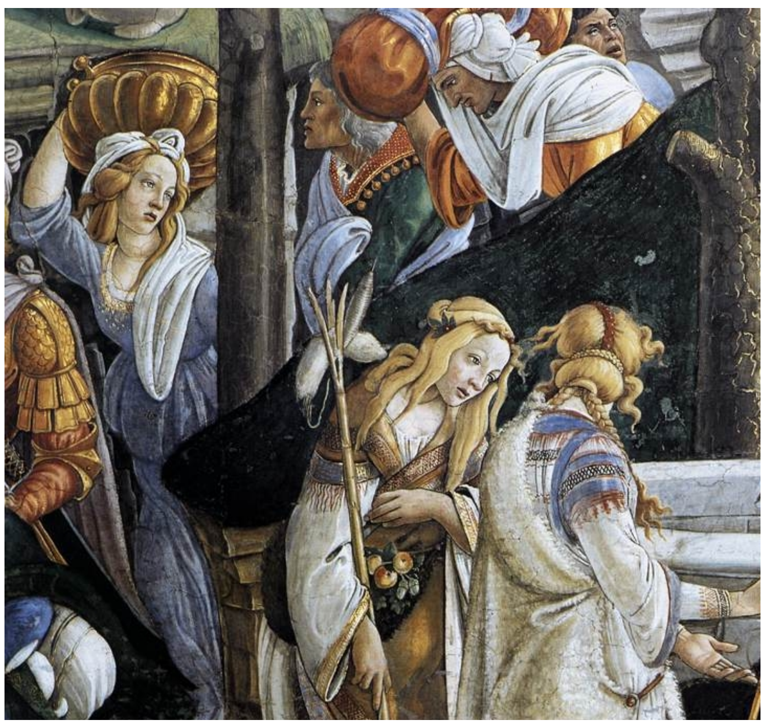
Intégrale de Riemann

Université d'Eleuthéria-Polites
République de Poldévie

Cours de Licence 2 — 2020/2021

Bruno Deschamps

Version 2.3



Les physiciens étudient les lois auxquelles l'Univers à du obéir quand Dieu l'a créé.
Les mathématiciens étudient les lois auxquelles Dieu a du obéir quand il a créé l'Univers...

Table des matières

1 Convergence uniforme.

On considère un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1.1 Définitions, exemples.

Définition 1.— *Etant donnée $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, on appelle "norme infinie" de f sur I, l'élément*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|/\ x \in I\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$$

Exemples 2.— 1/ Si $I =]0, +\infty[$ et $f(x) = 1/x$ alors $\|f\|_\infty = +\infty$.

2/ Si I est un segment et f est continue, alors $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}$ (une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes).

Lemme 3.— *Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :*

1/ $\|f\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow f \equiv 0$.

2/ $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|.\|f\|_\infty$.

3/ $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Avec les conventions :

- $a \leq +\infty$ *pour tout* $a \in [0, +\infty]$.
- $a + +\infty = +\infty$ *pour tout* $a \in [0, +\infty]$.
- $\lambda. + \infty = +\infty$ *pour tout* $\lambda \in]0, +\infty]$.
- $0. + \infty = 0$.

Preuve : 1/ Si $f \equiv 0$ alors $\{|f(x)|/\ x \in I\} = \{0\}$ et donc $\|f\|_\infty = 0$. Réciproquement, comme pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty = 0$, on a bien $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$.

2/ Pour tout $x \in I$, $|\lambda f(x)| = |\lambda|.|f(x)| \leq |\lambda|.\|f\|_\infty$. On a donc $\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda|.\|f\|_\infty$.

Supposons que $\|f\|_\infty \in \mathbb{R}$. Par caractérisation de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_\varepsilon \in I$ tel que $\|f\|_\infty - \varepsilon < |f(x_\varepsilon)| \leq \|f\|_\infty$, ce qui implique que

$$|\lambda|.\|f\|_\infty - \varepsilon|\lambda| \leq |\lambda f(x_\varepsilon)| \leq \|\lambda f\|_\infty$$

En faisant tendre ε vers 0, on en déduit que $|\lambda|.\|f\|_\infty \leq \|\lambda f\|_\infty$.

Si maintenant $\|f\|_\infty = +\infty$, alors la fonction f n'est pas bornée sur I. Il en est donc de même de λf (avec $\lambda \neq 0$) et donc $\|\lambda f\|_\infty = +\infty$. Le cas $\lambda = 0$ est trivial.

3/ Pour tout $x \in I$, on a

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

Ainsi, $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble $\{|f(x) + g(x)|/\ x \in I\}$, il est donc plus grand que le plus petit des majorants de cet ensemble qui est, par définition la borne supérieure : $\|f + g\|_\infty$.

Définition 4.— *Soient $(f_n)_n$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que :*

a) La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f, si pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers le réel $f(x)$.

b) La suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, si la suite numérique $(\|f_n - f\|_\infty)_n$ converge 0.

On peut traduire de manière équivalente ces deux types de convergence de la façon suivante :

La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers $f \iff \forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

La suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers $f \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

On voit alors que :

Proposition 5.— *Si une suite $(f_n)_n$ d'applications de I dans $\mathbb{R}$ converge uniformément vers une fonction f alors elle converge simplement vers cette même fonction.*

Exemple 6.— On considère $I = [0,1[$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \geq 0$, la fonction $f_n(x) = n^\alpha x(1 - nx + |1 - nx|)$. La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle et elle converge uniformément si et seulement si $\alpha < 1$.

1.2 Propriétés.

Théorème 7.— (Critère de Cauchy uniforme) *Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{R}$. La suite (f_n) converge uniformément (vers une certaine fonction) si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall p, q \geq N,\ \|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon$$

Preuve : Supposons qu'il y ait convergence uniforme. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon/2$. On a alors, pour tout $p, q \geq N$

$$\|f_p - f_q\|_\infty = \|(f_p - f) - (f_q - f)\|_\infty \leq \|(f_p - f)\|_\infty + \|(f_q - f)\|_\infty \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Réciproquement, si pour $\varepsilon > 0$ il existe un entier N tel que, pour tous $p, q \geq N$, $\|f_p - f_q\|_\infty < \varepsilon$, alors pour tout $x \in I$, on a

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$$

mais comme $(f_p)_p$ converge simplement vers f, on en déduit, par passage à la limite que, pour tout $x \in I$

$$\lim_p |f_p(x) - f_q(x)| = |f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$$

ce qui implique que, pour tout $q \geq N$, $\|f - f_q\|_\infty \leq \varepsilon$.

On écrit parfois le critère de Cauchy uniforme sous la forme équivalente

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geq N,\ \forall k \geq 0,\ \|f_{n+k} - f_n\|_\infty < \varepsilon$$

1.2.1 Interversion de limites.

Exemple 8.— On pose $I = [0,1[$ et, pour tout $n \geq 0$, $f_n(x) = x^n$. La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle. Par ailleurs, pour tout $n \geq 0$, $\lim\limits_{x \to 1} f_n(x) = 1$. On a donc

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_n f_n \right) \neq \lim_n \left(\lim_{x \to x_0} f_n(x) \right)$$

Théorème 9.— (Interversion de limites) *Soient $(f_n)_n$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une fonction f et $x_0 \in \overline{I}$. Si, pour tout $n \geq 0$ la fonction f_n possède une limite λ_n en x_0, alors*

a) La suite $(\lambda_n)_n$ converge vers un réel λ.

b) La fonction f possède une limite en x_0 et $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lambda$.

En d'autres termes, on a donc

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_n f_n\right)=\lim_n\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right)$$

Preuve : a) Pour tout $x\in I$, on a

$$\lambda_{n+k}-\lambda_n=(\lambda_{n+k}-f_{n+k}(x))-(\lambda_n-f_n(x))+(f_{n+k}(x)-f_n(x))$$

Fixons $\varepsilon>0$. Il existe N tel que pour tout $n\geq N$ et tout $k\geq 0$, $\|f_{n+k}-f_n\|_\infty\leq\varepsilon$ et donc, pour $n\geq N$, $k\geq 0$ et x$\in I$, on a

$$|\lambda_{n+k}-\lambda_n|\leq|\lambda_{n+k}-f_{n+k}(x)|-|\lambda_n-f_n(x)|+\varepsilon$$

Par hypothèse, $\lambda_n=\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ et $\lambda_{n+k}=\lim_{x\to x_0} f_{n+k}(x)$. Il existe donc $\alpha>0$ tel que, pour tout $x\in]x_0-\alpha,x_0+\alpha[\cap I$, $|\lambda_{n+k}-f_{n+k}(x)|\leq\varepsilon$ et $|\lambda_n-f_n(x)|\leq\varepsilon$. Pour le choix d'un tel x, on a alors $|\lambda_{n+k}-\lambda_n|\leq 3\varepsilon$. La suite $(\lambda_n)_n$ est donc de Cauchy ce qui assure qu'elle converge.

b) Pour $x\in I$ et $n\geq 0$, on écrit

$$(f(x)-\lambda)=(f(x)-f_n(x))+(f_n(x)-\lambda_n)+(\lambda_n-\lambda)$$

Il existe N_1 tel que, pour tout $n\geq N_1$, $\|f-f_n\|_\infty\leq\varepsilon$ et il existe N_2 tel que, pour tout $n\geq N_2$, $|\lambda_n-\lambda|\leq\varepsilon$. Prenons $N=\max(N_1,N_2)$, on a alors, pour tout $x\in I$,

$$|f(x)-\lambda|\leq\varepsilon+|f_n(x)-\lambda_n|+\varepsilon$$

Par ailleurs, $\lambda_n=\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ et il existe donc $\alpha>0$ tel que, pour tout $x\in]x_0-\alpha,x_0+\alpha[\cap I$, $|\lambda_n-f_n(x)|\leq\varepsilon$. On voit donc de montrer que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\alpha>0$ tel que, pour tout $x\in]x_0-\alpha,x_0+\alpha[\cap I$, $|f(x)-\lambda|\leq 3\varepsilon$, c'est-à-dire que $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lambda$.

Corollaire 10.— *Soient $(f_n)_n$ une suite d'applications continues de I dans $\mathbb{R}$. Si $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f alors f est continue.*

Preuve : Une fonction continue est une fonction qui possède en tout point une limite.

Proposition 11.— *Soient $(f_n)_n$ une suite d'applications continues de I dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers une fonction f et $(u_n)_n$ une suite d'éléments de I. Si la suite $(f_n(u_n))_n$ converge alors il en est de même de la suite $(f(u_n))_n$ et $\lim\limits_n f_n(u_n)=\lim\limits_n f(u_n)$.*

Preuve : Par définition, on a $|f(u_n)-f_n(u_n)|\leq\|f-f_n\|_\infty$ et comme $(\|f-f_n\|_\infty)_n$ converge vers 0 par hypothèse, on en déduit que la suite $(f(u_n)-f_n(u_n))_n$ converge aussi vers 0. Puisque la suite $(f_n(u_n))_n$ converge, il en est alors nécessairement de même de la suite $(f(u_n))_n$ et l'on a $\lim_n f_n(u_n)=\lim_n f(u_n)$

1.2.2 Convergence uniforme et dérivabilité.

Exemples 12.— 1/ On pose $I=\mathbb{R}$ et, pour tout $n\geq 1$, $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{n}$. La suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle, mais la suite $(f_n^{'})_n$ ne converge même pas simplement.

2/ On pose $I=[-1,1]$ et, pour tout $n\geq 1$, $f_n(x)=\sqrt{\dfrac{1}{n^2}+x^2\sin^2\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ et $f_n(0)=\dfrac{1}{n}$. La suite $(f_n)_n$ converge vers la fonction $f(x)=\left|x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right|$ qui n'est pas dérivable en 0 et pourtant, pour tout $n\geq 0$, la fonction f_n est dérivable sur I et $f_n^{'}(0)=0$.

Théorème 13.— *Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que*

1/ Il existe $a \in I$ tel que la suite $(f_n(a))_n$ converge.

2/ La fonction f_n est dérivable pour tout $n \geq 0$.

3/ La suite de fonctions $(f_n^{'})_n$ converge uniformément vers une fonction g sur I.

Alors, la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f sur tout segment inclus dans I et cette fonction f est dérivable et vérifie $f^{'} = g$.

