Analyse complexe

Université d'Eleuthéria-Polites
République de Poldévie

Cours de Licence 3 — 2017/2018

Bruno Deschamps
(Rédaction par Ivan Suarez Atias)

Table des matières

Rappels

I. Limite supérieure, limite inférieure

Dans ce premier paragraphe, une suite numérique sera une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Notons $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ la droite réelle à laquelle nous avons rajouté deux symboles. Nous étendons l'ordre défini sur $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en décrétant que $+\infty$ est strictement supérieur à n'importe quel nombre réel et à $-\infty$ (resp. que $-\infty$ est strictement inférieur à n'importe quel nombre réel).

Propriéte 1. *Dans $\overline{\mathbb{R}}$, toute partie non vide possède une borne supérieure et une borne inférieure. Si $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, on note $\sup(A)$ (resp. $\inf(A)$) la **borne supérieure** (resp. la **borne inférieure**) de A.*

Exemple 2. Soit $A = \left\{\frac{p}{q} \ : \ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^\bullet := \mathbb{N} \setminus \{0\},\ p^2 < 2q^2\right\} \subseteq \mathbb{Q}$. Alors A est bornée et $\sup A = \sqrt{2}$, $\inf A = -\sqrt{2}$.

Propriéte 3. *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. On a*
- $\sup A = +\infty \iff$ *A n'est pas majorée*
- $\sup A \in \mathbb{R} \iff$ *A est majorée*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons

$$v_n = \sup\{u_k \ : \ k \geq n\} \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{et} \qquad w_n = \inf\{u_k \ : \ k \geq n\} \in \overline{\mathbb{R}}$$

Comme $\{u_k \ : \ k \geq n+1\} \subseteq \{u_k \ : \ k \geq n\}$, la suite v_n est décroissante. Cette suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 4. La **limite supérieure** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie comme l'élément $L = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \in \overline{\mathbb{R}}$. On la note $\limsup(u_n) = \overline{\lim}(u_n)$.

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quant à elle croissante.

Définition 5. La **limite inférieure** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie comme l'élément $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n \in \overline{\mathbb{R}}$. On la note $\liminf(u_n) = \underline{\lim}(u_n)$.

Exemple 6.
1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $v_n = \sup\{u_k \ : \ k \geq n\} = \sup\{-1; 1\} = 1$ et $w_n = \inf\{-1; 1\} = -1$. Ainsi, $\limsup u_n = 1$ et $\liminf u_n = -1$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = (1 + (-1)^n)n$. Remarquons que $u_{2k} = 4k$ et $u_{2k+1} = 0$. On a donc
$$v_{2n} = \sup\{0; 2{\times}2n; 2{\times}(2n+2); 2{\times}(2n+4); \ldots\} = +\infty$$
$$v_{2n+1} = \sup\{0; 2{\times}2n; 2{\times}(2n+2); 2{\times}(2n+4); \ldots\} = +\infty$$
Ceci montre que $\limsup u_n = +\infty$. De même, on montre que $\liminf u_n = 0$ (exercice).
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \frac{n+2}{n+1}$. Alors
$$v_n = \sup\left\{\frac{n+2}{n+1}, \frac{n+3}{n+2}, \ldots\right\} = \frac{n+2}{n+1}$$
Donc $\limsup u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$. De même, on montre que $\liminf u_n = 1$.

Proposition 7. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Alors $\liminf u_n \leq \limsup u_n$.*

Démonstration. En utilisant les notations de la définition, v_n et w_n sont respectivement la borne supérieure et la borne inférieure du même sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$. L'inégalité souhaitée est obtenue en passant à la limite. $\square$

THÉORÈME 8. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite numérique.* $\limsup u_n$ *(resp.* $\liminf u_n$*) est la* ***plus grande*** *(resp.* ***plus petite****) valeur d'adhérence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

DÉMONSTRATION. La démonstration concernant $\limsup u_n$ et $\liminf u_n$ est identique. Démontrons le théorème uniquement pour le cas $\limsup u_n$, le cas $\liminf u_n$ étant laissé en exercice. Posons donc $v_n = \sup\{u_k : k \geq n\}$ et $L = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Trois cas sont possibles : $L = +\infty$; $L \in \mathbb{R}$ et $L = -\infty$.
Cas 1 : $L = +\infty$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, ceci implique que $v_n = +\infty$ pour tout $n \geq 0$. Ainsi, pour tout $A > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > A$, ce qui montre que $+\infty$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Cas 2 : $L = -\infty$. Comme $v_n \geq u_n$, ceci implique que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, et $-\infty$ est bien l'unique valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Cas 3 : $L \in \mathbb{R}$. Montrons dans un premier temps que L est bien une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers L, donc

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq N \qquad |v_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

D'après la définition de v_N,

$$\exists N_2 \geq N \qquad |v_N - u_{N_2}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi,

$$|u_{N_2} - L| \leq |u_{N_2} - v_N| + |v_N - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Le réel L est donc bien une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons désormais qu'il s'agit de la plus grande. Soit $M > L$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad |v_n - L| < \frac{M-L}{2}$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, l'égalité précédente implique

$$L < v_N < L + \frac{M-L}{2} < M$$

Par conséquent, par définiton de v_N,

$$\forall n \geq N \qquad u_n \leq v_N < \bigvee \frac{M-L}{2} < M$$

Le réel M ne peut donc pas être une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

DÉMONSTRATION. La démonstration concernant $\limsup u_n$ et $\liminf u_n$ est identique. Démontrons le théorème uniquement pour le cas $\limsup u_n$, le cas $\liminf u_n$ étant laissé en exercice. Posons donc $v_n = \sup\{u_k : k \geq n\}$ et $L = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Trois cas sont possibles : $L = +\infty$; $L \in \mathbb{R}$ et $L = -\infty$.
Intéressons-nous dans un premier temps au cas où $L = +\infty$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, cette limite implique que $v_n = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En revenant à la définition de v_n, nous en déduisons

$$\forall A \in \mathbb{R} \qquad \forall m \in \mathbb{N} \qquad \exists N > m \qquad u_N > A$$

Cette dernière assertion permet de construire une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$. La suite extraite, une fois construite, montre alors que $+\infty$ est bien une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui est la plus grande valeur d'adhérence possible pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Afin de construire cette suite extraite il faut procéder par récurrence. Supposons que les n premiers termes de la suite extraite $(u_{\varphi(k)})_{k\leq n-1}$ soient définis. La propriété précédente appliquée à $A = n$ et $m = \varphi(n-1)$ (resp. $m = 0$ si $n = 0$) montre l'existence d'un entier $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ satisfaisant $u_{\varphi(n)} > n$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = +\infty$.
Intéressons-nous désormais au cas où $L = -\infty$. La définition de v_n implique

$$\forall A \in \mathbb{R} \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall m \geq N \qquad u_N < A$$

Cette propriété montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. Ainsi, $-\infty$ est l'unique valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Étant l'unique valeur d'adhérence, il s'agit également de la plus grande.
Supposons finalement que $L \in \mathbb{R}$.

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq N \qquad |v_n - L| < \varepsilon$$

Construisons par récurrence une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers L. Définissons $\varphi(0) = 0$. Fixons $n \geq 1$ et supposons que φ soit définie pour $k < n$. Choisissons $\varepsilon = \dfrac{1}{n} > 0$ et fixons $N > 0$ tel que $|v_n - L| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$. Rappelons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi,

$$\forall n \geq N \qquad L \leq v_n < L + \varepsilon$$

Or $v_n = \sup\{u_k \ : \ k \geq n\}$, d'où

$$\exists \varphi(n) > \max n, \varphi(n-1) \qquad v_n - \varepsilon < u_{\varphi(n)} \leq v_n$$

L'inégalité concernant v_n implique alors $L - \varepsilon < u_{\varphi(n)} < L + \varepsilon$, implication qui montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)} = L$. Ainsi L est bien une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Soit λ une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Choisissons une suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers λ. On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \sup\{u_k \ : \ k \geq n\} \geq \sup\{u_{\varphi(k)} \ : \ \varphi(k) \geq n\} \geq \lambda$$

En passant à la limite, on en déduit

$$\limsup u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n \geq \lambda$$

égalité qui termine la démonstration. □

Théorème 9. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(ii) $\limsup u_n = \liminf u_n \in \mathbb{R}$.

Démonstration. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une unique valeur d'adhérence réelle. □

Théorème 10. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique convergeant vers $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n > 0$. Alors*

$$\limsup(u_n v_n) = \limsup u_n \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell \limsup u_n$$

Démonstration. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, la suite extraite $\left(v_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ. On en déduit l'équivalence suivante.

$$\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(u_{\varphi(n)} v_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}$$

Si l'on note A (resp. B) l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. de $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$), on a l'égalité $B = \{\lambda\ell \ : \ell \in A\}$. Comme $\ell > 0$, on en déduit

$$\limsup(u_n v_n) = \ell \limsup u_n$$

égalité qui conclut la démonstration. □

Attention. Généralement, $\limsup(u_n v_n) \neq \limsup u_n \limsup v_n$, comme on peut le voir dans l'exemple suivant. Posons

$$\begin{cases} u_{2k} & = 0 \\ u_{2k+1} & = k \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{2k} & = k \\ v_{2k+1} & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \limsup(u_n v_n) & = 0 \\ \limsup u_n & = +\infty \\ \limsup v_n & = +\infty \end{cases}$$

Attention. L'inégalité $\limsup(u_n + v_n) \leq \limsup u_n + \limsup v_n$ est vraie, mais il n'y a pas toujours égalité. Par exemple, si $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^n$, on a $u_n + v_n = 0$.

Lemme 11. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs. Alors* $\limsup \sqrt[n]{u_{n+1}} = \limsup \sqrt[n+1]{u_{n+1}}$.

Démonstration. Supposons dans un premier temps que $\ell = \limsup \sqrt[n]{u_{n+1}} \in \mathbb{R}_+^\times$. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq N_1 \qquad \sqrt[n]{u_{n+1}} < \ell + \varepsilon$$

La fonction $x \mapsto x^{\frac{n}{n+1}}$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\times$, on en déduit que pour $n \geq N_1$, on a $u_{n+1}^{\frac{1}{(n+1)}} < (\ell+\varepsilon)^{\frac{n}{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell+\varepsilon$. En particulier, $\limsup u_{n+1}^{\frac{1}{(n+1)}} \leq \ell+\varepsilon$. Cette dernière inégalité étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\limsup u_{n+1}^{\frac{1}{(n+1)}} \leq \ell$.
Choisissons désormais $0 < \varepsilon < \ell$.

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq N_2 \qquad \exists m \geq n \qquad \sqrt[m]{u_{m+1}} > \ell - \varepsilon$$

On peut donc extraire une sous-suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\exists N_3 \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq N_3 \qquad \sqrt[\varphi(n)]{u_{\varphi(n)+1}} > \ell - \varepsilon$$

Ainsi, pour $n \geq N_3$, on a $u_{\varphi(n)+1}{}^{\frac{1}{(\varphi(n)+1)}} > (\ell-\varepsilon)^{\frac{\varphi(n)}{\varphi(n)+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \varepsilon$. Cette suite extraite montre que $\limsup \sqrt[n+1]{u_{n+1}} \geq \ell - \varepsilon$. Comme précédemment, cette inégalité étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient $\limsup \sqrt[n+1]{u_{n+1}} \geq \ell$, d'où l'égalité $\limsup \sqrt[n+1]{u_{n+1}} = \ell$.
Les cas $\limsup u_n = 0$ et $\limsup u_n = +\infty$ sont laissés en exercice. □

II. Séries numériques

Dorénavant, sauf indication contraire les suites et les séries numériques sont à valeur dans $\mathbb{C}$.

1. Premiers rappels.

Définition 12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On appelle **série** de terme général u_n la **suite** des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On note cette suite $\sum u_n$.

Théorème 13 (Critère de Cauchy pour les séries). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) La série $\sum u_n$ converge.

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq N \qquad \forall p \geq 0 \qquad \left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon$

Démonstration. Comme $\mathbb{C}$ est complet, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\sum u_n$ est une suite de Cauchy. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Nous avons alors

$$\begin{aligned}\sum u_n \text{ est de Cauchy} \quad &\Longleftrightarrow \quad (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est de Cauchy} \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq N \qquad \forall p \geq 0 \qquad |S_{n+p} - S_{n-1}| < \varepsilon\end{aligned}$$

L'équivalence cherchée découle directement de la dernière assertion. □

Définition 14. La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 15. *Toute série absolument convergente est convergente.*

Démonstration. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Le critère de Cauchy appliqué à la série $\sum |u_n|$ donne

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq N \qquad \forall p \geq 0 \qquad \left|\sum_{k=n}^{n+p} |u_k| < \varepsilon\right|$$

L'inégalité triangulaire $\left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |u_k|$ implique alors que la série $\sum u_n$ satisfait bien également le critère de Cauchy. La série $\sum u_n$ est donc convergente. □

Attention. Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. La série $\sum u_n$ converge (d'après le critère des séries alternées) bien que la série $\sum |u_n|$ diverge (comparaison série intégrale).

Corollaire 16. *Si $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Démonstration. Appliquons le critère de Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq N \qquad \forall p \geq 0 \qquad \left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon$$

Le choix $p = 0$ dans le critère de Cauchy montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. □

D'après le corollaire 16, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Définition 17. On dit que la série $\sum u_n$ est **grossièrement divergente** si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

2. Critères de convergences.

• Critère des séries alternées

Définition 18. Une série $\sum u_n$ est dite **alternée** si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (-1)^n |u_n|$$

Remarquons qu'une série alternée est obligatoirement à valeurs réelles.

Théorème 19 (Critère des séries alternées). *Soit $\sum (-1)^n |u_n|$ une série alternée.*
*Si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en **décroissant**, alors la série $\sum u_n$ converge.*

Démonstration. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Nous avons les égalités

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= (-1)^{2n+2}|u_{2n+2}| + (-1)^{2n+1}|u_{2n+1}| = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0 \\ S_{2n+3} - S_{2n+1} &= (-1)^{2n+3}|u_{2n+3}| + (-1)^{2n+22}|u_{2n+2}| = -|u_{2n+3}| + |u_{2n+2}| \geq 0 \\ S_{2n+1} - S_{2n} &= -|u_{2n+1}| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

Les égalités précédentes montrent que les deux suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent donc simultanément vers une limite commune notée ℓ. Ces deux suites extraites couvrent $\mathbb{N}$ entièrement, nous en déduisons que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell$. □

• Transformation d'Abel

Proposition 20. *Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. Alors*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k+1}) \ + A_n b_n$$

Démonstration. Démontrons l'égalité par récurrence. Pour $n = 0$, l'égalité à montrer se lit $a_0 b_0 = A_0 b_0$, égalité qui est vraie.
Supposons l'égalité démontrée pour un entier $n \in \mathbb{N}$. Au rang $n + 1$, le membre de droite vaut

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} A_k(b_k - b_{k+1}) \ + A_{n+1}b_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k-1}) \ + A_n(b_n - b_{n+1}) + A_{n+1}b_{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} A_k(b_k - b_{k-1}) \ + A_n b_n + b_{n+1}(A_{n+1} - A_n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \ + b_{n+1}a_{n+1} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n + 1$, ce qui termine la démonstration. □

Théorème 21 (Théorème d'Abel). *Gardons les notations de la proposition précédente. Supposons que*

- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée ;*
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0 *;*
- $\sum(b_{n+1} - b_n)$ *converge absolument.*

Alors $\sum a_n b_n$ converge.

Démonstration. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0, on en déduit que $A_n b_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$. Ainsi, d'après la proposition 20,

$$\sum a_n b_n \text{ converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum A_n(b_n - b_{n-1}) \text{ converge}$$

Soit $M > 0$ un majorant de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$: pour tout entier n, $A_n \leq M$. La série $\sum M(b_n - b_{n-1})$ convergeant absolument, le critère de Cauchy implique

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq N \qquad \forall p \geq 0 \qquad \sum_{k=n}^{n+p} |M(b_n - b_{n-1})| < \varepsilon$$

Le réel $\varepsilon > 0$ étant donné, l'entier N donné par la condition de Cauchy vérifie également

$$\forall n \geq N \qquad \forall p \geq 0 \qquad \left|\sum_{k=n}^{n+p} A_n(b_n - b_{n-1})\right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |A_n||b_n - b_{n-1}| \leq \sum M|b_n - b_{n-1}| < \varepsilon$$

La série $\sum A_n(b_n - b_{n-1})$ vérifie donc la condition de Cauchy. Cette dernière série converge donc, tout comme la série $\sum a_n b_n$. □

Exemple 22. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle décroissante et convergeant vers 0. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Alors la série $\sum \lambda_n e^{in\theta}$ converge.

En effet, posons $a_n = e^{in\theta}$ et $b_n = \lambda_n$. On a alors

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} e^{i\theta} - 1 = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$|A_n| = \frac{\left|\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$$

La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 par hypothèse. De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} |b_k - b_{k-1}| &= \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k - \lambda_{k-1}| = \sum_{k=0}^{n} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) \qquad \text{(car } (\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante)}\\ &= \lambda_0 - \lambda_n \longrightarrow_{n\to+\infty} \lambda_0\end{aligned}$$

Les trois hypothèse du théorème d'Abel étant vérifiées, on en déduit que la série $\sum \lambda_n e^{in\theta}$ converge.

Remarque. Le choix $\theta = \pi$ donne la convergence de la série $\sum (-1)^n \lambda_n$. L'exemple précédant est donc une généralisation du critère des séries alternées.

Application 23. La série $\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{\log n}$ converge si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

En effet, en posant $\lambda_n = \frac{1}{\log n}$, la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers 0. L'exemple 22 implique alors que la série $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{\log n}$ converge. Ainsi, les série $\operatorname{Re}\left(\sum \dfrac{e^{in\theta}}{\log n}\right)$ et $\operatorname{Im}\left(\sum \dfrac{e^{in\theta}}{\log n}\right)$ convergent donc également, ce qui montre que les séries $\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{\log n}$ et $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{\log n}$ convergent.

• Critère de d'Alembert

Théorème 24. *Soit $\sum u_n$ une série à* ***termes strictement positif*** *: pour tout entier n, $u_n > 0$.*

- *Si $\limsup \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\liminf \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.*

Démonstration. Supposons dans un premier temps $\limsup \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $\limsup \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda < 1$. Posons $v_n = \sup\left\{\dfrac{u_{k+1}}{u_k} \ : \ k \geq n\right\}$. Posons $\varepsilon = \dfrac{\lambda - \limsup \frac{u_{n+1}}{u_n}}{2} > 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers $\limsup \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda$:

$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq N \qquad v_n < \lambda$$

Ainsi $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} < \lambda$ pour $k \in [\![N, n]\!]$. Les termes intervenant dans ces inégalités étant strictement positifs, les inégalités peuvent être multipliées entre elles.

$$\frac{u_{n+1}}{u_N} = \prod_{k=N}^{n} \frac{u_{k+1}}{u_k} < \lambda^{n-N+1}$$

Cette inégalité implique

$$\forall n \geq N \qquad u_n < \frac{u_N}{\lambda^{N-1}} \lambda^n$$

Comme $\lambda < 1$, la série $\sum \lambda^n$ converge, convergence qui implique la convergence de la série $\sum u_n$.
Intéressons-nous désormais au cas où $\liminf \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \qquad \liminf u_n > \lambda > 1$$

Comme précédemment, on montre

$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq N \qquad u_n > \frac{u_N}{\lambda^{N-1}} \lambda^n$$

La divergence grossière de la série $\sum \lambda^n$ (pour $\lambda > 1$) implique alors la divergence grossière de la série $\sum u_n$. □

Exemple 25. La série $\sum \dfrac{1}{n!}$ converge. En effet, en posant $u_n = \frac{1}{n!}$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{n+1} \longrightarrow 0$.

• Critère de Cauchy

Théorème 26. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à termes positifs :* $u_n \geq 0$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.
- *Si* $\limsup \sqrt[n]{u_n} < 1$, *alors* $\sum u_n$ *converge.*
- *Si* $\limsup \sqrt[n]{u_n} > 1$, *alors* $\sum u_n$ *diverge grossièrement.*

Démonstration. Supposons dans un premier temps $\limsup \sqrt[n]{u_n} < 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $\limsup \sqrt[n]{u_n} < \lambda < 1$.

$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq N \qquad \sqrt[n]{u_n} < \lambda$$

En particulier,

$$\forall n \geq N \qquad u_n < \lambda^n$$

Comme $\lambda < 1$, la série $\sum \lambda^n$ converge, tout comme la série $\sum u_n$ en utilisant le critère de comparaison des séries à termes positifs.
Supposons désormais $\limsup \sqrt[n]{u_n} > 1$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $\limsup \sqrt[n]{u_n} > \lambda > 1$. Définissons $\varphi(-1) = -1$. Pour chaque entier n, il existe un entier $\varphi(n) > \varphi(n-1)$ tel que $\sqrt[\varphi(n)]{u_{\varphi(n)}} > \lambda$, autrement dit $u_{\varphi(n)} > \lambda^{\varphi(n)} \geq \lambda^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ceci permet de construire une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0. □

Exemple 27. Intéressons-nous à la série $\sum \left(\cos \frac{1}{2n}\right)^{n^3+2n^2}$. On a

$$\sqrt[n]{\left(\cos \frac{1}{2n}\right)^{n^3+2n^2}} = \exp\left(\frac{(n^3+2n^2)}{n} \log\left(\cos \frac{1}{2n}\right)\right)$$

Lorsque $n \to +\infty$, on a $\frac{1}{2n} \to 0$. Le développement limité à l'ordre 2 de cos en 0 nous donne l'équivalent suivant.

$$\cos\left(\frac{1}{2n}\right) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\log\left(\cos\left(\frac{1}{2n}\right)\right) = -\frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$(n^2+2n)\log\left(\cos \frac{1}{2n}\right) = -\frac{1}{8} + o(1)$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{\left(\cos \frac{1}{2n}\right)^{n^3+2n^2}}\right) = e^{-\frac{1}{8}} < 1$$

Le critère de Cauchy implique donc que la série $\sum \left(\cos \frac{1}{2n}\right)^{n^3+2n^2}$ converge.

