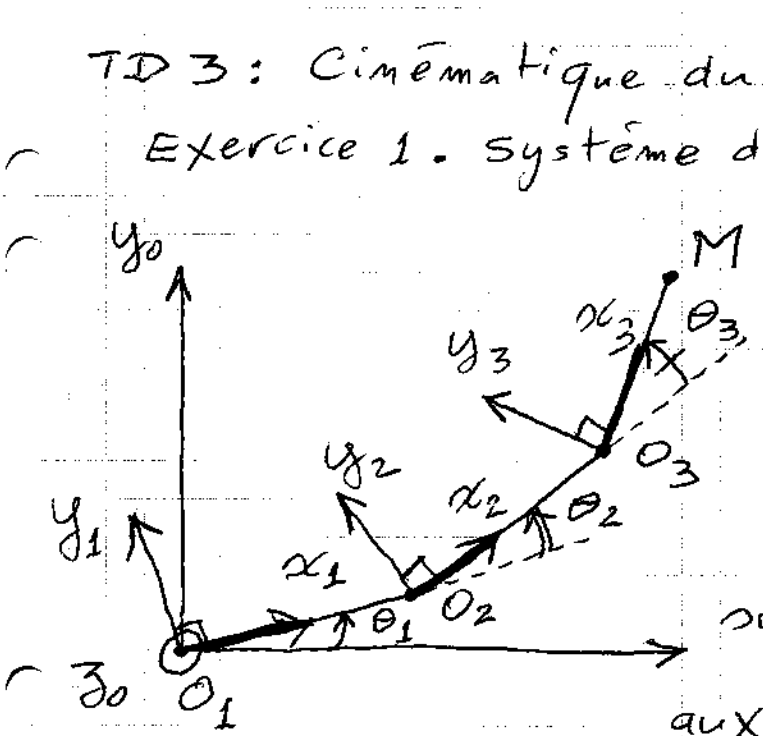


Figure 1 : *Schéma du train épicycloïdal. Le couple moteur est appliqué sur le planétaire. La variable sortie du train est la vitesse orbitale du satellite.*

TD 3 : Cinématique du solide

Exercice 1. Système de 3 biellettes



variables de situation : θ_1, θ_2 et θ_3

avec : $\overline{O_1O_2} = \ell_1$; $\overline{O_2O_3} = \ell_2$

$\overline{O_3M} = \ell_3$

on écrit alors les torseurs cinématiques aux points O_1, O_2, O_3 et M

$$\{\mathcal{V}^0_{(1)}\}_{O_1} = \begin{cases} \vec{\Omega}^0_{(1)} = \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 \\ [\vec{V}^0_{(1)}]_{O_1} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\{\mathcal{V}^0_{(1)}\}_{O_2} = \begin{cases} \vec{\Omega}^0_{(1)} = \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 \\ [\vec{V}^0_{(1)}]_{O_2} = \cancel{[\vec{V}^0_{(1)}]_{O_1}} + \vec{\Omega}^0_{(1)} \wedge \overrightarrow{O_1O_2} \\ \quad = \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 \wedge \ell_1 \vec{x}_1 = \dot{\theta}_1 \ell_1 \vec{y}_1 \end{cases}$$

$$\{\mathcal{V}^0_{(2)}\}_{O_2} = \begin{cases} \vec{\Omega}^0_{(2)} = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{z}_0 \\ [\vec{V}^0_{(2)}]_{O_2} = [\vec{V}^0_{(1)}]_{O_2} = \dot{\theta} \ell_1 \vec{y}_1 \end{cases}$$

$$\{\mathcal{V}^0_{(2)}\}_{O_3} = \begin{cases} \vec{\Omega}^0_{(2)} = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{z}_0 = \vec{\Omega}^1_{(2)} + \vec{\Omega}^0_{(1)} = \vec{\Omega}_r + \vec{\Omega}_e \\ [\vec{V}^0_{(2)}]_{O_3} = [\vec{V}^0_{(2)}]_{O_2} + \vec{\Omega}^0_{(2)} \wedge \overrightarrow{O_2O_3} \\ \quad = \dot{\theta}_1 \ell_1 \vec{y}_1 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{z}_0 \wedge \ell_2 \vec{x}_2 \\ \quad = \dot{\theta}_1 \ell_1 \vec{y}_1 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \ell_2 \vec{y}_2 \end{cases}$$

$$\{\mathcal{V}^0_{(3)}\}_{O_3} = \begin{cases} \vec{\Omega}^0_{(3)} = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{z}_0 \\ [\vec{V}^0_{(3)}]_{O_3} = [\vec{V}^0_{(3)}]_{O_2} = \dot{\theta}_1 \ell_1 \vec{y}_1 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \ell_2 \vec{y}_2 \end{cases}$$

$$\{\mathcal{V}^0_{(3)}\}_{M} = \begin{cases} \vec{\Omega}^0_{(3)} = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{z}_0 \\ [\vec{V}^0_{(3)}]_{M} = [\vec{V}^0_{(3)}]_{O_3} + \vec{\Omega}^0_{(3)} \wedge \overrightarrow{O_3M} \end{cases}$$

$$= \dot{\theta}_1 \ell_1 \vec{y}_1 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \ell_2 \vec{y}_2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \vec{z}_0 \wedge \ell_3 \vec{x}_3$$

$$= \dot{\theta}_1 \ell_1 \vec{y}_1 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \ell_2 \vec{y}_2 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) \ell_3 \vec{y}_3$$

Exemple de la méthode de calcul utilisant la composition du mouvement pour le point O_3

$$\underbrace{\left\{\mathcal{V}^{0}_{(2)}\right\}_{O_3}}_{\text{mouvement absolu}} = \underbrace{\left\{\mathcal{V}^{1}_{(2)}\right\}_{O_3}}_{\text{mouvement relatif}} + \underbrace{\left\{\mathcal{V}^{0}_{(1)}\right\}_{\text{point coïncidant } O_3'}}_{\text{mouvement d'entraînement}}$$

$$\left\{\mathcal{V}^{1}_{(2)}\right\}_{O_3} = \begin{cases} \vec{\Omega}^{1}_{(2)} = \dot{\theta}_2 \vec{z}_0 \\ [\vec{V}^{1}_{(2)}]_{O_3} = \cancel{[\vec{V}^{1}_{(2)}]_{O_2}} + \vec{\Omega}^{1}_{(2)} \wedge \overrightarrow{O_2 O_3} \\ \quad = \dot{\theta}_2 \vec{z}_0 \wedge \ell_2 \vec{x}_2 = \dot{\theta}_2 \ell_2 \vec{y}_2 \end{cases}$$

$$\left\{\mathcal{V}^{0}_{(1)}\right\}_{O_3'} = \begin{cases} \vec{\Omega}^{0}_{(1)} = \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 \\ [\vec{V}^{0}_{(1)}]_{O_3'} = \cancel{[\vec{V}^{0}_{(1)}]_{O_1}} + \vec{\Omega}^{0}_{(1)} \wedge \overrightarrow{O_1 O_3} \\ \quad = \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 \wedge (\ell_1 \vec{x}_1 + \ell_2 \vec{x}_2) = \dot{\theta}_1 (\ell_1 \vec{y}_1 + \ell_2 \vec{y}_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left\{\mathcal{V}^{0}_{(2)}\right\}_{O_3} = \begin{cases} \vec{\Omega}^{0}_{(2)} = \vec{\Omega}^{1}_{(2)} + \vec{\Omega}^{0}_{(1)} = \vec{\Omega}_r + \vec{\Omega}_e = (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \vec{z}_0 \\ [\vec{V}^{0}_{(2)}]_{O_3} = [\vec{V}^{1}_{(2)}]_{O_3} + [\vec{V}^{0}_{(1)}]_{O_3'} = \vec{V}_r + \vec{V}_e \end{cases}$$

$$= \dot{\theta}_2 \ell_2 \vec{y}_2 + \dot{\theta}_1 (\ell_1 \vec{y}_1 + \ell_2 \vec{y}_2)$$

$$= \dot{\theta}_1 \ell_1 \vec{y}_1 + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \ell_2 \vec{y}_2 \qquad \text{CQFD}$$

Exercice 2 : Etude d'un train épicycloïdal

① Les variables de situation sont les 4 angles de référence, à savoir :

$$\begin{cases} \theta_1 \text{ pour le planétaire de centre } O_1,\ \theta_1 = \int_0^t \omega_1^{(0)} dt \\ \theta_2 \text{ pour le satellite de centre } O_2,\ \theta_2 = \int_0^t \omega_2^{(0)} dt \\ \theta_3 \text{ pour la couronne de centre } O_3 = O_1,\ \theta_3 = \int_0^t \omega_3^{(0)} dt \\ \theta_4 \text{ pour le solide "virtuel" } O_1O_2,\ \theta_4 = \int_0^t \omega_4^{(0)} dt \end{cases}$$

L'introduction d'un solide "virtuel" correspondant à la barre O_1O_2 est très intéressante, car le mouvement d'ensemble du train est alors décrit par la variable de position θ_4 qui découle de la vitesse de rotation $\omega_4^{(0)}$ de ce solide "virtuel".

Il est alors possible de calculer les vitesses absolues en O_1, O_2, I et J, à savoir :

$$\{\vartheta_{(1)}^{0}\}_{O_1} = \begin{Bmatrix} \omega_{(4)} \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \{\vartheta_{(3)}^{0}\}_{O_3}$$ avec $\vec{z}_0$ vecteur unitaire perpendiculaire au plan de la figure

$$\{\vartheta_{(2)}^{0}\}_{O_2} = \begin{Bmatrix} \vec{\omega}_{(4)}^{0} \vec{z}_0 \\ (r_1+r_2)\omega_{(4)}^{0} \vec{u}_2 \end{Bmatrix}$$ $\vec{u}_1$: vecteur unitaire le long du solide O_1O_2, $\vec{u}_2 \perp \vec{u}_1$

$$[\vec{V}_{(2)}^{0}]_{O_2} = \underbrace{\cancel{[\vec{V}_{(2)}^{0}]_{O_1}}}_{=0} + \vec{\omega}_{(4)}^{0} \vec{z}_0 \wedge (r_1+r_2)\vec{u}_1 = (r_1+r_2)\omega_{(4)}^{0}\vec{u}_2$$

$$\{\vartheta_{(1)}^{0}\}_{I} = \begin{Bmatrix} \vec{\omega}_{(1)}^{0} \vec{z}_0 \\ [\vec{V}_{(1)}^{0}]_I = \underbrace{\cancel{[\vec{V}_{(1)}^{0}]_{O_1}}}_{=0} + \vec{\omega}_{(1)}^{0} \vec{z}_0 \wedge \vec{O_1 I} = \omega_{(1)}^{0} \vec{z}_0 \wedge r_1 \vec{u}_1 \end{Bmatrix}$$

Pour $I \in (1)$

$$= r_1 \omega_{(1)}^{0} \vec{u}_2$$

De même, pour $I \in (2)$:

$$\{\vartheta_{(2)}^{0}\}_{I} = \begin{Bmatrix} \vec{\omega}_{(2)}^{0} \vec{z}_0 \\ [\vec{V}_{(2)}]_I = [\vec{V}_{(2)}^{0}]_{O_2} + \vec{\omega}_{(2)}^{0} \vec{z}_0 \wedge \vec{O_2 I} \end{Bmatrix}$$

$$= (r_1+r_2)\omega_{(4)}^{0}\vec{u}_2 + \vec{\omega}_{(2)}^{0}\vec{z}_0 \wedge -r_2\vec{u}_1$$

$$= (r_1+r_2)\omega_{(4)}^{0}\vec{u}_2 - r_2\omega_{(2)}^{0}\vec{u}_2$$

$$= \left((r_1+r_2)\omega_{(4)}^{0} - r_2\omega_{(2)}^{0}\right)\vec{u}_2$$

De même pour la vitesse calculée au point J, selon que ce point fait partie du solide (2), le satellite, ou bien du solide (3), la couronne.