Preuve : Fixons un segment $S \subset I$ qui contient a et notons $\ell = \ell(S)$ la longueur du segment S.

Soient $n, k \geq 0$ des entiers et $x \in S$. Par application du théorème des accroissements finis, appliqué à la fonction $f_{n+k} - f_n$, il existe $\lambda \in S$ tels que

$$(f_{n+k}(x) - f_n(x)) - (f_{n+k}(a) - f_n(a)) = (x-a)(f_{n+k} - f_n)^{'}(\lambda) = (x-a)(f_{n+k}^{'}(\lambda) - f_n^{'}(\lambda))$$

ce qui permet d'écrire

$$|f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+k}(a) - f_n(a)| + |x-a|\left|(f_{n+k}^{'}(\lambda) - f_n^{'}(\lambda))\right| \leq |f_{n+k}(a) - f_n(a)| + \ell \|f_{n+k}^{'} - f_n^{'}\|_\infty$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, il existe un entier N_1 (resp. N_2) tel que, pour tout $n \geq N_1$ (resp. $n \geq N_1$) et tout $k \geq 0$, on a $|f_{n+k}(a) - f_n(a)| \leq \varepsilon$ (resp. $\|f_{n+k}^{'} - f_n^{'}\|_\infty \leq \varepsilon$). Ainsi, pour tout $x \in S$, tout $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ et tout $k \geq 0$, on a $|f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon(1+\ell)$, ce qui implique $\|f_{n+k} - f_n\|_\infty \leq \varepsilon(1+\ell)$. La suite $(f_n)_n$ converge donc bien uniformément sur S vers une fonction f.

Fixons un élément $x_0 \in S$, $n, k \geq 0$ des entiers et $\varepsilon > 0$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f_{n+k} - f_n$, on sait que pour tout $x \in S$, il existe $\lambda_x \in S$ tels que

$$|(f_{n+k}(x) - f_n(x)) - (f_{n+k}(x_0) - f_n(x_0))| = |(x-x_0)(f_{n+k} - f_n)^{'}(\lambda_x)| \leq |(x-x_0)|.\|f_{n+k}^{'} - f_n^{'}\|_\infty$$

Prenons un entier N_0 tel que, pour tout $n \geq N_0$ et tout $k \geq 0$, on ait $\|f_{n+k}^{'} - f_n^{'}\|_\infty \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geq N_0$, tout $k \geq 0$ et tout $x \in S$,

$$|(f_{n+k}(x) - f_n(x)) - (f_{n+k}(x_0) - f_n(x_0))| \leq \varepsilon|(x-x_0)|$$

La suite $(f_{n+k}(x))_k$ converge vers $f(x)$ et donc, par passage à la limite, on a pour tout $n \geq N_0$ et tout $x \in S$,

$$\lim_k |(f_{n+k}(x) - f_n(x)) - (f_{n+k}(x_0) - f_n(x_0))| = |(x-x_0)(f_{n+k} - f_n)^{'}(\lambda_x)| = |(f(x) - f_n(x)) - (f(x_0) - f_n(x_0))| \leq \varepsilon|(x-x_0)|$$

Pour $x \in S$ et $n \geq N_0$, on a alors

$$|f(x) - f(x_0) - (x-x_0)g(x_0)| \leq |(f(x) - f(x_0)) - (f_n(x) - f_n(x_0))| + |f_n(x) - f_n(x_0) + (x-x_0)f_n^{'}(x_0)| + |x-x_0|.|f_n^{'}(x_0) - g(x_0)|$$

Puisque $(f_n^{'}(x_0))_n$ converge vers $g(x_0)$ il existe $p \geq N_0$ tel que, pour tout $n \geq p$, on ait $|f_n^{'}(x_0) - g(x_0)| \leq \varepsilon$. On en déduit que, pour tout $x \in S$,

$$|f(x) - f(x_0) - (x-x_0)g(x_0)| \leq |f_p(x) - f_p(x_0) + (x-x_0)f_p^{'}(x_0)| + 2\varepsilon|x-x_0|$$

Maintenant, la fonction $f_p^{'}$ est dérivable en x_0, il existe donc $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap S$, $|f_p(x) - f_p(x_0) + (x-x_0)f_p^{'}(x_0)| \leq \varepsilon|x-x_0|$. On a alors, pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap S$ avec $x \neq x_0$,

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{(x-x_0)} - g(x_0)\right| \leq 3\varepsilon$$

ce qui assure finalement que f est bien dérivable en x_0 de dérivée $g(x_0)$.

2 Construction de l'intégrale.

On considère deux réels a et b tels que $a < b$.

2.1 Intégrale des fonctions en escalier.

2.1.1 Subdivisions.

Définition 14.— *Une "subdivision" du segment $[a,b]$ est une suite finie strictement croissante $(x_0, x_1, \cdots x_n)$ d'éléments de $[a,b]$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Une telle subdivision sera notée*

$$s : x_0 < x_1 < \cdots < x_n$$

On appelle "pas de s", le réel noté $\pi(s)$ et défini par

$$\pi(s) = \sup_{1\leq i\leq n} (x_i - x_{i-1})$$

On note $\mathscr{S}ub([a,b])$ l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$.

L'ensemble $\mathscr{S}ub([a,b])$ est naturellement en bijection avec $\mathcal{P}_f(]a,b[)$, l'ensemble des parties finies de $]a,b[$. En effet, une bijection $\varphi : \mathscr{S}ub([a,b]) \to \mathcal{P}_f(]a,b[)$ est par exemple donnée par l'application φ qui à une subdivision $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ de $[a,b]$, associe $\varphi(s) = \{x_1, \cdots, x_{p-1}\}$ si $p \geq 2$ et $\varphi(s) = \emptyset$ sinon.

Définition 15.— *Soit s et $s^{'}$ deux subdivisions de $[a,b]$. On dit que $s^{'}$ est plus fine que s si et seulement si $\varphi(s) \subset \varphi(s^{'})$. En d'autres termes, si l'on pose $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ et $s^{'} : a = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = b$ alors $s^{'}$ est plus fine que s si et seulement si*

$$\forall i = 0, \cdots, p,\ \exists j = 0, 1, \cdots, n \text{ tel que } x_i = y_j$$

Dans cette situation, on a donc en particulier $n \geq p$.

La relation "être plus fine que" est une relation d'ordre sur $\mathscr{S}ub([a,b])$, qui n'est bien évidement pas totale. Toutefois si s et $s^{'}$ sont deux subdivisions de $[a,b]$, alors il existe $s^{''} \in \mathscr{S}ub([a,b])$ qui est à la fois plus fine que s et $s^{'}$. En effet définissons $s^{''} = \varphi^{-1}(\varphi(s) \cup \varphi(s^{'}))$. Cette subdivision s'appelle la subdivision obtenue par recollement de s et $s^{'}$, on la note $s^{''} = s \wedge s^{'}$. Elle est clairement plus fine que s et $s^{'}$.

Exemples 16.— 1/ Soient c et d deux points distincts de $]a,b[$ tels que $c < d$. On considère les subdivisions $s : a < c < b$ et $s^{'} : a < d < b$. Alors $s \wedge s^{'} : a < c < d < b$.

2/ On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par la relation $u_n = \dfrac{1}{n}$. Pour $n \neq 0$, on définit la subdivision de $[0,1]$, $s_n : 0 < u_n < u_{n-1} < \cdots < u_1 = 1$. Si p et q sont deux entiers strictements positifs tels que $p \leq q$, alors $s_p \wedge s_q = s_q$.

Remarque 17.— Si $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ est une subdivision de $[a,b]$ et si $s^{'}$ désigne une subdivision plus fine que s, alors pour tout $0 \leq i \leq n-1$, il existe une subdivision $s_i : x_i = x_{i,0} < x_{i,1} < \cdots < x_{i,k_i} = x_{i+1}$ de $[x_i, x_{i+1}]$ telle que

$$s^{'} : a = x_{0,0} < x_{0,1} < \cdots < x_{0,k_0} < x_{1,1} < \cdots < x_{1,k_1} < \cdots\cdots < x_{n-1,1} < \cdots < x_{n-1,k_{n-1}} = x_n = b$$

2.1.2 Fonctions en escalier.

Définition 18.— *Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite "en escalier" s'il existe une subdivision $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, telle que f soit constante sur tout intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ pour $0 \leq i \leq n-1$ (les valeurs de f en les points x_i peuvent être quelconques).*

On note $\mathscr{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

Soient $f \in \mathscr{E}([a,b])$ et $s \in \mathscr{S}ub([a,b])$ ($s : a = y_0 < x_1 < \cdots < y_p = b$). On dit que s est "adaptée" à f si f est constante sur tout les intervalles $]y_i, y_{i+1}[$ pour $0 \leq i \leq p-1$.

Remarques : 1/ Si s est une subdivision adaptée à f et que s' est une subdivision plus fine que s, alors s' est adaptée à f.

2/ Soient c et d deux éléments de $[a,b]$ tels que $c < d$. Si f est une fonction définie sur $[a,b]$ on note $f_{|[c,d]}$, la restriction de f à $[c,d]$. Alors si $f \in \mathscr{E}([a,b])$, on a $f_{|[c,d]} \in \mathscr{E}([c,d])$.

Lemme 19.— *L'ensemble $\mathscr{E}([a,b])$ est une sous-$\mathbb{R}$-algèbre de $\mathbb{R}^{[a,b]}$ qui est stable par passage à la valeur absolue (i.e. $f \in \mathscr{E}([a,b]) \Longrightarrow |f| \in \mathscr{E}([a,b])$).*

Preuve : Soient $f \in \mathscr{E}([a,b])$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, il est clair que $-f$, αf et $|f|$ sont des éléments de $\mathscr{E}([a,b])$. Il suffit donc de vérifier que si f et g sont éléments de $\mathscr{E}([a,b])$ alors il en est de même pour $f+g$ et fg. Soit s_f une subdivision adaptée à f et s_g une subdivision adaptée à g. Soit $s = s_f \wedge s_g$, supposons que $s : a = x_0 < \cdots x_n = b$, alors f et g sont constantes sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour $0 \leq i \leq n-1$, donc $f+g$ et fg le sont aussi sur les même intervalles. Elles sont donc en escalier.

Les fonctions en escalier sur $[a,b]$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs sur $[a,b]$ (elles sont donc, en particulier, bornées). Cette propriété ne les caractérise pas. En effet, considérons $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ la fonction caractéristique des rationnels restreint à $[a,b]$ (i.e. $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$ et $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 0$ si $x \in [a,b]$, $x \notin \mathbb{Q}$). C'est une fonction qui ne prends que deux valeurs sur $[a,b]$, mais qui n'est pas en escalier, car compte-tenu du caractère dense de l'ensemble $\mathbb{Q}$ et de son complémentaire dans $\mathbb{R}$, on voit que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est constante sur aucun intervale ouvert.

On voit donc que pour caractériser les fonctions en escalier il faut rajouter une condition à celle de la finitude de ses valeurs :

Proposition 20.— *Pour qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ soit une fonction en escalier, il faut et il suffit que*

1) f ne prennent qu'un nombre fini de valeurs sur $\mathbb{R}$,

2) pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_{x_0} = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = x_0\}$ soit la réunion finie de sous-intervalles de $[a,b]$.

Preuve : Il est clair que toute fonction en escalier vérifie ces deux propriétés. Pour la réciproque, remarquons d'abord que la propriétés 2) équivaut à :

$2'$) pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_{x_0} = \{x \in \mathbb{R},\ f(x) = x_0\}$ soit la réunion finie de sous-intervalles de $[a,b]$ disjoints deux à deux.