• Produit au sens de Cauchy

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries complexes. Il faut donner un sens à la série produit $\sum c_n = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$. Une idée retenue par Cauchy consiste à regarder le cas particulier où $a_n = \alpha_n X^n$, $b_n = \beta_n X^n$ et $c_n = \gamma_n X^n$, où $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $\beta_n \in \mathbb{C}$ et $\gamma_n \in \mathbb{C}$. Le coefficient γ_n est alors la somme des produits $\alpha_k\beta_{n-k}$, où $0 \leq k \leq n$. Il s'agit de la définition que nous retiendrons pour définir la série produit.

Définition 28. On appelle **produit au sens de Cauchy** des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ la série $\sum c_n$, où

$$c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

On note $\sum c_n = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$.

Exemple 29. Posons $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Le critère des séries alternées montre que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent. Cependant

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

Or pour $0 \leq k \leq n$, on a $0 < k+1 \leq n+1$ et $0 < n-k+1 \leq n+1$, donc $0 < \sqrt{(k+1)(n-k+1)} \leq n+1$. Ainsi,

$$|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1$$

La suite c_n ne tendant pas vers 0, la série produit $\sum c_n$ diverge grossièrement.

THÉORÈME 30. *Soient* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *deux séries. Soit* $\sum c_n = \left(\sum a_n\right)\left(\sum b_n\right)$ *le produit au sens de Cauchy des séries* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$.
Si les séries $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ ***convergent absolument****, alors la série* $\sum c_n$ *converge.*

DÉMONSTRATION. **Cas 1** : supposons $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$. Posons $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ et $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $C_n \leq A_nB_n \leq C_{2n}$. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A_nB_n = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_kb_j$$

$$C_n = \sum_{k+j\leq n} a_kb_j \leq A_nB_n$$

$$C_{2n} = \sum_{k+j\leq 2n} a_kb_j \geq A_nB_n$$

les inégalités découlent du fait que tous les termes sont positifs. Les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes et convergentes par hypothèse. Notons $\alpha = \lim_{n\to+\infty} A_n$ et $\beta = \lim_{n\to+\infty} B_n$. L'encadrement $C_n \leq A_nB_n$ implique alors $C_n \leq \alpha\beta$. La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et majorée, elle converge. L'inégalité $C_{2n} \geq A_nB_n$ implique $\lim_{n\to+\infty} C_n \geq \alpha\beta$, inégalité qui montre $\lim_{n\to+\infty} C_n = \alpha\beta$.

Cas général : Posons $\widetilde{a}_n = |a_n|$, $\widetilde{b}_n = |b_n|$ et $\widetilde{c}_n = |c_n|$. Définissons également $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$, $\widetilde{A}_n = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{a}_k$, $\widetilde{B}_n = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{b}_k$ et $\widetilde{C}_n = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{c}_k$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|C_n - A_nB_n| = \left|\sum_{\substack{0\leq k,j\leq n\\ k+j>n}} a_kb_j\right| \leq \sum_{\substack{0\leq k,j\leq n\\ k+j>n}} \widetilde{a}_k\widetilde{b}_j = \widetilde{A}_n\widetilde{B}_n - \widetilde{C}_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

d'après le cas 1, limite qui termine la démonstration. □

III. Suites et séries de fonctions

Notons $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou bien le corps $\mathbb{C}$. Soit X un ensemble (on peut penser à $X \subseteq \mathbb{R}$ ou $X \subseteq \mathbb{C}$). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur X. Rappelons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la donnée, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, d'une fonction $f_n : X \to \mathbb{K}$. Rappelons également que l'on dispose de la norme infinie sur l'ensemble des fonctions bornées sur X, notion que l'on peut étendre aux fonctions non bornées en étendant la définition de la manière suivante.

DÉFINITION 31. Soit $f : X \to \mathbb{K}$. La norme infinie de f est

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{X,\infty} = \sup_{t\in X} |f(t)| \in \overline{\mathbb{R}}$$

EXEMPLE 32. Prenons $X = [0;1]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons $f_n : X \to \mathbb{R}$ en posant $f_n(t) = t^n$. Lorsque $0 \leq t < 1$, on a $f_n(t) = t^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Si $t = 1$, alors $f_n(t) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 & \text{si } t = 1 \end{cases} \end{array}$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X. En effet, pour $t < 1$, on a $f_n(t) - f(t) = t^n$ qui tend vers 1 lorsque $t \longrightarrow 1^-$. Ainsi $\|f_n - f\|_\infty = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty \neq 0$.

PROPOSITION 33. *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f*, alors* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* f.

DÉMONSTRATION. Il suffit de remarquer que, pour tout $t \in X$, on a $|f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\|_\infty$. □

THÉORÈME 34 (CRITÈRE DE CAUCHY UNIFORME). *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément si, et seulement si,*

$$\forall\varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq N \qquad \forall p \geq 0 \qquad \|f_{n+p} - f_n\|_\infty < \varepsilon$$

THÉORÈME 35. $X \subseteq \mathbb{C}$. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction* f.
Si chaque fonction f_n *est continue (où* $n \in \mathbb{N}$*), alors la fonction* f *est continue.*

Théorème 36. $X = [a,b]$. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur* X *vers une fonction* f.
Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x$.

Exemple 37. $X = \mathbb{R}$; $f_n(t) = \dfrac{1}{n}\sin(nt)$. Alors

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{n}\sin(nt)\right\| = \frac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément vers la fonction nulle f définie par $f(t) = 0$ pour $t \in \mathbb{R}$. Cependant, $f'_n(t) = \cos(nt)$ ne converge pas simplement. Il faut donc faire attention avec la dérivation.

Théorème 38. *Soit* $X = I$ *un intervalle. Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions dérivables sur* I. *Supposons que*
- *il existe* $a \in I$ *pour lequel la suite numérique* $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ;*
- *la suite* $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers une fonction* g.

Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur tout segment inclus dans* I *vers une fonction* f. *De plus, cette fonction* f *est dérivable sur* I *et vérifie* $f' = g$.

Démonstration. • Soit $\varepsilon > 0$. Le critère de Cauchy appliqué à la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et à ε donne l'existence d'un entier N_1 vérifiant :

$$\forall n \geq N_1 \qquad \forall p \geq 0 \qquad \|f'_{n+p} - f'_n\|_\infty < \varepsilon$$

Pour $n \geq N_1$ et $p \geq 0$, l'inégalité des accroissements finis appliqué à la fonction $f_{n+p} - f_n$ montre

$$\forall t_0 \in I \qquad \forall t \in I \qquad |f_{n+p}(t) - f_n(t) - (f_{n+p}(t_0) - f_n(t_0))| \leq |t - t_0|\|f'_{n+p} - f'_n\|_\infty$$

Ainsi, pour $t_0 = a$ et $n \geq N_1$, l'inégalité triangulaire implique

$$|f_{n+p}(t) - f_n(t)| \leq |t - a|\varepsilon + |f_{n+p}(a) - f_n(a)|$$

La suite numérique $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, le critère de Cauchy donne l'existence d'un entier $N_2 \geq N_1$ vérifiant

$$\forall n \geq N_2 \qquad \forall p \geq 0 \qquad |f_{n+p}(a) - f_n(a)| < \varepsilon$$

Soit $S = [\alpha,\beta] \subseteq I$ un segment. Posons $\delta = \sup(|a-\alpha|, |a-\beta|)$. Pour $n \geq N_2$, on a alors

$$\forall p \geq 0 \qquad \forall t \in S \qquad |f_{n+p}(t) - f_n(t)| \leq \varepsilon(1+\delta)$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait donc le critère de Cauchy uniforme sur le segment S. Cette suite converge donc uniformément sur le segment S. Chaque réel de I étant contenu dans un segment $S \subseteq I$, la conclusion précédente montre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction que l'on notera f.
• Montrons désormais que f est dérivable sur I. Soit $t_0 \in I$ et montrons que f est dérivable en t_0. Rappelons

$$\forall n \geq N_1 \qquad \forall p \geq 0 \qquad \forall t \in I \qquad |f_{n+p}(t) - f_n(t) - (f_{n+p}(t_0) - f_n(t_0))| \leq \varepsilon|t - t_0|$$

Faire tendre $p \longrightarrow +\infty$ dans l'inégalité ci-dessus montre

$$\forall n \geq N_1 \qquad \forall t \in I \qquad |f(t) - f_n(t) - (f(t_0) - f_n(t_0))| \leq \varepsilon|t - t_0|$$

En gardant à l'esprit que la dérivée de f devrait être g, l'idée consiste à majorer astucieusement la quantité suivante.

$$\begin{aligned}|f(t) - f(t_0) - g(t_0)(t-t_0)| &= |(f(t) - f(t_0)) - (f_n(t) - f_n(t_0)) + (f_n(t) - f_n(t_0)) \\ &\quad - f'_n(t_0)(t-t_0) + f'_n(t_0)(t-t_0) - g(t_0)(t-t_0)| \\ &\leq |(f(t) - f(t_0)) - (f_n(t) - f_n(t_0))| \\ &\quad + |(f_n(t) - f_n(t_0)) - f'_n(t_0)(t-t_0)| \\ &\quad + |f'_n(t_0) - g(t_0)||t - t_0|\end{aligned} \tag{1}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Nous allons majorer chacune des trois quantités précédentes par $\varepsilon(t - t_0)$, majoration qui implique que la dérivée de f en t_0 vaut $g(t_0)$ (pour quelle raison ?). L'entier N_1 introduit précédemment vérifie alors

$$\forall n \geq N_1 \qquad \forall t \in I \qquad |(f(t) - f(t_0)) - (f_n(t) - f_n(t_0))| < \varepsilon|t - t_0|$$

Or $f'_n(t_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(t_0)$, donc

$$\exists N_3 \geq N_1 \qquad \forall n \geq N_3 \qquad |f'_n(t_0) - g(t_0)||t - t_0| < \varepsilon|t - t_0|$$

Finalement, pour $n = N_3$, f_{N_3} est dérivable en t_0. Ainsi,

$$\exists \eta > 0 \qquad \forall t \in I \qquad \Big(|t - t_0| < \eta \quad\Longrightarrow\quad |(f_n(t) - f_n(t_0)) - f'_n(t_0)(t - t_0)| < \varepsilon|t - t_0|\Big)$$

Ainsi, en reprenant l'inégalité (1) appliquée à l'entier N_3, nous obtenons

$$|f(t) - f(t_0) - g(t_0)(t - t_0)| < 3\varepsilon|t - t_0|$$

inégalité qui montre que f est dérivable en t_0 et $f'(t_0) = g(t_0)$. □

DÉFINITION 39. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications, $f_n : X \to \mathbb{K}$. Soit $\sum f_n$ la série de fonctions associée. On dit que la série $\sum f_n$ **converge normalement** (notation CVN) si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge.

THÉORÈME 40.

$$\sum f_n \ \ \mathit{CVN} \quad \Longrightarrow \quad \sum f_n \ \ \mathit{CVU} \quad \Longrightarrow \quad \sum f_n \ \ \mathit{CVS}$$

DÉMONSTRATION. Supposons que $\sum f_n$ CVN et utilisons le critère de Cauchy uniforme sur la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N > 0 \qquad \forall n \geq N \qquad \forall p \geq 0 \qquad \sum_{k=n}^{n+p} \|f_k\|_\infty < \varepsilon$$

L'inégalité $\left\| \sum_{k=n}^{n+p} f_k \right\|_\infty \leq \sum_{k=n}^{n+p} \|f_k\|_\infty$ implique alors que la série de fonctions $\sum f_n$ satisfait également le critère de Cauchy uniforme. Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU. La deuxième implication est laissée en exercice. □

Chapitre 1

Séries entières complexes

I. Lemme d'Abel

Les applications sont définies sur un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

Définition 41. On appelle **série entière** toute série de fonctions monomiales $\sum a_n z^n$, où $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et où z est une variable complexe.

Proposition 42 (Lemme d'Abel). *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ pour lequel la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors pour tout $z_1 \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z_1| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z_1^n$ converge absolument (CVA).*
En conséquence de quoi, $\{r \geq 0 \ : \ (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est borné}\}$ est un intervalle de la forme $[0, \alpha]$ ou $[0, \alpha[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Dans ces conditions,

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad |z| < \alpha \implies \sum a_n z^n \quad \textit{CVA}$$
$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad |z| > \alpha \implies \sum a_n z^n \quad \textit{diverge grossièrement}$$

Définition 43. L'élément $\alpha \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ s'appelle le **rayon de convergence** de la série $\sum a_n z^n$. Si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, le disque $\mathscr{D}(0, \alpha)$ s'appelle le **disque de convergence** de la série $\sum a_n z^n$.

Démonstration. Soit $M > 0$ tel que $|a_n z_0^n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $|z_1| < |z_0|$. On a alors $\left|\dfrac{z_1}{z_0}\right| < 1$ et $|a_n z_1^n| = |a_n z_0^n| \left|\dfrac{z_1}{z_0}\right|^n \leq M \left|\dfrac{z_1}{z_0}\right|^n$. La série $\sum \left|\dfrac{z_1}{z_0}\right|^n$ est convergente, donc la série $\sum |a_n z_1^n|$ est également convergente, ce qui montre la première partie du Lemme d'Abel.
Notons $I = \{r \geq 0 \ : \ (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est borné}\}$. Remarquons que $0 \in I$, de sorte que $I \neq \emptyset$. Soit $r \in I$. Si $0 \leq r' < r$, on applique le résultat de la première partie (avec $z_0 = r'$) pour en déduire que la série $\sum |a_n r'^n|$ converge. Cette dernière série étant convergente, on a $|a_n r'^n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En particulier la suite $(|a_n r'^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $r' \in I$. Ainsi, I est un intervalle de la forme $[0, \alpha]$ ou $[0, \alpha[$ avec $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$.
Supposons désormais que $\alpha \in \mathbb{R}$ et que $|z| > \alpha$. Alors $|z| \notin I$ et la suite $(|a_n z^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée. Ainsi, $|a_n z^n| \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
Supposons finalement que $|z| < \alpha$.

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \qquad |z| < \lambda < \alpha$$

L'ensemble I étant un intervalle, on a $\lambda \in I$. Ainsi $(|a_n \lambda^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Comme $|z| < \lambda$, on en déduit $\sum a_n z^n$ CVA, ce qui termine la démonstration. □

Remarque 44. On ne peut a priori rien dire quant à la convergence sur le cercle $\{|z| = \alpha\}$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Exemple 45. Intéressons-nous à la série $\sum \frac{z^n}{n}$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Si $|z_0| > 1$, alors $\left|\dfrac{z_0^n}{n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Le rayon de convergence R de la série vérifie donc $R \leq 1$. Si $|z_0| < 1$, alors $\left(\left|\dfrac{z_0^n}{n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Ainsi, $R \geq 1$.
On en déduit donc $R = 1$. Étudions la nature de la série sur le cercle de convergence. Soit $z_0 \in \mathscr{S}(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$. Si $z_0 = 1$, alors la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge. Si $z_0 \neq 1$, alors $z_0 = e^{in\theta}$ où $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. L'exemple 22 utilisant le théorème d'Abel (théorème 21) implique alors que la série $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n}$ converge.

Remarque 46. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont le même rayon de convergence.

II. Détermination pratique du rayon de convergence

Théorème 47 (Hadamard). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors*

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

(en utilisant la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

DÉMONSTRATION. Soit $z_0 \in \mathbb{C}^\times$. D'après le critère de Cauchy,

$$\begin{array}{lcl} \limsup \sqrt[n]{|a_n z_0^n|} < 1 & \Longrightarrow & \sum a_n z_0^n \quad \text{CV} \\ \limsup \sqrt[n]{|a_n z_0^n|} > 1 & \Longrightarrow & \sum a_n z_0^n \quad \text{DV grossièrement} \end{array}$$

Or $\sqrt[n]{|a_n z_0^n|} = |z_0| \sqrt[n]{|a_n|}$ et z_0 est fixé. Les implications précédentes se récrivent donc

$$\begin{array}{lcl} |z_0| < \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} & \Longrightarrow & \sum a_n z_0^n \quad \text{CV} \\ |z_0| > \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} & \Longrightarrow & \sum a_n z_0^n \quad \text{DV grossièrement} \end{array}$$

L'égalité $R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ découle alors de ces implications. □

THÉORÈME 48. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n \neq 0$. Alors*

$$R = \frac{1}{\limsup \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'utiliser le critère de d'Alembert. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Le critère de d'Alembert appliqué à la série numérique $\sum |a_n z_0^n|$ donne

$$\begin{array}{lcl} \limsup \dfrac{|a_{n+1} z_0^{n+1}|}{|a_n z_0^n|} < 1 & \Longrightarrow & \sum a_n z_0^n \quad \text{CVA} \\ \limsup \dfrac{|a_{n+1} z_0^{n+1}|}{|a_n z_0^n|} > 1 & \Longrightarrow & \sum a_n z_0^n \quad \text{DV grossièrement} \end{array}$$

Le complexe z_0 étant fixé, on a $\limsup \left(\dfrac{|a_{n+1} z_0^{n+1}|}{|a_n z_0^n|} \right) = |z_0| \limsup \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. On en déduit

$$\begin{array}{lcl} |z_0| < \dfrac{1}{\limsup \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} & \Longrightarrow & \sum a_n z_0^n \quad \text{CVA} \\ |z_0| > \dfrac{1}{\limsup \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} & \Longrightarrow & \sum a_n z_0^n \quad \text{DV grossièrement} \end{array}$$

Ces dernières implications terminent la démonstration. □

EXERCICE 49. Déterminer le rayon de convergence R pour les séries suivantes.

1. $\sum \dfrac{z^n}{n!}$
2. $\sum n! z^n$
3. $\sum \left(\cos \dfrac{1}{n} \right)^{\frac{n^2+2}{n+2}}$

III. Analycité

NOTATION. Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et pour $r \in \mathbb{R}_+^\times$, on note $\mathscr{B}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0| < r\} = \mathscr{D}(z_0, r)$ la boule centrée en z_0 et de rayon r.

THÉORÈME 50. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$. Pour $z \in \mathscr{D}(0, R)$, notons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Alors f est continue sur $\mathscr{D}(0, R)$.*

Démonstration. Soit $K \subset \mathscr{D}(0,R)$ un compact. La série $\sum a_n z^n$ CVU sur K. Pour $n \in \mathbb{N}$, l'application $z \mapsto a_n z^n$ est continue. Ainsi, f est continue sur K.
Soit $z_0 \in \mathscr{D}(0,R)$. Posons $\varepsilon = \dfrac{R-|z_0|}{2}$, de telle sorte que le compact $K = \overline{\mathscr{B}(z_0,\varepsilon)}$ soit inclus dans $\mathscr{B}(0,R)$. Le raisonnement précédent implique alors que f est bien continue en z_0, ce qui termine la démonstration. □

Définition 51. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \Omega$. On dit que f est **holomorphe** en z_0 si

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \qquad \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lambda$$

On note alors $f'(z_0) = \lambda$. On dit également que f est **dérivable au sens complexe**.
Si f est holomorphe en tout point de Ω, on dit que f est **holomorphe sur Ω**. Dans ces conditions, l'application définie sur Ω par $z \mapsto f'(z)$ est appelée la **dérivée** de f.