$$\{\mathcal{V}^0_{(2)}\}_J = \begin{cases} \omega^0_{(2)} \vec{z}_0 \\ [\vec{V}^0_{(2)}]_J = [\vec{V}^0_{(2)}]_{O_2} + \omega^0_{(2)} \vec{z}_0 \wedge \overrightarrow{O_2 J} \end{cases}$$

$$= (r_1 + r_2)\,\omega^0_{(4)} \vec{u}_2 + \omega^0_{(2)} \vec{z}_0 \wedge r_2 \vec{u}_1$$

$$= \left((r_1 + r_2)\,\omega^0_{(4)} + r_2\,\omega^0_{(2)}\right) \vec{u}_2$$

$$\{\mathcal{V}^0_{(3)}\}_J = \begin{cases} \omega^0_{(3)} \vec{z}_0 \\ [\vec{V}^0_{(3)}]_J = \cancel{\underset{0}{[\vec{V}^0_{(3)}]_{O_3}}} + \omega^0_{(3)} \vec{z}_0 \wedge \overrightarrow{O_3 J} \end{cases}$$

$$= \omega^0_{(3)} \vec{z}_0 \wedge r_3 \vec{u}_1 = \omega^0_{(3)} r_3 \vec{u}_2$$

2 Condition d'absence de glissement en I et en J :

$$\Rightarrow \begin{cases} [\vec{V}^0_{(2)}]_I - [\vec{V}^0_{(1)}]_I = 0 \\ [\vec{V}^0_{(3)}]_J - [\vec{V}^0_{(2)}]_J = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (r_1 + r_2)\,\omega^0_{(4)} - r_2\,\omega^0_{(2)} = r_1\,\omega^0_{(1)} \\ (r_1 + r_2)\,\omega^0_{(4)} + r_2\,\omega^0_{(2)} = r_3\,\omega^0_{(3)} \end{cases}$$

or d'après la géométrie du problème, $r_3 = r_1 + 2r_2$

$$\Rightarrow 2r_2 = r_3 - r_1$$

$$\Rightarrow (r_1 + r_3)\,\omega^0_{(4)} = r_3\,\omega^0_{(3)} + r_1\,\omega^0_{(1)}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^0_{(4)} - \omega^0_{(3)}}{\omega^0_{(4)} - \omega^0_{(1)}} = -\frac{r_1}{r_3}$$

3 Lorsque le planétoire et la couronne possède la même vitesse de rotation, alors $\omega^0_{(1)} = \omega^0_{(3)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (r_1 + r_2)\,\omega^0_{(4)} - r_2\,\omega^0_{(2)} = r_1\,\omega^0_{(1)} \\ (r_1 + r_2)\,\omega^0_{(4)} + r_2\,\omega^0_{(2)} = r_3\,\omega^0_{(1)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2r_2\,\omega^0_{(2)} = (r_3 - r_1)\,\omega^0_{(1)} \Rightarrow \omega^0_{(2)} = \omega^0_{(1)} = \omega^0_{(3)} = \omega^0_{(4)}$$

Le fait que $\omega^0_{(4)}$ soit égal aux autres vitesses instantannées de rotation vient du fait que $\omega^0_{(3)} = \omega^0_{(1)}$

En effet : $$\frac{\omega^{\circ}_{(4)} - \omega^{\circ}_{(3)}}{\omega^{\circ}_{(4)} - \omega^{\circ}_{(3)}} = -\frac{r_1}{r_3} \neq 1 \Rightarrow \omega^{\circ}_{(4)} = \omega^{\circ}_{(3)}$$

(4) Lorsque la couronne reste fixe, $\omega^{\circ}_{(3)} \approx 0$

$$\Rightarrow \frac{\omega^{\circ}_{(4)}}{\omega^{\circ}_{(4)} - \omega^{\circ}_{(1)}} = -\frac{r_1}{r_3} \Rightarrow \frac{\omega^{\circ}_{(4)}}{\omega^{\circ}_{(1)}} = \frac{r_1}{r_1 + r_3}$$

Cette relation permet ainsi de calculer le rapport de démultiplication du réducteur, c'est-à-dire le rapport $r_1/(r_1+r_3)$

$$\frac{\omega^{\circ}_{(4)}}{\omega^{\circ}_{(1)}} = \frac{r_1}{r_1 + r_3} = \frac{r_1}{2(r_1 + r_2)}$$, puisque $r_3 = r_1 + 2r_2$

Prenons le cas particulier simple où planétaire et satellite possède un rayon identique, c'est-à-dire lorsque $r_2 = r_1$. Dans ce cas le rapport vaut :

$$\frac{\omega^{\circ}_{(4)}}{\omega^{\circ}_{(1)}} = \frac{1}{4}.$$

Pour cet exemple, et toujours lorsque $\omega^{\circ}_{(3)} = 0$ (la couronne reste bien fixe), alors on observe que les roues tournent 4 fois plus vite que la barre "virtuelle" O_1O_2.

Rappels de cinétique du solide

1- Torseur cinétique

* Résultante cinétique (quantité de mouvement)

$$\vec{P} = \int_S \vec{V(M)}\, dm \,, \quad M \in S \,,$$

avec $\vec{V(M)} = \vec{V(G)} + \vec{\Omega} \wedge \vec{GM}$

$$\Rightarrow \vec{P} = \int_S \vec{V(G)}\, dm + \int_S \vec{\Omega} \wedge \vec{GM}\, dm$$

$$\vec{P} = \vec{V(G)} \int_S dm + \vec{\Omega} \wedge \underbrace{\cancel{\int_S \vec{GM}\, dm}}_{=0}$$

$$\vec{P} = M \vec{V(G)}$$

Note : la justification du fait que l'intégrale $\int_S \vec{GM}\, dm$ soit nulle, vient de la définition du centre de gravité G pour un solide, à savoir : $\vec{OG} = \frac{1}{M} \int_S \vec{OM}\, dm$

Lorsque l'on considère $O \equiv G$, alors on obtient le résultat attendu, $\int_S \vec{GM}\, dm = 0$

* Moment cinétique évalué en un point arbitraire Q du solide, $\vec{\sigma}(Q)$ (définition) :

$$\vec{\sigma}(Q) = \int_S \vec{QM} \wedge \vec{V(M)}\, dm \,, \quad Q \text{ et } M \in S$$

$$= \int_S (\vec{QQ'} + \vec{Q'M}) \wedge \vec{V(M)}\, dm$$

$$= \int_S \vec{QQ'} \wedge \vec{V(M)}\, dm + \underbrace{\int_S \vec{Q'M} \wedge \vec{V(M)}\, dm}_{\vec{\sigma}(Q')}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}(Q) = \vec{\sigma}(Q') + \vec{QQ'} \wedge \vec{P}$$

Il s'agit bien d'un torseur. Par ailleurs,

$$\vec{\sigma}(Q) = \int_S \vec{QM} \wedge \vec{V(M)}\, dm \,, \quad \text{avec :}$$

$$\vec{V(M)} = \vec{V(G)} + \vec{\Omega} \wedge \vec{GM}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}(Q) = \int_S \vec{QM} \wedge \vec{V}(G)\,dm + \int_S \vec{QG} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{GM})\,dm + \int_S \vec{GM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{GM})\,dm$$

$$\vec{\sigma}(Q) = \left(\int_S \vec{QM}\,dm\right) \wedge \vec{V}(G) + \cancel{\vec{QG} \wedge \vec{\Omega} \wedge \int_S \vec{GM}\,dm} + \overline{\overline{I}}(S,G)\,\vec{\Omega}$$

$$\int_S \vec{GM}\,dm = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}(Q) = M\,\vec{QG} \wedge \vec{V}(G) + \overline{\overline{I}}(S,G)\,\vec{\Omega}$$

Note 1 : Le fait que $\int_S \vec{QM}\,dm = M\,\vec{QG}$ vient de la définition du centre d'inertie G, à savoir : $\vec{OG} = \frac{1}{M}\int_S \vec{OM}\,dm$. En prenant l'origine O identique au point Q $(O \equiv Q)$, on obtient effectivement le résultat attendu, à savoir :

$$\vec{QG} = \frac{1}{M}\int_S \vec{QM}\,dm \Rightarrow \int_S \vec{QM}\,dm = M\,\vec{QG}$$

Note 2 : Par définition l'opérateur d'inertie d'un solide S par rapport à une origine absolue O, exprimé en projection sur un vecteur unitaire $\vec{u}$ s'exprime par la relation :

$$\overline{\overline{I}}(S,O)\,\vec{u} = \int_S \vec{OM} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{OM})\,dm,$$

avec $\vec{OM} = x\vec{i}_0 + y\vec{j}_0 + z\vec{k}_0$

La matrice $\overline{\overline{I}}(S,O)$ est constituée de 6 termes indépendants :

$$\overline{\overline{I}}(S,O) = \begin{pmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{pmatrix}$$

Par exemple pour calculer le terme A, on doit projeter sur la direction $\vec{u} = \vec{i}_0$

$$\Rightarrow A = \vec{i}_0 \cdot \overline{\overline{I}}(S,O)\,\vec{i}_0 = \int_S \vec{i}_0 \cdot \vec{OM} \wedge (\vec{i}_0 \wedge \vec{OM})\,dm,$$

soit en utilisant la définition du double produit vectoriel : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$$\Rightarrow \vec{OM} \wedge (\vec{i}_0 \wedge \vec{OM}) = \vec{i}_0(\vec{OM}\cdot\vec{OM}) - \vec{OM}(\vec{OM}\cdot\vec{i}),$$

soit avec $\vec{OM} = x\vec{i}_0 + y\vec{j}_0 + z\vec{k}_0$

$$\Rightarrow \vec{OM} \wedge (\vec{i}_0 \wedge \vec{OM}) = \vec{i}_0(x^2+y^2+z^2) - x\,\vec{OM}$$

$$\Rightarrow \vec{i}_0 \cdot [\vec{OM} \wedge (\vec{i}_0 \wedge \vec{OM})] = \vec{i}_0\cdot\vec{i}_0(x^2+y^2+z^2) - x\,\vec{i}_0\cdot\vec{OM}$$

$$\Rightarrow A = \int_S (x^2+y^2+z^2)\,dm - \int_S x^2 dm$$

d'où $A = \int_S (y^2+z^2)\,dm$

De même on trouve $\begin{cases} B = \int_S (x^2+z^2)\,dm \\ C = \int_S (x^2+y^2)\,dm \end{cases}$

A, B et C sont appelés moments d'inertie.
Par ailleurs, on a pour D :

$$D = \vec{i}_0 \cdot \overline{\overline{I}}(S,O)\,\vec{j}_0 = \int_S \vec{i}_0 \cdot \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{j}_0 \wedge \overrightarrow{OM})\,dm$$

$$= \int_S \underbrace{\vec{i}_0 \cdot \vec{j}_0}_{=0} (\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM})\,dm - \int_S \underbrace{\vec{i}_0 \cdot \overrightarrow{OM}}_{=x} \underbrace{(\overrightarrow{OM} \cdot \vec{j}_0)}_{=y}\,dm$$

$$\Rightarrow D = -\int_S xy\,dm$$

De même, $E = -\int_S xz\,dm$ et $F = -\int_S yz\,dm$

D, E et F sont appelés produits d'inertie

L'opérateur d'inertie d'un solide est donc complètement déterminé par le calcul des 3 moments d'inertie A, B et C, et des 3 produits d'inertie D, E et F.
Pour les solides usuels qui possèdent des plans de symétrie ou bien des symétries de révolution (cylindre, disque, sphère, cône), on peut montrer que les produits d'inertie sont nuls.