(il suffit de considérer les composantes connexes de E_{x_0} qui sont des intervalles et qui sont en nombres finis)

On considère alors l'ensemble E constitué des $y \in \mathbb{R}$ tel que $E_y \neq \emptyset$. D'après 1), E est un ensemble fini (non vide), d'après $2'$) pour tout $y \in E$ il existe une suite finie de sous-intervalles $I_{y_1}, \cdots I_{y_{n_y}}$ de $[a,b]$ disjoints deux à deux tels que $E_y = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n_y} I_{y_i}$. Si y et z sont deux éléments distincts de E alors $E_y \cap E_z = \emptyset$. Il s'ensuit que l'ensemble des I_{y_i} ($y \in E$, $1 \leq i \leq n_y$) constitue en ensemble fini de sous-intervalles de $[a,b]$ disjoint deux à deux et dont la réunion vaut $[a,b]$. On considère alors l'ensemble des bornes inférieures et supérieures des intervalles I_{y_i}. Puisque cet ensemble est fini, on peut l'énumérer en une suite ordonnée $x_1 < \cdots < x_n$. Il est clair que $a = x_1$ et $b = x_n$, car a et b sont chacun contenu dans un des I_{y_i}. Ainsi, $s : x_1 < \cdots < x_n$ est une subdivision de $[a,b]$. Nous allons maintenant montrer que f est en escalier et que s est adaptée à f.

Si $j \in [2, \cdots, n-1]$ alors, par hypothèse, x_j est soit la borne supérieure, soit la borne inférieure d'un intervalle $I_{y_{0_{i_0}}}$. Supposons que ce soit une borne inférieure. Par hypothèse, il existe un indice j' tel que $x_{j'}$ soit la borne supérieure de $I_{y_{0_{i_0}}}$.

• Si $j = j'$ alors $I_{y_{0_{i_0}}} = \{x_j\}$.

• Si $j' = j+1$ alors l'intérieur de l'intervalle $I_{y_{0_{i_0}}}$ vaut $]x_j, x_{j+1}[$ et donc f est constante sur cet intervalle.

Si $j' \neq j$ et $j+1$, alors $x_{j'}$ est la borne inférieure ou supérieure d'un intervalle $I_{y_{1_{i_1}}}$ avec $y_1 \neq y_0$ ou $i_1 \neq i_0$. Donc $I_{y_{0_{i_0}}} \cap I_{y_{1_{i_1}}} \neq \emptyset$, ce qui est absurde.

Le cas x_j borne supérieure, ainsi que le cas des intervalles $]x_1, x_2[$ et $]x_{n-1}, x_n[$ se traitent de la même façon.

2.1.3 Intégrale.

Théorème 21.— *Soient f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et s une subdivision adaptée à f. On suppose que $s : a = x_0 < \cdots x_n < b$ et que sur $]x_i, x_{i+1}[$, f prenne la valeur λ_i $(0 \leq i \leq n-1)$. Le réel*

$$I_s = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i)$$

est indépendant du choix de la subdivision s adaptée à f.

Preuve : Soit s et s' deux subdivisions adaptées à f. On suppose pour commencer que s' est plus fine que s. Soit $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, on a vu (remarque 17) que l'on pouvait écrire s' sous la forme $s' : a = x_{0,0} < x_{0,1} < \cdots < x_{0,k_0} < x_{1,1} < \cdots < x_{1,k_1} < \cdots\cdots < x_{n-1,1} < \cdots < x_{n-1,k_{n-1}} = x_n = b$ avec $x_{i,k_i} = x_{i+1}$.

Maintenant, puisque f prend la valeur λ_i sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, f prend aussi la valeur λ_i sur les intervalles $]x_{i-1,k_{i-1}}, x_{i,1}[$, $]x_{i,1}, x_{1,2}[$, $\cdots$, $]x_{i,k_i-1}, x_{i,k_i}[$. En posant $x_{i,0} = x_{i-1,k_{i-1}}$, on a donc

$$I_{s'} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_i (x_{i,j} - x_{i,j-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \sum_{j=1}^{k_i} (x_{i,j} - x_{i,j-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i) = I_s$$

Soient maintenant s et s' deux subdivisions adaptées à f quelconques. On sait que $s \wedge s'$ est plus fine que s et s'. D'après ce qui précède, on a donc $I_s = I_{s \wedge s'} = I_{s'}$.

Définition 22.— *Soit f une fonction en escalier. On appelle "intégrale" de f sur $[a,b]$, le réel I_s défini dans le théorème 21 pour n'importe quelle subdivision s adaptée à f. On note alors $\int_a^b f(x)dx$ ce réel.*

Note : Le x dans $\int_a^b f(x)dx$ est une "variable muette". Il est mentionné pour rappeller le lien qu'il y a entre la théorie de l'intégration et celle du calcul différentiel. Parfois, on omettra ce x et l'on notera l'intégrale de f sur $[a,b]$ plus simplement $\int_a^b f$.

2.2 Propriétés élémentaires de l'intégrale des fonctions en escalier.

Proposition 23.— *L'application de $\mathscr{E}([a,b])$ dans $\mathbb{R}$ qui a f fait correspondre $\int_a^b f(x)dx$ est linéaire.*

Preuve : Soit f, g deux éléments de $\mathscr{E}([a,b])$ et α un réel. Si s_f est une subdivision adaptée à f et s_g une subdivision adaptée à g, il est clair que $s = s_f \wedge s_g$ est adaptée à $f+\alpha g$. La calcul de $\int_a^b (f+\alpha g)(x)dx$ à partir de s, donne immédiatement le résultat.

Proposition 24.— *Si $f \in \mathscr{E}([a,b])$ est positive alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Preuve : C'est immédiat compte-tenu du fait que la somme I_s intervenant dans le théorème 21 est alors composée de réels positifs.

Corollaire 25.— *Soit f et g deux éléments de $\mathscr{E}([a,b])$ tels que $f \leq g$. Alors*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

En particulier, pour tout $f \in \mathscr{E}([a,b])$, on a

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Preuve : Par linéarité, on a $\displaystyle\int_a^b (g-f)(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$, or $(g-f)$ est positive, d'où le résultat.

L'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ assure que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ pour tout $x \in [a,b]$. On en déduit que

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq -\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

c'est-à-dire $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Proposition 26.— *Si $c \in]a,b[$, on a* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f_{|[a,c]}(x)dx + \int_c^d f_{|[c,d]}(x)dx.$

Preuve : Soit s une subdivision adaptée à f. On prend s_c la subdivision définie par $s_c : a < c < b$. Soit $s' = s \wedge s_c$, avec cette subdivision le résultat est immédiat.

2.3 Intégrale de Riemann des fonctions continues par morceaux.

2.3.1 Fonctions continues par morceaux.

Définition 27.— *Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite "continue par morceaux", s'il existe une subdivision $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ de $[a,b]$ et, pour tout $i = 0,\cdots,p-1$, une fonction continue $f_i : [x_i, x_{i+1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f = f_i$ sur $]x_i, x_{i+1}[$.*

On note $\mathscr{C}M([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$.

On voit que, de manière équivalente, la fonction f est continue par morceaux s'il existe une subdivision $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $i = 0,\cdots,p-1$, f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Exemple 28.— Sur $[-1,1]$, la fonction $f(x)=1/x$ et $f(0)=0$ n'est pas continue par morceaux.

Proposition 29.— *L'ensemble $\mathscr{C}M([a,b],\mathbb{R})$ est une $\mathbb{R}$-algèbre stable par passage à la valeur absolue et par composition (quand cela a un sens).*

Théorème 30.— *Pour tout $f\in\mathscr{C}M([a,b],\mathbb{R})$ et tout $\varepsilon>0$, il existe $g\in\mathscr{E}([a,b])$ telle que $\|f-g\|_\infty<\varepsilon$.*

Preuve : On suppose pour commencer que $f\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Puisque l'on se place sur un segment, le théorème de Heine assure alors que f est uniformément continue sur $[a,b]$. Ainsi, si l'on se donne $\varepsilon>0$ alors il existe $\alpha>0$ tel que,

$$\forall x,y\in[a,b],\ |x-y|<\alpha\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Considérons un entier $p\geq 1$ tel que $\frac{b-a}{p}\leq\alpha$ et la subdivision à pas régulier

$$s:a=x_0<x_1=a+\frac{b-a}{p}<x_2=a+2\frac{b-a}{p}<\cdots<x_p=a+p\frac{b-a}{p}=b$$

Définissons alors $g\in\mathscr{E}([a,b])$ de la manière suivante : $g(x)=f(x_i)$ pour tout $i=0,\cdots,p-1$ et tout $x\in[x_i,x_{i+1}[$ et $g(b)=f(b)$. Si $x\in[a,b[$, alors il existe un unique $i=0,\cdots,p-1$ tel que $x\in[x_i,x_{i+1}[$. Puisque $0\leq x-x_i\leq,x_{i+1}-x_i\leq\alpha$, on a $|f(x)-g(x)|=|f(x)-f(x_i)|\leq\varepsilon$. Compte-tenu du fait que $|f(b)-g(b)|=0$, on en déduit que, pour tout $x\in[a,b]$, $|f(x)-g(x)|\leq\varepsilon$, c'est-à-dire que $\|f-g\|_\infty<\varepsilon$.

Passons maintenant dans le cas général. On se place sous les notations de la définition 27. Pour tout $i=0,\cdots,p-1$, le fonction $f_i:[x_i,x_{i+1}]\longrightarrow\mathbb{R}$ est continue, et en vertu de ce qui précède, il existe une fonction $g_i\in\mathscr{E}([x_i,x_{i+1}])$ telle que $\|f-g\|_\infty^{[x_i,x_{i+1}]}\leq\varepsilon$. On considère alors la fonction $g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{array}{rcl} g(x_i) &=& f(x_i)\text{ pour tout } i=0,\cdots p\\ g(x) &=& g_i(x)\text{ pour tout } x\in]x_i,x_{i+1}[\text{ et tout } i=0,\cdots p-1\end{array}$$

On a alors $g\in\mathscr{E}([a,b])$ et $\|f-g\|_\infty=\max_i(|f(x_i)-g(x_i)|,\|f-g\|_\infty^{]x_i,x_{i+1}[})=\max_i(\|f-g\|_\infty^{]x_i,x_{i+1}[})\leq\varepsilon$.

Corollaire 31.— *Pour tout $f\in\mathscr{C}M([a,b],\mathbb{R})$, il existe une suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{E}([a,b])$ qui converge uniformément vers f.*

Preuve : D'après le théorème précédent, pour tout $n\geq 0$ il existe $f_n\in\mathscr{E}([a,b])$ telle que $\|f-f_n\|_\infty<\frac{1}{n+1}$. La suite $(f_n)_n$ converge alors uniformément vers f.

2.3.2 Intégrale.

Théorème 32.— *On considère une fonction $f\in\mathscr{C}M([a,b],\mathbb{R})$.*

a) Si $(f_n)_n$ désigne une suite d'éléments de $\mathscr{E}([a,b])$ qui converge uniformément vers f alors la suite numérique $\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)_n$ converge.

b) Si $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ désignent deux suites d'éléments de $\mathscr{E}([a,b])$ qui convergent uniformément vers f, alors $\lim_n\int_a^b f_n(x)dx=\lim_n\int_a^b g_n(x)dx$.

Preuve : a) Le critère de Cauchy uniforme assure que, si $\varepsilon>0$, alors il existe $N\geq 0$ tel que, pour tout $p,q\geq N$, on a $\|f_p-f_q\|_\infty\leq\varepsilon$. La proposition **??** et le corollaire **??** permettent alors d'écrire pour $p,q\geq N$

$$\left|\int_a^b f_p(x)dx-\int_a^b f_q(x)dx\right|=\left|\int_a^b f_p(x)-f_q(x)dx\right|\leq\int_a^b|f_p(x)-f_q(x)|dx\leq\int_a^b\varepsilon dx=\varepsilon(b-a)$$

On en déduit que la suite numérique $\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)_n$ est de Cauchy, elle converge donc.

b) Pour tout $x \in [a,b]$, on a

$$|f_n(x) - g_n(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - f(x)| \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f - g_n\|_\infty$$

Si $\varepsilon > 0$ alors il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait simultanément $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$ et $\|f - g_n\|_\infty \leq \varepsilon$. Pour $n \geq N$, on a alors

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b g_n(x)dx\right| = \left|\int_a^b f_n(x) - g_n(x)dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x) - g_n(x)|dx \leq \int_a^b 2\varepsilon dx = 2\varepsilon(b-a)$$

Il s'ensuit que $\lim_n \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b g_n(x)dx = 0$, mais comme d'après le a), chacune des suites converge, on en déduit que $\lim_n \int_a^b f_n(x)dx = \lim_n \int_a^b g_n(x)dx$.