Lemme 52. *Soit $\sum a_n z_n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors la série $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ (appelée **série dérivée**) a pour rayon de convergence R.*

Démonstration. Notons R' le rayon de CV de la série $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$. En utilisant le critère d'Hadamard, on a

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad\qquad R' = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}}$$

Or $\sqrt[n]{n+1} = \exp\left(\frac{1}{n}\log(n+1)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc

$$\begin{aligned}
\limsup \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} &= \limsup \left(\sqrt[n]{n+1}\cdot\sqrt[n]{|a_{n+1}|}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n+1}\cdot \limsup \sqrt[n]{|a_{n+1}|} \qquad \text{(d'après le théorème 10)} \\
&= \limsup \sqrt[n]{|a_{n+1}|}
\end{aligned}$$

Le lemme 11 donne alors l'égalité des deux rayons de convergence. □

Théorème 53. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Pour $z \in \mathscr{B}(0,r)$ notons $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Alors f est holomorphe sur $\mathscr{B}(0,R)$. De plus,*

$$\forall z \in \mathscr{B}(0,R) \qquad f'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}z^n$$

Démonstration. Considérons la série entière de la variable réelle $\sigma(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|t^n$. Cette série a pour rayon R. Appliquons le théorème 38 de dérivation des séries de la variable réelle : la fonction σ est dérivable sur $]-R,R[$ de dérivée

$$\sigma'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)|a_{n+1}|t^n$$

Soit $z_0 \in \mathscr{B}(0,R)$. Pour $z \in \mathscr{B}(0,R)$, on a

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}z_0^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \left(\frac{z^n-z_0^n}{z-z_0} - n z_0^{n-1}\right)$$

Or, en posant $z = z_0 + h$, pour $n \geq 2$ on a

$$\frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} = \frac{(z_0+h)^n - z_0^n}{(z_0+h)-z_0} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k z_0^{n-k}}{h} - \frac{z_0^n}{h} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h^{k-1}z_0^{n-k}$$

D'où

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - nz_0^{n-1} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^{k-1} z_0^{n-k}$$

$$\left|\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} - nz_0^{n-1}\right| \leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |h|^{k-1} |z_0|^{n-k} = \frac{(|z_0| + |h|)^n - |z_0|^n}{|h|} - n|z_0|^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z_0^n\right| &\leq \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \left(\frac{(|z_0| + |h|)^n - |z_0|^n}{|h|} - n|z_0|^{n-1}\right) \\ &= \frac{\sigma(|z_0| + |h|) - \sigma(|z_0|)}{|h|} - \sigma'(|z_0|)\end{aligned}$$

Faire $z \to z_0$ revient, par définition à faire $|h| \to 0$. Ainsi,

$$\frac{\sigma(|z_0| + |h|) - \sigma(|z_0|)}{|h|} - \sigma'(|z_0|) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

limite qui montre que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z_0^n$$

d'où la conclusion recherchée. □

Corollaire 54. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon* $R > 0$ *et de somme* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. *Alors* f *est indéfiniment dérivable au sens complexe sur* $\mathscr{B}(0, R)$. *De plus,*

$$\forall p \geq 0 \qquad \forall z \in \mathscr{B}(0, R) \qquad f^{(p)}(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(m+p)!}{m!} a_{m+p} z^m = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n z^{n-p}$$

Démonstration. Exercice. □

Corollaire 55. *En gardant les même hypothèses que ci-dessus, pour tout* $p \geq 0$, *on a* $a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$. *Ainsi on obtient le développement de Taylor*

$$\forall z \in \mathscr{B}(0, R) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Démonstration. Exercice. □

IV. Les zéros isolés

Théorème 56. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon* $R > 0$. *Notons* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. *Supposons qu'il existe* $n \geq 0$ *tel que* $a_n \neq 0$. *Alors*

$$\exists 0 < \rho < R \qquad \forall z \in B(0, \rho) \setminus \{0\} \qquad f(z) \neq 0$$

Démonstration. Notons $n_0 = \inf\{n \in \mathbb{N} \ : \ a_n \neq 0\}$ (n_0 s'appelle la valuation de f en 0). On a

$$f(z) = a_{n_0} z^{n_0} + a_{n_0+1} z^{n_0+1} + \cdots = a_{n_0} z^{n_0} \left(1 + \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} z + \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0}} z^2 + \ldots\right)$$

Posons g la série entière $g(z) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0}} z^k$. La série entière g a également pour rayon de convergence R (cela se voit en utilisant par exemple le critère d'Hadamard). Le théorème 50 montre que g est continue sur $\mathscr{B}(0, R)$. Ainsi, $\lim_{z \to 0} g(z) = g(0) = 1$. Choisissons $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et appliquons le critère de continuité à g en 0.

$$\exists \rho > 0 \qquad \forall z \in \mathscr{B}(0, R) \qquad \left(|z| < \rho \quad \Longrightarrow \quad |g(z) - g(0)| < \frac{1}{2}\right)$$

En fixant $\rho > 0$ comme ci-dessus,

$$\forall z \in \mathscr{B}(0, \rho) \qquad |g(0)| - |g(z)| \leq |g(z) - g(0)| < \frac{1}{2}$$

$$\forall z \in \mathscr{B}(0, \rho) \qquad |g(z)| > \frac{1}{2}$$

La fonction g ne s'annule donc pas sur $\mathscr{B}(0,\rho)$. De plus, la fonction $z \mapsto a_{n_0} z^{n_0}$ ne s'annule pas sur $\mathscr{B}(0,\rho) \smallsetminus \{0\}$. La fonction f ne s'annule donc pas sur $\mathscr{B}(0,\rho) \smallsetminus \{0\}$. □

Rappel 57. Soit $A \subseteq \mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On dit que z_0 est un point d'accumulation de la partie A s'il vérifie l'une des trois propriétés équivalentes suivantes (exercice).

(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, $A \cap \mathscr{B}(z_0, \varepsilon)$ contient au moins 2 éléments ;
(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, $A \cap \mathscr{B}(z_0, \varepsilon)$ contient une infinité d'éléments ;
(iii) Il existe une suite injective $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = z_0$.

Corollaire 58. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon* $R > 0$ *et de somme* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. *Soit* $\Gamma \subseteq \mathscr{B}(0,R)$ *tel que* $f|_\Gamma \equiv 0$. *Si* 0 *est point d'accumulation de* Γ, *alors* $a_n = 0$ *pour tout entier* n.

Démonstration. Il s'agit de la contraposée du théorème 56 □

Corollaire 59. *Soient* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergence respectifs* $R_1 > 0$ *et* $R_2 > 0$ *et de somme* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *et* $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$. *Posons* $R = \min(R_1, R_2)$. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\forall z \in \mathscr{B}(0,R) \qquad f(z) = g(z)$
(ii) $\exists 0 < \rho < R \qquad \forall z \in \mathscr{B}(0,\rho) \qquad f(z) = g(z)$
(iii) Il existe une suite injective $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathscr{B}(0,R)$ *convergeant vers* 0 *telle que* $f(z_p) = g(z_p)$.
(iv) $\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = b_n$
(v) $f = g$

En particulier, une série entière possède un ***unique*** *développement en série entière : son développement de Taylor.*

Démonstration. Notons $h(z) = f(z) - g(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n) z^n$, de rayon $\geq R$. Notons $\mathscr{Z} = \{z \in \mathscr{B}(0,R) \ : \ h(z) = 0\}$. En appliquant de théorème 56 à la fonction h, les implications (iv) $\Longrightarrow$ (v) $\Longrightarrow$ (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) sont évidentes.
Montrons donc (iii) $\Longrightarrow$ (iv). 0 est alors un point d'accumulation de $\mathscr{Z}$. D'après le corollaire 58, on a $a_n - b_n = 0$ pour tout $n \geq 0$, d'où le point (iv). □

V. Inégalités de Cauchy

Rappel 60. Notons $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions 2π-périodiques de carré intégrable (sur un intervalle de longueur 2π ; modulo les fonctions nulles presque partout). La forme

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$$

définit sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ une forme hermitienne définie positive. La norme associée est

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t}$$

La famille des fonctions $e_n : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{int}$ (où $n \in \mathbb{Z}$) forme une base hilbertienne de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Par conséquent, si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, les coefficients de f dans cette base hilbertienne sont

$$c_n(f) = \langle f, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\mathrm{d}t$$

et l'on retrouve la décomposition de f sous forme de série de Fourier

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) e_n$$

ainsi que l'égalité de Parseval

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

Considérons désormais une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon $R > 0$ et de somme $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Soit $0 < \rho < R$. La restriction de S à un cercle centré en 0 et de rayon ρ est une fonction périodique. Définissons donc

$$\begin{array}{rccc} s: & \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & S(\rho e^{it}) \end{array}$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, le n-ème coefficient de Fourier de s est

$$c_n(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S(\rho e^{it}) e^{-int} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_m \rho^m e^{imt} \right) e^{-int} \mathrm{d}t$$

Or la série $\sum a_n z^n$ converge normalement, donc uniformément sur le cercle $\mathscr{S}(0, \rho) = \{|z| = \rho\}$. Les signes somme et intégrale peuvent donc être intervertis.

$$c_n(s) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{a_m \rho^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} \mathrm{d}t$$

Calculons

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)t} \mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi & \text{, si } m = n \\ \left[\dfrac{e^{i(m-n)t}}{i(m-n)} \right]_0^{2\pi} = 0 & \text{, si } m \neq n \end{cases}$$

On en déduit

$$c_n(s) = a_n \rho^n$$

Proposition 61. *Soit $\sum a_n z^m$ une série entière de rayon $R > 0$ et de somme $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Alors*

$$\forall 0 < \rho < R \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \rho^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| S(\rho e^{it}) \right|^2 \mathrm{d}t$$

Démonstration. En utilisant les calculs précédant l'énoncé de la proposition, l'égalité à montrer découle directement de l'égalité de Parseval. □

Corollaire 62 (Inégalité de Cauchy). *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et de somme $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Pour $\rho \in]0, R[$, notons $M(\rho) = \sup_{|z|<\rho} |S(z)|$. Alors*

$$\forall \rho \in]0, R[\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}$$

Démonstration. En utilisant l'égalité de Parseval,

$$|a_n|^2 \rho^{2n} \leq \sum_{m=0}^{+\infty} |a_m|^2 \rho^{2m} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| S(\rho e^{int}) \right|^2 \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(\rho)^2 \mathrm{d}t = M(\rho)^2$$

Toutes les quantités considérées étant positives, l'inégalité à démontrer s'obtient en prenant la racine carré de l'inégalité précédente. □

Application 63. Théorème de Liouville

Définition 64. On appelle **fonction entière** toute série entière de rayon de convergence égal à $+\infty$.

Théorème 65 (Théorème de Liouville). *Toute fonction entière et bornée est constante.*

Démonstration. Soit f une fonction entière et bornée. Écrivons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. L'hypothèse faite sur f implique l'existence d'un réel positif M vérifiant $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. D'après l'inégalité de Cauchy,

$$\forall \rho \in]0, +\infty[\qquad |a_n| \leq \frac{M}{\rho^n}$$

Ainsi, $a_n = 0$ dès que $n \geq 1$, ce qui montre que $f(z) = a_0$ est constante. □

VI. Opérations algébriques sur les séries entières

THÉORÈME 66. *Soit $\sum a_n z^n$ (resp. $\sum b_n z^n$) une série entière de rayon $R_1 > 0$ (resp. $R_2 > 0$) et de somme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ $\left(\text{resp. } g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Alors*

1. *la série entière $\sum \lambda a_n z^n$ a pour rayon de convergence R_1 et*
$$\forall z \in \mathscr{B}(0, R_1) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda a_n z^n = \lambda f(z)$$
2. *la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2)$ et*
$$\forall z \in \mathscr{B}(0, \min(R_1, R_2)) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = f(z) + g(z)$$
Si de plus, on a $R_1 \neq R_2$, alors $R = \min(R_1, R_2)$.
3. *pour $n \in \mathbb{N}$, définissons $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$; la série entière $\sum c_n z^n$ a un rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2)$ et*
$$\forall z \in \mathscr{B}(0, \min(R_1, R_2)) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = f(z) g(z)$$

DÉMONSTRATION.
1. Remarquons que $|\lambda a_n z_0^n| = |\lambda|\, |a_n z_0^n|$. Ainsi, la suite $(\lambda a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée à la condition nécessaire et suffisante que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée.
2. Si $|z_0| < \min(R_1, R_2)$, alors les séries numériques $\sum a_n z_0^n$ et $\sum b_n z_0^n$ convergent. Ainsi, la série numérique $\sum (a_n + b_n) z_0^n$ converge également, d'où l'inégalité $R \geq \min(R_1, R_2)$.
Supposons désormais $R_1 \neq R_2$. Quitte à échanger f et g, on peut supposer $R_1 < R_2$. Soit z_0 vérifiant $R_1 < z_0 < R_2$. Alors $\sum a_n z_0^n$ diverge grossièrement tandis que $\sum b_n z_0^n$ diverge. On en déduit que $\sum (a_n + b_n) z_0^n$ diverge grossièrement, c'est-à-dire $R \leq R_1$ et par suite $R = R_1$.
3. Soit $|z_0| < \min(R_1, R_2)$. Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent normalement sur $\overline{\mathscr{B}(0, |z_0|)}$. Ainsi, les série $\sum a_n z_0^n$ et $\sum b_n z_0^n$ convergent absolument. Le théorème 30 donne alors la convergence de la série $\sum c_n z_0^n$ vers $f(z_0) g(z_0)$.

□

REMARQUE. En ce qui concerne la somme de séries entières, lorsque $R_1 = R_2$, on ne peut rien dire quant au rayon de convergence. Par exemple, les séries $\sum \frac{z^n}{n}$ et $\sum \frac{-z^n}{n}$ ont toutes deux pour rayon de convergence 1 tandis que leur somme $\sum 0 \cdot z^n$ a pour rayon de convergence $R = +\infty$.

THÉORÈME 67 (THÉORÈME DE SUBSTITUTION). *Soit $\sum a_n z^n$ (resp. $\sum b_n z^n$) une série entière de rayon $R_1 > 0$ (resp. $R_2 > 0$) et de somme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ $\left(\text{resp. } g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$. Supposons que $f(0) = 0$. La fonction f étant continue en 0, choisissons $R_3 > 0$ tel que $R_3 \leq R_1$ et que*
$$\forall z \in \mathscr{B}(0, R_3) \qquad |f(z)| < \frac{R_2}{2}$$
Définissons $f(z)^n = \sum_{p=n}^{+\infty} a_p^{(n)} z^p$ (produit au sens de Cauchy). Posons alors $c_0 = b_0$ et pour $p \geq 1$,
$$c_p = \sum_{n=1}^{p} b_n a_p^{(n)} = b_1 a_p^{(1)} + b_2 a_p^{(2)} + \cdots + b_p a_p^{(p)}$$
La fonction $g \circ f$ est développable en série entière de rayon $\geq R_3$ en 0 et
$$\forall z \in \mathscr{B}(0, R_3) \qquad g \circ f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p z^p = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{p} b_n a_p^{(n)} \right) z^p$$

DÉMONSTRATION. Remarquons dans un premier temps que f est continue en 0. En choisissant $\varepsilon = \frac{R_2}{2}$ et en remarquant que l'ensemble des boules ouvertes forme une base d'ouverts de la topologie de $\mathbb{C}$, on déduit

$$\exists 0 < R_3 \leq R_1 \qquad \forall z \in \mathscr{B}(0, R_3) \qquad |f(z)| < \frac{R_2}{2}$$

Pour $n \geq 0$, considérons les polynômes $h_n(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$ et $g_n(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n$. La convergence uniforme de g sur $\mathscr{B}(0, \rho)$ (pour tout $\rho < R_2$) implique $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n(f(z)) = g(f(z))$. Il suffit donc de montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} |h_n(z) - g_n(f(z))| = 0$.
Dans ce but on définit pour $k \in \mathbb{N}$, $M_{f^k}(\rho) := \sup\limits_{|z| < \rho} |f(z)|^k = M_f(\rho)^k$ (la dernière égalité découle de la croissance de l'application $x \mapsto x^k$ sur $\mathbb{R}_+$).
Pour $\sigma < R_2$ et pour $\rho < R_3$, les inégalités de Cauchy nous donnent

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall k \leq n \qquad \left(|b_n| \leq \frac{M_g(\sigma)}{\sigma^n} \quad \wedge \quad \left| a_n^{(k)} \right| \leq \frac{M_f(\rho)^k}{\rho^n} \right)$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathscr{B}(0, \rho)$,

$$g_n \circ f(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k (f(z))^k = \sum_{k=0}^{n} b_k \sum_{q=k}^{+\infty} a_q^{(k)} z^q$$

Comme $\overline{\mathscr{B}(0, \sigma)} \subseteq \mathscr{B}(0, R_2)$ et $\overline{\mathscr{B}(0, \rho)} \subseteq \mathscr{B}(0, R_3)$, toutes les séries considérées convergent uniformément. L'égalité reste donc vraie pour tout $z \in \mathscr{B}(0, \rho)$ lorsqu'on intervertit les deux signes somme.

$$\begin{aligned}
g_n \circ f(z) &= b_0 + \sum_{q=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{\min(q,n)} a_q^{(k)} b_k \right) z^q \\
&= b_0 + \sum_{q=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{q} a_q^{(k)} b_k \right) z^q + \sum_{q=n+1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_q^{(k)} b_k \right) z^q \\
&= h_n(z) + \sum_{q=n+1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_q^{(k)} b_k \right) z^q
\end{aligned}$$

Or pour $z \in \mathscr{B}(0, \rho)$, $\left| a_q^{(k)} \right| \leq \dfrac{M_f(\rho)^k}{\rho^q}$. Comme $M_f(\rho) \leq \frac{R_2}{2} < R_2$, on peut choisir σ vérifiant $M_f(\rho) < \sigma < R_2$. Dans ces conditions, pour tout $z \in \mathscr{B}(0, \rho)$

$$|g_n \circ f(z) - h_n(z)| = \left| \sum_{q=n+1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_q^{(k)} b_k \right) z^q \right|$$

On remarque alors que pour $q \geq n+1$ fixé

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{n} a_q^{(k)} b_k z^q \right| &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{M_f(\rho)^k}{\rho^q} \cdot \frac{M_g(\sigma)}{\sigma^k} |z|^q \\
&= M_g(\sigma) \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^q \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{M_f(\rho)}{\sigma} \right)^k \\
&< M_g(\sigma) \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^q \frac{1}{1 - \frac{M_f(\rho)}{\sigma}} && \left(\text{car } 0 < \frac{M_f(\rho)}{\sigma} < 1 \right)
\end{aligned}$$

En reportant dans l'égalité précédente,

$$\begin{aligned}
|g_n \circ f(z) - h_n(z)| &< \sum_{q=n+1}^{+\infty} \frac{M_g(\sigma)}{1 - \frac{M_f(\rho)}{\sigma}} \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^q \\
&= \frac{M_g(\sigma)}{1 - \frac{M_f(\rho)}{\sigma}} \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{|z|}{\rho}} && \left(\text{car } 0 < \frac{|z|}{\rho} < 1 \right) \\
&\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0
\end{aligned}$$

limite qui termine la démonstration. $\square$

VII. Remarque sur l'holomorphie

Théorème 68. *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert non vide. Soit $z_0 \in \Omega$. Soient $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ deux fonctions holomorphes en z_0. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$.*

1. *La fonction $\alpha f + g$ est holomorphe en z_0 et*
$$(\alpha f + g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + g'(z_0)$$
2. *La fonction $f \times g$ est holomorphe en z_0 et*
$$(f \times g)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$
3. *Supposons $f(z_0) \neq 0$. Alors il existe $\rho > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $\mathscr{B}(z_0, \rho)$. La fonction $\dfrac{1}{f}$ (définie au moins sur $\mathscr{B}(z_0, \rho)$) est alors holomorphe en z_0 et*
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(z_0) = -\frac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}$$

Démonstration. Les démonstrations sont identiques au cas réel. Elles sont donc laissée en exercice. Afin de donner une idée des démonstrations, nous nous intéresserons au point 2. Soit $z \in \Omega$, $z \neq z_0$. On a
$$\begin{aligned}\frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} &= \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z)}{z - z_0} + \frac{f(z_0)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0}\\ &= g(z)\underbrace{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}_{\xrightarrow[z\to z_0]{} f'(z_0)} + f(z_0)\underbrace{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}_{\xrightarrow[z\to z_0]{} g'(z_0)} \xrightarrow[z\to z_0]{} g(z_0)f'(z_0) + f(z_0)g'(z_0)\end{aligned}$$
L'égalité à démontrer est donc vraie. □

Théorème 69 (Composée de fonctions holomorphes). *Soient $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ et $\widetilde{\Omega} \subseteq \mathbb{C}$ deux ouverts non vides. Soit $z_0 \in \Omega$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction vérifiant $f(\Omega) \subseteq \widetilde{\Omega}$ et soit $g : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{C}$. Supposons également que f est holomorphe en z_0 et que g est holomorphe en $f(z_0)$.*
Alors $g \circ f$ est holomorphe en z_0 et
$$(g \circ f)'(z_0) = g' \circ f(z_0) \times f'(z_0) = g'(f(z_0)) \times f'(z_0)$$

Démonstration. La démonstration est identique au cas réel. Elle est donc laissée en exercice. □

Chapitre 2

Fonctions analytiques

I. Généralités

Définition 70. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert non vide. Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que f est **analytique** sur Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et il existe $0 < \rho < R$ tels que

$$\forall z \in \mathscr{B}(0,\rho) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

On dit également que f est **localement développable en série entière** en tout point de Ω.

Remarque 71. Dans la définition précédente, la série entière $\sum a_n z^n$ associée à f et au point z_0 est unique d'après le principe des zéros isolés.

Exemple 72. Considérons la fonction $f\colon \mathbb{C} \smallsetminus \{1\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$. Alors la fonction f est analytique sur $\mathbb{C} \smallsetminus \{1\}$. En effet, soit $z_0 \in \mathbb{C} \smallsetminus \{1\}$. On a

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{1-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{1-z_0}} \\ &= \frac{1}{1-z_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n && \text{si } |z-z_0| < |1-z_0| \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(1-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n && \text{si } z \in \mathscr{B}(z_0, |1-z_0|) \end{aligned}$$

Le développement de f en série entière en z_0 est donc valable pour tout $z_0 \in \mathbb{C} \smallsetminus \{1\}$, ce qui montre que f est bien analytique sur $\mathbb{C} \smallsetminus \{1\}$.