Note 3 : Dans l'expression générale de $\vec{\sigma}(Q)$,

$$\vec{\sigma}(Q) = M\,\overrightarrow{QG} \wedge \overline{\overline{I}}(S,G)\,\vec{\Omega},$$

Figure l'opérateur d'inertie du solide S, exprimé au point G (centre d'inertie), qui s'écrit sous la forme :

$$\overline{\overline{I}}(S,G)\,\vec{\Omega} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM})\,dm$$

on passe de $\overline{\overline{I}}(O,S)\vec{\Omega} = \int \overrightarrow{OM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM})\,dm$ à $\overline{\overline{I}}(S,G)\vec{\Omega}$, par le théorème de Koenig qui n'est rien d'autre que la généralisation du théorème de Huyghens, à l'opérateur d'inertie. La démonstration vient de la relation de Chasles $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM}$, appliquée à l'expression $\overline{\overline{I}}(O,S)\vec{\Omega}$

.../...

$$\bar{\bar{I}}(O,S)\vec{\Omega} = \int_S \vec{OM}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{OM})\,dm$$

$$= \int_S \vec{OG}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{OG})\,dm + \int_S \vec{OG}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{GM})\,dm$$

$$+ \int_S \vec{GM}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{OG})\,dm + \int_S \vec{GM}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{GM})\,dm$$

or $\int_S \vec{OG}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{GM})\,dm = \vec{OG}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge\int_S \vec{GM}\,dm\right) = 0$

et $\int_S \vec{GM}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{OG})\,dm = \left(\int_S \vec{GM}\,dm\right)\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{OG}) = 0$,

car pour ces deux intégrales, $\int_S \vec{GM}\,dm = 0$, à cause de la définition du centre d'inertie.

Finalement, on peut donc écrire :

$$\bar{\bar{I}}(O,S)\vec{\Omega} = M\vec{OG}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{OG}) + \bar{\bar{I}}(G,S)\vec{\Omega}$$

Au final, l'expression générale du moment cinétique, exprimée au point Q :

$$\vec{\sigma}(Q) = M\,\vec{QG}\wedge\vec{V}(G) + \bar{\bar{I}}(S,G)\vec{\Omega} ,$$

se simplifie lorsque $Q \equiv G$ ou bien lorsque $\vec{V}(G) = 0$. On obtient dans ce cas une expression plus simple, $\vec{\sigma}(G) = \bar{\bar{I}}(S,G)\vec{\Omega}$ qui est universelle et qui est très utile pour résoudre exercices et problèmes.

2 - Torseur dynamique

* Résultante dynamique (quantité d'accélération)

$\vec{J} = \int_S \vec{a}(M)\,dm$, avec l'expression générale de l'accélération,

$$\vec{a}(M) = \vec{a}(G) + \vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{GM}) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\vec{GM},$$

cf. Rappels de cinématique

$$\Rightarrow \vec{J} = \int_S \vec{a}(G)\,dm + \vec{\Omega}\wedge\Big(\vec{\Omega}\wedge\underbrace{\int_S \vec{GM}\,dm}_{=0}\Big) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\underbrace{\int_S \vec{GM}\,dm}_{=0}$$

$$\Rightarrow \vec{J} = M\vec{a}(G) = M\frac{d\vec{V}(G)}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

* Moment dynamique évalué en un point arbitraire Q du solide, $\vec{h}(Q)$ (définition) :

$$\vec{h}(Q) = \int_S \vec{QM} \wedge \vec{a}(M)\, dm \quad , Q \text{ et } M \in S$$

$$= \int_S (\vec{QQ'} + \vec{Q'M}) \wedge \vec{a}(M)\, dm$$

$$= \int_S \vec{QQ'} \wedge \vec{a}(M)\, dm + \int_S \vec{Q'M} \wedge \vec{a}(M)\, dm$$

$$= \vec{QQ'} \wedge \int_S \vec{a}(M)\, dm + \vec{h}(Q')$$

$$\Rightarrow \vec{h}(Q) = \vec{h}(Q') + \vec{QQ'} \wedge \vec{J} \quad \text{Torseur dynamique}$$

Repartons de l'expression du moment cinétique :

$$\vec{\sigma}(Q) = \int_S \vec{QM} \wedge \vec{V}(M)\, dm \, ,$$

qui est simplement dérivée autour du temps :

$$\frac{d\vec{\sigma}(Q)}{dt} = \int_S \frac{d}{dt}(\vec{QM}) \wedge \vec{V}(M)\, dm + \int_S \vec{QM} \wedge \vec{a}(M)\, dm$$

$$= \int_S (\vec{V}(M) - \vec{V}(Q)) \wedge \vec{V}(M)\, dm + \vec{h}(Q)$$

$$= \underbrace{\int_S \vec{V}(M) \wedge \vec{V}(M)\, dm}_{=0} - \int_S \vec{V}(Q) \wedge \vec{V}(M)\, dm + \vec{h}(Q)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}(Q)}{dt} = \vec{h}(Q) + M\vec{V}(G) \wedge \vec{V}(Q)$$

Cette expression se simplifie pour les 4 cas suivants : si Q fixe, si G fixe, si $Q \equiv G$, ou si $\vec{V}(Q) \parallel \vec{V}(G)$.

Dans ce cas, on obtient la relation plus simple :

$$\frac{d\vec{\sigma}(Q)}{dt} = \vec{h}(Q)$$

En particulier, si $Q \equiv G$, alors on a :

$$\frac{d\vec{\sigma}(G)}{dt} = \vec{h}(G) \quad \text{relation simple et universelle.}$$

De plus, sachant que $\vec{\sigma}(G) = \bar{\bar{I}}(S,G)\vec{\Omega}$, dans le cas où $\bar{\bar{I}}(S,G) = cte$, alors :

$$\vec{h}(G) = \bar{\bar{I}}(S,G)\frac{d\vec{\Omega}}{dt}$$

3- Définition de l'énergie cinétique

Par définition, $2E_C = \int_S \vec{V(M)}^2 dm = \int_S \vec{V(M)} \cdot \vec{V(M)}\, dm$,

avec $\vec{V(M)} = \vec{V(G)} + \vec{\Omega} \wedge \vec{GM}$ loi de distribution des vitesses

$$\Rightarrow 2E_C = \int_S \vec{V(G)}^2 dm + 2\int_S \vec{V(G)} \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{GM})\, dm + \int_S \underbrace{(\vec{\Omega} \wedge \vec{GM})}_{\vec{u}} \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{GM})\, dm$$

$$\Rightarrow 2E_C = M\vec{V(G)}^2 + \cancel{2\vec{V(G)} \cdot (\vec{\Omega} \wedge \int_S \underbrace{\vec{GM}\, dm}_{=\vec{0}})} + \int_S (\vec{u}, \vec{\Omega}, \vec{GM})\, dm$$

$$\int_S (\vec{\Omega}, \vec{GM}, \vec{u})\, dm$$

$$\Rightarrow 2E_C = M\vec{V(G)}^2 + \int_S \vec{\Omega} \cdot \vec{GM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{GM})\, dm$$

$$\Rightarrow 2E_C = M\vec{V(G)}^2 + \vec{\Omega} \cdot \underbrace{\int_S \vec{GM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{GM})\, dm}_{\overline{\overline{I}}(S,G)\vec{\Omega}}$$

Soit finalement, le résultat classique :

$$2E_C = M\vec{V(G)} \cdot \vec{V(G)} + \vec{\Omega} \cdot \overline{\overline{I}}(S,G)\vec{\Omega},$$

résultat souvent noté de manière plus simple:

$$2E_C = MV_G^2 + J\Omega^2$$

4- Puissance d'une force, théorème de l'énergie cinétique

définition du travail d'une force ponctuelle

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{OM} \Rightarrow \mathcal{P}_M = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V(M)}$$

Cette expression se généralise à un solide

$$\mathcal{P}_M = \frac{dW}{dt} = \int_S \vec{V(M)} \cdot d\vec{F}, \text{ avec :}$$

$\vec{V(M)} = \vec{V(G)} + \vec{\Omega} \wedge \vec{GM}$ loi de distribution des vitesses

$$\Rightarrow \mathcal{P}_M = \int_S \vec{V(G)} \cdot d\vec{F} + \int_S (\vec{\Omega} \wedge \vec{GM}) \cdot d\vec{F}$$

Dans la deuxième intégrale, il est possible d'utiliser la propriété du produit mixte qui reste inchangé par permutation entre le produit scalaire et le produit vectoriel. On peut donc ici écrire :

$$\int_S (\vec{\Omega} \wedge \vec{GM}) \cdot d\vec{F} = \int_S (\vec{\Omega} \cdot \vec{GM}) \wedge d\vec{F} = \vec{\Omega} \cdot \int_S \vec{GM} \wedge d\vec{F}$$

Finalement, l'expression de la puissance mécanique s'écrit :

$$\mathcal{P}_M = \vec{V(G)} \cdot \int_S d\vec{F} + \vec{\Omega} \cdot \int_S \vec{GM} \wedge d\vec{F} \quad ,$$

c'est à dire :

$$\mathcal{P}_M = \vec{V(G)} \cdot \sum \vec{F}_{ext} + \vec{\Omega} \cdot \sum \vec{\mathcal{M}}_G \vec{F}_{ext}$$

La puissance mécanique s'exprime comme étant le produit scalaire "croisé" du torseur cinématique par le torseur des efforts extérieurs :

$$\mathcal{P}_M = \{\mathcal{V}_G\} \cdot \{\mathcal{F}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega} \\ \vec{V(G)} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sum \vec{F}_{ext} \\ \sum \vec{\mathcal{M}}_G \vec{F}_{ext} \end{Bmatrix}$$

Le principe fondamental de la dynamique (ou 2ème loi de Newton) exprime l'égalité du torseur dynamique avec celui des efforts extérieurs, lorsque ils sont exprimés au point G (centre d'inertie) :

$$\{\mathcal{D}_G\} = \{\mathcal{F}_G\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{d} \\ \vec{h(G)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum \vec{F}_{ext} \\ \sum \vec{\mathcal{M}}_G \vec{F}_{ext} \end{Bmatrix}$$

De plus, toujours en travaillant au point G (repère barycentrique), on obtient :

$$\{\mathcal{D}_G\} = \frac{d}{dt}\{\mathcal{C}_G\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{d} \\ \vec{h(G)} \end{Bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \vec{P} \\ \vec{\sigma(G)} \end{Bmatrix} \quad ,$$

Soit avec $\vec{\sigma(G)} = \vec{\Omega}\, \overline{\overline{I}}(S,G)$, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{P}_M &= \vec{V(G)} \cdot \vec{d} + \vec{\Omega} \cdot \vec{h(G)} \\ \mathcal{P}_M &= \vec{V(G)} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{\Omega} \cdot \frac{d}{dt} \vec{\sigma(G)} \\ \mathcal{P}_M &= \vec{V(G)} \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{\Omega} \cdot I(G) \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \end{aligned}\right\} \text{Il s'agit de 3 expressions tout à fait similaires}$$

A partir de la 3ème expression, il est alors aisé d'établir le théorème de l'énergie cinétique pour un solide.

$$\mathcal{P}_M = \vec{V}(G) \cdot M \frac{d\vec{V}(G)}{dt} + \vec{\Omega} \cdot \bar{\bar{I}}(G) \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_M = \frac{1}{2} M \frac{d\vec{V}(G)^2}{dt} + \frac{1}{2} \bar{\bar{I}}(G) \frac{d\vec{\Omega}^2}{dt}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_M = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} M \vec{V}(G)^2 + \frac{1}{2} \bar{\bar{I}}(G) \vec{\Omega}^2\right)$$

d'où : $$\mathcal{P}_M = \frac{d}{dt} E_c$$

Il s'agit du théorème de l'énergie cinétique pour un solide indéformable en mouvement de translation et de rotation. Ce théorème porte aussi le nom de théorème de l'énergie puissance.