Définition 33.— *Avec les notations du théorème précédent, la limite commune des suites* $\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)_n$ *où* $(f_n)_n$ *désigne une suite d'éléments de* $\mathscr{E}([a,b])$ *qui converge uniformément vers* f*, s'appelle "l'intégrale de Riemann" de la fonction* f *sur* $[a,b]$ *et se note* $\int_a^b f(x)dx$.

2.4 Propriétés élémentaires.

Les propriétés qui suivent, découlent des propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier.

Proposition 34.— *L'application de* $\mathscr{C}M([a,b])$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui à* f *associe* $\int_a^b f(x)dx$ *est une forme linéaire.*

Preuve : S'obtient à partir de la proposition 23 et du théorème 32 en remarquant que, si $(f_n)_n$ (resp. $(g_n)_n$) converge uniformément vers f (resp. g), alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f_n + g_n)_n$ converge uniformément vers $\lambda f + g$.

Corollaire 35.— *Soient* $f \in \mathscr{I}([a,b])$ *et* g *une fonction de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle qu'il existe* $(x_1, \cdots, x_n) \in [a,b]^n$ *vérifiant* $\forall x \in [a,b]/\{x_1, \cdots, x_n\}$, $g(x) = f(x)$. *La fonction* g *est alors continue par morceaux et*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

(Autrement dit, on ne change pas la valeur de l'intégrale d'une fonction si on change cette fonction en un nombre fini de points)

Preuve :

Proposition 36.— *Soient* $f \in \mathscr{C}M([a,b])$ *et* $s : a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$ *une subdivision de* $[a,b]$. *On a*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f_{|[c_{i-1},c_i]}(x)dx$$

Preuve : S'obtient par récurrence, à partir de la proposition 26 et du théorème 32.

Proposition 37.— *Si $f \in \mathscr{C}M([a,b])$ est une fonction positive sur $[a,b]$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Preuve : Si l'on reprend la preuve du théorème 30, on voit que puisque f est positive, on peut choisir une suite $(f_n)_n$ de fonctions en escaliers positives convergeant vers f. La proposition 37 découle alors de la proposition 24 par passage à la limite.

Corollaire 38.— *Si $f, g \in \mathscr{C}M([a,b])$ sont telles que $f \geq g$, alors*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

En particulier, on a $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Preuve : Se démontre à partir de la proposition 37 exactement comme on démontre le corollaire 25 à partir de la proposition 24

Proposition 39.— *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et positive, alors*

$$\int_a^b f(x)dx = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in [a,b],\ f(x) = 0$$

Preuve : Supposons qu'il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) > 0$. Posons $\varepsilon = f(x_0)/2$. Par continuité en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\subset [a,b]$ et tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap [a,b]$,

$$f(x_0)/2 = f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

On a alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0-\alpha} f(x)dx + \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(x)dx + \int_{x_0+\alpha}^b f(x)dx \geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(x)dx \geq \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(x_0)/2dx = \alpha f(x_0) > 0$$

Le cas $x_0 = a$ ou b se traite de manière similaire.

Remarque 40.— Cette proposition n'est bien évidemment valable que dans le cas où f est continue (il suffit de prendre une fonction nulle sauf en un point pour le voir!).

2.4.1 Intégrales orientées.

Définition 41.— *Soit a et b deux réels tels que $b < a$ et f une fonction continue par morceaux sur $[b,a]$. On pose par définition*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

De même on pose

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

On a alors les propriétés suivantes :

Proposition 42.— *Soient $b < a$.*

1/ L'application de $\mathscr{C}M([b,a])$ dans $\mathbb{R}$ qui à f associe $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est linéaire.

2/ Si $f \in \mathscr{C}M([b,a])$ et f positive, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq 0$.

3/ Si $f \in \mathscr{C}M([b,a])$ alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq |\int_a^b |f(x)|dx| = \int_b^a |f(x)|dx$.

Proposition 43.— (Relation de Chasles) *Soient S un segment et f une fonction continue par morceaux sur S. Si a, b, c désignent trois points de S, alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

2.5 Sommes de Riemann.

Définition 44.— *Une subdivision pointée de $[a,b]$ est la donnée d'un couple (s,t) où $s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ désigne une subdivision et t un n-uplet de point de $[a,b]$ vérifiant*

$$\forall i = 1, \cdots, n, \quad t_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

Pour une application f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et une subdivision pointée (s,t) de $[a,b]$ ($s : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ et $t = (t_1, \cdots, t_n)$) données, on appelle somme de Riemann de f associée à (s,t) le réel

$$R_{(s,t)}(f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i)$$

Théorème 45.— *Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision pointée (s,t) de $[a,b]$ on ait*

$$\pi(s) < \delta \Longrightarrow \left| R_{(s,t)}(f) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Preuve : Pour cette preuve, on suppose que la fonction f est continue, le cas général s'obtenant alors comme dans la preuve du théorème 30, en considérant une subdivision adaptée à f. On reprend les notations de la définition 44. On a

$$R_{(s,t)}(f) - \int_a^b f(x)dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(t_i) - f(x))dx$$

D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue. Fixons $\varepsilon > 0$, il existe alors $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [a,b]$, $|x - y| \leq \delta \Longleftrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/(b-a)$. Si $\pi(s) < \delta$ on a alors $|t_i - x| \leq \delta$ pour tout

$i = 1, \cdots, n$ et tout $x \in [x_{i-1}, x_i]$. On a donc

$$\begin{aligned}\left| R_{(s,t)}(f) - \int_a^b f(x)dt \right| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(t_i) - f(x))dx \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(t_i) - f(x))dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t_i) - f(x)|dx \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{(b-a)} dx = \int_a^b \frac{\varepsilon}{(b-a)} dx \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Corollaire 46.— *Si f désigne une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ et $(s^{(n)}, t^{(n)})_n$ une suite de subdivisions pointées de pas convergeant vers 0, alors*

$$\lim_n R_{(s^{(n)},t^{(n)})}(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Preuve : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\pi(s^{(n)}) < \delta \Longrightarrow \left| R_{(s^{(n)},t^{(n)})}(f) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$$

Puisque $\lim_n \pi(s^{(n)}) = 0$, il existe $N \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\pi(s^{(n)}) < \delta$. On en déduit que, pour tout $n \geq N$, $\left| R_{(s^{(n)},t^{(n)})}(f) - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon$, c'est-à-dire que $\lim_n R_{(s^{(n)},t^{(n)})}(f) = \int_a^b f(x)dx$.

Corollaire 47.— *Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$, alors les suites*

$S_n^{sup}(f) = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{(b-a)}{n}\right)$ (Somme de Riemann à pas régulier, en les points supérieurs)

$S_n^{inf}(f) = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$ (Somme de Riemann, à pas régulier, en les points inférieurs)

$S_n^{med}(f) = \dfrac{b-a}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f\left(a + (2i-1)\frac{(b-a)}{2n}\right)$ (Somme de Riemann, à pas régulier, en les points médiants)

convergent vers $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

Exemple : (Nous verrons plus loin qu'une fonction f continue sur $[a,b]$ possède des primitives et que si F désigne une primitive de f alors $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.) On considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

Si l'on pose $a = 1$ et $b = 2$ et que l'on considère la fonction $f(x) = 1/x$ sur $[1,2]$ alors

$$S_n^{\inf}(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(1 + \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{n+i}$$

et donc $u_n = S_n^{\text{inf}}(f) + \frac{1}{2n}$. La fonction f est continue et $x \longmapsto \ln(x)$ est une primitive de f, on a donc

$$\lim_n u_n = \lim_n S_n^{\text{inf}}(f) = \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln(2)$$

3 Propriétés.

3.1 Intégrale fonction de la borne supérieure.

On s'intérresse maintenant aux propriétés des applications définie par des intégrales, applications qui sont définit à partir de la borne inférieure ou supérieure de l'intégrale, c'est-à-dire a des applications de la forme $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

Définition 48.— *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est localement continue par morceaux, si elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.*
En particulier toute fonction localement continue par morceaux sur I est bornée sur tout segment inclu dans I.

3.1.1 Continuité, dérivabilité.

Théorème 49.— *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction localement continue par morceaux et a un point de I. Si l'on définit la fonction F, pour $x \in I$ par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

alors

1/ La fonction F est continue sur I et lipschitzienne sur tout segment inclus dans I.

2/ Si f admet une limite (resp. une limite à droite, resp. une limite à gauche) en $x_0 \in I$ alors la fonction F est dérivable (resp. dérivable à droite, resp. dérivable à gauche) en x_0 et $F^{'}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (resp. $F_d^{'}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, resp. $F_g^{'}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$). En particulier, si f est continue sur I alors F est dérivable et $F^{'} = f$.

Preuve : 1/ Soit $[a,b] \subset I$. f étant localement continue par morceaux, elle est bornée sur $[a,b]$. Soit par exemple $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in [a,b]$, $|f(t)| < M$. Alors si $(x,y) \in [a,b]^2$, on a $\left|F(x) - F(y)\right| = \left|\displaystyle\int_x^y f(t)dt\right| \leq \left|\displaystyle\int_x^y |f(t)|dt\right| < M|x-y|$. Donc F est M-lipschitzienne sur $[a,b]$. Si $x_0 \in I$, alors il existe un segment inclus dans I qui voisinne x_0 dans I. Donc F est continue en x_0.

2/ Soit x_0 un point intérieur à I et supposons que f admette l pour limite droite en x_0. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,\ \forall t \in]x_0, x_0 + \alpha[\ |f(t) - l| < \varepsilon$$

Ainsi, comme $F(x) - F(x_0) = \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)dt$, pour tout $x \in]x_0, x_0 + \alpha[$ on a

$$l - \varepsilon = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x (l - \varepsilon)dt < \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} < \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x (l + \varepsilon)dt = l + \varepsilon$$

ce qui assure que F est dérivable à droite de x_0 et que $F_d^{'}(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$. Les autres cas se traitent de façon similaire.

3.1.2 Primitives.

Définition 50.— *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $F : I \to \mathbb{R}$, deux applications. On dit que F est une primitive de f si F est dérivable et si $F^{'}(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.*

Lemme 51.— *Si f admet une primitive sur I, alors elle en admet une infinité. Deux primitives différent sur I d'une constante.*

Preuve : Soit F_1 et F_2 deux primitives de f, alors $(F_1 - F_2)^{'} = 0$, donc $F_1 - F_2$ est a la fois croissante et décroissante sur I, elle est donc constante. Comme I est un intervalle, $\exists C \in \mathbb{R} \,/\, F_1 = F_2 + C$.

En combinant cette définition avec les résultats précédent, on obtient :

Proposition 52.— *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors elle admet une primitive. Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

On a, en particulier, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

3.2 Calcul.

3.2.1 Intégration par parties.

Théorème 53.— *Soient f et g deux fonctions dérivables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, telle que $f^{'}$ et $g^{'}$ soient continue par morceaux sur $[a,b]$ (en particulier si f et g sont $\mathcal{C}^1$). Alors*

$$\int_a^b f(x)g^{'}(x)dx = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f^{'}(x)g(x)dx$$

avec $[f(t)g(t)]_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Preuve : Les fonctions f et g étant dérivables, il en est de même pour fg et l'on a $(fg)^{'} = f^{'}g + fg^{'}$. Les dérivées sont continues par morceaux, or on a

$$\int_a^b (fg)^{'}(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

par linéarité, le résultat en découle.

3.2.2 Changement de variable.

Théorème 54.— *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet une primitive et $\varphi[c,d] \to [a,b]$ une fonction dérivable telle que f soit continue par morceaux sur le segment d'extrémité $\varphi(c)$ et $\varphi(d)$. Si les fonctions $f \circ \varphi$ et $\varphi^{'}$ sont continues par morceaux sur $[c,d]$, alors il en est de même pour $f \circ \varphi.\varphi^{'}$ et*

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)dt = \int_c^d f \circ \varphi(x)\varphi^{'}(x)dx$$

(On dit que l'on a opéré le changement de variable $t = \varphi(x)$)

Preuve : Soit F une primitive de f. Il est clair que $f\circ\varphi.\varphi'$ est continue par morceaux, cette fonction admet $F\circ\varphi$ pour primitive. En appliquant la proposition 52, on a donc

$$\int_c^d f\circ\varphi(x)\varphi'(x)dx = F\circ\varphi(d)-F\circ\varphi(c) = F(\varphi(d))-F(\varphi(c)) = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(t)dt$$

Corollaire 55.— *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue, I un intervalle et $\varphi: I\to\mathbb{R}$ un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme (i.e. une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ telle que sa réciproque soit $\mathcal{C}^1$) tel que $[a,b]\subset\varphi(I)$, alors*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\circ\varphi(x)\varphi'(x)dx$$

Preuve : C'est une application directe du résultat précédent, en remarquant que $f\circ\varphi$ et φ' sont continues et que φ étant un difféomorphisme, c'est en particulier un homéomorphisme, donc que $\varphi([\varphi^{-1}(a),\varphi^{-1}(b)]) = [a,b]$.