Théorème 73. *Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique sur Ω. Alors en tout point $z_0 \in \Omega$, f est indéfiniment dérivable au sens complexe en z_0. De plus,*

$$\forall z_0 \in \Omega \qquad \exists \rho > 0 \qquad \forall z \in \mathscr{B}(z_0,\rho) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$. Posons $g(z) = f(z+z_0)$, de sorte que l'on se ramène au voisinage de 0 :

$$z + z_0 \in \mathscr{B}(z_0,\rho) \qquad \iff \qquad z \in \mathscr{B}(0,\rho)$$

Les corollaires 55 et 59 donnent alors

$$\exists \rho > 0 \qquad \forall z \in \mathscr{B}(0,\rho) \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

Soit $h\colon z \mapsto z - z_0$. Alors h est indéfiniment dérivable et $f = g \circ h$. Comme $h'(z) = 1$, on montre par récurrence $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(0)$. Ainsi

$$\forall z \in \mathscr{B}(z_0,\rho) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

égalité qui termine la démonstration. □

Théorème 74. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et de somme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Alors f est analytique sur $\mathscr{B}(0,R)$.*

Démonstration. (à revoir). Soit $z_0 \in \mathscr{B}(0,R)$. Soit $0 < \rho < R - |z_0|$. Définissons la fonction g sur $\mathscr{B}(0,\rho)$ en posant $g(w) = z_0 + w$. Il suffit de montrer que f est développable en série entière $\sum c_n w^n$ autour de $w = 0$. Or

$$w \in \mathscr{B}(0,\rho) \qquad \Longrightarrow \qquad g(w) \in \mathscr{B}(0,R)$$

La fonction composée $f \circ g$ est donc bien définie sur $\mathscr{B}(0,\rho)$. La fonction f étant une série entière, l'égalité $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est vérifiée dès que $|z| < R$. Ainsi, en posant $z = z_0 + w$,

$$\forall w \in \mathscr{B}(0,\rho) \qquad f \circ g(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n g(w)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0 + w)^n \tag{2}$$

Intéressons-nous aux sommes partielles et définissons les fonctions

$$f_m(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n \qquad \text{et} \qquad h_m(w) = \sum_{p=0}^{m} \left(\sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} a_n z_0^{n-p} \right) w^p = \sum_{p=0}^{m} \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} w^p$$

On a

$$\begin{aligned} f_m \circ g(w) &= \sum_{n=0}^{m} a_n (z_0 + w)^n = \sum_{n=0}^{m} a_n \left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z_0^{n-p} w^p \right) \\ &= \sum_{p=0}^{m} \left(\sum_{n=p}^{m} \binom{n}{p} a_n z_0^{n-p} \right) w^p \end{aligned}$$

de sorte que

$$h_m(w) - f_m \circ g(w) = \sum_{p=0}^{m} \left(\sum_{n=m}^{+\infty} \binom{n}{p} a_n z_0^{n-p} \right) w^p$$

Soit $|z_0| + \rho < r < R$. Remarquons que $\binom{n}{p} z_0^{n-p}$ est le coefficient d'ordre p du développement en série entière de $g(w)^n$. En utilisant l'égalité $M_{g^n}(\rho) = M_g(\rho)^n = (|z_0| + \rho)^n$, les inégalités de Cauchy impliquent

$$\begin{aligned} |h_m(w) - f_m \circ g(w)| &\leq \sum_{p=0}^{m} \left(\sum_{n=m}^{+\infty} \frac{M_f(r)}{r^n} \frac{M_g(\rho)^n}{\rho^p} \right) |w|^p \\ &= \sum_{p=0}^{m} M_f(r) \left(\sum_{n=m}^{+\infty} \left(\frac{M_g(\rho)}{r} \right)^n \right) \left(\frac{|w|}{\rho} \right)^p \\ &= \sum_{p=0}^{m} M_f(r) \left(\frac{M_g(\rho)}{r} \right)^m \frac{1}{1 - \frac{M_g(\rho)}{r}} \left(\frac{|w|}{\rho} \right)^p && \left(\text{car } \frac{M_g(\rho)}{r} < 1 \right) \\ &= M_f(r) \left(\frac{M_g(\rho)}{r} \right)^m \frac{1}{1 - \frac{M_g(\rho)}{r}} \sum_{p=0}^{m} \left(\frac{|w|}{\rho} \right)^p \\ &\leq M_f(r) \left(\frac{M_g(\rho)}{r} \right)^m \frac{1}{1 - \frac{M_g(\rho)}{r}} \frac{1}{1 - \frac{|w|}{\rho}} && \left(\text{car } \frac{|w|}{\rho} < 1 \right) \end{aligned}$$

En choisissant $0 < \tilde{\rho} < \rho$, pour $w \in \mathscr{B}(0,\tilde{\rho})$, on obtient

$$|h_m(w) - f_m \circ g(w)| \leq M_f(r) \left(\frac{M_g(\rho)}{r} \right)^m \frac{1}{1 - \frac{M_g(\rho)}{r}} \frac{1}{1 - \frac{\tilde{\rho}}{\rho}}$$

Or $\dfrac{M_g(\rho)}{r} < 1$. L'inégalité précédente implique alors, pour $w \in \mathscr{B}(0,\tilde{\rho})$

$$\lim_{m \to +\infty} h_m(w) = \lim_{m \to +\infty} f_m \circ g(w)$$

Comme la suite de fonctions $(f_m \circ g)_{m \in \mathbb{N}}$ converge normalement vers $f \circ g$ sur $\mathscr{B}(0,\tilde{\rho})$, le résultat découle de la limite précédente. $\square$

Lors de la démonstration précédente, nous avons déterminé les coefficients du Développement en Série Entière de f autour de z_0. En effet, en utilisant les notations du théorème précédant, l'égalité $w = z - z_0$ donne le DSE

$$f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p (z-z_0)^p, \qquad c_p = \sum_{n=p}^{+\infty} \binom{n}{p} a_n z_0^{n-p} = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}$$

Intéressons-nous désormais aux opérations (somme, produit, composition, inverse) de fonctions analytiques.

Théorème 75. *Soient $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ et $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ deux fonctions analytiques sur Ω. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.*

1. *La fonction $\lambda f + g$ est analytique sur Ω.*
2. *La fonction $f \times g$ est analytique sur Ω.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$. Il existe deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs $R_1 > 0$ et $R_2 > 0$ telles que

$$\forall z \in \mathscr{B}(z_0, R_1) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$\forall z \in \mathscr{B}(z_0, R_2) \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n$$

Soit $0 < \rho \leq \min(R_1, R_2)$. En utilisant le théorème 66, on obtient :

$$\forall z \in \mathscr{B}(z_0, \rho) \qquad (\lambda f + g)(z) = \sum_{n \geq 0} (\lambda a_n + b_n)(z-z_0)^n$$

$$\forall z \in \mathscr{B}(z_0, \rho) \qquad f \times g(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z-z_0)^n$$

où c_n est le coefficient devant le terme de valuation n dans le produit au sens de Cauchy des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Ces égalités terminent la démonstration. □

Théorème 76. *Soient $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ et $g\colon \widetilde{\Omega} \to \mathbb{C}$ deux fonctions analytiques. Supposons que $f(\Omega) \subseteq \widetilde{\Omega}$. Alors la fonction $g \circ f$ est analytique sur Ω.*

Plus précisément, soit $\sum a_n z^n$ (resp. $\sum b_n z^n$) une série entière de rayon $R_1 > 0$ (resp. $R_2 > 0$) et soit $0 < \rho_1 < R_1$ (resp. $0 < \rho_2 < R_2$) tel que

$$\forall z \in \mathscr{B}(z_0, \rho_1) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$\left(\textit{resp.} \quad \forall w \in \mathscr{B}(f(z_0), \rho_2) \qquad g(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \left(w - f(z_0)\right)^n \right)$$

La fonction f étant continue en z_0, choisissons $0 < \rho_3 \leq \rho_1$ tel que pour tout $z \in \mathscr{B}(z_0, \rho_3)$, $f(z) \in \mathscr{B}(f(z_0), \rho_2)$. Alors

$$\forall z \in \mathscr{B}(z_0, \rho_3) \qquad g \circ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \qquad \textit{où} \quad c_n = \sum_{p=1}^{n} b_p a_n^{(p)}$$

les coefficients $a_n^{(p)}$ étant définis par $(f(z) - f(z_0))^p = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n^{(p)} (z-z_0)^n$.

Démonstration. Soit $z_0 \in \Omega$. Soit $\sum a_n z^n$ de rayon $R_1 > 0$ et soit $0 < \rho_1 \leq R_1$ tels que

$$\forall z \in \mathscr{B}(z_0, \rho_1) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Soit $\sum b_n z^n$ de rayon $R_2 > 0$ et soit $0 < \rho_2 < R_2$ tels que

$$\forall w \in \mathscr{B}(f(z_0), \rho_2) \qquad g(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (w - f(z_0))^n$$

La fonction f étant continue en z_0,

$$\exists \rho_3 \leq \rho_1 \qquad \forall z \in \mathscr{B}(z_0, \rho_3) \qquad f(z) \in \mathscr{B}(f(z_0), \rho_2)$$

Pour $z \in \mathscr{B}(z_0, \rho_3)$, nous avons donc

$$\begin{aligned} g \circ f(z) &= g\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n\right) \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} b_m \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n\right)^m && (\text{car } f(z) \in \mathscr{B}(f(z_0), \rho_2)) \end{aligned}$$

La fin de la démonstration est alors identique à la fin de la démonstration du théorème 67. □

THÉORÈME 77. *Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Soit $\Omega' = \{z \in \Omega \ : \ f(z) \neq 0\}$. Alors*
1. *Ω' est ouvert;*
2. *$\dfrac{1}{f} : \Omega' \to \mathbb{C}$ est analytique (sur Ω').*

DÉMONSTRATION. La fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est continue, et $\{0\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $f^{-1}(\{0\})$ est fermé. Par ailleurs, Ω est ouvert, donc $\Omega' = \Omega \smallsetminus f^{-1}(\{0\})$ est ouvert.

Soit $z_0 \in \Omega'$. La fonction f étant analytique, il existe $\rho > 0$ et il existe une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon $R \geq \rho$ tels que

$$\forall z \in \mathscr{B}(z_0, \rho) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Par hypothèse, $a_0 = f(z_0) \neq 0$. Écrivons donc

$$f(z) = a_0 \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{a_0} (z-z_0)^n\right) = a_0(1+g(z)), \qquad g(z_0) = 0$$

La fonction g étant continue en 0,

$$\exists \rho_1 > 0 \quad \forall z \in \mathscr{B}(z_0, \rho_1) \qquad |g(z)| < 1$$

Considérons alors $\Omega_0 = \mathbb{C} \smallsetminus \{-1\}$ et posons

$$\begin{array}{rccc} \theta : & \Omega_0 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & u & \longmapsto & \dfrac{1}{1+u} \end{array}$$

La fonction θ est analytique sur Ω_0 et

$$\forall u \in \mathscr{B}(0,1) \qquad \theta(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n$$

En utilisant le théorème 76,

$$\forall z \in \mathscr{B}(z_0, \rho_1) \qquad \theta \circ g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

Or

$$\theta \circ g(z) = \frac{1}{1+g(z)} = \frac{a_0}{f(z)}$$

Ainsi,

$$\forall z \in \mathscr{B}(z_0, \rho_1) \qquad \frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{a_0} (z-z_0)^n$$

La fonction f est donc développable en série entière autour de z_0. Le choix de $z_0 \in \Omega'$ étant quelconque, ceci montre bien que la fonction $\dfrac{1}{f}$ est analytique sur Ω'. □

EXEMPLE 78. Soit f la fonction d'expression $f(z) = \dfrac{1}{z}$, fonction définie sur $\Omega = \mathbb{C}^\times$. Soit $z_0 \in \Omega$. Intéressons-nous au développement en série entière de f autour de z_0.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0 + (z-z_0)} = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-z_0}{z_0}}$$

Si $\left|\dfrac{z-z_0}{z_0}\right| < 1$, alors

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_0}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z_0^n}(z-z_0)^n$$

Or

$$\left|\frac{z-z_0}{z_0}\right| < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad |z-z_0| < |z_0| \qquad \Longleftrightarrow \qquad z \in \mathscr{B}(z_0, |z_0|)$$

Le développement trouvé précédemment est donc valable sur $\mathscr{B}(z_0, |z_0|)$.

Notation. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ est noté $\mathbb{C}[z]$. L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}$ est noté $\mathbb{C}(z)$. Ainsi, $\mathbb{C}(z) = \left\{\dfrac{P}{Q} \ : \ P \in \mathbb{C}[z], Q \in \mathbb{C}[z]\right\}$.

Théorème 79. *Pour tout $R \in \mathbb{C}(z)$, la fonction $z \mapsto R(z)$ est analytique sur son domaine de définition.*

Démonstration. Un polynôme est une série entière de rayon $R = +\infty$. Un polynôme est donc analytique sur $\mathbb{C}$ (cf théorème 74). D'après le théorème précédent, une fraction rationnelle est analytique dès que son dénominateur ne s'annule pas, i.e. sur son domaine de définition. □

II. Prolongement analytique

Rappels de topologie

Définition 80. Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$. On dit que $\mathcal{D}$ est :

- **convexe** si

$$\forall z_0 \in \mathcal{D} \quad \forall z_1 \in \mathcal{D} \qquad [z_0, z_1] \subseteq \mathcal{D} \qquad\qquad (\text{où } [z_0, z_1] = \{tz_0 + (1-t)z_1 \ : \ t \in [0;1]\})$$

- un ensemble **étoilé** par rapport à $z_0 \in \mathcal{D}$ si

$$\forall z \in \mathcal{D} \qquad [z_0, z] \subseteq \mathcal{D}$$

- **faiblement convexe** si

$$\forall z, z' \in \mathcal{D} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{D} \qquad [(z = z_0) \ \wedge \ (z' = z_n) \ \wedge \ (\forall i \in [\![1, n]\!] \quad [z_{i-1}, z_i] \subseteq \mathcal{D})]$$

  i.e. si tout couple de points de $\mathcal{D}$ est reliable par une ligne brisée dans $\mathcal{D}$;
- **connexe par arcs** si pour tout $z, n' \in \mathcal{D}$, il existe une application continue $\alpha : [0;1] \to \mathcal{D}$ telle que $\alpha(0) = z$ et $\alpha(1) = z'$ (auquel cas, α s'appelle un chemin inclus dans D) ;
- **connexe** si pour tout ouvert $U_1 \subseteq \mathbb{C}$ et pour tout ouvert $U_2 \subseteq \mathbb{C}$,

$$[(D \subseteq U_1 \cup U_2) \ \wedge \ (U_1 \cap U_2 = \emptyset)] \qquad \Longrightarrow \quad [(D \subseteq U_1) \ \vee \ (D \subseteq U_2)]$$

Remarque 81 (exercice). $\mathcal{D}$ est connexe si, et seulement si pour tout couple (F_1, F_2) de fermés de $\mathbb{C}$,

$$[(D \subseteq F_1 \cup F_2) \ \wedge \ (F_1 \cap F_2 = \emptyset)] \qquad \Longrightarrow \quad [(D \subseteq F_1) \ \vee \ (D \subseteq F_2)]$$

Définition 82. Soit X un espace topologique. Soit $A \subseteq X$. Le sous-ensemble A est dit **connexe** si pour tout couple d'ouverts U_1, U_2 de X vérifiant $A \subseteq U_1 \cup U_2$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, on a $A \subseteq U_1$ ou $A \subseteq U_2$.

Proposition 83. *Soient X, Y deux espaces topologiques et soit $f : X \to Y$ une application* ***continue****. Si $A \subseteq X$ est connexe, alors $f(A) \subseteq Y$ est connexe. Autrement dit, l'image continue d'un connexe est connexe.*

Démonstration. Supposons que A est connexe et notons $B = f(A)$. Soient V_1, V_2 deux ouverts de Y tels que $B \subseteq V_1 \cup V_2$ et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. L'application f étant continue, $U_1 = f^{-1}(V_1)$ et $U_2 = f^{-1}(V_2)$ sont deux ouverts de X. Remarquons également que $f^{-1}(V_1 \cup V_2) = f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) = U_1 \cup U_2$ (exercice). Ces considérations impliquent $A \subseteq U_1 \cup U_2$. De plus l'égalité $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ donne l'égalité $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. L'ensemble A étant connexe, on a donc par exemple $A \subseteq U_1$. Ainsi $B = f(A) \subseteq f(U_1) \subseteq V_1$ et par conséquent, B est connexe. □

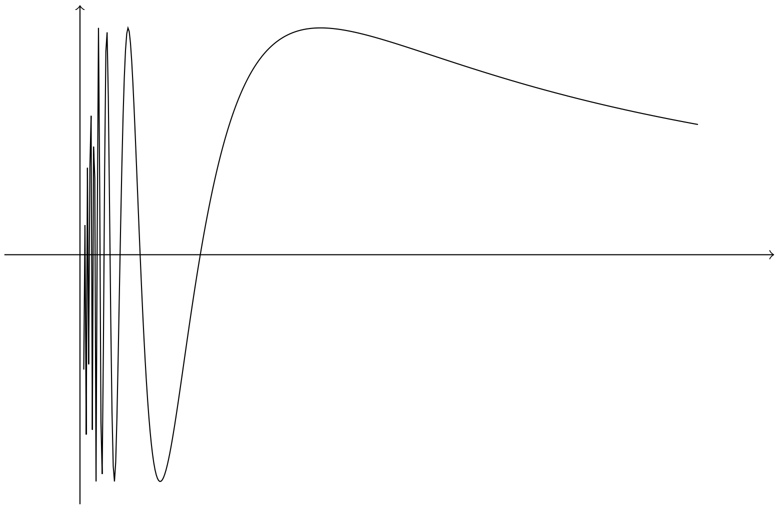
Théorème 84. *Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$. Alors*

$$\mathcal{D} \text{ convexe} \implies \mathcal{D} \text{ étoilé} \implies \mathcal{D} \text{ faiblement convexe} \implies \mathcal{D} \text{ connexe par arc} \implies \mathcal{D} \text{ connexe}$$

Il est à noter qu'aucune réciproque n'est vraie.

Démonstration. **connexe par arcs $\implies$ connexe**. Démontrons la contraposée de cette implication. Supposons donc que $\mathcal{D}$ n'est pas connexe. Il existe alors deux fermés F_1 et F_2 de $\mathbb{C}$ vérifiant $\mathcal{D} \subseteq F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, $\mathcal{D} \cap F_1 \neq \emptyset$ et $\mathcal{D} \cap F_2 \neq \emptyset$. Soit $z_1 \in \mathcal{D} \cap F_1$ et soit $z_2 \in \mathcal{D} \cap F_2$. Supposons désormais par l'absurde qu'il existe un chemin continu $\alpha : [0,1] \to \mathcal{D}$ tel que $\alpha(0) = z_1$ et $\alpha(1) = z_2$. Notons $A = \alpha([0,1])$. Comme $z_1, z_2 \in A$ et comme $A \subseteq \mathcal{D}$, on a $A \subseteq F_1 \cup F_2$, $A \cap F_1 \neq \emptyset$, $A \cap F_2 \neq \emptyset$ et $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Ceci montre que A n'est pas connexe. Or $[0,1]$ est connexe et α est continue, donc en vertu de la proposition 83, A est connexe, ce qui contredit la déduction précédente. Ainsi, il n'existe aucun chemin continu contenu dans $\mathcal{D}$ et reliant z_1 à z_2, et $\mathcal{D}$ n'est pas connexe par arcs.
faiblement convexe $\implies$ connexe par arcs. Une ligne brisée peut être vue comme une application continue $\alpha : [0,1] \to \mathcal{D}$.
étoilé $\implies$ faiblement connexe. Supposons que $\mathcal{D}$ est étoilé par rapport à z_0. Soient $z, z' \in \mathcal{D}$. La ligne brisée constituée du segment $[z, z_0]$ suivi du segment $[z_0, z']$ est une ligne brisée inclue dans $\mathcal{D}$ reliant z à z'.
convexe $\implies$ étoilé. Exercice. ☐

Exemple 85. Exemple de connexe non connexe par arc : $\left\{x + i\sin\left(\frac{1}{x}\right) \;:\; x \in \mathbb{R}_+^\times\right\} \cup [-i; i]$.



Lemme 86. *Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\mathcal{D}$ est convexe

(ii) $\mathcal{D}$ est étoilé par rapport à tous ses points.

Démonstration. (i) $\implies$ (ii). Clair.
(ii) $\implies$ (i). Soient $z, z' \in \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{D}$ est étoilé par rapport à z, on a $[z, z'] \subseteq \mathcal{D}$, d'où le fait que $\mathcal{D}$ est convexe. ☐

Théorème 87. *Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) U est faiblement convexe.

(ii) U est connexe par arc.

(iii) U est connexe.