On peut faire le chemin inverse à partir de ce résultat, et en repartant de la définition de l'énergie cinétique :

$$2E_c = \int_S \vec{V}(M)^2 dm \Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = \int_S \vec{V}(M)\, \vec{a}(M)\, dm,$$

soit en notant $\vec{V}(M) = \vec{V}(G) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GM}$, la loi de distribution des vitesses dans le solide S :

$$\Rightarrow \mathcal{P}_M = \int_S \vec{V}(G) \cdot \vec{a}(M)\, dm + \int_S (\vec{\Omega} \wedge \vec{GM}) \cdot \vec{a}(M)\, dm$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_M = \vec{V}(G) \cdot \int_S \vec{a}(M)\, dm + \left(\int_S (\vec{GM} \wedge \vec{a}(M))\, dm\right) \cdot \vec{\Omega}$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}_M = \vec{V}(G) \cdot \vec{J} + \vec{\Omega} \cdot \vec{h}(G)$$, ou bien :

$$\mathcal{P}_M = \vec{V}(G) \cdot \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{\Omega} \cdot \frac{dJ(G)}{dt}$$, ou encore :

$$\mathcal{P}_M = \vec{V}(G) \cdot \sum \vec{F}_{ext} + \vec{\Omega} \cdot \sum \vec{\mathcal{M}}_G \vec{F}_{ext}$$

D'un point de vue formel, on peut donc écrire :

$$\mathcal{P}_M = \frac{dE_c}{dt} = \{\mathcal{V}_G\} \otimes \{\mathcal{D}_G\} = \{\mathcal{V}_G\} \otimes \{\mathcal{F}_G\}$$

Par ailleurs, on a aussi la relation formelle :

$$2E_c = \{\mathcal{V}_G\} \otimes \{\mathcal{C}_G\}$$, sachant que

$$\{\mathcal{D}_G\} = \frac{d}{dt}\{\mathcal{C}_G\}$$, on retrouve bien que

$$\mathcal{P}_M = \frac{d}{dt} E_c$$

Récapitulatif Mécanique du solide

<u>Torseur cinématique</u> $\{\mathcal{V}_M\}$ $\nearrow$ Résultante, $\vec{\Omega}$; $\searrow$ Moment, $\vec{V}(M)$

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(M') + \vec{\Omega} \wedge \vec{M'M}$$ loi de distribution des vitesses

<u>Torseur cinétique</u> $\{\mathcal{C}_G\}$ $\nearrow$ Résultante, $\vec{P} = m\vec{V}$; $\searrow$ Moment, $\vec{\sigma}(G) = I\vec{\Omega}$

<u>Torseur dynamique</u> $\{\mathcal{D}_G\}$ $\nearrow$ Résultante $\vec{J} = m\vec{a} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$; $\searrow$ Moment, $\vec{h}(G) = \dfrac{d\vec{\sigma}(G)}{dt}$

Au point G, centre d'inertie, on a $\{\mathcal{D}_G\} = \dfrac{d}{dt}\{\mathcal{C}_G\}$

Deuxième loi de Newton écrite à partir de la résultante dynamique et du théorème du moment dynamique :

$$\{\mathcal{F}_G\} = \{\mathcal{D}_G\},$$

avec $\{\mathcal{F}_G\}$, <u>torseur des efforts extérieurs</u> évalué en G, ou bien en un point fixe O

$\{\mathcal{F}_G\}$ $\nearrow$ Résultante, $\sum \vec{F}_{ext}$; $\searrow$ Moment, $\sum \vec{\mathcal{M}}_G \vec{F}_{ext}$

<u>Définition de l'énergie cinétique d'un solide</u>

$$E_c = \frac{1}{2}\int_S \vec{V}(M)^2 dm = \frac{1}{2}\int_S \vec{V}(M) \cdot \vec{V}(M)\, dm$$

$$\Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = \int_S \vec{V}(M) \cdot \vec{a}(M)\, dm = \mathcal{P}_M,$$

avec $\vec{V}(M) = \vec{V}(G) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GM}$

$$\Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = \int_S \vec{V}(G) \cdot \vec{a}(M)\, dm + \underbrace{\int_S (\vec{\Omega} \wedge \vec{GM}) \cdot \vec{a}(M)\, dm}_{= \int_S (\vec{\Omega}, \vec{GM}, \vec{a}(M))\, dm}$$

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{V}(G) \cdot \int_S \vec{a}(M)\,dm + \left(\int_S \vec{GM} \wedge \vec{a}(M)\,dm \right) \cdot \vec{\Omega}$$

$$= \vec{V}(G) \cdot \vec{J} + \vec{\Omega} \cdot \vec{h}(G) = \mathcal{P}_M$$

D'un point de vue formel, on peut écrire :

$$\mathcal{P}_M = \frac{dE_c}{dt} = \{\mathcal{V}_G\} \cdot \{\mathcal{D}_G\}$$ Produit scalaire croisé

$$\Rightarrow \mathcal{P}_M = \frac{dE_c}{dt} = \{\mathcal{V}_G\} \cdot \{\mathcal{F}_G\} = \vec{V}(G) \cdot \sum \vec{F}_{ext} + \vec{\Omega} \cdot \sum \mathcal{M}_G \vec{F}_{ext}$$

De même, on peut noter :

$$E_c = \frac{1}{2} \{\mathcal{V}_G\} \cdot \{\mathcal{C}_G\} = \frac{1}{2} \vec{V}(G) \cdot \vec{P} + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{h}(G)$$

avec $\vec{h}(G) = \frac{d\vec{\sigma}(G)}{dt} = I \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dE_c}{dt} = \vec{V}(G) \cdot M \frac{d\vec{V}(G)}{dt} + \vec{\Omega} \cdot I \frac{d\vec{\Omega}}{dt}$$

Université du Maine. UFR Sciences et Techniques
UE MECANIQUE 222A

TD5 : *masse, centre de masse et matrice d'inertie.*

Exercice 1. Soit un ensemble (1) de 4 masses ponctuelles identiques m placées aux sommets d'un rectangle de côtés a et b.

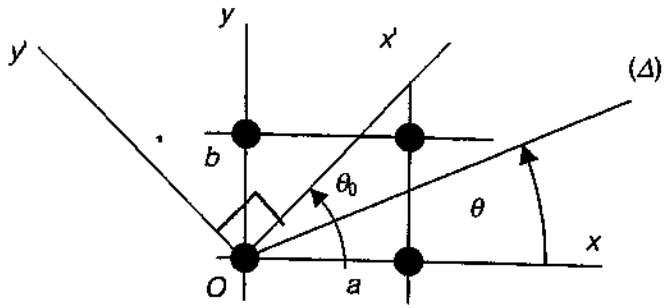


Figure1 : ensemble (1) de 4 masses identiques m

1. Ecrire les moments et produits d'inertie de l'ensemble (1) par rapport au repère Oxy.

2. Ecrire le moment d'inertie $I_\Delta(1)$. En déduire les valeurs de θ qui rendent ce moment <u>extrémal</u> et tracer la courbe $I_\Delta(1)$ en fonction de θ.

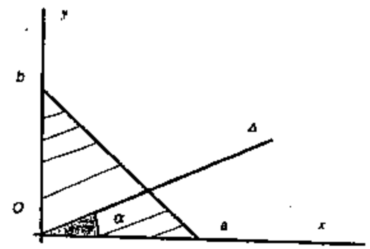
On rappelle que les axes Ox' et Oy' pour lesquels le moment d'inertie est <u>extrémal</u> sont les axes <u>principaux</u> d'inertie. Préciser quel est l'axe de moment d'inertie minimal et quel est l'axe de moment maximal.

3. On rappelle les formules de changement de repère entre les nouvelles coordonnées x' et y' d'un point et les anciennes coordonnées x et y :

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta \quad \text{et} \quad y' = y\cos\theta - x\sin\theta$$

Exprimer le produit d'inertie $F' = \sum_{i=1}^{4} m_i x'_i\, y'_i$ en fonction des coefficients d'inertie et l'angle θ. Quelles sont les valeurs de θ annulant F'. Conclusion?

Exercice 2 La plaque triangulaire ci-dessous, de masse m, est homogène et infiniment mince .



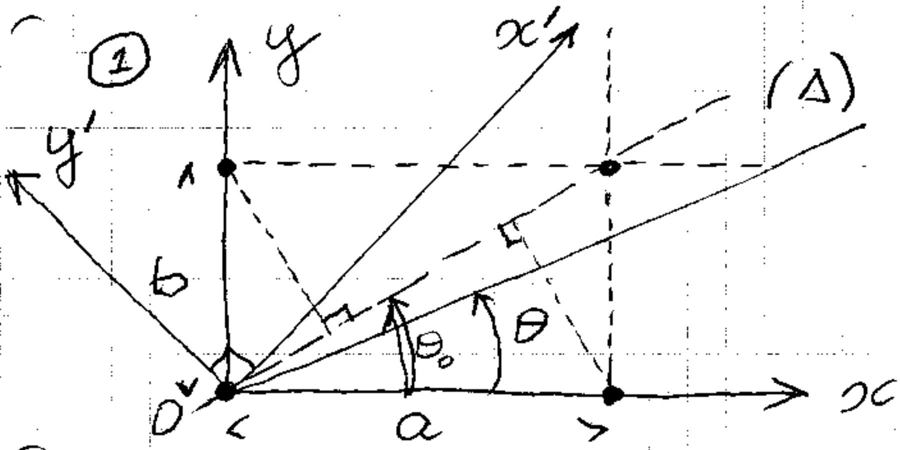
1. Ecrire les moments et produits d'inertie de la plaque au point O
2. Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe Δ en fonction de l'angle α.

Exercice 3. Calculer les matrices <u>principales</u> et <u>centrales</u> d'inertie des solides <u>homogènes</u> suivants: parallélépipède de dimensions $2a$, $2b$ et $2c$ et de masse m, cylindre de rayon R, de hauteur $2h$ et de masse m, et enfin, sphère de rayon R et de masse m.