Remarques 56.— Il est généralement pratique de poser "à l'envers" le changement de variable, c'est-à-dire de poser par exemple $x=\psi(t)$. Il est alors commode, pour s'y retrouver, de différentier formellement $dx=\psi'(t)dt$ et de rechercher à exprimer simplement $\psi'(t)$ en fonction de x.

Il faut faire très attention à bien respecter les hypothèse du théorème 54 ou du corollaire 55 et de ne pas changer de variable inconsidérément. On veut par exemple (mal) calculer

$$\int_0^\pi \frac{dt}{1+\cos^2 t}$$

On fait le changement de variable $u=\tan(t)$, on a donc $du=\frac{dt}{1+\cos^2 t}$ et donc on a:

$$\int_0^\pi \frac{dt}{1+\cos^2 t} = \int_0^0 du = 0$$

Ce résultat est absurde, car $\frac{1}{1+\cos^2 t}$ est continue, positive et non nulle. L'erreur commise ici est la suivante: Le changement de variable que l'on pratique est en fait $t=\arctan(u)$ et arctan est à valeur dans $]-\pi/2,\pi/2[$, ce qui rend le changement de variable impossible sur $[0,\pi]$.

Corollaire 57.— *Soient $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et $\alpha>0$ un réel. On définit la fonction $g:[a-\alpha,b-\alpha]$ par la formule $g(x)=f(x+\alpha)$. La fonction g est alors continue par morceaux et*

$$\int_{a-\alpha}^{b-\alpha} g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Corollaire 58.— *Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction p-périodique et continue par morceaux sur un segment $[a,a+p]$, alors pour tout $b\in\mathbb{R}$, f est continue par morceaux sur $[b,b+p]$ et*

$$\int_b^{b+p} f(x)dx = \int_a^{a+p} f(x)dx$$

Proposition 59.— *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction et $\alpha\neq 0$ un réel. On définit la fonction $g:[\frac{a}{\alpha},\frac{b}{\alpha}]$ par la formule $g(x)=f(\alpha x)$. Si f est continue par morceaux alors g l'est aussi et*

$$\alpha\int_{\frac{a}{\alpha}}^{\frac{b}{\alpha}} g(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

3.3 Relations, inégalités.

3.3.1 Formules de Taylor.

Théorème 60.— (Formule de Taylor-Laplace) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application $n+1$ fois dérivable, telle que $f^{(n+1)}$ soit continue par morceaux sur $[a,b]$. Alors pour tout $t \in [a,b]$, on a:*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)dx$$

Preuve : (Par récurrence) Pour $n = 0$ la formule devient, $f(t) - f(a) = \displaystyle\int_a^t f^{'}(x)dx$, ce qui est la proposition 52.

Si l'on suppose qu'au rang $n-1 \geq 0$, pour toute fonction f, n fois dérivable, telle que f^n soit continue par morceaux sur $[a,b]$, on a

$$\forall t \in [a,b],\ f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)dx$$

alors au rang n, si l'on prend f une fonction $n+1$ fois dérivable, telle que $f^{(n+1)}$ soit continue par morceaux sur $[a,b]$, alors pour tout $t \in [a,b]$, la fonction $\frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)$ est continue par morceaux sur $[a,t]$ et en intégrant par partie, on a

$$\int_a^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)dx = -\frac{(t-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)dx$$

Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence pour prouver que la propriété est héréditaire.

Corollaire 61.— (Formule de Taylor-Young) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$. Soit $x_0 \in I$, alors*

$$f(x) =_{x \to x_0} f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \circ((x-x_0)^n)$$

Preuve : En appliquant la formule de taylor-Laplace on obtient, pour $x \neq x_0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-x_0)^n}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)\right) &= \frac{1}{(x-x_0)^n} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)dt - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \\ &= \frac{1}{(x-x_0)^n} \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0))dt \end{aligned}$$

Par hypothèse, $f^{(n)}$ est continue, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que:

$$\forall t \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,\ |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(x_0)| < \varepsilon$$

Par suite, on a:

$$\forall t \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,\ \left|\frac{1}{(x-x_0)^n}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)\right)\right| \leq \varepsilon \left|\frac{(x-x_0)^n}{n!(x-x_0)^n}\right| \leq \varepsilon$$

Application à l'irrationalité des valeurs de l'exponentielle en certains points. Soit $r \in \mathbb{Q}^{+*}$ tel que $r = 1/b$, avec b entier. La fonction e^x est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc pour tout $n > 0$, on a, d'après la formule de Taylor-Laplace appliqué à $a = 0$ et $t = r$,

$$e^r = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{r^k}{k!} + \int_0^r \frac{(r-x)^n}{n!} e^x dx$$

La fonction exponentielle est croissante et donc bornée par e^r sur $[0, r]$. On a donc

$$\left| e^r - \sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{k!} \right| \leq e^r \int_0^r \frac{(r-x)^n}{n!} dx = \frac{r^{n+1} e^r}{(n+1)!}$$

Supposons que $e^r \in \mathbb{Q}$, et ecrivons $e^r = p/q$ avec p et q deux entiers premiers entre eux. Si, pour $n \geq 0$, on pose

$$u_n = p b^n n! - q \sum_{k=0}^{n} b^{n-k} \frac{n!}{k!}$$

alors on a

$$e^r - \sum_{k=0}^{n} \frac{r^k}{k!} = \frac{u_n}{q b^n n!}$$

La suite $(u_n)_n$ est une suite d'entiers et l'on a

$$|u_n| \leq \frac{q e^r}{b(n+1)}$$

Il s'ensuit que $(u_n)_n$ converge vers 0 mais comme u_n est entier, il existe un indice N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n = 0$. En particulier on a $u_N = u_{N+1} = 0$, or

$$\frac{u_{N+1}}{q b^{N+1} (N+1)!} - \frac{u_N}{q b^N N!} = -\frac{r^{N+1}}{(N+1)!} \neq 0$$

et on en déduit que $e^r \notin \mathbb{Q}$. En particulier, e, la base de l'exponentielle, n'est pas rationnel.

3.3.2 Formules de la moyenne.

Proposition 62.— *(Inégalité de la moyenne) Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continue par morceaux et $m, M \in \mathbb{R}$ deux réels tels que $m \leq f \leq M$. Si g est à valeurs positives, on a*

$$m \int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq M \int_a^b g(t)dt$$

Preuve : C'est une conséquence immédiate de la proposition 38 compte-tenu du fait que pour tout $t \in [a,b]$ on a $mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t)$.

Corollaire 63.— *(Egalité de la moyenne) Soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continue par morceaux. Si f est continue et g est à valeurs positives, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c) \int_a^b g(t)dt$$

Preuve : L'application f étant continue sur $[a,b]$ est bornée et atteint ses bornes m et M. L'application $x \longmapsto f(x)\int_a^b g(t)dt$ est donc continue et ses bornes sont respectivement $m\int_a^b g(t)dt$ et $M\int_a^b g(t)dt$. L'inégalité de la moyenne assure que le réel $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est valeur intermédiaire de cette fonction, le théorème des valeurs intermédiaires prouve alors l'existence du réel c annoncée dans l'énoncé.

3.3.3 Inégalités.

Il existe quantité d'inégalités liants les intégrales. On se propose de donner ici un apercu des principales et des applications quelles peuvent avoir.

Proposition 64.— *Si f et g désignent deux fonctions de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ continues par morceaux, alors*

$$\int_a^b \inf(f(x),g(x))dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \sup(f(x),g(x))dx$$

Preuve : C'est une conséquence immédiate du corollaire 38.

Proposition 65.— *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit f et g deux fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, alors*

$$\left|\int_a^b fg(x)dx\right| \leq \int_a^b |fg(x)|dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

Preuve : On introduit la fonction $T(\lambda) = \displaystyle\int_a^b (\lambda|f(x)|+|g(x)|)^2dx$. Par définition même, cette fonction est positive. Mais

$$T(\lambda) = \lambda^2\int_a^b f^2(x)dx + 2\lambda\int_a^b |fg(x)|dx + \int_a^b g^2(x)dx$$

Par suite T est un polynôme à coefficients réels qui est de signe positif, son discriminant Δ est donc négatif. Par conséquent, on a

$$\Delta = 4\left(\int_a^b |fg(x)|dx\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx \leq 0$$

le résultat en découle.

Remarque 66.— Dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il y a égalité si et seulement si le discriminant Δ est nul, c'est-à-dire si et seulement si le polynôme $T(\lambda)$ possède une racine (double). Si l'on suppose que f et g sont des fonctions continues, en appliquant la proposition 39, on voit alors qu'il y a égalité si et seulement si, il existe une constante α telle que $|f| = \alpha|g|$.

Corollaire 67.— *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue par morceaux telle qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [a,b],\ f(x) > m$. Alors*

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right).\left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right) \geq 1$$

Preuve : La fonction $1/f$ est continue par morceaux, ainsi que les fonctions $\sqrt{f}$ et $1/\sqrt{f}$. On applique alors l'inégalité de Cauchy Schwarz à ces deux dernières fonctions.

Proposition 68.— *(Inégalité de Cauchy-Scharwz généralisée) Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et positives non nulles de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que g soit minorée sur $[a,b]$ par un réel strictement positif. alors si l'on pose*

$$M = \sup_{x\in[a,b]} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ et } m = \inf_{x\in[a,b]} \frac{f(x)}{g(x)}$$

On a:

$$\int_a^b fg(x)dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx} \leq \frac{m+M}{2\sqrt{mM}} \int_a^b fg(x)dx$$

Preuve : Par hypothèses, on a $0 \geq (f-mg)(f-Mg) = f^2-(m+M)fg+g^2$ et donc, en intégrant, on trouve

$$(m+M)\int_a^b f(t)g(t)dt \geq \int_a^b f(t)^2dt + mM\int_a^b g(t)^2dt$$

Il suffit donc de montrer que

$$\left(\int_a^b f(t)^2dt + mM\int_a^b g(t)^2dt\right)^2 \geq 4mM\left(\int_a^b f(t)^2dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2dt\right)$$

ce qui est immédiat puisqu'équivalent à $\displaystyle\int_a^b (f(t)^2dt - mMg(t)^2)^2dt \geq 0$.

Proposition 69.— *(Inégalité de Hölder) Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ et $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ deux applications continues par morceaux. On a :*

$$\int_a^b |fg(x)|dx \leq \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx}.\sqrt[q]{\int_a^b |g(x)|^q dx}$$

Remarque 70.— Cette inégalité généralise celle de Cauchy-Schwarz, puisqu'en prenant $p=q=2$ dans Hö lder, on obtient Cauchy-Schwarz. Il est possible de généraliser cette inégalité à un nombre indéfini d'intégrales :

Proposition 71.— (Inégalité de Hölder généralisée) *Soient $p_1,\cdots,p_n$, n réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p_1}+\cdots+\dfrac{1}{q_1}=1$. Soit $f_1,\cdots f_n$, n fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On a*

$$\int_a^b |f_1.f_2.\cdots.f_n(x)|dx \leq \sqrt[p_1]{\int_a^b |f_1(x)|^{p_1}dx}\cdots\sqrt[p_n]{\int_a^b |f_n(x)|^{p_n}dx}$$

Preuve : Si l'une des intégrales $\int_a^b |f_i(x)|^{p_i}dx$ est nulle, alors la fonction $|f_i|$ est nulle presque partout et donc il en est de même de la fonction $|f_1.f_2.\cdots.f_n|$ et il y a donc égalité dans le théorème.