Démonstration. (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii). Voir le théorème 84

(iii) $\implies$ (i). Soit $a \in U$. Il s'agit de montrer que pour tout $z \in U$, il existe une ligne brisée inclue dans U reliant z à a. Notons donc

$$U_0 = \{z \in U \;:\; \text{il existe une ligne brisée (dans } U\text{) reliant } z \text{ à } a\}$$
$$U_1 = \{z \in U \;:\; \text{on ne peut pas relier } z \text{ à } a \text{ à l'aide d'une ligne brisée (dans } U\text{)}\}$$

On vérifie alors aisément
$$U_0 \cap U_1 = \emptyset \qquad \text{et} \qquad U_0 \cup U_1 = U$$
Montrons désormais que U_0 est ouvert. Soit $z_0 \in U_0$. Notons $[a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \cdots \cup [a_{n-1}, a_n]$ une ligne brisée reliant $a = a_0$ à $z_0 = a_n$. Comme U est ouvert, fixons $\varepsilon > 0$ tel que $\mathscr{B}(z_0, \varepsilon) \subseteq U$. Remarquons que la boule $\mathscr{B}(z_0, \varepsilon)$ est convexe. En effet, soient $b, c \in \mathscr{B}(z_0, \varepsilon)$ et soit $\lambda \in [0;1]$. Alors la distance de z_0 à $\lambda b + (1-\lambda)c$ est

$$\begin{aligned}
|\lambda b + (1-\lambda)c - z_0| &= |\lambda(b - z_0) + (1-\lambda)(c - z_0)| \\
&\leq \lambda|b - z_0| + (1-\lambda)|c - z_0| \qquad\qquad (\text{car } \lambda \leq 0 \text{ et } (1-\lambda) \geq 0) \\
&\leq (\lambda + 1 - \lambda)\max\{|b - z_0|, |c - z_0|\} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Cette inégalité montre bien que $\lambda b+(1-\lambda)c \in \mathscr{B}(z_0,\varepsilon)$, i.e. que $\mathscr{B}(z_0,\varepsilon)$ est convexe. Montrons désormais que $\mathscr{B}(z_0,\varepsilon) \subseteq U_0$. Soit $z \in \mathscr{B}(z_0,\varepsilon) \subseteq U_0$. La boule $\mathscr{B}(z_0,\varepsilon) \subseteq U_0$ étant convexe, on a $[z_0,z] \subseteq \mathscr{B}(z_0,\varepsilon) \subseteq U$, de sorte que la ligne brisée $[a_0,a_1] \cup [a_1,a_2] \cup \cdots \cup [a_{n-1},a_n] \cup [z_0,z]$ est une ligne brisée (dans U) reliant a à z, ce qui montre que $z \in U_0$ et par conséquent que U_0 est ouvert.

Montrons que U_1 est ouvert. Soit $z_0 \in U_1$. Comme U est ouvert, fixons $\varepsilon > 0$ pour lequel $\mathscr{B}(z_0,\varepsilon) \subseteq U$. Comme précédemment, on a $[z,z_0] \subseteq U$. Raisonnons par l'absurde : s'il existait une ligne brisée (dans U) reliant a à z, alors en ajoutant le segment $[z,z_0]$ à cette ligne brisée on obtiendrait une ligne brisée reliant a à z_0, ce qui contredit $z_0 \in U_1$. Ainsi, $\mathscr{B}(z_0,\varepsilon) \subseteq U_1$ et U_1 est ouvert.

Comme U est connexe, on en déduit que l'on a soit $U \subseteq U_0$, soit $U \subseteq U_1$. Or $a \in U_0$, donc $U_0 \neq \emptyset$. Ainsi, $U_1 = \emptyset$ et $U \subseteq U_0$, ce qui montre que U est faiblement connexe. □

Définition 88. On appelle **domaine** de $\mathbb{C}$ tout partie non vide, ouverte et connexe de $\mathbb{C}$.

Exemple 89. $\mathbb{C}$ est un domaine, une boude ouverte est un domaine.

Théorème 90 (Principe du prolongement analytique). *Soit $\mathcal{D}$ un domaine. Soient $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ et $g\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ deux fonctions analytiques. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) $f = g$

(ii) $\exists U \subseteq \mathcal{D}$ *ouvert,* $U \neq \emptyset \qquad f|_U = g|_U$

(iii) $\exists K \subseteq \mathcal{D}$ *possédant un point d'accumulation dans* $\mathcal{D} \qquad f|_K = g|_K$

*(iv) Il existe une suite **injective** $(z_q)_{q\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ convergeant dans $\mathcal{D}$ telle que pour tout $q \in \mathbb{N}$ on a $f(z_q) = g(z_q)$.*

Démonstration. (i) $\implies$ (ii) $\implies$ (iii) $\implies$ (iv). Clair

(iv) $\implies$ (i). Choisissons une suite injective $(z_q)_{q\in\mathbb{N}}$ vérifiant (iv). Notons $a = \lim\limits_{q\to+\infty} z_q \in \mathcal{D}$. Les fonction f et g sont analytiques sur $\mathcal{D}$:

$$\exists \sum b_n z^n \text{ de rayon } R_1 > 0 \quad \exists \sum c_n z^n \text{ de rayon } R_2 > 0 \quad \exists 0 < \rho \leq \min\{R_1,R_2\}$$

$$\mathscr{B}(a,\rho) \subseteq \mathcal{D} \quad \text{et} \quad \forall z \in \mathscr{B}(a,\rho) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-a)^n \quad \text{et} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

Posons $h = f - g$. Alors

$$\forall z \in \mathscr{B}(a,\rho) \qquad h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - c_n)(z-a)^n$$

Comme $h(z_q) = 0$ pour tout $q \in \mathbb{N}$, le principe des zéros isolés (plus précisément le corollaire 58) implique que $h|_{\mathscr{B}(a,\rho)} = 0$. Ainsi, $f|_{\mathscr{B}(a,\rho)} = g|_{\mathscr{B}(a,\rho)}$.

Montrons désormais que f et g coïncident sur $\mathcal{D}$. Soit $b \in \mathcal{D}$. Soit $\varphi : [0;1] \to \mathcal{D}$ une ligne brisée reliant a à b : $\varphi(0) = a$ et $\varphi(1) = b$. Soit

$$E = \left\{ t \in [0,1] \ : \ f|_{[0,t]} = g|_{[0,t]} \right\}$$

$E \neq \emptyset$ car $0 \in E$. De plus, E est un intervalle : en effet, si $t_1, t_2 \in E$, $t_1 < t_2$ et si $s \in \,]t_1,t_2[$, alors $f|_{[0,t_2]} = g|_{[0,t_2]}$ implique $f|_{[0,s]} = g|_{[0,s]}$, autrement dit $s \in E$. Notons alors $t_0 = \sup E$. Comme f et g sont continues, $f(t_0) = \lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}} f(t) = \lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t<t_0}} g(t) = g(t_0)$, d'où l'on conclut $t_0 \in E$.

Raisonnons par l'absurde et supposons $t_0 < 1$. Notons alors $\delta = \varphi(t_0) \in \mathcal{D}$.

$$\exists \sum b'_n z^n \text{ de rayon } R'_1 > 0 \quad \exists \sum c'_n z^n \text{ de rayon } R'_2 > 0 \quad \exists 0 < \rho' \leq \min\{R'_1,R'_2\}$$

$$\mathscr{B}(\delta,\rho') \subseteq \mathcal{D} \quad \text{et} \quad \forall z \in \mathscr{B}(\delta,\rho') \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b'_n (z-\delta)^n \quad \text{et} \quad g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c'_n (z-\delta)^n$$

Or φ est continue en t_0 :

$$\exists \eta > 0 \quad \varphi\left(]t_0-\eta, t_0+\eta[\right) \subseteq \mathscr{B}(\delta,\rho')$$

Notons alors que $\varphi\left(]t_0-\eta,t_0]\right)$ possède un point d'accumulation et que $f|_{\varphi(]t_0-\eta,t_0])} = g|_{\varphi(]t_0-\eta,t_0])}$. Un raisonnement identique à celui mené précédemment montre que $f|_{\mathscr{B}(\delta,\rho')} = g|_{\mathscr{B}(\delta,\rho')}$. Les fonctions f et g sont donc identiques sur l'intervalle $]t_0,t_0+\eta[$, ce qui contredit le fait que $t_0 = \sup E$. Ainsi $t_0 = 1$ et $f(b) = g(b)$. □

III. Principe du maximum

Définition 91. Soit $A \subseteq \mathbb{C}$. Soit $f : A \to \mathbb{C}$ une fonction. Soit $a \in A$. On dit que f possède un **maximum local** (resp. un **minimum local**) en a si

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall z \in A \cap \mathscr{B}(a, \varepsilon) \qquad |f(z)| \le |f(a)|$$
$$(\text{resp. } \exists \varepsilon > 0 \quad \forall z \in A \cap \mathscr{B}(a, \varepsilon) \qquad |f(z)| \ge |f(a)|)$$

Théorème 92. *Soit $\mathcal{D}$ un domaine. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Si f possède un maximum local sur $\mathcal{D}$, alors f est constante.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathcal{D}$ le point en lequel f possède un maximum local. $\mathcal{D}$ étant un domaine, le principe du prolongement analytique implique qu'il suffit de montrer que f est constante sur un voisinage de λ. La fonction f étant analytique, il existe une série entière, que l'on notera $\sum c_n z^n$ de rayon $R > 0$, et il existe $0 < r \le R$ tels que $\mathscr{B}(\lambda, r) \subseteq \mathcal{D}$ et

$$\forall z \in \mathscr{B}(\lambda, r) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - \lambda)^n$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que f ne soit pas constante. Notons $k_0 = \inf \{k \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\} \ : \ c_k \neq 0\}$. Remarquons dans un premier temps $c_0 \neq 0$. En effet, si $c_0 = 0$, alors $f(\lambda) = 0$ et le fait que f possède un maximum local en λ implique que f est nulle dans un voisinage de 0, ce qui contredit le fait que f n'est pas localement constante. Écrivons alors

$$\begin{aligned} f(z) &= c_0 + c_{k_0}(z-\lambda)^{k_0} + c_{k_0+1}(z-\lambda)^{k_0+1} + \dots \\ &= c_0 \left(1 + \mu (z-\lambda)^{k_0} \left(1 + (z-\lambda) g_1(z)\right)\right) \\ \text{où } \ \mu &= \frac{c_{k_0}}{c_0} \ \text{ et } \ g_1(z) = \frac{c_{k_0+1}}{c_{k_0}} + \frac{c_{k_0+2}}{c_{k_0}}(z-\lambda) + \dots \end{aligned}$$

La fonction g_1 est analytique sur $\mathscr{B}(\lambda, r)$ (d'après le théorème 74). Cette dernière fonction est donc continue et par conséquent bornée sur tout compact K. Choisissons $K = \overline{\mathscr{B}\left(\lambda, \frac{r}{2}\right)}$ et notons M un majorant de g sur K :

$$\forall z \in \overline{\mathscr{B}\left(\lambda, \frac{r}{2}\right)} \qquad |g_1(z)| \le M$$

Soit $r' \le \frac{r}{2}$ vérifiant $r'M \le \frac{1}{2}$. Écrivons $\mu = |\mu| e^{i\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $0 < \rho < r'$, on s'intéresse au complexe $z = \lambda + \rho e^{-i\frac{\alpha}{k_0}} \in \mathscr{B}(\lambda, r')$. On a

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |c_0| \left|1 + \mu(z-\lambda)^{k_0}\left(1 + (z-\lambda)g_1(z)\right)\right| \\ &\ge |c_0| \left(\left|1 + \mu(z-\lambda)^{k_0}\right| - \left|\mu(z-\lambda)^{k_0+1} g_1(z)\right|\right) && \text{(inégalité triangulaire)} \\ &= |c_0| \left(1 + |\mu|\rho^{k_0} - |\mu|\rho^{k_0} |\rho g_1(z)|\right) \\ &\ge |c_0| \left(1 + |\mu|\rho^{k_0} - \frac{|\mu|\rho^{k_0}}{2}\right) && \text{(d'après le choix de } r'\text{)} \\ &= |c_0| \left(1 + \frac{|\mu|\rho^{k_0}}{2}\right) \end{aligned}$$

Cette inégalité implique donc $|f(z)| > |f(\lambda)|$, ce qui contredit le fait que λ soit un maximum relatif. □

Théorème 93 (Théorème de d'Alembert-Gauss, théorème fondamental de l'algèbre). *Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos. Autrement dit, tout polynôme complexe non constant admet (au moins) une racine.*

On peut remarquer que le théorème fondamental de l'algèbre implique qu'un polynôme complexe de degré $n \ge 1$ possède exactement n racines (comptées avec leur ordre de multiplicité).

Démonstration. Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, où $n \ge 1$ et $a_n \neq 0$. Supposons que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $P(z) \neq 0$. Le théorème 74 implique que P est analytique sur $\mathbb{C}$. Le théorème 77 implique alors que $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ est également analytique sur $\mathbb{C}$. L'inégalité triangulaire appliquée n fois de suite donne l'inégalité

$$\begin{aligned} |P(z)| &\ge |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0| \\ &\ge |a_n z^n| - \left(|a_{n-1} z^{n-1}| + \dots + |a_0|\right) \\ &= |a_n z^n| \left(1 - \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| \frac{1}{|z|} - \dots - \left|\frac{a_0}{a_n}\right| \frac{1}{|z|^n}\right) \end{aligned}$$

On en déduit $\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$, autrement dit que $\lim_{|z|\to+\infty} |f(z)| = 0$. De plus, $A = f(0) = \dfrac{1}{a_0} \neq 0$. Ainsi,

$$\exists R > 0 \quad \forall |z| > R \qquad |f(z)| \leq A$$

La partie $K = \overline{\mathscr{B}(0,R)}$ est compacte et f est continue. Ainsi, f est bornée sur K et elle atteint son maximum en un point que nous noterons λ.

$$\begin{aligned}
&\forall z \in \overline{\mathscr{B}(0,R)} \quad |f(z)| \leq |f(\lambda)| \\
&\forall z \notin \overline{\mathscr{B}(0,R)} \qquad |z| > R \implies |f(z)| \leq A = |f(0)| \leq |f(\lambda)|
\end{aligned}$$

Ainsi, λ est un maximum absolu de f. Le principe du maximum implique alors que f est constante, ce qui contredit le fait que P ne soit pas constant. □

IV. Fonctions exponentielle et trigonométriques

Remarque 94. La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence $R = +\infty$ (d'Alembert).

Définition 95. On appelle fonction exponentielle, notée $\exp$ ou $z \mapsto e^z$, la fonction définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

La fonction exponentielle est une fonction entière.

Lemme 96. *La fonction* $\exp$ *est holomorphe. De plus*

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad \exp'(z) = \exp(z)$$

Démonstration. En tant que fonction entière, la fonction $\exp$ est analytique sur $\mathbb{C}$ (théorèmes 74 et 73) , d'où l'on déduit l'holomorphie de la fonction $\exp$. De plus, le théorème 53 implique

$$\exp'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\frac{1}{(n+1)!} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

□

Théorème 97.

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} \qquad e^{z+z'} = e^z e^{z'}$$

Démonstration. On a $e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ et $e^{z'} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{z!}$. On note $\sum c_n$ le produit au sens de Cauchy des séries $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z'^n}{z!}$, de sorte que

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}$$

Les deux séries $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum \frac{z'^n}{z!}$ étant absolument convergentes, le théorème 30 assure que la série $\sum c_n$ converge vers

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{z!}$$

Donc

$$e^z e^{z'} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k z'^{n-k}}{k!(n-k)!} \right)$$

Or

$$\begin{aligned}
e^{z+z'} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} \right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} z^k z'^{n-k} \right)
\end{aligned}$$

d'où l'égalité des deux expressions. □

Corollaire 98. *1.* $\forall z \in \mathbb{C} \qquad e^z \neq 0$

2. $\forall z \in \mathbb{C} \qquad e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$

Démonstration. 1. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ vérifiant $e^{z_0} = 0$. Alors $1 = e^0 = e^{z_0 - z_0} = e^{z_0} e^{-z_0} = 0$, ce qui est absurde.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $1 = e^0 = e^{z-z} = e^z e^{-z}$. Cette égalité indique bien que e^{-z} est l'inverse de e^z. □

Cas de l'exponentielle réelle.

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

Proposition 99.

1. *f est à valeurs réelles.*
2. *f est $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)} = f$.*
3. *f définit une bijection strictement croissante $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\times$.*

Démonstration.

1. $\mathbb{R}$ étant complet, pour $x \geq 0$ on a $e^x = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \geq 1$. Si $x \leq 0$, alors $-x \geq 0$ et $e^x = \frac{1}{e^{-x}} \in]0;1]$. Ainsi, f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\times$.
2. La fonction $\exp$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$, sa restriction à $\mathbb{R}$ est donc $\mathcal{C}^\infty$ également.
3. $f'(x) = e^x > 0$ d'après (1). La fonction f est donc strictement croissante (et continue). Cette fonction opère donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left] \lim_{x \to -\infty} e^x, \lim_{x \to +\infty} e^x \right[$. Pour $x \geq 0$, on a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots \geq 1 + x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

D'où $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = 0$. □

Retour à l'exponentielle complexe.

Proposition 100. *Soit $z \in \mathbb{C}$. On a*

1. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$
2. $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$
3. $|e^z| = 1 \iff z \in i\mathbb{R}$

Démonstration.

1. $\overline{e^z} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = e^{\overline{z}}$
2. $|e^z|^2 = e^z \overline{e^z} = e^z e^{\overline{z}} = e^{z+\overline{z}} = e^{2 \operatorname{Re} z} = \left(e^{\operatorname{Re} z}\right)^2$. Donc $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$.
3. $|e^z| = 1 \iff e^{\operatorname{Re} z} = 1 \iff \operatorname{Re} z = 0$ (car $x \mapsto e^x$ réalise une bijection $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\times$) □

Théorème 101. $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ *est un morphisme de groupes.*

Démonstration. Il s'agit de la traduction de théorème 97. □

Étude du noyau.
Notons alors $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ et intéressons-nous au noyau de $\exp$:

$$\ker(\exp) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ e^z = 1\}$$

Soit $z \in \ker(\exp)$. La proposition 100 implique que $z \in i\mathbb{R}$. Considérons donc l'application

$$\varphi\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ x & \longmapsto & e^{ix} \end{array}$$

φ est un morphisme de groupe (toujours d'après le théorème 101). De plus, $\ker(\exp) = i\ker(\varphi)$. Nous nous intéresserons désormais à $\ker \varphi$. Rappelons la

Proposition 102. *Soit Γ un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Alors soit Γ est dense (i.e. $\overline{\Gamma} = \mathbb{R}$), soit il existe $\alpha \geq 0$ tel que $\Gamma = \alpha\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Intéressons-nous à la partie de $\mathbb{R}$ suivante : $A =]0, +\infty[\cap \Gamma$. Soit $\alpha = \inf A \in \mathbb{R}_+$. Deux cas peuvent se présenter : $\alpha > 0$ et $\alpha = 0$.
Cas 1 : $\alpha > 0$. Montrons que dans ce cas $\Gamma = \alpha\mathbb{Z}$. Montrons dans un premier temps $\alpha \in \Gamma$. Raisonnons par l'absurde et supposons $\alpha \notin \Gamma$. Dans ce cas, pour tout $\varepsilon > 0$, $]\alpha, \alpha + \varepsilon[\cap \Gamma \neq \emptyset$. Soit $\gamma_1 \in]\alpha, 2\alpha[\cap \Gamma$ et choisissons $\gamma_2 \in]\alpha, \gamma_1[\cap \Gamma$. Dans ce cas $0 < \gamma_2 - \gamma_1 < \alpha$ et $\gamma_2 - \gamma_1 \in \Gamma$ contredisent la définition de α. Ainsi, $\alpha \in \Gamma$.
Soit $\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}$. Quitte à remplacer γ par $-\gamma$, on peut supposer $\gamma > 0$. Notons $n = \left\lfloor \frac{\gamma}{\alpha} \right\rfloor$. L'inégalité $n \leq \frac{\gamma}{\alpha} < n + 1$ implique $n\alpha \leq \gamma < (n+1)\alpha$. Nous obtenons alors les inégalité $0 \leq \gamma - n\alpha < \alpha$. Or $\gamma - n\alpha \in \Gamma$. La définition de α implique donc $\gamma - n\alpha = 0$, i.e. $\gamma \in \alpha\mathbb{Z}$.
Cas 2 : $\alpha = 0$. Montrons alors que Γ est dense. Soit $x \in \mathbb{R}$. Quitte à remplacer x par $-x$, on peut supposer $x > 0$ (le cas $x = 0$ étant résolu par le fait $0 \in \Gamma$). Soit $\varepsilon > 0$ et montrons que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap \Gamma \neq \emptyset$. Soit $\gamma \in]0, \varepsilon[\cap \Gamma$. Notons $n = \left\lfloor \frac{x}{\gamma} \right\rfloor$. On a

$$\begin{cases} n \leq \dfrac{x}{\gamma} < n + 1 \\ 0 < \gamma < \varepsilon \end{cases} \implies n\gamma \leq x < (n+1)\gamma < n\gamma + \varepsilon \leq x + \varepsilon$$

ce qui montre $\gamma \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap \Gamma$ et termine la démonstration. □

Revenons à $\ker\varphi$. En tant que sous-groupe de $\mathbb{R}$, il est soit dense, soit de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ (où $\alpha \geq 0$). Raisonnons par l'absurde et supposons $\ker\varphi$ est dense. L'application φ est continue et elle coïncide avec l'application $x \mapsto 1$ sur $\ker\varphi$. Ces deux applications sont donc égales, ce qui contredit le fait que $\exp|_{\mathbb{R}}$ est strictement croissante. Ainsi, $\ker\varphi = \alpha\mathbb{Z}$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Introduisons la fonction $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\cos(t) = \operatorname{Re}(\varphi(t))$. La fonction $\cos$ est continue (et même $\mathcal{C}^\infty$). De plus, l'égalité $|\varphi(t)| = 1$ implique $\cos(t) \in [-1; 1]$. On a

$$\begin{aligned} \cos t &= \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \qquad \text{(car la série converge absolument)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

On a $\cos(0) = 1$. Montrons que $\cos(2) < 0$. En effet, $\cos 2$ est la somme de la série alternée $= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}$. En notant S_n la somme partielle d'indice n de cette série, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2n+1} \leq \cos(2) \leq S_{2n}$$

En particulier $\cos(2) \leq S_4 = -\frac{1}{3}$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne donc l'existence de $t \in]0; 2[$ tel que $\cos(t) = 0$. Posons $\beta = \inf\{t \in [0; 2] \;:\; \cos(t) = 0\}$.