TD5 : masse, centre de masse et matrice d'inertie

Exercice 1 : Moment d'inertie de 4 masses ponctuelles

①



Il s'agit d'une configuration à 2 dimensions. Dans ce cas, la matrice d'inertie se limite aux termes suivants :

$$\begin{cases} A = \sum_{i=1}^{i=4} y_i^2 m_i = 2mb^2 ; \quad B = \sum_{i=1}^{i=4} x_i^2 m_i = 2ma^2 \\ F = -\sum_{i=1}^{i=4} x_i y_i m_i = -2mab \end{cases}$$

② Pour une direction quelconque (Δ), d'angle θ avec l'axe horizontal, le moment d'inertie I_Δ, évalué pour la rotation de la figure autour de l'axe Δ, s'exprime aisément à l'aide de termes cosinus et sinus directeurs : $\alpha = \cos\theta$ et $\beta = \sin\theta$

$$I_\Delta = \underbrace{[\alpha \ \beta]}_{1\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} A & F \\ F & B \end{bmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{2\times 1} \rightarrow 1\times 1 : \text{scalaire}$$

$$I_\Delta = A\alpha^2 + B\beta^2 + 2F\alpha\beta = A\cos^2\theta + B\sin^2\theta + 2F\sin\theta\cos\theta$$

$$\Rightarrow I_\Delta = A\cos^2\theta + B\sin^2\theta + F\sin 2\theta$$
$$= 2m\left(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta - ab\sin 2\theta\right)$$

On recherche l'optimum de I_Δ en fonction de θ, cela revient alors à la condition :

$$\frac{\partial I_\Delta}{\partial\theta} = 0 \Rightarrow (a^2 - b^2)\sin 2\theta_0 - 2ab\cos 2\theta_0 = 0$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta_0 = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

$$\text{si } \tan\theta_0 = \frac{b}{a} \Rightarrow \tan 2\theta_0 = \frac{2\tan\theta_0}{1 - \tan^2\theta_0} = \frac{2\frac{b}{a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

soit $\tan 2\theta_0 = \dfrac{2ab}{a^2-b^2}$ CQFD

d'où l'on obtient bien la condition $\tan\theta_0 = \dfrac{b}{a}$, qui correspond à ce que la droite (Δ) passe effectivement par la masse située sur la diagonale en $x=a$ et $y=b$. C'est bien cette configuration qui minimise le moment d'inertie. Dans ce cas, cf. figure, on observe bien que $I_\Delta^{min} = 2mb^2\cos^2\theta_0$, pour $\theta_0 = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right) \Rightarrow a\sin\theta_0 = b\cos\theta_0$
on retrouve bien ce résultat, à partir de l'expression générale de I_Δ^{min} pour $\theta = \theta_0$, à savoir :

$$I_\Delta^{min} = 2m\left(b^2\cos^2\theta_0 + a^2\sin^2\theta_0 - ab\sin 2\theta_0\right)$$

(3) L'expression du produit d'inertie F' calculé dans les nouvelles coordonnées x' et y', est la suivante :

$$F' = -\sum_{i=1}^{i=4} x_i' y_i' m_i ,$$

avec : $\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = y\cos\theta - x\sin\theta \end{cases}$

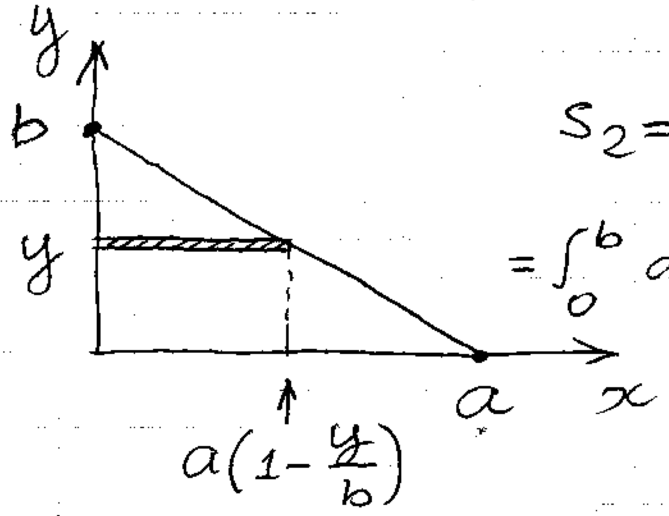
$$\Rightarrow x'y' = (x\cos\theta + y\sin\theta)(y\cos\theta - x\sin\theta)$$
$$= xy\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + (y^2 - x^2)\cos\theta\sin\theta$$
$$= xy\cos 2\theta + \frac{1}{2}(y^2 - x^2)\sin 2\theta$$

$$\Rightarrow F' = -ab\cos 2\theta - \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\sin 2\theta$$

d'où $F' = 0 \Rightarrow \tan 2\theta_0 = \dfrac{2ab}{a^2 - b^2}$ CQFD

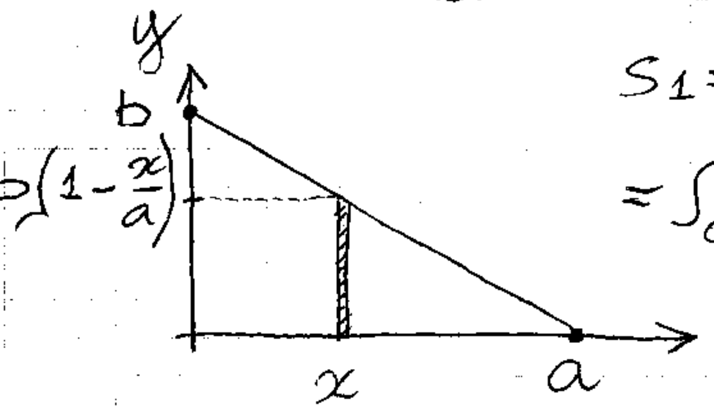
Exercice 2 : Matrice d'inertie d'une plaque triangulaire

① Il faut savoir calculer les intégrales de surface, en utilisant les bornes d'intégration correctes. Il y a deux possibilités, en mettant en jeu des petites sommes de Darboux horizontales, ou bien verticales.



$$S_2 = \int_0^b \left(\int_0^{a(1-\frac{y}{b})} dx \right) dy$$

$$= \int_0^b a\left(1-\frac{y}{b}\right) dy = a\left(b - \frac{b^2}{2b}\right) = \frac{1}{2}ab$$



$$S_1 = \int_0^a \left(\int_0^{b(1-\frac{x}{a})} dy \right) dx$$

$$= \int_0^a b\left(1-\frac{x}{a}\right) dx = b\left(a - \frac{a^2}{2a}\right) = \frac{1}{2}ab$$

Dans les deux cas, on retrouve bien la superficie du triangle, à savoir : $S = \frac{1}{2}ab$.

Pour le calcul des éléments de la matrice d'inertie, le fait qu'il s'agisse d'une configuration à 2 dimensions, indique que l'on retrouve uniquement 3 éléments A, B, et F. Par ailleurs, sachant que la plaque est très fine, à la limite $z = 0$.

Dès lors, il reste :

$$A = \int_S y^2 dm \; ; \; B = \int_S x^2 dm \; ; \; F = -\int_S xy\, dm,$$

avec : $dm = \sigma\, ds$; $M = \sigma S = \sigma \frac{ab}{2} \Rightarrow \sigma = \frac{2M}{ab}$,

d'où : $dm = \frac{2M}{ab} ds = \frac{2M}{ab} dx\, dy$

$$\Rightarrow A = \int_S \frac{2M}{ab} y^2 ds = \frac{2M}{ab} \int_S y^2 dx\, dy$$

Dès lors, on peut effectuer le calcul de A, en utilisant la borne d'intégration introduite pour le calcul avec les petites sommes de Darboux :

$$A = \frac{2M}{ab}\int_0^a \left(\int_0^{b(1-\frac{x}{a})} y^2 dy\right) dx$$

$$A = \frac{2M}{ab}\int_0^a \frac{1}{3} b^3\left(1-\frac{x}{a}\right)^3 dx = \frac{2Mb^2}{3a}\int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)^3 dx,$$

soit à l'aide du changement de variable :

$$X = 1-\frac{x}{a} \Rightarrow dX = -\frac{dx}{a}$$

$$\int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)^3 dx = -a\int_1^0 X^3 dX = a\int_0^1 X^3 dX = \frac{a}{4}$$

d'où $A = \dfrac{Mb^2}{6}$ et idem pour $B = \dfrac{Ma^2}{6}$, par raison de symétrie.

$$B = \frac{2M}{ab}\int_0^a \left(\int_0^{b(1-\frac{x}{a})} x^2 dy\right) dx$$

$$= \frac{2M}{ab}\int_0^a x^2 b\left(1-\frac{x}{a}\right) dx = \frac{2M}{a}\int_0^a \left[x^2 - \frac{x^3}{a}\right] dx$$

$$= \frac{2M}{a}\left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4a}\right) = 2Ma^2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = 2Ma^2 \times \frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow B = \frac{Ma^2}{6}$$

Passons alors au calcul du produit d'inertie

$$F = -\int_S xy\, dm, \text{ avec } dm = \frac{2M}{ab} dx\, dy$$

$$F = -\frac{2M}{ab}\int_0^a \left(\int_0^{b(1-\frac{x}{a})} y\, dx\right) x\, dx$$

$$= -\frac{2M}{ab}\int_0^a \frac{1}{2} b^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 \cdot x\, dx = -\frac{Mb}{a}\int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)^2 x\, dx$$

$$= -\frac{Mb}{a}\int_0^a \left(1-\frac{2x}{a}+\frac{x^2}{a^2}\right) x\, dx = -\frac{Mb}{a}\int_0^a \left(x - \frac{2x^2}{a} + \frac{x^3}{a^2}\right) dx$$

$$= -\frac{Mb}{a}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{2}{3}a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = -Mab\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad F = -\frac{Mab}{12}$$

Au final, on trouve donc les résultats suivants :

$$I = \begin{pmatrix} A & F \\ F & B \end{pmatrix}, \text{ avec : } A = \frac{Mb^2}{6} ; B = \frac{Ma^2}{6} ; F = -\frac{Mab}{12}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{M}{6}\begin{pmatrix} b^2 & -\frac{ab}{2} \\ -\frac{ab}{2} & a^2 \end{pmatrix}$$

(2) On cherche dorénavant à calculer le moment d'inertie I_Δ, par rapport à la droite Δ, faisant un angle α avec l'horizontale. Par définition, l'expression élémentaire de I_Δ est la suivante :

$$I_\Delta = \int_S y'^2 \, dm, \quad \text{avec} \quad dm = \frac{2M}{ab} dx\, dy,$$

où : $\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$

$$\Rightarrow I_\Delta = \frac{2M}{ab}\int_0^a \underbrace{\left(\int_0^{b(1-\frac{x}{a})} (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 dy\right)}_{J_\alpha} dx$$

$$J_\alpha = \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} (y^2\cos^2\alpha - 2xy\cos\alpha\sin\alpha + x^2\sin^2\alpha)\, dy$$

$$= x^2\sin^2\alpha \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} dy - x\sin 2\alpha \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} y\, dy + \cos^2\alpha \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} y^2 dy$$

$$J_\alpha = x^2 \cdot b\left(1-\frac{x}{a}\right)\sin^2\alpha - \frac{xb^2}{2}\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 \sin 2\alpha + \frac{b^3\left(1-\frac{x}{a}\right)^3}{3}\cos^2\alpha$$

$$I_\Delta = \frac{2M}{ab}\int_0^a J_\alpha \, dx$$

$$= \frac{2M}{ab} \times b\sin^2\alpha \int_0^a x^2\left(1-\frac{x}{a}\right) dx$$

$$- \frac{M}{ab} \times b^2 \sin 2\alpha \int_0^a x\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx$$

$$+ \frac{2M}{ab} \times \frac{b^3}{3}\cos^2\alpha \int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)^3 dx$$

$$I_\Delta = \frac{2M}{a}\sin^2\alpha\left(\frac{a^3}{3}-\frac{a^3}{4}\right) - \frac{Mb}{a}\sin 2\alpha\left(\frac{a^2}{2}-\frac{2a^2}{3}+\frac{a^2}{4}\right)$$

$$+ \frac{2M}{3a} b^2 \cos^2\alpha \times \frac{a}{4}$$

$$I_\Delta = \frac{Ma^2}{6}\sin^2\alpha - \frac{Mab}{12}\sin 2\alpha + \frac{Mb^2}{6}\cos^2\alpha$$

On retrouve donc bien le résultat général, à savoir :

$$I_\Delta = (\beta, \gamma)\begin{pmatrix} A & F \\ F & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{cases} \beta = \cos\alpha \\ \gamma = \sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_\Delta = A\cos^2\alpha + B\sin^2\alpha + 2F\sin\alpha\cos\alpha,$$

relation vérifiée, puisque : $A = \frac{Mb^2}{6}$; $B = \frac{Ma^2}{6}$ et $F = -\frac{Mab}{12}$

Université du Maine. UFR Sciences et Techniques
UE MECANIQUE 222A

TD6 Cinétique, dynamique et énergie cinétique. Actions extérieures et principe fondamental de la dynamique.