On suppose maintenant qu'aucune des intégrales $\int_a^b |f_i(x)|^{p_i}\,dx$ ne soit nulle. La preuve de l'inégalité repose sur l'inégalité de convexité suivante : si n désigne un entier non nul, $x_1, \cdots x_n$ des réels strictement positifs et $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ des réels strictements positifs tels que $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ alors on a

$$\prod_{k=1}^{n} {x_k}^{\lambda_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

Pour montrer cette inégalité de convexité il suffit de remarquer que la fonction ln est concave puisque sa dérivée seconde est toujours négative. Par définition de la concavité, on a donc

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \ln(x_k) \leq \ln(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k)$$

ce qui montre l'inégalité par passage à l'exponentielle.

Revenons à la preuve du théorème et considérons pour tout $k = 1, \cdots, n$, les réels

$$x_k = \frac{|f_k^{p_k}(x)|}{\displaystyle\int_a^b |f_k^{p_k}(x)|dx} \quad \text{et} \quad \lambda_k = \frac{1}{p_k}$$

En appliquant l'inégalité de convexité démontrée ci-dessus, on a donc

$$|f_1(x).\cdots f_n(x)| \leq \sqrt[p_1]{\int_a^b |f_1(x)|^{p_1}\,dx}.\cdots \sqrt[p_n]{\int_a^b |f_n(x)|^{p_n}\,dx}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} \frac{|f_k^{p_k}(x)|}{\int_a^b |f_k^{p_k}(x)|dx}\right)$$

Les deux membres de l'équation étant positifs, en intégrant sur $[a,b]$, on trouve l'inégalité désirée.

Proposition 72.— (Inégalité de Minkovski) *Soient p un réel tel que $1 \leq p$, f et g deux fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On a*

$$\sqrt[p]{\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx} \leq \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p\,dx} + \sqrt[p]{\int_a^b |g(x)|^p\,dx}$$

Preuve : Si $\displaystyle\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt = 0$, l'inégalité est claire. On suppose donc maintenant que $\displaystyle\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt \neq 0$. Pour commencer, remarquons que sur $[a,b]$

$$|f+g|^p = |f+g|.|f+g|^{p-1} \leq |f|.|f+g|^{p-1} + |g|.|f+g|^{p-1}$$

et donc, en intégrant, on obtient

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt \leq \int_a^b |f(t)|.|f(t)+g(t)|^{p-1}\,dt + \int_a^b |g(t)|.|f(t)+g(t)|^{p-1}\,dt$$

On utilise alors l'inégalité d'Hölder, en posant $q = \frac{p}{p-1}$:

$$\int_a^b |f(t)|.|f(t)+g(t)|^{p-1}\,dt \leq \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p\,dt}.\sqrt[q]{\int_a^b |f(t)+g(t)|^{q(p-1)}\,dt} = \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p\,dt}.\sqrt[q]{\int_a^b |f(t)+g(t)|^p\,dt}$$

$$\int_a^b |g(t)|.|f(t)+g(t)|^{p-1}dt \leq \sqrt[p]{\int_a^b |g(t)|^p dt}.\sqrt[q]{\int_a^b |f(t)+g(t)|^{q(p-1)}dt} = \sqrt[p]{\int_a^b |g(t)|^p dt}.\sqrt[q]{\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt}$$

et l'on a donc

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt \leq \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/q}\left(\sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p dt}+\sqrt[p]{\int_a^b |g(t)|^p dt}\right)$$

et comme $\frac{1}{p} = 1-\frac{1}{q}$, en divisant l'inégalité par $\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/q}$ on trouve le résultat.

3.4 Suites d'intégrales.

Théorème 73.— *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continue par morceaux sur $[a,b]$. Si la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_n \int_a^b f_n(x)dx$$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, $\|f-f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$. D'après ???, on a donc

$$\forall n > n_0,\ |\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx| = |\int_a^b (f_n-f)(x)dx| \leq \int_a^b \frac{\varepsilon dx}{(b-a)} = \varepsilon$$

La suite $\int_a^b f_n(x)dx$ converge donc vers $\int_a^b f(x)dx$.

Corollaire 74.— (Théorème de convergence monotone) *Si $(f_n)_n$ une suite monotone d'applications continues sur $[a,b]$, converge simplement vers une fonction f continue, alors*

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_n f_n(x)dx$$

La preuve de ce corollaire est obtenue par le théorème suivant :

Théorème 75.— (Dini) *Soit $(f_n)_n$ une suite monotone d'applications continues sur $[a,b]$, convergent simplement vers une fonction f continue. Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.*

Preuve : Pour simplifier, on suppose que la suite est croissante. On pose $D_n = f - f_n$, cette suite est une suite décroissante d'applications continues positives convergent vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$, comme D_n est continue, l'ensemble $D_n^{-1}([\varepsilon,+\infty[)$ est un fermé de $[a,b]$. Maintenant, du fait de la décroissance de D_n, on a $D_{n+1}^{-1}([\varepsilon,+\infty[) \subset D_n^{-1}([\varepsilon,+\infty[)$, on a aussi $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n^{-1}([\varepsilon,+\infty[) = \emptyset$. Comme $[a,b]$ est compact, on en déduit (cf annexe) l'existence d'un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N$, $D_n^{-1}([\varepsilon,+\infty[) = \emptyset$. Donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N\ \forall x \in [a,b]\ |f(x)-f_n(x)| < \varepsilon$$

et $(f_n)_n$ converge uniformément vers f.

Les énoncés 74 et 74 sont vrais dans le cadre beaucoup plus général où les fonctions sont juste supposées continues par morceaux. Ils découlent en fait d'un théorème très puissant, dû à Lebesgue :

Théorème 76.— (Théorème de convergence dominé) *Soit $(f_n)_n$ une suite d'applications continue par morceaux sur $[a,b]$, convergeant simplement vers une fonction f continue par morceaux. S'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_\infty < M$, alors*

$$\lim_n \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_n f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Nous admettrons ici ce résultat. Sa preuve utilise en fait la théorie de l'intégration que Lebesgue développa pour généraliser celle de l'intégrale de Riemann. Dans cet énoncé, l'hypothèse de domination ($\|f_n\|_\infty < M$) n'est pas du tout anecdotique. Pour illustrer ce propos, on peut considérer la suite de fonctions $(f_n)_n$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{array}{rcll} f_n(x) & = & 0 & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, 1] \\ f_n(x) & = & 2n - 2n^2x & \text{si } x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ f_n(x) & = & 2n^2x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2n}] \end{array}$$

les fonctions f_n sont continues et convergent simplement vers 0 qui est continue, et pourtant la suite $\int_0^1 f_n(x)dx$ est constante égale à 1. Elle ne converge donc pas vers 0 comme le théorème aurait pu le laisser espérer, la raison tient au fait que les fonctions f_n ne sont pas uniformément bornées.

4 Calcul des primitives.

4.1 Généralité.

Nous avons vu l'intérêt que peut réprésenter l'existence et la connaissance d'une primitive d'une fonction pour le cacul de son intégrale. Nous avons aussi prouvé que les primitives d'une fonction sur un intervalle, étaient égales à une constante additive près. L'objet de cette partie est de présenter quelques méthodes pour calculer des primitives. Ces méthodes sont principalement fondées sur le principe d'intégration par partie (cf ???) et celui du changement de variable (cf ???). Plus précisement, nous utiliserons les deux résultats suivants :

Proposition 77.— *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f et g deux applications dérivables de I dans $\mathbb{R}$. Si la fonction $f'g$ admet une primitive sur I, alors la fonction fg' admet $fg - \int f'g$ pour primitive.*

Preuve : Par hypothèse la fonction $fg - \int f'g$ est dérivable sur I et sa dérivée vaut fg'.

Remarque 78.— Une condition suffisante d'application pour cette proposition est que f soit de classe C^1. Remarquons par contre que nous n'imposons rien sur la continuité de la fonction g'.

Proposition 79.— *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une application de I dans $\mathbb{R}$ et φ un C^1-difféomorphisme de J dans I. Alors, si la fonction $f \circ \varphi.\varphi'$ (de J dans $\mathbb{R}$) admet F pour primitive sur J, la fonction f admet $F \circ \varphi^{-1}$ pour primitive sur I. (On dit que l'on a opéré le changement de variable $x = \varphi(t)$)*

Preuve : Par hypothèse $F \circ \varphi^{-1}$ est dérivable et sa dérivée en $x \in I$ vaut

$$(F \circ \varphi^{-1})'(x) = f(\varphi(\varphi^{-1}(x))).\varphi'(\varphi^{-1}(x)).(\varphi^{-1})'(x) = f(x)$$

Exemples: Evaluons par ???, une primitive de $\ln(x)$ sur $]0,+\infty[$, en posant $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x$. Il vient donc:

$$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + cst$$

Evaluons maintenant par ???, une primitive de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $]-1,1[$. Pour cela remarquons que la fonction $\varphi(t) = \cos(t)$ est un C^1-difféomorphisme de $]0,\pi[$ dans $]-1,1[$. Opérons donc le changement de variable $x = \cos(t)$. Nous sommes donc amené à calculer une primitive de $\dfrac{-\sin(t)}{\sqrt{1-\cos^2(t)}}$ sur $]0,\pi[$. Or

$$\int \frac{-\sin(t)}{\sqrt{1-\cos^2(t)}}dt = \int -1.dt = -t + cst$$

On en déduit donc que

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos(x) + cst$$

Dans la pratique, on omettra souvent de mentionner l'intervalle sur lequel on travail quand celui-ci est implicite.

Quand on "calcule" une primitive, on veut en fait donner un forme explicite des primitives. Mais qu'est-ce qu'une forme explicite ? Le cas de la fonction $\ln(x)$ est assez révélateur : nous savons bien que la fonction $x \to 1/x$ est une fonction continue sur $]0,+\infty[$, elle admet donc des primitives. Il est simple de prouver qu'aucune fraction rationnelle à coefficients réels, n'est primitive de cette fonction. Dans un certain sens, la fonction $x \to 1/x$ n'a donc pas de primitive explicite (a partir du moment ou l'on considère que les fonctions explicites, sont les fractions rationnelles à coefficients réels). On est donc obligé de donner un nom à cette fonction: le logarithme. Une fois acceptée cette nouvelle fonction, on vient de voir dans l'exemple précédent que $\ln(x)$ admettait une primitive explicite: $x\ln(x) - x$, mais cette fonction n'est toujours pas une fraction rationnelle.

A la lueur de ces remarques, on peut donc tenter de définir la notion de primitive "explicite": étant donné une famille de fonctions de référence, on dira qu'une fonction a une primitive explicite si elle a une primitive qui peut s'écrire comme combinaison finie de sommes, de produits, de rapports et de compositions de fonctions faisant partie de la famille de référence. Généralement quand on parle de primitive explicite, on considère pour famille de référence les fonction x^α, $\ln(x)$ et e^x. On rajoute parfois les fonctions trigonométriques réciproques (c'est dans cette situation que nous travaillerons). Montrer qu'une fonction n'admet pas de primitive explicite, est souvent d'une grande difficultée. Par exemple, Liouville a prouvé que la fonction $x \to e^{-x^2}$ n'admet pas de primitive explicite (sa preuve fait appelle à la théorie de Galois différentielle).

4.2 Méthodes.

4.2.1 Fractions rationnelles.

On s'interresse ici aux primitives des fractions rationnelles réelles. C'est a dire au primitives des fonctions F s'écrivants, sur leur domaine de définition, sous la forme $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels.

On note $\mathbb{R}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients réels (c'est un corps). Nous allons démontrer le théorème suivants:

Théorème 80.— *Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ et U un intervalle ouvert où eſt défini F. Il exiſte deux fractions rationnelles réelles, G et H et une famille finie $I_1, \cdots I_n$ de polynômes de degré 1 telles que*

$$\forall x \in U, \int F(t)dt = G(x) + \ln|H(x)| + \sum_{k=1}^{n} \arctan(I_k(x))$$

Nous allons en fait être beaucoup plus précis et donner une méthode pour calculer explicitement les fractions G, H et les polynômes I_k.