Définition 103. On définit le nombre réel π grâce à l'égalité $2\beta = \pi$.

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\left|\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = 1$, on a $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \in \{\pm i\}$, i.e. $\varphi(2\pi) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 = 1$. La définition de β implique alors que $\ker(\varphi) = 2\pi\mathbb{Z}$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $0 < \gamma < 2\pi$ vérifie $e^{i\gamma} = 1$. Remarquons que $\left(e^{i\frac{\gamma}{2}}\right)^2 = 1$, donc $\exp\left(i\frac{\gamma}{2}\right) \in \{\pm 1\}$. Si $e^{i\frac{\gamma}{2}} = 1$, alors nous pouvons recommencer l'opération précédente en remplaçant γ par $\frac{\gamma}{2}$. La fonction φ étant continue, $\exp\left(i\frac{\gamma}{2^n}\right)$ ne peut être égal à 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il existe donc un entier $n_0 > 0$ pour lequel $\exp\left(i\frac{\gamma}{2^{n_0}}\right) = -1$. Auquel cas $\exp\left(i\frac{\gamma}{2^{n_0+1}}\right) \in \{\pm i\}$, et $\cos\left(\frac{\gamma}{2^{n_0+1}}\right) = 0$, ce qui contredit la minimalité de β.

Proposition 104.

$$\ker(\exp) = 2\pi\mathbb{Z}$$

Remarquons que $e^{i\pi} = -1$ puisque $\left(e^{i\pi}\right)^2 = e^{2i\pi} = 1$ et que $\pi \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Corollaire 105. *Soient* $z, z' \in \mathbb{C}$.

$$e^z = e^{z'} \iff (\exists k \in \mathbb{Z} \quad z' = z + 2ik\pi)$$

Théorème de relèvement.

Théorème 106 (dit de relèvement). *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}^\times$ une application de* ***classe*** *$\mathcal{C}^1$. Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = |f(a)|e^{i\theta_0}$.*
Il existe alors une ***unique*** *application* ***continue*** *$\theta\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $\theta(a) = \theta_0$ et*

$$\forall x \in [a,b] \qquad f(x) = |f(x)|e^{i\theta(x)}$$

Cette application θ est en fait $\mathcal{C}^1$.

Démonstration. Définissons l'application $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{|f(x)|}$. Montrons que g est de classe $\mathcal{C}^1$. Écrivons $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, où $f_1(x) = \mathrm{Re}(f(x))$ et $f_2(x) = \mathrm{Im}\,(f(x))$. On a $|f(x)| = \sqrt{f_1(x)^2 + f_2(x)^2}$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, les applications f_1 et f_2 sont également de classe $\mathcal{C}^1$. De plus, $u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$. Or $f_1(x)^2 + f_2(x)^2 > 0$ (car $f(x) \neq 0$), donc $x \mapsto \sqrt{f_1(x)^2 + f_2(x)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. L'application g est donc de classe $\mathcal{C}^1$. Remarquons que

$$\forall x \in [a,b] \qquad |g(x)| = \sqrt{g_1(x)^2 + g_2(x)^2} = 1$$

Existence : posons $\theta(x) = \theta_0 - i\displaystyle\int_a^x \frac{g'(t)}{g(t)}\mathrm{d}t$. Écrivons $g(t) = g_1(t) + ig_2(t)$, où $g_1(t) = \mathrm{Re}\,g(t)$ et $g_2(t) = \mathrm{Im}\,g(t)$. On a $g'(t) = g_1'(t) + ig_2'(t)$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{g'(t)}{g(t)} &= \frac{(g_1'(t) + ig_2'(t))(g_1(t) - ig_2(t))}{g_1(t)^2 + g_2(t)^2} \\
&= g_1(t)g_1'(t) + g_2(t)g_2'(t) + i\,(g_1(t)g_2'(t) - g_1'(t)g_2(t)) \qquad \big(\text{car } g_1(t)^2 + g_2(t)^2 = 1\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(g_1(t)^2 + g_2(t)^2\big)\big)' + i(g_1(t)g_2'(t) - g_1'(t)g_2(t)) \\
&= i\,(g_1(t)g_2'(t) - g_1'(t)g_2(t))
\end{aligned}$$

Ceci montre bien $\dfrac{g'(t)}{g(t)} \in i\mathbb{R}$ pour tout $t \in [a,b]$. Ainsi, $\displaystyle\int_a^x \frac{g'(t)}{g(t)}\mathrm{d}t \in i\mathbb{R}$, ce qui implique $\theta(x) \in \mathbb{R}$. L'application $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifiant $\theta(a) = \theta_0$ est donc bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et vérifie $\theta'(x) = -i\dfrac{g'(x)}{g(x)}$. Par conséquent, l'application $x \mapsto e^{i\theta(x)}$ est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et

$$\begin{aligned}
\left(e^{i\theta(x)}\right)' &= i\theta'(x)e^{i\theta(x)} = \frac{g'(x)}{g(x)}e^{i\theta(x)} \\
\left(\frac{e^{i\theta(x)}}{g(x)}\right)' &= \frac{\left(e^{i\theta(x)}\right)'g(x) - e^{i\theta(x)}g'(x)}{g(x)^2} \\
&= \frac{g'(x)e^{i\theta(x)} - g'(x)e^{i\theta(x)}}{g(x)^2} = 0
\end{aligned}$$

Donc

$$\exists c \in \mathbb{C} \quad \forall x \in [a,b] \qquad e^{i\theta(x)} = cg(x)$$

Le choix $x = a$ donne

$$e^{i\theta_0} = e^{i\theta(a)} = cg(a) = c\frac{f(a)}{|f(a)|} = ce^{i\theta_0}$$

d'où l'on conclut $c = 1$. Ainsi,

$$\left(\forall x \in [a,b] \qquad \frac{f(x)}{|f(x)|} = g(x) = e^{i\theta(x)}\right) \iff \left(\forall x \in [a,b] \qquad f(x) = |f(x)|e^{i\theta(x)}\right)$$

ce qui montre l'existence de θ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$).

Unicité : soient $\theta_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\theta_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $\theta_1(a) = \theta_0 = \theta_2(a)$ et telles que

$$\forall x \in [a,b] \qquad f(x) = |f(x)|e^{i\theta_1(x)} = |f(x)|e^{i\theta_2(x)}$$

Ainsi,

$$\forall x \in [a,b] \qquad e^{i(\theta_1(x) - \theta_2(x))} = 1$$

Les propositions 100 et 104 impliquent

$$\forall x \in [a,b] \quad \exists k(x) \in \mathbb{Z} \qquad \theta_1(x) - \theta_2(x) = 2k(x)\pi$$

L'application $k : [a,b] \to \mathbb{Z}$ est continue. Le segment $[a,b]$ étant connexe, l'image $k([a,b])$ est connexe dans $\mathbb{Z}$. Ainsi, $k([a,b])$ est un singleton :

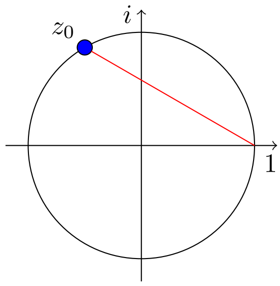
$$\exists \ell \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in [a,b] \qquad k(x) = \ell$$

Ceci montre $\theta_1(x) = \theta_2(x) + \ell$. En évaluant en $x = a$, on obtient $\ell = 0$, d'où l'unicité. □

COROLLAIRE 107.

$$\forall z_0 \in \mathbb{U} \quad \exists \theta \in \mathbb{R} \qquad z_0 = e^{i\theta}$$

DÉMONSTRATION. Supposons dans un premier temps $z_0 \neq -1$.



Introduisons la fonction

$$f\colon \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & tz_0 + (1-t) \end{array}$$

En posant $\theta_0 = 0$, on a bien $f(0) = |f(0)|e^{i\theta_0}$. De plus, pour tout $t \in [0,1]$, $f(t) \neq 0$. Le théorème de relèvement donne l'existence d'une application continue $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in [0,1] \qquad f(t) = |f(t)|e^{i\theta(t)}$$

Ainsi, $z_0 = f(1) = |f(1)|e^{i\theta(1)} = e^{i\theta(1)}$, ce qui termine le cas $z_0 \neq -1$.
Si $z_0 = -1$, la remarque suivant la proposition 104 donne l'égalité $-1 = e^{i\pi}$. □

Lors de l'étude du noyau de exp, nous avons introduit la fonction cosinus. Introduisons également la fonction sinus.

DÉFINITION 108. Les fonction cos et sin sont définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos x = \mathrm{Re}(e^{ix}) \quad \text{et} \quad \sin x = \mathrm{Im}(e^{ix})$$

COROLLAIRE 109. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Si ces deux nombres réels vérifient $a^2 + b^2 = 1$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos x$ et $b = \sin x$.*

DÉMONSTRATION. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 1$. Soit $z_0 = a + ib$. Comme $|z_0| = 1$, le corollaire précédent assure l'existence de $x \in \mathbb{R}$ tel que $z_0 = e^{ix} = \cos x + i \sin x$, d'où le corollaire. □

COROLLAIRE 110. *La fonction $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ est surjective.*

DÉMONSTRATION. Soit $w \in \mathbb{C}^\times$. Écrivons $w = |w|w_0$, où $w_0 \in \mathbb{U}$. Le corollaire 107 implique l'existence de $y \in \mathbb{R}$ tel que $w_0 = e^{iy}$. Comme $|w| \in \mathbb{R}_+^\times$, la proposition 99 implique l'existence de $x \in \mathbb{R}$ tel que $|w| = e^x$. Finalement,

$$w = e^x e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$$

où $z = x + iy$. □

Étude des fonction cosinus et sinus sur $\mathbb{C}$.

DÉFINITION 111. Définissons les fonction $\cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}$ sur $\mathbb{C}$ en posant, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$
$$\mathrm{ch}\, z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad \mathrm{sh}\, z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

La définition de cosinus donnée ici étend bien évidemment la définition précédant la définition 103.

PROPRIÉTÉ 112. $\cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh}$ *sont des fonction entières (en tant que somme de fonctions entières) :*

$$\cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$\mathrm{ch}\, z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \mathrm{sh}\, z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Proposition 113.

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z; \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z; \quad \cos z = \operatorname{ch}(iz); \quad i \sin z = \operatorname{sh}(iz);$$
$$\cos' z = -\sin z; \quad \sin' z = \cos z; \quad \operatorname{ch}' z = \operatorname{sh} z; \quad \operatorname{sh}' z = \operatorname{ch} z.$$

Recherchons désormais les zéros complexes de cos. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \cos z = 0 \quad &\iff \quad e^{iz} = -e^{-iz} \quad \iff \quad e^{iz} = e^{i(\pi - z)} \quad \iff \quad e^{i(2z-\pi)} = 1 \\ &\iff \quad i(2z - \pi) \in 2i\pi\mathbb{Z} \quad \iff \quad z \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \quad \iff \quad \left(\exists k \in \mathbb{Z} \quad z = \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \end{aligned}$$

Définition 114. Soit $\Omega = \mathbb{C} \smallsetminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$. Définissons la fonction

$$\begin{array}{rccc} \tan\colon & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{\sin z}{\cos z} \end{array}$$

Remarquons que la fonction tangente est analytique sur Ω (en tant que quotient de fonctions analytiques). Revenons à quelques identités vérifiées par cos et sin. Notons que $\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = e^{i\pi} = -1$, donc $e^{i\frac{\pi}{2}} \in \{\pm i\}$. Une étude plus poussée de la fonction $\sin|_{\mathbb{R}}$ (plus précisément le fait que $\sin' x > 0$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) montre que $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, i.e. $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$. Remarquons également $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \overline{e^{i\frac{\pi}{2}}} = -i$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{e^{iz}e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{-iz}e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2} = \frac{i\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}{2} \\ &= \frac{i^2\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}{2i} = -\sin z \end{aligned}$$

De plus, si $a, b \in \mathbb{C}$, alors

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2}\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} = \frac{1}{4}\left(e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)} + e^{-i(a+b)}\right) \\ \sin a \sin b &= \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}\frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i} = -\frac{1}{4}\left(e^{i(a+b)} - e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)} + e^{-i(a+b)}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, nous retrouvons la formule valable pour tout $a \in \mathbb{C}$ et tout $b \in \mathbb{C}$:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Étude des fonction cosinus et sinus sur $\mathbb{R}$.

Si $x \in \mathbb{R}$, alors $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \in \mathbb{R}$ et $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \in \mathbb{R}$. De plus, par définition des fonctions cosinus et sinus,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \operatorname{Re}\left(e^{ix}\right)$ et $\sin x = \operatorname{Im}\left(e^{ix}\right)$.
Les fonctions cos et sin sont $\mathcal{C}^\infty$ et vérifient $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$. De plus, les fonctions sin et cos sont 2π-périodiques (puisque $z \mapsto e^{iz}$ est 2π-périodiques).
Étudions donc ces fonctions sur $[-\pi, \pi]$. Rappelons que $\frac{\pi}{2}$ est le premier zéro positif de cos. La fonction sin est donc strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. De plus, l'égalite $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ implique que la fonction cos est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. La fonction cos possède donc un unique zéro sur l'intervalle $[0, \pi]$.
La définition de cos montre que cos est une fonction paire, tout comme la définition de sin montre que cette fonction est impaire. La fonction cos s'annule donc une seule fois sur l'intervalle $[-\pi, 0]$, et ce au point $-\frac{\pi}{2}$: $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$. De plus, $\cos(\pi) = -1$ (car $e^{i\pi} = -1$) et $\cos(-\pi) = -1$ (par parité). Notons également $\sin(\pi) = 0 = \sin(-\pi)$ (car $e^{i\pi} = -1 = e^{-i\pi}$ par $2i\pi$-parité). De plus, $1 = \cos 0 = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ donne l'égalité $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$. La fonction sin étant impaire, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Nous en déduisons le tableau de variations

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos x$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
							1		
$\sin x$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Écriture trigonométrique

THÉORÈME 115. *Soit $z \in \mathbb{C}^\times$. Alors il existe un unique $\rho > 0$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = \rho e^{i\theta}$.*

DÉMONSTRATION. **Existence :** la fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ étant surjective, il existe $w = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $z = e^w$. Dans ce cas, $z = e^a e^{ib}$, donc $\rho = e^a > 0$ et $\theta = b$ conviennent.
Unicité : supposons que l'on ait une deuxième écriture $z = \rho' e^{i\theta'}$. On a $|z| = |\rho||e^{i\theta}| = \rho$ et $|z| = |\rho'||e^{i\theta'}| = \rho'$, d'où $\rho = \rho'$. □

DÉFINITION 116. Soit $z \in \mathbb{C}^\times$. L'**argument** de z est l'ensemble des réels

$$\operatorname{Arg} z = \left\{\theta \in \mathbb{R} \ : \ z = |z|e^{i\theta}\right\}$$

D'après le théorème précédent, $\operatorname{Arg} z \neq \emptyset$ pour $z \neq 0$.

PROPOSITION 117. *Soit $z \in \mathbb{C}^\times$. Soit $\theta_0 \in \operatorname{Arg} z$. Alors*

$$\operatorname{Arg} z = \{\theta_0 + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} = \theta_0 + 2\pi\mathbb{Z}$$

DÉMONSTRATION. Soit $\theta \in \operatorname{Arg} z$.

$$\begin{aligned} z = |z|e^{i\theta} = |z|e^{i\theta_0} \quad &\iff \quad e^{i\theta} = e^{i\theta_0} \quad \iff \quad e^{i(\theta-\theta_0)} = 1 \\ &\iff \quad i(\theta - \theta_0) \in 2i\pi\mathbb{Z} \quad \iff \quad (\exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta = \theta_0 + 2k\pi) \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE-DÉFINITION 118. *Parmi les éléments de $\operatorname{Arg} z$, il en existe un unique dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Ce réel s'appelle la **détermination principale de l'argument de z** et se note $\arg z$. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$, $z = |z|e^{i\arg z}$.*

Point de vue algébrique.
$(\mathbb{R}, +)$ est un groupe abélien. $2\pi\mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$ est un sous-groupe distingué. Le groupe quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ s'appelle le **groupe des angles**. Plus précisément, notons $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la surjection canonique. Remarquons que pour $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $\widehat{\theta_0} = s(\theta_0) = \{\theta_0 + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$. De plus, sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est muni d'une loi de composition interne définie par $\widehat{\theta_0} \widehat{+} \widehat{\theta_1} = \widehat{\theta_0 + \theta_1}$ (la vérification que cette définition ne dépend pas du choix de $\theta \in \widehat{\theta_0}$ ni de celui de $\theta' \in \widehat{\theta_1}$ provient du fait $2\pi\mathbb{Z} \lhd \mathbb{R}$).
Si $z \in \mathbb{C}^\times$, alors $\operatorname{Arg} z \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. De plus,

PROPOSITION 119.

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall z' \in \mathbb{C} \qquad \operatorname{Arg}(zz') = \operatorname{Arg}(z) \widehat{+} \operatorname{Arg}(z')$$

DÉMONSTRATION. Soient $\theta \in \operatorname{Arg} z$, $\theta' \in \operatorname{Arg} z'$ et $\widetilde{\theta} \in \operatorname{Arg}(zz')$. Par définition, $z = |z|e^{i\theta}$, $z' = |z'|\, e^{i\theta'}$ et $zz' = |zz'|e^{i\widetilde{\theta}}$. L'égalité $zz' = |z||z'|e^{i(\theta+\theta')}$ montre alors $\theta + \theta' \in \operatorname{Arg}(zz')$. Comme $\widetilde{\theta} \in \operatorname{Arg}(zz')$, on a $\widehat{\theta + \theta'} = \widehat{\widetilde{\theta}}$, i.e. $\widehat{\theta} \widehat{+} \widehat{\theta'} = \widehat{\widetilde{\theta}}$, d'où la proposition. □

ATTENTION. Cette proposition n'est plus vraie lorsqu'on remplace Arg par arg.
Donnons un exemple pour lequel $\arg(zz') \neq \arg(z) + \arg(z')$. Prenons $z = z' = -i$, de sorte que $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ mais $\pi = \arg(-1) = \arg((-i) \times (-i)) \neq \arg(-i) + \arg(-i) = -\pi$.

Pour terminer ce chapitre, rappelons le morphisme

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ & t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$$

Ce morphisme est surjectif sur $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$ et $\ker \varphi = 2\pi\mathbb{Z}$. Le premier théorème d'isomorphisme implique alors

$$\mathbb{U} \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$$

Chapitre 3

Théorie de Cauchy

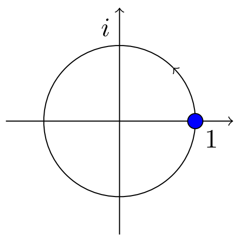
I. Chemins et lacets

Définition 120. Soit $f : [a,b] \to E$ et soit $(\mathscr{P})$ une propriété. On dite que f est $(\mathscr{P})$ par morceaux si

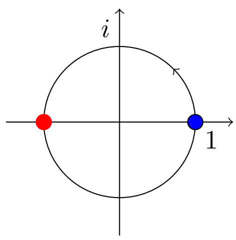
$$\exists a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b \qquad \forall i \in [\![0, n-1]\!] \qquad \exists f_i \colon\ [a_i, a_{i+1}] \to E \quad \text{qui a la propriété } (\mathscr{P})$$
$$\forall x \in \,]a_i, a_{i+1}[\qquad f(x) = f_i(x)$$

Définition 121. On appelle **chemin** toute application continue $\gamma \colon\ [a,b] \to \mathbb{C}$ qui est continûment dérivable par morceaux ($\mathcal{C}^1$ par morceaux).
Le point $\gamma(a)$ s'appelle l'**origine** du chemin. Le point $\gamma(b)$ s'appelle l'**extrémité** du chemin.
Un **lacet** est un chemin γ ayant même origine et extrémité : $\gamma(a) = \gamma(b)$.
Si $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ et si $\gamma([a,b]) \subset \mathcal{D}$, on dit que le chemin γ est contenu dans $\mathcal{D}$.