Exercice 1. Modélisation d'un membre humain par 2 segments corporels

Le membre ci-dessous comporte deux segments corporels (1) et (2) liés entre eux par une liaison pivot en O_2. La liaison en O_1 est également pivot. Chaque segment est caractérisé par sa longueur l_i et par ses paramètres d'inertie: masse m_i, centre de masse G_i tel que la distance $O_iG_i = a_i$, et moment d'inertie I_i par rapport à l'axe $O_iz_i$en G_i. Les variables de situation sont indiquées sur la figure 1.

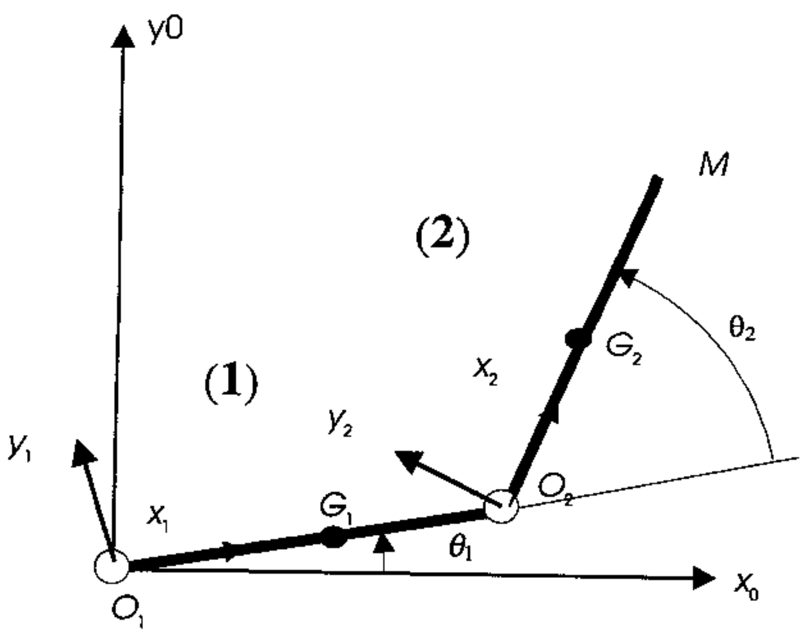


Figure 1. Membre humain. Variables de situation

1. Ecrire le torseur cinématique absolu de chaque segment en O_i puis en G_i.
2. En déduire les énergies cinétiques absolues $E_c^{(0)}(i)$pour chaque segment.

L'énergie cinétique totale étant de la forme:

$$E_c^{(0)}(1) + E_c^{(0)}(2) = \frac{1}{2}\left[A\dot{\theta}_1^2 + B\dot{\theta}_2^2 + 2C\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right],$$

calculer les coefficients, A, B et C en fonction des paramètres géométriques et des paramètres d'inertie.

Exercice 2. Mouvement d'une bille sur un plan incliné

On considère une bille homogène (1) de masse m=1kg, de rayon r=0,05m et de moment central d'inertie $\frac{2}{5}mr^2$. Ce solide se déplace sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale sous l'effet de la gravité. La situation du solide est alors définie par une variable de position x et une variable d'orientation θ.

Les actions extérieures à (1) sont représentées par le torseur vecteur poids $m\vec{g}$ en G et le torseur vecteur liaison en I est $T\vec{i}_0 + N\vec{j}_0$. Les actions aérodynamiques sont ici négligées.

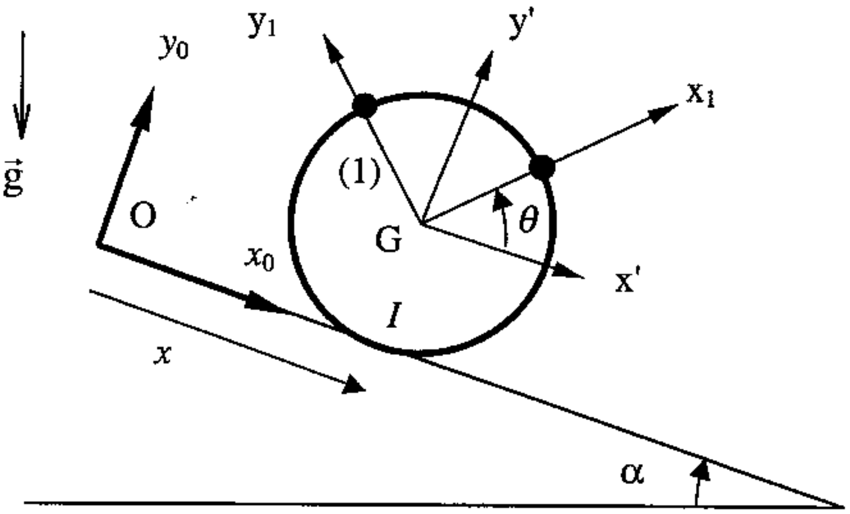


Figure 2 : Le solide de révolution est en contact ponctuel avec le plan incliné en I. Le repère Gx_1y_1 est lié au solide (1), le repère $Gx'_1y'_1$ est le repère du centre de masse et le repère Oxy est le repère absolu.

1. Ecrire, pour la bille (1), le torseur cinématique, le torseur cinétique et le torseur dynamique. En déduire les équations du mouvement à l'aide du principe fondamental de la dynamique. Dans toute la suite les conditions initiales de position et de vitesse sont prises nulles.

2. Le coefficient de frottement f=0. Que vaut T? Ecrire l'accélération absolue de G et retrouver cette expression par application du théorème de l'énergie puissance. Faire les applications numériques pour un cylindre puis une sphère pour α=15°.

3. Ici, le coefficient de frottement f est suffisamment grand pour que tout glissement soit impossible. Exprimer la relation de non glissement en I, puis l'accélération absolue de G. Retrouver ces expressions par le théorème de l'énergie puissance. Ecrire les composantes T et N et discuter par rapport à l'angle α le non glissement effectif.

TD6 : Cinétique, dynamique et énergie cinétique

Exercice 1 : Modélisation d'un membre humain par deux segments corporels

① On exprime les torseurs cinématiques et cinétique en G_1 et en G_2

$$\left\{\mathcal{V}^0_{(1)}\right\}_{G_1} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \vec{k}_0 \\ a_1 \dot{\theta}_1 \vec{j}_1 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\mathcal{V}^0_{(2)}\right\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} (\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\vec{k}_0 \\ \ell_1 \dot{\theta}_1 \vec{j}_1 + a_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\vec{j}_2 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\mathcal{P}^0_{(1)}\right\}_{G_1} = \begin{Bmatrix} m_1 a_1 \dot{\theta}_1 \vec{j}_1 \\ I_1 \dot{\theta}_1 \vec{k}_0 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\mathcal{P}^0_{(2)}\right\}_{G_2} = \begin{Bmatrix} m_2(\ell_1 \dot{\theta}_1 \vec{j}_1 + a_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2))\vec{j}_2 \\ I_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\vec{k}_0 \end{Bmatrix}$$

② Par définition, les énergies cinétiques des segments (1) et (2) sont calculées en effectuant un produit scalaire "croisé" entre torseur cinématique et torseur cinétique, sous la forme :

$$\begin{cases} E^0_{c(1)} = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{V}^0_{(1)}\right\} \cdot \left\{\mathcal{P}^0_{(1)}\right\} \\ E^0_{c(2)} = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{V}^0_{(2)}\right\} \cdot \left\{\mathcal{P}^0_{(2)}\right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E^0_{c(1)} = \frac{1}{2}\left(I_1\dot{\theta}_1^2 + m_1 a_1^2 \dot{\theta}_1^2\right) = \frac{1}{2}(I_1 + m_1 a_1^2)\dot{\theta}_1^2 \\ E^0_{c(2)} = \frac{1}{2}\Big[I_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2 + m_2 a_2^2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2 \\ \qquad + m_2 \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2 m_2 \ell_1 a_2 \dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\cos\theta_2\Big] \end{cases}$$

$$E^0_c = E^0_{c(1)} + E^0_{c(2)} = \frac{1}{2}\Big[(I_1 + m_1 a_1^2)\dot{\theta}_1^2 + m_2 \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + (I_2 + m_2 a_2^2)(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2 + 2 m_2 \ell_1 a_2 \dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\cos\theta_2$$

Finalement, l'énergie cinétique totale, absolue, se met sous la forme suivante :

$$E_C^0 = \frac{1}{2}\left[A\,\dot{\theta}_1^2 + B\,\dot{\theta}_2^2 + 2C\,\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right],$$

avec : $\boxed{\begin{aligned} A &= I_1 + I_2 + m_1 a_1^2 + m_2(l_1^2 + a_2^2) + 2m_2 l_1 a_2 \cos\theta_2 \\ B &= I_2 + m_2 a_2^2 \\ C &= I_2 + m_2 a_2^2 + m_2 l_1 a_2 \cos\theta_2 \end{aligned}}$

TD 6 : Actions extérieures et principe fondamental de la dynamique

Exercice 2 : Mouvement d'une bille sur un plan incliné

(1) Commençons par écrire au point G les expressions des torseurs cinématique, cinétique et dynamique :

$$\left\{\mathcal{V}^{0}_{(1)}\right\}_G \begin{cases} \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}\vec{k}_0 \\ \vec{V}(G) = \dot{x}\vec{i}_0 \end{cases} ; \quad \left\{\mathcal{C}^{0}_{(1)}\right\}_G \begin{cases} \vec{P} = m\dot{x}\vec{i}_0 \\ \vec{\sigma}_G = I\vec{\Omega} = \frac{2}{5}mr^2\dot{\theta}\vec{k}_0 \end{cases}$$

$$\left\{\mathcal{D}^{0}_{(1)}\right\}_G = \frac{d}{dt}\left\{\mathcal{C}^{0}_{(1)}\right\}_G \begin{cases} \vec{J} = m\ddot{x}\vec{i}_0 \\ \vec{h}_G = \frac{2}{5}mr^2\ddot{\theta}\vec{k}_0 \end{cases}$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\left\{\mathcal{D}^{0}_{(1)}\right\}_G = \left\{\mathcal{F}^{0}_{(1)}\right\}_G \begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} \\ \sum \vec{\mathcal{M}}_G \vec{F}_{ext} \end{cases} \text{, avec :}$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{g} + T\vec{i}_0 + N\vec{j}_0 = (mg\sin\alpha)\vec{i}_0 - (mg\cos\alpha)\vec{j}_0 + T\vec{i}_0 + N\vec{j}_0$$