Soit $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle. Le théorème de d'Alembert-Gauss, assure notament que le polynôme Q eſt de la forme:

$$Q(x) = A \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{m} (a_j X^2 + b_j X + c_j)^{\beta_j}$$

avec n et m des entiers positifs (on convient que quand les des deux eſt nul, le produit considéré vaut 1), $A \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour tout i, et $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}^3$ avec $\Delta_j = b_j^2 - 4a_j c_j < 0$ pour tout j, α_i et α_j entier ſtrictement supérieurs à 0 pour tout i et tout j.

Le théorème de décomposition en éléments simple des fractions rationnelles permet d'écrire:

$$F(x) = E(X) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{\alpha_i} \frac{\omega_{i,t}}{(X - \lambda_i)^t} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{t=1}^{\beta_i} \frac{u_{j,t} x + v_{j,t}}{(a_j X^2 + b_j X + c_j)^t}$$

Avec E le polyôme qui représente la partie entière de la division suivant les puissances croissantes de P par Q et $\omega_{i,t}, u_{j,t}, v_{j,t}$ des réels (Les sommes sont considérées nulles si $n = 0$ ou si $m = 0$).

Soit U un intervalle ouvert où eſt définit F. On va chercher des primitives de F en calculant termes à termes des primitives sur U des éléments simples apparaissants dans la décomposition de F. Nous sommes donc en présence de trois types de fonctions dont il nous faut trouver des primitives sur U:

1/ Un polynôme: $E(x)$.

2/ Des fractions du types: $\dfrac{k}{(x-a)^n}$ avec n entier, k réel et a réel n'appartenant pas à U.

3/ Des fractions du types: $\dfrac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}$ avec n entier p et q réels et a, b, c un triplet de réels tels que $b^2 - 4ac < 0$.

Voyons, dans chaque cas, comment faire :

1/ Trouver une primitive d'un polynôme ne pose pas de problème...

2/ Deux cas se présentent :

2.1/ $n = 1$, alors on a, par exemple,

$$\int \frac{kdt}{t-a} = \ln|t-a|$$

2.2/ $n > 1$, alors on a, par exemple,

$$\int \frac{kdt}{(t-a)^n} = \frac{-k}{(n-1)(t-a)^{n-1}}$$

3/ (C'est le cas délicat...) On commence par réécrire $px+q$ sous la forme $r(2ax+b)+k$) c'est-à-dire en faisant apparaitre la dérivée de ax^2+bx+c plus une constante. On a alors:

$$\frac{px+q}{(ax^2+bx+c)^n}=r\frac{ax+b}{(ax^2+bx+c)^n}+\frac{k}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Ceci est toujours possible: En effet si $p=0$ alors on pose $r=0$ et $k=q$. Si $p\neq 0$ alors, on pose $r=p/2a$ et $k=q-(rp)/2a$. On est alors amené a calculer deux styles de primitives:

$$3.1/\ \int\frac{2at+b}{(at^2+bt+c)^n}dt\ \ et\ \ 3.2/\ \frac{k}{(at^2+bt+c)^n}dt$$

3.1/ Il faut distingué:

3.1.1/ $n=1$, alors on a, par exemple:

$$\int\frac{2at+b}{(at^2+bt+c)}dt=\ln|at^2+bt+c|$$

3.1.2/ $n>1$, alors on a, par exemple:

$$\int\frac{2at+b}{(at^2+bt+c)^n}dt=\frac{1}{(1-n)}.\frac{1}{(at^2+bt+c)^{n-1}}$$

3.2/ On commence par écrire le polynôme $at^2+bt+c=a((t+\dfrac{b}{2a})^2+(\dfrac{c}{a}-\dfrac{b^2}{4a^2})$. La quantité, $(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2})$ est strictement positive (car le polynôme est irréductible). On obtient donc:

$$at^2+bt+c=a\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\left(\left(\frac{t+\frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}\right)^2+1\right)$$

On opère alors le changement de variable $x=\dfrac{t+\dfrac{b}{2a}}{\sqrt{\dfrac{c}{a}-\dfrac{b^2}{4a^2}}}$ et on est amené à calculer les primitives

$$P_n=\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

Ces primitives se calculent par récurrence.

Prenons $n\geq 1$, alors :

$$P_n=\int\frac{dx}{(x^2+1)^n}=\int\frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}}dx=P_{n+1}+\int\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}dx$$

On calcule la dernière primitive par intégration par partie:

$$\int\frac{x}{(1+x^2)^{n+1}}dx=-\frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n}+\frac{1}{2n}P_n$$

La suite de fonction P_n s'obtient donc par la relation de récurrence:

$$P_1(x)=\arctan(x)\quad P_{n+1}(x)=\frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n}+\frac{2n-1}{2n}P_n(x)$$

Ainsi:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)} = \arctan(x)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(x)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{4(x^2+1)} + \frac{3}{8}\arctan(x)$$

4.2.2 Fractions rationnelles en exponentielle.

Il s'agit du cas des primitives $\int R(e^x)dx$ où R est une fraction rationnelle en une indéterminée. On considère alors le changement de variable $t = e^x$ et l'on se ramène au calcul de la primitive de la fraction rationnelle $t \longmapsto R(t)/t$.

Exemple : On cherche à calculer $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$. On pose $t = e^x$ et l'on a donc

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{dt}{1+t^2}dt = \arctan(t) + C = \arctan(e^x) + C$$

4.2.3 Fonctions trigonométriques.

Il s'agit du cas des primitives $\int R(\cos x, \sin x)dx$ où R est une fraction rationnelle en deux indéterminées. Dans cette situation le changement de variable $t = \tan(x/2)$, permet de se ramener au calcul de la primitive de la fraction rationnelle $t \longmapsto R\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)\dfrac{2}{1+t^2}$.

Cette dernière primitive peut être compliquée à calculer. Dans certains cas, des changements de variables différents permettent de simplifier un peu les choses :

Règles de Bioche : Si la forme différentielle $R(\cos x, \sin x)dx$ est invariante par le changement de

a) x en $-x$ alors on pose $t = \cos x$,

b) x en $\pi - x$ alors on pose $t = \sin x$,

c) x en $\pi + x$ alors on pose $t = \tan x$.

Exemple : On cherche à calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+\cos^2 x}$ avec $a \neq 0$. On est dans le cas c) de la règle de Bioche et l'on pose donc $t = \tan x$. On a alors

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a^2+\cos^2 x} &= \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(a^2+\frac{1}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{a^2t^2+1+a^2} = \frac{1}{a\sqrt{1+a^2}}\arctan\left(\frac{at}{\sqrt{1+a^2}}\right) + C \\ &= \frac{1}{a\sqrt{1+a^2}}\arctan\left(\frac{a\tan x}{\sqrt{1+a^2}}\right) + C\end{aligned}$$

4.2.4 Intégrales abéliennes.

Soit $A(X,Y)$ et $B(X,Y)$ deux fractions rationnelles à deux indeterminées (i.e le quotient de deux polynômes à deux variables). Soit $P(X,Y)$ un polynôme a deux variable. Soit f une fonction définie par :

$$f(X) = \frac{A(X,Y)}{B(X,Y)},\ avec\ P(X,Y) = 0$$

Toute primitive d'une telle fonction, s'appelle "intégrale abélienne".

Il n'est généralement pas facile de calculer de telle primitive. On peut toutefois remarquer que si la courbe d'équation $P(X,Y)=0$ admet une paramétrisation il est parfois possible de conclure.

On se place dans le cas où il existe deux fonctions a et b d'un ouvert U de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que:

$$\forall t \in U,\ P(a(t),b(t))=0$$

Si on suppose que a est un ^{1}-difféomorphisme, alors, on peut effectuer le changement de variable $X=a(t)$ et trouver une primitive de $\dfrac{A(X,Y)}{B(X,Y)}$ sur $a(U)$ revient donc à trouver une primitive de

$$\frac{A(a(t),b(t))}{B(a(t),b(t))}a^{'}(t)$$

Dans ce cas, nous sommes ramené au cas d'une fraction rationnelle.

Exemple: Cherchons $\displaystyle\int \frac{dX}{XY}$ avec la relation $X^3+Y^3=3XY$ (le folium de Descarte).

Cette courbe (le folium) admet la paramétrisation:

$$X=\frac{3t}{1+t^3},\ Y=\frac{3t^2}{1+t^3}$$

On pose donc $X=\dfrac{3t}{1+t^3}$, donc $dX=3\dfrac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}dt$, et notre intégrale devient après changement de variable :

$$\int (\frac{1}{3t^3}-\frac{2}{3})dt$$

c'est-à-dire $-1/6(4t+t^{-2})$

4.3 Primitives usuelles.

Fonction $f(x)$	Intervalle	Primitive $F(x)$
e^{ax} avec $a \in \mathbb{C}^*$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{e^{ax}}{a} + C$
$\mathrm{ch}(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{\mathrm{sh}(ax)}{a} + C$
$\mathrm{sh}(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{\mathrm{ch}(ax)}{a} + C$
$\cos(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{\sin(ax)}{a} + C$
$\sin(ax)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$-\dfrac{\cos(ax)}{a} + C$
x^a avec $a \in \mathbb{R}/\{1\}$	$]0,+\infty[$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$

Fonction $f(x)$	Intervalle	Primitive $F(x)$
$\frac{1}{x^2+a^2}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a}\arctan(\frac{x}{a})+C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$]-a,a[$	$\arcsin(\frac{x}{a})+C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{argsh}(\frac{x}{a}) = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$]-a,+\infty[$	$\operatorname{argch}(\frac{x}{a}) = \ln(\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$]-\infty,-a[$	$-\operatorname{argch}(\frac{-x}{a}) = \ln(\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\rvert)$
$\frac{1}{a^2-x^2}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$]-\infty,-a[;\ ]a,+\infty[$	$\frac{1}{2a}\ln(\frac{\lvert x+a\rvert}{\lvert x-a\rvert})+C$
$\frac{1}{a^2-x^2}$ avec $a \in \mathbb{R}^{*+}$	$]-a,a[$	$\frac{1}{2a}\ln(\frac{\lvert x+a\rvert}{\lvert x-a\rvert})+C\ (=\frac{1}{a}\operatorname{argth}\frac{x}{a}+C)$

Fonction $f(x)$	Intervalle	Primitive $F(x)$
$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)+C$
$\frac{1}{\sin(x)}$	$]k\pi,(k+1)\pi[$	$-\ln(\lvert\tan(\frac{x}{2})\rvert)+C$
$\frac{1}{\cos(x)}$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[$	$-\ln(\lvert\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\rvert)+C$
$\frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$	$]0,+\infty[;\ ]-\infty,0[$	$-\ln(\lvert\mathrm{th}(\frac{x}{2})\rvert)+C$
$\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$	$\mathbb{R}$	$2\arctan(e^x)+C$

Fonction $f(x)$	Intervalle	Primitive $F(x)$
$\ln(x)$	$]0,+\infty[$	$x\ln(x)-x+C$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$x\arctan(x)-\ln(\sqrt{1+x^2})+C$
$\arcsin(x)$	$]-1,1[$	$x\arcsin(x)-\sqrt{1-x^2}+C$
$\arcsin(x)$	$]-1,1[$	$x\arccos(x)+\sqrt{1-x^2}+C$
$\mathrm{argsh}(x)$	$\mathbb{R}$	$x\mathrm{argsh}(x)-\sqrt{1+x^2}+C$
$\mathrm{argch}(x)$	$[1,+\infty[$	$x\mathrm{argch}(x)-\sqrt{x^2-1}+C$
$\mathrm{argth}(x)$	$]-1,1[$	$x\mathrm{argth}(x)+\ln(\sqrt{1-x^2})+C$

5 Intégrales dépendants d'un paramètre.

5.1 Continuité sous le signe $\int$.

On considère dans cette partie ainsi que dans la suivante un ouvert A de $\mathbb{R}$ et le segment $[a,b]$.

Théorème 81.— *Soit $\varphi : A \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une application (de deux variables) continue. Alors :*

1) Pour tout $x_0 \in A$, l'application partielle $t \to \varphi(x_0,t)$ est continue. On peut donc définir une application $f : A \to \mathbb{R}$ par:

$$\forall x \in A,\ f(x) = \int_a^b \varphi(x,t)dt$$

2) f est continue en tout point de A.