Exemple 122. L'application $\begin{array}{rccc} \gamma : & [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$ est un lacet : $\gamma(0) = 1 = \gamma(2\pi)$.



L'application $\begin{array}{rccc} \gamma_2 : & [0, 4\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$ est également un lacet, mais γ_2 est distinct de γ : en effet, γ_2 effectue deux tours de cercles.
L'application $\begin{array}{rccc} \gamma_3 : & [0, 3\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$ est bien un chemin mais n'est pas un lacet. En effet, γ_3 effectue un tours et demi autour de l'origine.



Définition 123. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin. Le chemin opposé à γ, noté γ^{op}, est défini par

$$\begin{array}{rccc} \gamma^{\text{op}} : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \gamma(a+b-t) \end{array}$$

Définition 124. Soient $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ deux chemins vérifiant $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$. On définit le chemin

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1 \vee \gamma_2 : & [a, d+b-c] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{, si } a \le t \le b \\ \gamma_2(t-b+c) & \text{, si } b \le t \le d+b-c \end{cases} \end{array}$$

Le chemin $\gamma_1 \vee \gamma_2$ s'appelle la **juxtaposition** de γ_1 et de γ_2.

Exemple 125. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin. On a

$$\begin{array}{rccc} \gamma \vee \gamma^{\text{op}} : & [a, 2b-a] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \begin{cases} \gamma(t) & \text{,si } a \le t \le b \\ \gamma(t-b+a) & \text{,si } b \le t \le 2b-a \end{cases} \end{array}$$

Ainsi, $\gamma \vee \gamma^{\mathrm{op}}$ est un lacet.

DÉFINITION 126. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin. Soit f une fonction de la variable complexe définie et continue sur $\gamma([a,b])$. On définit l'intégrale de f le long du chemin γ comme étant

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$$

DÉFINITION 127. Soit $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ une différentielle, où $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ sont **continues**. Soit $\gamma : [a,b] to \mathbb{R}^2$ un chemin : $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. On définit l'intégrale de ω le long de γ comme étant

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b \left(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right)\mathrm{d}t$$

Remarquons que l'intégrale le long de f le long de γ est l'intégrale de la différentielle $\omega(x,y) = f(x+iy)\mathrm{d}x + if(x+iy)\mathrm{d}y$ le long de γ.

PROPOSITION 128. *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin.*

(a) $\displaystyle\int_\gamma (\alpha f + g)(z)\mathrm{d}z = \alpha \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z + \int_\gamma g(z)\mathrm{d}z$

(b) $\displaystyle\int_{\gamma^{op}} f(z)\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$

(c) $\displaystyle\int_{\gamma_1 \vee \gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z$

(d) $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t$

DÉMONSTRATION. (a) Il s'agit de la linéarité de l'intégrale.

(b) Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$. La fonction $\gamma^{\mathrm{op}} : [a,b] \to \mathbb{C}$ est définie par $\gamma^{\mathrm{op}}(t) = \gamma(a+b-t)$. Nous avons

$$\int_{\gamma^{\mathrm{op}}} f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f\left(\gamma^{\mathrm{op}}(t)\right)\left(\gamma^{\mathrm{op}}\right)'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(\gamma(a+b-t)) \times (-\gamma'(a+b-t))\mathrm{d}t$$

En effectuant le changement de variable $u = a+b-t$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}t$, nous obtenons

$$\int_{\gamma^{\mathrm{op}}} f(z)\mathrm{d}z = \int_b^a f(\gamma(u))\gamma'(u)\mathrm{d}u = -\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$

(c) Il s'agit d'utiliser ici la relation de Chasles (exercice).

(d) Il s'agit de l'inégalité ...

□

Problème des primitives.

DÉFINITION 129. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application. Une application $F : \Omega \to \mathbb{C}$ est appelée une **primitive** de f sur Ω si F est holomorphe et si $F' = f$.

EXEMPLE 130. Soit f une fonction analytique sur Ω. Soit $z_0 \in \Omega$.

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall z \in \mathscr{B}(z_0,\varepsilon) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Pour $z \in \mathscr{B}(z_0,\varepsilon)$, posons $F(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ (les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont même rayon de convergence). Alors F est holomorphe sur $\mathscr{B}(z_0,\varepsilon)$ et $F'(z) = f(z)$.
En conclusion, une fonction analytique possède une primitive **localement** en tout point. Plus précisément, si f est analytique sur $\mathscr{B}(z_0,\rho)$, alors f possèdu une primitive sur $\mathscr{B}(z_0,\rho)$.
La question qui reste est la suivante : existe-t-il une primitive de f sur Ω ? Le problème consiste à recoller les primitives locales, chose qui ne peut pas être faite en toute généralité.

THÉORÈME 131. *Soit Ω un domaine. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) f possède une primitive sur Ω.

(ii) $\displaystyle\int_\gamma f(u)\mathrm{d}u = 0$ *pour tout **lacet** γ contenu dans Ω.*

Lorsque les assertions précédentes sont vérifiées, fixons $z_0 \in \Omega$. Si F est une primitive de f sur Ω, alors il existe une unique constante $c \in \mathbb{C}$ telle que

$$F(z) = c + \int_{\alpha(z)} f(u)\mathrm{d}u$$

où $\alpha(z)$ dirige n'importe quel chemin d'origine z_0 et d'extrémité z.

Démonstration. (i) $\implies$ (ii) Soit F une primitive de f sur Ω. Soit $\gamma : [a, b] \to \Omega$ un lacet.

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(u)\mathrm{d}u &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t \\ &= \Big[F \circ \gamma(t)\Big]_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0\end{aligned}$$

(ii) $\implies$ (i) Fixons $z_0 \in \Omega$. Soit $z \in \Omega$. Soient α_z et β_z deux chemins reliant z_0 à z. Alors $\alpha_z \vee \beta_z^{\mathrm{op}}$ est un lacet et d'après (ii), $\displaystyle\int_{\alpha_z \vee \beta_z^{\mathrm{op}}} f(u)\mathrm{d}u = 0$. Or

$$\int_{\alpha_z \vee \beta_z^{\mathrm{op}}} f(u)\mathrm{d}u = \int_{\alpha_z} f(u)\mathrm{d}u - \int_{\beta_z} f(u)\mathrm{d}u$$

d'où l'égalité $\displaystyle\int_{\alpha_z} f(u)\mathrm{d}u = \int_{\beta_z} f(u)\mathrm{d}u$. Ainsi, $\displaystyle\int_{\alpha_z} f(u)\mathrm{d}u$ ne dépend pas du chemin α_z choisi. L'application

$$\begin{array}{rccc} F\colon & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \displaystyle\int_{\alpha_z} f(u)\mathrm{d}u \end{array}$$

est donc bien définie. L'application f est analytique : il existe donc $r > 0$ et une série entière $\sum a_n u^n$ de rayon de convergence $\geq r$ telle que pour tout $u \in \mathscr{B}(z, r)$, $f(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (u - z)^n$. Comme vu dans l'exemple précédent, l'application $F_0 : \mathscr{B}(z, r) \to \mathbb{C}$ définie par $F_0(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(u - z)^{n+1}$ est une primitive locale de f définie sur $\mathscr{B}(z, r)$. Soit $y \in \mathscr{B}(z, r)$. Soit $\gamma_y\colon [a, b] \to \mathscr{B}(z, r)$ un chemin reliant z à y.

$$\int_{\gamma_y} f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b f(\gamma_y(t))\gamma_y'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\gamma_y(t) - z)\gamma_y'(t)\mathrm{d}t$$

Afin d'interchanger les signes somme et intégrale, remarquons que le chemin dirigé par γ_y est contenu dans un compact $K \subseteq \mathscr{B}(z, r)$. En effet, γ_y est continue et $[a, b]$ est compact, donc $\gamma_y([a, b])$ est compact. La série converge normalement dans un compact inclus dans $\mathscr{B}(z, r)$, les signes somme et intégrale peuvent être intervertis.

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_y} f(u)\mathrm{d}u &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b (\gamma_y(t) - z)\gamma_y'(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left[\frac{(\gamma_y(t) - z)^{n+1}}{n+1}\right]_a^b \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(y - z)^{n+1}}{n+1} = F_0(y)\end{aligned}$$

Afin de faire le lien entre F et F_0, considérons le chemin $\alpha_y = \alpha_z \vee \gamma_y$ reliant z_0 à y :

$$F(y) = \int_{\alpha_y} f(u)\mathrm{d}u = \underbrace{\int_{\alpha_z} f(u)\mathrm{d}u}_{\text{constante}} + \int_{\gamma_y} f(u)\mathrm{d}u = \underbrace{F(z)}_{\text{constante}} + F_1(y)$$

Ainsi, F est bien une primitive de f sur $\mathscr{B}(z, r)$. Ceci étant valable pour tout $z \in \Omega$, l'application F est donc une primitive de f sur Ω.

Soit $\widetilde{F}$ une seconde primitive de f sur Ω. Ω étant connexe, l'égalité $\left(\widetilde{F} - F\right)' = 0$ implique l'existence d'une unique constante $c \in \mathbb{C}$ telle que $\widetilde{F}(z) = c + F(z)$. $\square$

EXEMPLE 132. Soient $\Omega = \mathbb{C}^\times$ et f définie sur Ω par $f(z) = \frac{1}{z}$. Considérons le lacet $\gamma : \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{it} \end{array}$.

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}\mathrm{d}t = 2i\pi \neq 0$$

L'application $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'admet donc pas de primitive sur $\mathbb{C}^\times$.

II. Homotopie

DÉFINITION 133. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Soient $\gamma_1 \colon [a,b] \to \mathbb{U}$ et $\gamma_2 \colon [a,b] \to \mathbb{U}$ deux chemins. On appelle **homotopie** (dans U) de γ_1 sur γ_2 toute application **continue** $\varphi : [a,b] \times [c,d] \to U$ (où $c < d$) vérifiant

$$\forall t \in [a,b] \qquad \varphi(t,c) = \gamma_1(t) \quad \wedge \quad \varphi(t,d) = \gamma_2(t)$$

Les chemins dirigés par γ_1 et γ_2 sont alors dit **homotopes** (dans U).
Si de plus γ_1 et γ_2 sont des lacets, et si

$$\forall s \in [a,b] \qquad \varphi(a,s) = \varphi(b,s)$$

alors φ est appelée une **homotopie de lacets**

REMARQUE 134. Soient $\gamma_1 \colon [a,b] \to \mathbb{U}$ et $\widetilde{\gamma_2} \colon \left[\widetilde{a},\widetilde{b}\right] \to \mathbb{U}$ deux chemins (où $a < b$ et $\widetilde{a} < \widetilde{b}$). Définissons le chemin $\gamma_2 \colon [a,b] \to \mathbb{U}$ en posant

$$\gamma_2(t) = \widetilde{\gamma_2}\left(\frac{\widetilde{b} - \widetilde{a}}{b-a}(t-a) + \widetilde{a}\right)$$

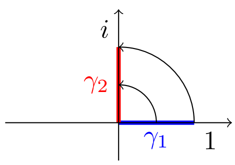
Alors γ_2 et $\widetilde{\gamma_2}$ dirigent le même chemin. Les chemins γ_1 et $\widetilde{\gamma_2}$ sont dit **homotopes** si les chemins γ_1 et γ_2 sont homotopes.

EXEMPLES 135.

1. Soient $\gamma_1 \colon \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & t \end{array}$ et $\gamma_2 \colon \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & it \end{array}$. Montrons que ces deux chemins sont homotopes. En effet, l'application

$$\varphi\colon \begin{array}{ccc} [0;1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (t,s) & \longmapsto & te^{is} \end{array}$$

réalise une homotopie de γ_1 sur γ_2.



2. Soient $\gamma_1, \gamma_2 \colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ les lacets définis par $\gamma_1(t) = e^{it}$ et $\gamma_2(t) = 0$. Alors γ_1 et γ_2 sont homotopes dans $\mathbb{C}$. En effet, l'application

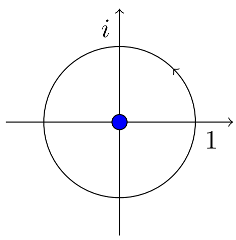
$$\varphi\colon \begin{array}{ccc} [0,2\pi] \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & (1-s)e^{it} \end{array}$$

réalise une homotopie de γ_1 sur γ_2. Remarquons que γ_2 est un lacet constant.

DÉFINITION 136. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et soit γ un lacet dans Ω. Le lacet γ est dit **homotope à un point** si γ est homotope à un lacet constant (dans Ω et via une homotopie de lacet).

Remarquons que dans l'exemple précédent, le lacet γ_1 est homotope à un point.

EXEMPLE 137. Soit $\Omega = \mathbb{C}^\times$ et $\gamma \colon [0,2\pi] \to \Omega$ le lacet défini par $\gamma(t) = e^{it}$. Alors γ n'est pas homotope à un point (la démonstration sera donnée plus tard). Intuitivement, le lacet entoure le point 0 et on ne peut pas le contracter sur un autre point de $\mathbb{C}^\times$ car il ne peut passer par 0.



DÉFINITION 138. Un domaine $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ est dit **simplement connexe** si tout lacet de $\mathcal{D}$ est homotope à un point dans $\mathcal{D}$.

EXEMPLE 139. $\mathcal{D} = \mathbb{C}$ est simplement connexe. En effet, soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet. Définissons

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & [a,b]\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & (1-s)\gamma(t) \end{array}$$

réalise une homotopie de lacets entre γ et le lacet constant égal à 0.

THÉORÈME 140. *Un ouvert étoilé est un domaine simplement connexe.*

DÉMONSTRATION. Soit Ω un ouvert étoilé par rapport à $w \in \Omega$. Pour tout $z \in \Omega$, $[z,w] \subseteq \Omega$. Soit $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un lacet dans Ω. Définissons

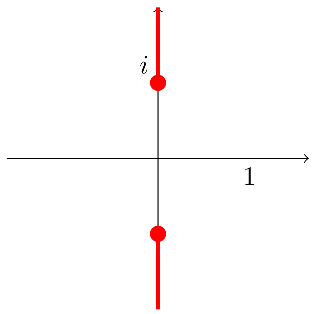
$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & [a,b]\times[0;1] & \longrightarrow & \Omega \\ & (t,s) & \longrightarrow & (1-s)\gamma(t)+sw \end{array}$$

L'application φ est bien à valeur dans Ω puisque pour tout $(t,s) \in [a,b]\times[0;1]$, $\varphi(t,s) \in [\gamma(t),w] \subseteq \Omega$. De plus, pour tout $t \in [a,b]$, $\varphi(t,0) = \gamma(t)$ et $\varphi(t,1) = w$. L'application φ réalise donc une homotopie de γ sur le lacet constant égal à w, remarque qui termine la démonstration. $\square$

APPLICATIONS 141.

1. $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est simplement connexe. Plus précisément, $\mathcal{D}$ est étoilé par rapport à tout $w \in \mathbb{R}_+^\times$, et $\mathcal{D}$ n'est pas étoilé par rapport à $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. En effet, soit $w \in \mathcal{D}$, $w \notin \mathbb{R}_+^\times$. Alors $-w \notin \mathbb{R}_-$ et $0 \in [-w,w]$ donc $[-w,w] \not\subseteq \mathcal{D}$. Ainsi, $\mathcal{D}$ n'est pas étoilé par rapport à w.
   Soit $w \in \mathbb{R}_+^\times$. Soit $z \in \mathcal{D}$.
   - Si $z \in \mathbb{R}_+^\times$, alors $[w,z] \subseteq \mathbb{R}_+^\times \subseteq \mathcal{D}$.
   - Si $z \notin \mathbb{R}$, alors $[w,z] = \{(1-s)w+sz \ : \ s \in [0;1]\}$. Soit $s \in [0;1]$. Si $s = 0$, alors $(1-s)w+sz = w \notin \mathbb{R}_-$. Si $s \neq 1$, alors $\operatorname{Im}((1-s)w+sz) = (1-s)\operatorname{Im} w + s\operatorname{Im} z = s\operatorname{Im} z \neq 0$, donc $(1-s)w+sz \notin \mathbb{R}_-$.

   Ainsi, $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est bien simplement connexe.
2. $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{]-\infty,-i] \cup [i,+\infty[\} = \mathbb{C} \setminus \{iy \ : \ y \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[\}$.



1. Décrire $\mathcal{D}$.
2. Montrer que $\mathcal{D}$ est étoilé par rapport aux points de $]-i,i[$ et seulement par rapports à eux.
3. En déduire que $\mathcal{D}$ est simplement connexe.

III. Théorème de Cauchy

THÉORÈME 142 (CAUCHY). *Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ un domaine. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Soient γ_1, γ_2 deux lacets de $\mathcal{D}$ **homotopes** dans $\mathcal{D}$. Alors*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z$$

DÉMONSTRATION. Soit $\varphi : [a,b]\times[c,d] \to \mathcal{D}$ une homotopie de lacets entre γ_1 et γ_2. L'application φ étant continue et $[a,b]\times[c,d]$ étant compact, l'image $A = \varphi([a,b]\times[c,d])$ est compacte dans $\mathcal{D}$. Il existe donc $\rho > 0$ tel que $z - w| > \rho$ dès que $z \in A$ et $w \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{D}$. De plus, $[a,b]\times[c,d]$ étant compact, l'application φ est uniformément continue :

$$\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (t,s) \in [a,b]\times[c,d] \quad \forall (t',s') \in [a,b]\times[c,d] \\ \qquad \|(t,s)-(t',s')\|_\infty < \eta \quad \Longrightarrow \quad |\varphi(t,s)-\varphi(t',s')| < \varepsilon \end{array}$$

Ainsi, pour $\varepsilon = \rho$, choisissons $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left(|t-t'| < \frac{2(b-a)}{n} \quad \wedge \quad |s-s'| < \frac{2(d-c)}{n}\right) \quad \Longrightarrow \quad |\varphi(t,s)-\varphi(t',s')| < \rho$$

Introduisons désormais la subdivision $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ de $[a,b]$, où $x_k = a + \dfrac{k(b-a)}{n}$, et la subdivision $y_0 = c < y_1 < \cdots < y_{n-1} < y_n = d$ de $[c,d]$, où $y_k = c + \dfrac{k(d-c)}{n}$ $(0 \le k \le n)$. D'après la définition de ρ, pour tout $(k,l) \in (\llbracket 0,n \rrbracket)^2$, $\mathscr{B}(\varphi(x_k,y_l),\rho) \subseteq \mathcal{D}$. Pour $l \in \llbracket 0,n \rrbracket$, notons $\alpha_l : [a,b] \to \mathcal{D}$ le lacet défini par $\alpha_l(t) = \varphi(t,y_l)$. Nous allons montrer que pour tout $l \in \llbracket 0,n-1 \rrbracket$, $\displaystyle\int_{\alpha_l} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\alpha_{l+1}} f(z)\mathrm{d}z$. Ceci terminera la démonstration puisque $\gamma_1 = \alpha_0$ et $\gamma_2 = \alpha_n$.
Soit $k \in \llbracket 0,n-1 \rrbracket$. Soit $l \in \llbracket 0,n-1 \rrbracket$. Nous nous intéressons dans un premier temps aux deux bouts chemins de $\alpha_{k,l} = \alpha_l|_{[x_k,x_{k+1}]}$ et $\alpha_{k,l+1} = \alpha_{l+1}|_{[x_k,x_{k+1}]}$. Par définition de l'entier n, ces deux bouts de chemins sont inclus dans $\mathscr{B}(\varphi(x_k,y_l),\rho) \subseteq \mathcal{D}$. Si $1 \le k \le n-1$, relions $\alpha_l(x_k) = \varphi(x_k,y_l)$ à $\alpha_{l+1}(x_k) = \varphi(x_k,y_{l+1})$ par un chemin, que l'on notera $\beta_{k,l}$, contenu dans $\mathscr{B}(\alpha_l(x_k),\rho) \cap \mathscr{B}(\alpha_l(x_{k-1}),\rho) \cap \mathscr{B}(\alpha_l(x_{k+1}),\rho)$. Si $k \in \{0,n\}$, alors $\varphi(x_0,y_l) = a$ pour tout $l \in \llbracket 0,n \rrbracket$: on définit $\beta_{0,l} = \beta_{n,l}$ comme le chemin constant égal à $\gamma_1(a)$.
Intéressons-nous désormais au lacet $\alpha_{k,l} \vee \beta_{k+1,l} \vee \alpha_{k,l+1}^{\mathrm{op}} \vee \beta_{k,l}^{\mathrm{op}}$ contenu dans $\mathscr{B}(\varphi(x_k,y_l),\rho)$. La fonction f étant analytique dans $\mathscr{B}(\varphi(x_k,y_l),\rho)$, l'exemple 130 montre que f admet une primitive sur $\mathscr{B}(\varphi(x_k,y_l),\rho)$. Le théorème 131 implique alors $\displaystyle\int_{\alpha_{k,l} \vee \beta_{k+1,l} \vee \alpha_{k,l+1}^{\mathrm{op}} \vee \beta_{k,l}^{\mathrm{op}}} f(z)\mathrm{d}z = 0$, autrement dit

$$\int_{\alpha_{k,l+1}} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\alpha_{k,l}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\beta_{k+1,l}} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\beta_{k,l}} f(z)\mathrm{d}z$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_{l+1}} f(z)\mathrm{d}z &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\alpha_{k,l+1}} f(z)\mathrm{d}z \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\alpha_{k,l}} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\beta_{k+1,l}} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\beta_{k,l}} f(z)\mathrm{d}z \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\alpha_{k,l}} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\alpha_l} f(z)\mathrm{d}z \qquad (\text{car } \beta_{n,l} = \beta_{0,l})
\end{aligned}$$

d'où l'égalité des deux intégrales. □

Corollaire 143. *Soit $\mathcal{D}$ simplement connexe. Toute fonction analytique sur $\mathcal{D}$ possède une primitive.*

Démonstration. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathcal{D}$ un lacet. Le lacet γ est homotope dans $\mathcal{D}$ à un lacet constant $\gamma_0 : [a,b] \to \mathcal{D}$ défini par $\gamma(t) = w \in \mathcal{D}$ pour tout $t \in [a,b]$. D'après le théorème de Cauchy,

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\gamma_0(t))\gamma_0'(t)\mathrm{d}t = 0 \qquad (\text{car } \gamma_0'(t) = 0)$$

Le théorème 131 implique alors que f admet une primitive sur $\mathcal{D}$. □

Exemple 144 (de domaine non simplement connexe). Soit $w \in \mathbb{C}$ et soit $\mathcal{D} = \mathbb{C} \smallsetminus \{w\}$. Considérons le lacet

$$\gamma : \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathcal{D} \\ t & \longmapsto & w + e^{it} \end{array}$$

L'application $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{1}{z-w}$ est analytique sur $\mathcal{D}$. Si γ était homotope à un lacet constant dans $\mathcal{D}$, alors $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-w} = 0$. Cependant,

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-w} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-w}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} i\mathrm{d}t = 2i\pi \neq 0$$

Ainsi, $\mathcal{D}$ n'est pas simplement connexe.