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_G \vec{F}_{ext} = \underbrace{\cancel{\vec{GG}\wedge m\vec{g}}}_{=0} + \vec{GI}\wedge\left(T\vec{i}_0 + N\vec{j}_0\right) = -r\vec{j}_0\wedge\left(T\vec{i}_0 + N\vec{j}_0\right) = rT\vec{k}_0$$

$$\left\{\mathcal{D}^{0}_{(1)}\right\}_G = \left\{\mathcal{F}^{0}_{(1)}\right\}_G \begin{cases} \text{Théorème de la résultante dynamique : } \vec{J} = \sum \vec{F}_{ext} \\ \text{Théorème des moments : } \vec{h}_G = \sum \vec{\mathcal{M}}_G \vec{F}_{ext} \end{cases},$$

soit en projetant ces deux équations vectorielles, selon les vecteurs $\vec{i}_0$, $\vec{j}_0$ et $\vec{k}_0$:

$$\begin{cases} T + mg\sin\alpha = m\ddot{x} & (1) \\ N - mg\cos\alpha = 0 & (2)\text{, soit } N = mg\cos\alpha \\ rT = \frac{2}{5}mr^2\ddot{\theta} & (3)\text{, soit } T = \frac{2}{5}mr\ddot{\theta} \end{cases}$$

(2) Lorsque le coefficient de frottement f de la loi de Coulomb, $T = fN$, est nul, alors $T = 0$, et l'équation (3) devient $\ddot{\theta} = 0$ $\Rightarrow \dot{\theta} = 0$. Soit en utilisant les conditions

initiales habituelles, $\dot{\theta} = cte = 0$. En bref, la roue glisse sans rouler dans le sens de la pente.
Du fait que $T=0$, alors l'équation (1) devient :

$$mg\sin\alpha = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = g\sin\alpha$$

Cherchons à retrouver ce résultat, en utilisant le théorème de l'énergie - puissance (ou théorème de l'énergie cinétique :

$$\mathcal{P}_M = \frac{d}{dt}E_c \quad , \quad \text{avec} \quad E_c = \frac{1}{2}m\vec{V}_G^{\,2} + \frac{1}{2}I\vec{\Omega}^{\,2}.$$

sachant que la bille glisse sans rouler, alors le terme de rotation n'existe pas ($\Omega = 0$), et dès lors, on obtient :

$$E_c = \frac{1}{2}m\vec{V}_G^{\,2} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}(E_c) = m\dot{x}\ddot{x}$$

Pour calculer la puissance des forces extérieures, il faut utiliser le résultat général :

$$\mathcal{P}_M = \{\mathcal{V}_G\} \cdot \{\mathcal{F}_G\} = \dot{x}\vec{i}_0 \cdot (m\vec{g} + T\vec{i}_0 + N\vec{j}_0) + \dot{\theta}\vec{k}_0 \cdot rT\vec{k}_0$$

$$= (mg\sin\alpha)\dot{x} + T\dot{x} + rT\dot{\theta}$$

$$= (mg\sin\alpha)\dot{x} + \cancel{T\dot{x}} - \cancel{T\dot{x}} = (mg\sin\alpha)\dot{x}$$

sachant que $\mathcal{P}_M = \frac{d}{dt}(E_c) = m\dot{x}\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = g\sin\alpha$

Bien entendu, on retrouve le même résultat, mais avec un raisonnement et des calculs assez différents.

③ Dorénavant, le coefficient de frottement $f \neq 0$. Alors $T = fN$, et les 3 équations de départ peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} fN + mg\sin\alpha = m\ddot{x} & (1') \\ N = mg\cos\alpha & (2') \\ fN = \frac{2}{5}mr\ddot{\theta} = -\frac{2}{5}m\ddot{x} & (3') \end{cases}$$

Ici la roue va rouler sans glisser $\Rightarrow \vec{V}(I) = 0$,
or $\vec{V}(I) = \vec{V}(G) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI} = \dot{x}\vec{i}_0 + \dot{\theta}\vec{k}_0 \wedge (-r\vec{j}_0)$

$$= (\dot{x} + r\dot{\theta})\vec{i}_0 = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{\dot{x}}{r}$$

D'où l'équation (3') : $fN = -\frac{2}{5}mr\left(\frac{\ddot{x}}{r}\right) = -\frac{2}{5}m\ddot{x}$

Avec ce résultat, l'équation (1') s'écrit :

$$-\frac{2}{5}m\ddot{x} + mg\sin\alpha = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{5}{7}g\sin\alpha$$

On trouve ici une valeur de l'accélération plus faible que celle de la question précédente, lorsque le mouvement s'effectuait en glissement seul, sans roulement. Ce résultat est normal, puisque ici l'énergie cinétique totale se décompose en deux termes, l'un pour le mouvement de translation (sans glissement), et l'autre pour le mouvement de rotation.

On cherche alors de nouveau à retrouver ce résultat, en utilisant le théorème de l'énergie-puissance (ou théorème de l'énergie cinétique) :

$$\mathcal{P}_M = \frac{d}{dt}(E_c) \text{, avec } E_c = \frac{1}{2} m \vec{V}_G^{\,2} + \frac{1}{2} I \vec{\Omega}^2 \text{,}$$

soit : $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} m \cancel{r^2}\right) \frac{\dot{x}^2}{\cancel{r^2}} = \frac{7}{10} m \dot{x}^2$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(E_c) = \frac{7}{5} m \dot{x} \ddot{x}$$

La partie du calcul relatif à $\mathcal{P}_M$ reste ici inchangée, à savoir : $\mathcal{P}_M = (mg \sin\alpha)\dot{x}$, cf. question 2 -

Au final, on obtient :

$$(mg \sin\alpha)\dot{x} = \frac{7}{5} m \dot{x} \ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{5}{7} g \sin\alpha$$

On retrouve une nouvelle fois, comme il se doit, le même résultat.

A partir de là, on peut s'intéresser à la relation qui existe entre α (l'angle de la pente) et α_0, l'angle critique de la loi de Coulomb $T = fN = (\tan\alpha_0)N$ pour lequel le glissement va apparaître. En combinant les équations (1') et (2'), ou bien les équations (2') et (3'), on obtient le même résultat, à savoir :

$$(1') \rightarrow fN + mg \sin\alpha = m\ddot{x}$$
$$(2') \rightarrow fN = mg f \cos\alpha$$
$$\Rightarrow mg(\sin\alpha + f\cos\alpha) = m\ddot{x} = m \times \frac{5}{7} g \sin\alpha$$
$$\Rightarrow \tan\alpha_0 = \frac{2}{7} \tan\alpha$$

Application numérique : si $\alpha = 15°$, alors $\alpha_0 = 4{,}38°$, ou plutôt, si $\alpha_0 = 4{,}38°$, alors l'angle limite de la pente, pour lequel la boule roule sans glisser sera la valeur de 15°.

<u>Problème</u> : Accélération et freinage acrobatique d'une motocyclette sur une piste horizontale en ligne droite

Soit une motocyclette modélisée par sa roue avant (1) (de masse m, de rayon r et de centre d'inertie G_1), sa roue arrière (2) (de masse m, de rayon r et de centre d'inertie G_2), et son cadre (3) (de masse M, et de centre d'inertie G_3), voir Figures 3 & 4 pour la géométrie du système. Chaque roue possède un moment d'inertie $J = mr^2$, c'est-à-dire que l'on suppose que le rayon de gyration est le rayon de la roue (ou encore on suppose que la masse est essentiellement distribuée sur le périmètre de la roue). Les deux roues sont en contact avec la piste aux points C_1 et C_2, et les réactions s'écrivent respectivement : $\vec{R}_1 = T_1\vec{i}_0 + N_1\vec{j}_0$ et $\vec{R}_2 = T_2\vec{i}_0 + N_2\vec{j}_0$. Le couple moteur $C_m\vec{k}_0$ s'exerce sur la roue arrière (2).

1- <u>Exprimer</u> les torseurs cinématique, cinétique et dynamique pour les différents éléments du système, à savoir pour la roue avant (1), pour la roue arrière (2), et pour le cadre (3) de la motocyclette.

2- <u>Exprimer</u> le théorème du moment dynamique pour les roues avant (1) et arrière (2), respectivement en C_1 et en C_2. En utilisant la condition de roulement sans glissement, à savoir $x = r\,\theta$ (voir Figure 3), <u>établir</u> alors que ces relations s'écrivent finalement : $m\ddot{x} = -T_1$ et $m\ddot{x} = -T_2 + \dfrac{C_m}{r}$. <u>Établir</u> alors l'équation de la résultante dynamique pour l'ensemble du véhicule (1)+(2)+(3). <u>Déduire</u> enfin l'accélération du véhicule en fonction du couple moteur C_m.

3- <u>Exprimer</u> le théorème du moment dynamique pour l'ensemble du véhicule (1)+(2)+(3) au point G situé entre G_1 et G_2, voir Figure 4. <u>Aboutir</u> à une équation reliant $\ddot{x}$, N_1, N_2, a, b, h, r, m et M.

4- A l'aide de cette équation et d'un des résultats obtenu à la question 2-, <u>calculer</u> les expressions de N_1 et de N_2, en fonction de C_m, g, r, a, b, h, m et M. <u>Trouver</u> la valeur du couple limite pour lequel N_1 s'annule. <u>Interpréter</u> ce résultat en termes de pilotage de la motocyclette (phase de cabrage de l'engin, ou « wheeling » = « roue arrière »).

5- <u>Justifier</u> les modifications des équations de la question 1- dans le cas d'un couple résistant C_m', correspondant à une phase de freinage puissant s'exerçant sur la roue avant (1). En déduire la valeur de l'accélération $\ddot{x}$ (qui doit être ici négative), en fonction de C_m'. <u>Calculer</u> alors les nouvelles valeurs des réactions verticales N_1 et N_2, et exprimer la valeur limite du couple de freinage pour <u>observer</u> un décollement de la roue arrière . <u>Comparer</u> enfin cette valeur avec celle obtenue à la question 4- pour le cabrage de la motocyclette au cours de l'accélération. Quelle est la valeur limite la plus élevée ?

<u>Barême approximatif</u> : Environ la moitié des points pour l'exercice et l'autre moitié pour le problème. Une grande attention sera consacrée à la rédaction, aux explications et aux justifications physiques des résultats obtenus.