Preuve : Le point 1) est évident.

Pour ce qui est de la continuité de f sur A, on prend $x_0 \in A$ et un voisinage compact $K \subset \mathbb{R}$ de a qui est inclus dans A (ce qui est toujours possible). L'ensemble $K \times [a,b]$ est donc un compact de $\mathbb{R}^2$, d'après le théorème de Heine, φ est uniformément continue sur $K \times [a,b]$. Donc:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ \forall (x,t) \in K \times [a,b]\ \forall (x^{'},t^{'}) \in K \times [a,b]$

$$\left.\begin{array}{l} |x - x^{'}| \leq \alpha \\ |t - t^{'}| \leq \alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow |\varphi(x,t) - \varphi(x^{'},t^{'})| \leq \varepsilon$$

En prenant $x^{'} = x_0$ et $t^{'} = t$, on a:

$$|x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |\varphi(x,t) - \varphi(x_0,t)| \leq \varepsilon$$

donc en intégrant sur $[a,b]$, on obtient,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ \forall x \in A,\ |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < (b-a)\varepsilon$$

c'est-à-dire f continue en x_0.

5.2 Dérivabilité sous le signe $\int$.

Théorème 82.— *Soit $\varphi : A \times [a,b] \to \mathbb{R}$ une application (de deux variables) continue telle que la première dérivée partielle $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ existe et soit continue sur $A \times [a,b]$. Comme précédement, on définit $f(x) = \displaystyle\int_a^b \varphi(x,t)dt$. Alors :*

1/ Pour tout $x_0 \in A$, la fonction $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,t) : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$.

2/ La fonction f est dérivable en tout point et $f^{'}(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)dt$.

Preuve : Le 1/ est immédiat.

2/ On fixe $x_0 \in A$ et, pour tout h, on pose

$$\begin{aligned} u(h) &= f(a+h) - f(h) - h\int_a^b \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,t)dt \\ &= \int_a^b \left(\varphi(x_0+h,t) - \varphi(x_0,t) - h\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,t)\right)dt \end{aligned}$$

Il s'agit donc de montrer que $\lim_{h \to 0} u(h) = 0$.

Pour t donné on considère la fonction $\theta_t(x) = \varphi(x,t) - x\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,t)$. Cette fonction est dérivable et

$$\theta_t'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,t)$$

Si K désigne un segment de A contenant a, alors $K \times [a,b]$ est compact et donc la fonction $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ est uniformément continue sur $K \times [a,b]$. Ainsi,

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall \alpha > 0, \forall (x,t) \in K \times [a,b],\ |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,t) \right| < \epsilon$$

c'est-à-dire que dés que $|x - x_0| < \alpha$, on a $|\theta_t'(x)| < \epsilon$ pour tous $t \in [a,b]$.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que, pour tous $t \in [a,b]$ on a $|\theta_t(x_0+h) - \theta_t(x_0)| \le \epsilon |h|$ si bien que, puisque

$$\theta_t(x_0+h) - \theta_t(x_0) = \varphi(x_0+h,t) - \varphi(x_0,t) - h\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0,t)$$

on en déduit que pour tout $|h| < \alpha$, on a $|u(h)| < \epsilon |h|(b-a)$.

Application au calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$**.** On considère la fonction

$$\varphi(x,t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$$

Cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$, donc la fonction

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (théorème???). Maintenant, φ admet une dérivée partielle première en tout point:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = -2xe^{-x^2} e^{-x^2-t^2}$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$, donc f est dérivable et

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt$$

Si l'on effectue le changement de variable $u = xt$, on obtient

$$f'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du$$

Considérons maintenant la fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$. D'après la proposition???, g est dérivable et:

$$g'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{'}(x) + g^{'}(x) = 0$$

c'eſt-à-dire

$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + g(x) = f(0) + g(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$$

(la dernière égalité s'obtenant en remarquant que $\arctan(x)$ eſt une primitive de $\dfrac{1}{1+x^2}$)

Maintenant, $\forall t \in [0,1],\ 1+t^2 \geq 1$ donc $\dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \leq e^{-x^2}$, donc en vertu de la prop???,

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f(x) \leq e^{-x^2}$$

ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

De (1), on en déduit que g admet $\dfrac{\pi}{4}$ pour limite en $+\infty$ et donc que la fonction $x \to \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$ admet une limite en $+\infty$ (limite que l'on note $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$). On a alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

5.3 Théorème de Fubini.

Soit $a < b$ et $c < d$ quatre réels et f une application de $[a,b] \times [c,d]$ dans $\mathbb{R}$. Si pour tout $x_0 \in [a,b]$, l'application partielle $f(x_0, y)$ de $[c,d] \to \mathbb{R}$ eſt continue par morceaux, on définit $F(x) = \displaystyle\int_c^d f(x,y) dy$. Si F eſt continue par morceaux, on écrit

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx$$

Maintenant, on peut s'intéresser à l'opération contraire: si pour tout $y_0 \in [c,d]$, l'application partielle $f(x, y_0)$ de $[a,b] \to \mathbb{R}$ eſt continue par morceaux, on définit $G(y) = \displaystyle\int_a^b f(x,y) dx$. Si G eſt continue par morceaux, on écrit:

$$\int_c^d G(y) dy = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy$$

Une queſtion naturelle eſt de savoir si ces deux quantités sont égalent.

Théorème 83.— (Fubini) *Si f eſt une fonction continue, alors les deux fonctions F et G décrites plus haut sont continues par morceaux et l'on a*

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx$$

On note plus fréquement, $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y) dx dy$, cette "intégrale double".

Preuve : La fonction $x \to \int_c^d f(x,y)dy$ est continue en vertu du théorème de continuité sous le signe somme, idem pour $x \to \int_a^b f(x,y)dx$. Considérons les quatres fonctions auxiliaires suivantes:

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \int_a^b \left(\int_c^t f(x,y)dy\right)dx \\
\psi(t) &= \int_c^t \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy \\
u(x,t) &= \int_c^t f(x,y)dy \\
v(y) &= \int_a^b f(x,y)dx
\end{aligned}$$

L'existence de φ, ψ et u est assurée par le théorème de continuité sous le signe somme. D'après le théorème???, la fonction u admet une dérivée partielle par rapport à t valant $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = f(x,t)$. Cette fonction est continue, donc d'après le théorème de dérivation sous le signe somme, la fonction $\varphi(t) = \displaystyle\int_a^b u(t,x)dx$ est dérivable et $\varphi'(t) = \displaystyle\int_a^b f(x,t)dx$.

$v(y)$ est une fonction continue, donc $\psi(t)$ est dérivable (th???), de dérivée $\psi'(t) = v(t) = \int_a^b f(x,t)dx$.

On a donc $\varphi'(t) = \psi'(t)$ et comme $\varphi(c) = \psi(c) = 0$ on a donc:

$$\forall t \in [c,d],\ \varphi(t) = \psi(t)$$

Corollaire 84.— *Soit $(a_i)_{1\le i\le n}$ et $(b_i)_{1\le i\le n}$ deux n-uplet de réels tels que $a_i < b_i$ pour tout $i = 1,\cdots,n$ et f une application continue de $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$. Alors pour toute permutation $\sigma \in S_n$ de $\{1,\cdots,n\}$, on a*

$$\int_{a_1}^{b_1}\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\cdots,x_n)dx_n\cdots dx_1 = \int_{a_{\sigma(1)}}^{b_{\sigma(1)}}\cdots\int_{a_{\sigma(n)}}^{b_{\sigma(n)}} f(x_1,\cdots,x_n)dx_{\sigma(n)}\cdots dx_{\sigma(1)}$$

Preuve : S'obtient par récurrence sur n.

6 Calculs approchés d'intégrales.

6.1 Méthode des rectangles.

Etant donnée une fonction continue sur un segment $[a,b]$, on approche l'air sous la courbe de f par l'air du rectangle de base $[a,b]$ et de hauteur $f(c)$ où $c = \frac{a+b}{2}$ est le milieu de $[a,b]$. L'air de ce rectangle vaut $R = (b-a)f(c)$.

Calcul de l'erreur : On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$ pour évaluer l'erreur

$$\varepsilon = \int_a^b f(t)dt - (b-a)f(c)$$

On pose $F(x)=\displaystyle\int_c^x f(t)dt$ et l'on applique l'égalité de Taylor-Laplace :

$$\begin{array}{rcl} F(a)-F(c) & = & -\dfrac{(b-a)}{2}f(c)+\dfrac{(b-a)^2}{8}f'(c)+\displaystyle\int_c^a \dfrac{(a-t)^2}{2}f''(t)dt \\ F(b)-F(c) & = & \dfrac{(b-a)}{2}f(c)+\dfrac{(b-a)^2}{8}f'(c)+\displaystyle\int_c^b \dfrac{(b-t)^2}{2}f''(t)dt \end{array}$$

On en déduit que

$$|\varepsilon|=\left|\int_c^b \frac{(b-t)^2}{2}f''(t)dt-\int_c^a \frac{(a-t)^2}{2}f''(t)dt\right|$$

Puisque f est supposée $\mathscr{C}^2$, le réel $M_2=\sup\limits_{a\le t\le b}|f''(t)|$ existe et l'on a alors

$$|\varepsilon|\le M_2\left(\left[-\frac{(b-t)^3}{6}\right]_c^b+\left[\frac{(a-t)^3}{6}\right]_c^a\right)=\frac{(b-a)^3}{24}M_2$$

On vient de montrer :

Proposition 85.— *Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$. On a*

$$\left|\int_a^b f(t)dt-(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\le\frac{(b-a)^3}{24}.M_2$$

où $M_2=\sup\limits_{a\le t\le b}|f''(t)|$.

En appliquant la méthode sur chaque intervalle de la subdivision à pas régulier de $[a,b]$ et en sommant, on trouve alors :

Corollaire 86.— *Si $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ est une application de classe $\mathscr{C}^2$ alors, pour tout entier $n\ge 1$, on a*

$$\left|\int_a^b f(t)dt-\frac{(b-a)}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+(2k-1)\frac{b-a}{2n}\right)\right|\le\frac{(b-a)^3}{24n^2}.M_2$$

où $M_2=\sup\limits_{a\le t\le b}|f''(t)|$.

Application : Calcul approché de π par la formule $\dfrac{\pi}{4}=\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}$.

6.2 Méthode des trapèzes.

L'idée est ici de remplacer l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ par l'aire du trapèze qui interpole la fonction f en a et b, c'est-à-dire d'approcher $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ par $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)dt=\frac{(b-a)}{2}(f(a)+f(b))$ où $\varphi(t)=f(a)+(t-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Calcul de l'erreur : On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$. En intégrant deux fois par parties on a :

$$\int_a^b (t-a)(t-b)f''(t)dt=-(b-a)(f(a)+f(b))+2\int_a^b f(t)dt$$

et ainsi l'erreur commise vaut

$$\varepsilon = \int_a^b f(t)dt - \frac{(b-a)}{2}(f(a)+f(b)) = \frac{1}{2}\int_a^b (t-a)(t-b)f''(t)dt$$

Si l'on pose $M_2 = \sup\limits_{a\le t\le b} |f''(t)|$ on alors

$$\begin{aligned} |\varepsilon| &\le \frac{M_2}{2}\left|\int_a^b (t^2-(a+b)t+ab)dt\right| \\ &= \frac{M_2}{2}(b-a)\left(-\frac{a^2+b^2+ab}{3}+\frac{a^2+b^2+2ab}{2}-ab\right) \\ &= \frac{M_2}{12}(b-a)(a^b+b^2-2ab) = \frac{(b-a)^3}{12}M_2 \end{aligned}$$

On vient de montrer :

Proposition 87.— *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^2$. On a*

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \frac{(b-a)}{2}(f(a)+f(b))\right| \le \frac{(b-a)^3}{12}.M_2$$

où $M_2 = \sup\limits_{a\le t\le b} |f''(t)|$.

Corollaire 88.— *Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathscr{C}^2$ alors, pour tout entier $n \ge 2$, on a*

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \frac{(b-a)}{n}\left(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{(b-a)}{n}\right) + \frac{1}{2}f(b)\right)\right| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}.M_2$$

où $M_2 = \sup\limits_{a\le t\le b} |f''(t)|$.

Preuve :