Figure 3

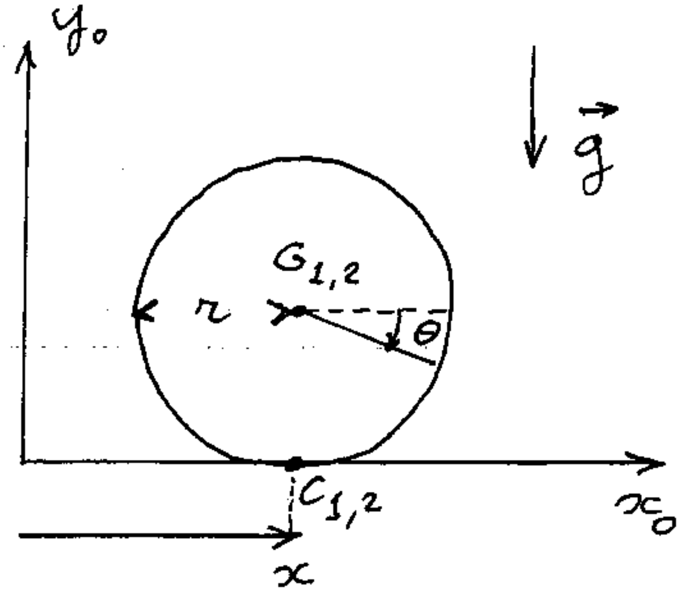
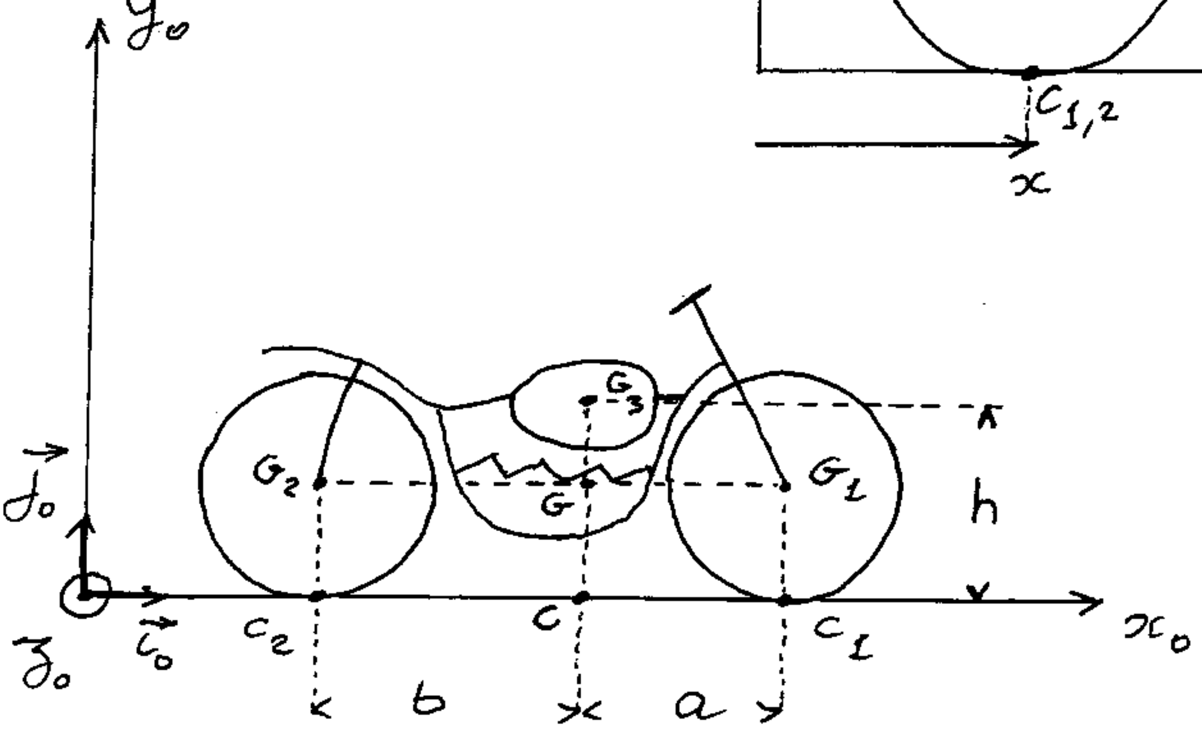


Figure 4



Problème : Accélération et freinage acrobatique d'une motocyclette sur une piste horizontale en ligne droite

① Commençons par évaluer les torseurs cinématiques, cinétiques et dynamiques pour les roues avant (1) et arrière (2) ainsi que pour le cadre de la motocyclette

$$\{\mathcal{V}_{G_1}^{(1)}\}\begin{cases}-\dot{\theta}\vec{k}_0\\ \dot{x}\vec{i}_0\end{cases};\ \{\mathcal{C}_{G_1}^{(1)}\}\begin{cases}m\dot{x}\vec{i}_0\\ -mr^2\dot{\theta}\vec{k}_0\end{cases};\ \{\mathcal{D}_{G_1}^{(1)}\}\begin{cases}m\ddot{x}\vec{i}_0\\ -mr^2\ddot{\theta}\vec{k}_0\end{cases}$$

$$\{\mathcal{V}_{G_2}^{(2)}\}\begin{cases}-\dot{\theta}\vec{k}_0\\ \dot{x}\vec{i}_0\end{cases};\ \{\mathcal{C}_{G_2}^{(2)}\}\begin{cases}m\dot{x}\vec{i}_0\\ -mr^2\dot{\theta}\vec{k}_0\end{cases};\ \{\mathcal{D}_{G_2}^{(2)}\}\begin{cases}m\ddot{x}\vec{i}_0\\ -mr^2\ddot{\theta}\vec{k}_0\end{cases}$$

$$\{\mathcal{V}_{G_3}^{(3)}\}\begin{cases}0\\ \dot{x}\vec{i}_0\end{cases};\ \{\mathcal{C}_{G_3}^{(3)}\}\begin{cases}M\dot{x}\vec{i}_0\\ 0\end{cases};\ \{\mathcal{D}_{G_3}^{(3)}\}\begin{cases}M\ddot{x}\vec{i}_0\\ 0\end{cases}$$

② On peut noter les réactions au niveau des roues avant (1) et arrière (2) s'exerçant aux points C_1 et C_2 :

$$\vec{R}_{C_1} = T_1\vec{i}_0 + N_1\vec{j}_0\ ;\ \vec{R}_{C_2} = T_2\vec{i}_0 + N_2\vec{j}_0$$

* Equation des moments dynamiques pour chaque roue (évalué en G_1 et en G_2) :

$$-mr^2\ddot{\theta}\vec{k}_0 = \vec{G_1C_1}\wedge\vec{R}_1 = -r\vec{j}_0\wedge(T_1\vec{i}_0+N_1\vec{j}_0)$$

$$= rT_1\vec{k}_0\text{, soit avec } r\ddot{\theta}=\ddot{x} \Rightarrow T_1 = -m\ddot{x}\quad (1)$$

De même pour la 2ème roue :

$$-mr^2\ddot{\theta}\vec{k}_0 = \vec{G_2C_2}\wedge\vec{R}_2 - C_m\vec{k}_0$$

$$= -r\vec{j}_0\wedge(T_2\vec{i}_0+N_2\vec{j}_0) - C_m\vec{k}_0 = rT_2\vec{k}_0 - C_m\vec{k}_0\text{,}$$

soit avec $r\ddot{\theta}=\ddot{x} \Rightarrow T_2 = -m\ddot{x} + \dfrac{C_m}{r}\quad (2)$

* Equation de la résultante dynamique pour l'ensemble roues (1) + (2) et cadre (3) :

$$\begin{cases}T_1+T_2 = (M+2m)\ddot{x} & (3)\\ N_1+N_2 = (M+2m)g & (4)\end{cases}$$

Equations (1) + (2) + (3) permettent d'écrire :

$$-2m\ddot{x} + \frac{C_m}{r} = T_1+T_2 = (M+2m)\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{C_m}{r} \times \left(\frac{1}{M+4m}\right) > 0$$

③ Ecrivons alors l'équation du moment dynamique pour l'ensemble du système au point G :

$$\vec{\mathcal{M}}_G\{\mathcal{D}^\circ_{(1)}\} = \vec{\mathcal{M}}_{G_1}\{\mathcal{D}^\circ_{(1)}\} + m\ddot{x}\vec{i}_0 \wedge \vec{G_1G}$$

$$= -mr^2\ddot{\theta}\vec{k}_0 + \underbrace{\cancel{m\ddot{x}\vec{i}_0 \wedge -a\vec{i}_0}}_{=0} = -mr\ddot{x}\vec{k}_0$$

De même :

$$\vec{\mathcal{M}}_G\{\mathcal{D}^\circ_{(2)}\} = -mr\ddot{x}\vec{k}_0$$

$$\vec{\mathcal{M}}_G\{\mathcal{D}^\circ_{(3)}\} = \vec{\mathcal{M}}_{G_3}\{\mathcal{D}^\circ_{(3)}\} + M\ddot{x}\vec{i}_0 \wedge \vec{G_3G}$$

$$= 0 + M\ddot{x}\vec{i}_0 \wedge (h-r)\cdot(-\vec{j}_0) = M(r-h)\ddot{x}\vec{k}_0$$

Au total, on obtient finalement :

$$\vec{\mathcal{M}}_G\{F_{ext}\} = \vec{\mathcal{M}}_G\{\mathcal{D}^\circ_{(1)+(2)+(3)}\}, \text{ avec :}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_G\{\mathcal{D}_{(1)+(2)+(3)}\} = [M(r-h) - 2mr]\ddot{x}$$

$$\vec{\mathcal{M}}_G\{F_{ext}\} = \vec{GC_1} \wedge \vec{R}_1 + \vec{GC_2} \wedge \vec{R}_2 = \begin{pmatrix} a \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} T_1 \\ N_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b \\ -r \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} T_2 \\ N_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (aN_1 + rT_1 - bN_2 + rT_2)\vec{k}_0$$

$$\Rightarrow M(r-h)\ddot{x} - 2mr\ddot{x} = aN_1 - bN_2 + r(T_1 + T_2) \quad (5)$$

$$\text{or, } T_1 + T_2 = (M+2m)\ddot{x} \quad (\text{équation } (2))$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(Mh + 4mr) = bN_2 - aN_1 \quad (5')$$

④ Il reste alors à effectuer le calcul de N_1 et de N_2 en utilisant les équations (4) et (5'), avec $\ddot{x} = \frac{C_m}{r} \times \left(\frac{1}{M+4m}\right)$

$$a \times (4) + (5') \Rightarrow \begin{cases} N_2 = \left(\frac{1}{a+b}\right)\left[ag(M+2m) + \frac{C_m}{r}\left(\frac{Mh+4mr}{M+4m}\right)\right] \\ N_2 = \left(\frac{1}{a+b}\right)\left[bg(M+2m) - \frac{C_m}{r}\left(\frac{Mh+4mr}{M+4m}\right)\right] \end{cases}$$

$$b \times (4) - (5') \Rightarrow$$

Le cabrage débute lorsque $N_1 = 0$ (la roue avant n'est plus en contact avec le sol).
Cette condition est réalisée lorsque :

$$C_m^{lim} = rbg \frac{(M+2m)(M+4m)}{Mh+4mr}$$

(5) Dans le cas du freinage puissant, les équations principales s'écrivent :

$$\begin{cases} T_1' = -m\ddot{x} - C_m'/r & (1') \\ T_2' = -m\ddot{x} & (2') \\ T_1'+T_2' = (M+2m)\ddot{x} & (3') \\ N_1'+N_2' = (M+2m)g & (4') \end{cases}$$

$$(1')+(2')+(3') \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{C_m'}{r}\left(\frac{1}{M+4m}\right) < 0$$

L'équation (5') du moment dynamique évalué en G reste inchangée :

$$\ddot{x}(Mh+4mr) = bN_2 - aN_1 \quad (5')$$

$$\begin{array}{l} a\times(4')+(5') \Rightarrow \\ b\times(4')-(5') \Rightarrow \end{array} \begin{cases} N_2 = \frac{1}{(a+b)}\left[ag(M+2m) - \frac{C_m'}{r}\left(\frac{Mh+4mr}{M+4m}\right)\right] \\ N_1 = \frac{1}{(a+b)}\left[bg(M+2m) + \frac{C_m'}{r}\left(\frac{Mh+4mr}{M+4m}\right)\right] \end{cases}$$

On peut ainsi évaluer la valeur limite du couple C_m' pour pouvoir décoller la roue arrière, telle que $N_2 = 0$

$$\Rightarrow C_m'^{lim} = rag\frac{(M+2m)(M+4m)}{Mh+4mr}$$

On observe que $C_m'^{lim} > C_m^{lim}$, si $a > b$

Il s'agit d'un simple facteur géométrique qui pilote au final l'inégalité