Théorème-Définition 145. *Soit γ un lacet et soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que z_0 ne soit pas dans l'image de γ. Alors $\displaystyle\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}$ est un entier relatif.*
*Cet entier s'appelle l'**indice de $\mathbf{z_0}$ par rapport à** γ et se note $j(z_0,\gamma)$.*

Démonstration. Notons $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Considérons $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ définie par $f(t) = \gamma(t) - z_0$. Cette application ne s'annule jamais (z_0 n'est pas dans l'image de γ) et elle est de classe $\mathcal{C}^1$. Le théorème de relèvement (théorème 106) implique l'existence d'une application $\mathcal{C}^1$ par morceaux $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall t \in [a,b] \qquad f(t) = |f(t)|e^{i\theta(t)}$$

Notons $\rho : [a,b] \to \mathbb{R}$ l'application définie par $\rho(t) = |f(t)|$. f et θ étant de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, ρ est également de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Nous avons

$$j(z_0,\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}\mathrm{d}t = \frac{1}{2i\pi}\frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t$$

$$f(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)} \qquad \Longrightarrow \qquad f'(t) = \rho'(t)e^{i\theta(t)} + i\theta'(t)\rho(t)e^{i\theta(t)}$$

$$j(z_0,\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\rho'(t)e^{i\theta(t)} + i\theta'(t)\rho(t)e^{i\theta(t)}}{\rho(t)e^{i\theta(t)}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \left(\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} + i\theta'(t)\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}\mathrm{d}t + i\frac{1}{2i\pi}\theta'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2i\pi}\Big[\ln(\rho(t))\Big]_a^b + \frac{1}{2\pi}\Big[\theta(t)\Big]_a^b$$

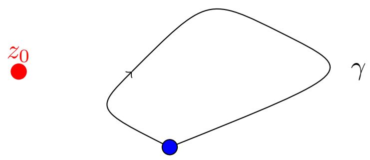
Comme γ est un lacet, f l'est également : $f(a) = f(b)$. Ainsi, $\rho(a)e^{i\theta(a)} = \rho(b)e^{i\theta(b)}$ et par conséquent, $\rho(a) = \rho(b)$ et $\theta(a) \equiv \theta(b) \mod 2\pi$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta(a) = \theta(b) + 2k\pi$. Nous avons

$$j(z_0,\gamma) = \frac{1}{2i\pi}(\ln(\rho(b)) - \ln(\rho(a))) + \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)) = k \in \mathbb{Z}$$

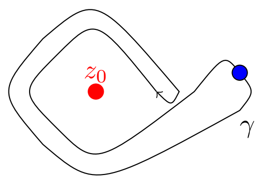
égalité qui termine la démonstration. □

Interprétation. L'indice correspond au nombre de tours orientés effectués par γ autour de z_0.

Exemples 146. 1. $j(z_0,\gamma) = 0$



2. $j(z_0,\gamma) = 0$ (un tour dans un sens, un tour dans l'autre)



Proposition 147. *Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Soient γ, γ_1 et γ_2 trois lacets ne contenant pas z_0.*

(a) $j(z_0,\gamma^{op}) = -j(z_0,\gamma)$

(b) $j(z_0,\gamma_1 \vee \gamma_2) = j(z_0,\gamma_1) + j(z_0,\gamma_2)$

Démonstration. Exercice. □

Proposition 148. *Soient γ_1 et γ_2 deux lacets ne contenant pas $z_0 \in \mathbb{C}$. Si γ_1 et γ_2 sont homotopes dans le domaine $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, alors $j(z_0,\gamma_1) = j(z_0,\gamma_2)$.*

Démonstration. Le théorème de Cauchy assure $\displaystyle\int_{\gamma_1}\frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = \int_{\gamma_2}\frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}$, d'où l'égalité souhaitée étant donné les égalités $2i\pi j(z_0,\gamma_1) = \displaystyle\int_{\gamma_1}\frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}$ et $2i\pi j(z_0,\gamma_2) = \displaystyle\int_{\gamma_2}\frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}$. □

Corollaire 149. *Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$* ***simplement connexe****.*

$$\forall z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{D} \quad \forall \gamma \text{ lacet de } \mathcal{D} \qquad j(z_0,\gamma) = 0$$

Démonstration. Nous avons $\mathcal{D} = \mathcal{D} \setminus \{z_0\}$. Le lacet γ est donc homotope au point dans $\mathcal{D} \setminus \{z_0\}$. Ainsi, $2i\pi j(z_0,\gamma) = \displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0} = 0$. □

Exercice 150. Soit $\gamma : I \to \mathbb{C}$ un lacet. Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ un domaine. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ z & \longmapsto & j(z,\gamma) \end{array}$$

est constante.

IV. Analycité et holomorphie

Théorème 151. *Soit* $\gamma\colon I = [b,c] \to \mathbb{C}$ *un* ***chemin****. Soit* $g : \gamma(I) \to \mathbb{C}$ *une application* ***continue****. Définissons*

$$f\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \gamma(I) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\int_\gamma \frac{g(u)}{u-z}\mathrm{d}u \end{array}$$

(a) f *est analytique sur* $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$.

(b) Pour $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I)$ *et pour* $n \in \mathbb{N}$*, posons* $c_n = \displaystyle\int_\gamma \frac{g(u)}{(u-a)^{n+1}}\mathrm{d}u$*. Alors*

$$\forall z \in \mathscr{B}(a, \mathbf{d}(a,\gamma(I))) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

(c) $\forall a \in \mathbb{C} \setminus \gamma(I) \qquad f^{(n)}(a) = n! c_n = n! \displaystyle\int_\gamma \frac{g(u)}{(u-a)^{n+1}}\mathrm{d}u$

Démonstration. (b) Posons $\delta = \mathbf{d}(a,\gamma(I))$. Soit $z \in \mathscr{B}(a,\delta)$. Soit $q \in [0;1[$ tel que $|z-a| = q\delta$. Soit $u \in \gamma(I)$. Alors $|u-a| \geq \delta$ et $\left|\dfrac{z-a}{u-a}\right| \leq q$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{u-z} &= \frac{1}{u-a} \times \frac{1}{1 - \dfrac{z-a}{u-a}} = \frac{1}{u-a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z-a}{u-a}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}} \end{aligned}$$

Or $f(z) = \displaystyle\int_b^c \frac{g(\gamma(t))}{\gamma(t)-z}\gamma'(t)\mathrm{d}t = \int_b^c g(\gamma(t)) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(u-a)^{n+1}}\mathrm{d}t\right) \gamma'(t)\mathrm{d}t$. Comme g et γ sont continues et comme γ' est continue par morceaux,

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [b,c] \qquad |g(\gamma(t))\gamma'(t)| \leq M$$

Ainsi, pour tout $t \in [b,c]$, $\left|g(\gamma(t))\dfrac{(z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}}\gamma'(t)\right| \leq \dfrac{M}{\delta}q^n$. Par conséquent, la série $\sum g(\gamma(t))\dfrac{(z-a)^n}{(\gamma(t)-a)^{n+1}}\gamma'(t)$ ConVerge Normalement sur $[b,c]$. Les signes sommes et intégrale peuvent donc être intervertis et

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{g(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t)-a)^{n+1}}\mathrm{d}t\right)(z-a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_\gamma \frac{g(u)}{(u-a)^{n+1}}\mathrm{d}u\right)(z-a)^n$$

d'où le (b). Les assertions (a) et (c) découlent alors de cette dernière égalité. □

Corollaire 152.

(a) Soit $\mathcal{D}$ *un domaine* ***simplement connexe****. Soit* $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ *analytique. Soit* $\gamma : I \to \mathcal{D}$ *un lacet. Alors*

$$\forall x \in \mathcal{D} \setminus \gamma(I) \qquad f(x) j(x,\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-x}\mathrm{d}z$$

(b) Dans la situation précédente,

$$\forall n \geq 0 \qquad j(x,\gamma) f^{(n)}(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

(c) Si f *est analytique sur un* ***ouvert*** $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *et si* $a \in \Omega$*, alors la série de Taylor de* f *converge en* a *et a un rayon de convergence* $R \geq \mathbf{d}(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$.

DÉMONSTRATION. (a) Soit $x \in \mathcal{D} \setminus \gamma(I)$ (fixé). Définissons

$$g\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} & , \text{ si } z \neq x \\ f'(x) & , \text{ si } z = x \end{cases} \end{array}$$

L'application g est analytique sur $\mathcal{D} \setminus \{x\}$ (en tant que différence et quotient de fonction analytiques). Le développement en série entière de f en x est

$$f(z) = f(x) + f'(x)(z-x) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(z-x)^n$$

Ainsi, pour $z \neq x$,

$$g(z) = f'(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(z-x)^n$$

Cette égalité étant valable sur un voisinage de x (privé éventuellement de x), l'égalité $g(x) = f'(x)$ implique qu'il s'agit du développement en série entière de g en x. La fonction g est donc analytique sur $\mathcal{D}$.
$\mathcal{D}$ est simplement connexe et γ est un lacet, le théorème de Cauchy implique $\displaystyle\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z = 0$. Ainsi,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-x}\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{f(x)}{z-x}\mathrm{d}z = 2i\pi f(x) j(x,\gamma)$$

égalité qui termine la démonstration de ce point.

(b) D'après le point (c) du théorème 151, la fonction $h\colon \mathcal{D} \setminus \gamma(I) \to \mathbb{C}$ définie par $h(x) = \displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z-x}\mathrm{d}z$ est développable en série entière dans un voisinage de x et

$$h^{(n)}(x) = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

Par ailleurs le point précédent implique $h(x) = 2i\pi f(x)j(x,\gamma)$. Comme l'application $x \mapsto j(x,\gamma)$ est localement constante, $h^{(n)}(x) = 2i\pi f^{(n)}(x) j(x,\gamma)$, d'où la conclusion souhaitée.

(c) Soit $0 < r < \mathbf{d}(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Soit $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ le lacet défini par $\gamma(t) = a + re^{it}$. D'après la définition de r, $\overline{\mathscr{B}(a,r)} \subseteq \mathcal{D}$. De plus, l'exemple 144 montre $j(a,\gamma) = 1$. Le point (b) du théorème 151 implique alors que le rayon de convergence du développement en série entière de f est $R \geq r$, ce qui termine la démonstration.

□

COROLLAIRE 153. *Soit f une* ***fonction entière****. Alors pour tout $a \in \mathbb{C}$, le rayon de convergence du développement en série entière de f en a vaut $+\infty$.*

THÉORÈME 154. *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$. Supposons que f est* ***continûment holomorphe*** *(en particulier f' est continue). Alors f est analytique.*

DÉMONSTRATION. Ω est ouvert : soit $r > 0$ tel que $\overline{\mathscr{B}(a,r)} \subseteq \Omega$. Considérons le lacet

$$\gamma\colon \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & a + re^{it} \end{array}$$

D'après le théorème 151, il suffit de montrer l'égalité $f(z) = \dfrac{1}{2i\pi}\dfrac{f(u)}{u-z}\mathrm{d}u$. Soit $z \in \Omega$ et définissons

$$g\colon \begin{array}{ccc} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \lambda & \longmapsto & \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z+\lambda(u-z))}{u-z}\mathrm{d}z \end{array}$$

Il suffit alors de montrer que g est constante. Nous avons

$$\begin{aligned}
g(0) &= \frac{1}{2i\pi} f(z) \int_\gamma \frac{\mathrm{d}u}{u-z} = f(z) j(z,\gamma) = f(z) \\
g(1) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u-z} \mathrm{d}u \\
g(\lambda) &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z+\lambda(\gamma(t)-z))}{\gamma(t)-z} \gamma'(t) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z+\lambda(re^{it}+a-z))}{re^{it}+a-z} ire^{it} \mathrm{d}t \\
&= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t,\lambda) \mathrm{d}t \qquad \text{où} \\
h(t,\lambda) &= \frac{f(z+\lambda(re^{it}+a-z))}{re^{it}+a-z} e^{it}
\end{aligned}$$

Comme f' est continue, pour $\lambda \in]0;1[$ $\frac{\partial h}{\partial \lambda}$ est continue. La fonction g est donc dérivable et

$$\begin{aligned}
g'(\lambda) &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial h}{\partial \lambda}(t,\lambda) \mathrm{d}t = \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(z+\lambda(re^{it}+a-z)) e^{it} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2i\pi\lambda} \Big[f(z+\lambda(re^{it}+a-z)) \Big]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

L'application g est continue sur $[0;1]$, dérivable sur $]0;1[$, $g' = 0$ sur $]0;1[$ donc g est constante sur $[0;1]$ et $g(0) = g(1)$. □

Remarque 155. Le théorème précédant donne l'équivalence :

$$f \text{ analytique} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ continûment holomorphe}$$

L'équivalence suivante, qui est vraie, sera admise.

$$f \text{ analytique} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ holomorphe}$$

Corollaire 156. *Soit $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ un domaine. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f' = 0$. Alors il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = c$ pour tout $z \in \mathcal{D}$.*

Démonstration. Soit $z_0 \in \mathcal{D}$. D'après le théorème précédant, f est analytique sur $\mathcal{D}$. Alors f est développable en série entière autour de z_0 :

$$\exists r > 0 \quad \exists \sum a_n z^n \text{ de rayon } \geq r \quad \forall x \in \mathscr{B}(z_0,r) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-z_0)^n$$

La dérivée f' est également développable en série entière autour de z_0 :

$$\forall x \in \mathscr{B}(z_0,r) \qquad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} (x-z_0)^n$$

Or $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathscr{B}(z_0,r)$. Le corollaire 58 implique alors que $a_{n+1} = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$, autrement dit que $f(x) = a_0$ pour tout $x \in \mathscr{B}(z_0,r)$.
Considérons $A = \{z \in \mathcal{D} \ : \ f(z) = a_0\}$ et $B = \{z \in \mathcal{D} \ : \ f(z) \neq a_0\}$. Comme f est continue, B est ouvert. La partie A est ouverte d'après les considérations qui précèdent. De plus, $A \cup B = \mathcal{D}$ et $A \cap B = \emptyset$. Comme $\mathcal{D}$ est connexe, on a soit $\mathcal{D} = A$, soit $\mathcal{D} = B$. Comme $z_0 \in A$, $\mathcal{D} = A$ et f est bien constante sur $\mathcal{D}$. □

V. Conditions de Cauchy-Riemann

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application. Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons à f vue comme une application $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$, où $\overline{\Omega} = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x+iy \in \Omega \right\}$.
À cette fin, si $z \in \Omega$, écrivons $z = x+iy$ (où $x,y \in \mathbb{R}$) et

$$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y), \qquad P(x,y) = \mathrm{Re}(f(x+iy)), \quad R(x,y) = \mathrm{Im}(f(x+iy))$$

Définissons également

$$F(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y), \qquad F : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$$

Théorème 157 (Conditions de Cauchy-Riemann). *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) f est holomorphe sur Ω

(ii) F *est différentiable sur* $\overline{\Omega}$ *et* $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) + i\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0$

(iii) P *et* Q *sont différentiables sur* $\overline{\Omega}$ *et*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y); \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (ii) : soit $z \in \Omega$, $z = x+iy$. Posons $c = f'(z) = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{f(z+u)-f(z)}{u}$. Cette dernière égalité implique

$$f(z+u) = f(z) + cu + o(u)$$

Décomposons $u = h+ik$, où $h,k \in \mathbb{R}$ et passons à la fonction F. L'égalité précédente devient

$$\begin{aligned} F(x+h,y+k) &= F(x,y) + hc + ikc + o(z) \\ &= F(x,y) + hc + ikc + o(h,k) \qquad \left(\text{car } |z| = \sqrt{h^2+k^2} \leq 2\max(|h|,|k|)\right) \end{aligned}$$

Ainsi, F est différentiable sur $\overline{\Omega}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = c$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = ic$. La détermination de ces deux dernières valeurs implique l'égalité $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) + i\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0$, d'où le point (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : l'application F est différentiable en $\binom{x}{y}$ donc

$$\begin{aligned} F(x+h,y+k) &= F(x,y) + h\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) + o(h,k) \\ P(x+h,y+k) &= \mathrm{Re}(F(x+h,y+k)) = P(x,y) + h\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right) + k\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right) + o(h,k) \\ Q(x+h,y+k) &= \mathrm{Im}(F(x+h,y+k)) = Q(x,y) + h\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right) + k\,\mathrm{Im}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right) + o(h,k) \end{aligned}$$

Les applications P et Q sont donc différentiables en $\binom{x}{y}$ et

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) &= \mathrm{Re}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right) & \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= \mathrm{Re}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) &= \mathrm{Im}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) &= \mathrm{Im}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right) \end{aligned}$$

Il suffit désormais d'utiliser l'égalité satisfaite par les dérivée partielles de F :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right) + i\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\right) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0\right) \end{aligned}$$

d'où le point (iii).

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : soit $\binom{x}{y} \in \overline{\Omega}$. Posons $z = x+iy \in \Omega$ et $u = h+ik$ (où $x,y,h,k \in \mathbb{R}$). On a

$$\begin{aligned} f(z+u) &= f((x+h)+i(y+k)) = F(x+h,y+k) = P(x+h,y+k) + iQ(x+h,y+k) \\ &= P(x,y) + h\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + k\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + iQ(x,y) + ih\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) + ik\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) + o(h,k) \\ &= f(z) + h\left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) + k\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial P}{\partial x}(x,y)\right) + o(h,k) \\ &\qquad \left(\text{car} \quad \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) \\ &= f(z) + \left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)(h+ik) + o(h,k) \\ &= f(z) + \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)}_{\in\mathbb{C} \quad \text{fixé}} u + o(z) \end{aligned}$$

On en déduit que f est holomorphe en z et que $f'(z) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) - i\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)$, ce qui montre le point (i). □

Corollaire 158. *En gardant les notations précédentes, si f est holomorphe, alors P et Q sont $\mathcal{C}^\infty$. Réciproquement, si P et Q sont de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifient*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

alors f est holomorphe.

Démonstration. Si f est holomorphe, alors f est indéfiniment dérivable. De plus, si f est holomorphe, alors $f'(x+iy) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(x,y) - i\dfrac{\partial P}{\partial y}(x,y)$. Le théorème 157 implique alors que P et Q sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Réciproquement, le théorème 157 implique que f est holomorphe. ☐

Corollaire 159. *En gardant les notations précédentes, si f est holomorphe, alors P et Q harmoniques (i.e. annulées par le laplacien).*

Démonstration. La fonction f est holomorphe. Le corollaire précédent implique que P et Q sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. Le théorème 157 donne alors l'implication suivante.

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right)\\ &\qquad\qquad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}(x,y) \;\text{ et }\; \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x}(x,y)\right)\end{aligned}$$

Le théorème de Schwarz donne alors $\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 0$, c'est-à-dire que P est harmonique. On montre de manière identique que Q est également harmonique. ☐

VI. Fonctions logarithmes et puissances

Théorème 160. *On considère $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \;:\; -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$. Alors*

(a) $z \mapsto e^z$ est injective sur Ω, d'image $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$

*(b) la fonction réciproque de la restriction de $z \mapsto e^z$ à Ω , notée $\log$ et appelée **détermination principale du logarithme**, vérifie*

$$\forall w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \quad \log w = \ln|w| + i\arg(w)$$

(c) $z \mapsto \log z$ est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et $\log' z = \frac{1}{z}$.

Démonstration. (a) Rappelons que $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 - z_2 \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Si $z_1, z_2 \in \Omega$, alors $\operatorname{Im}(z_1 - z_2) \in]-2\pi, 2\pi[$. Ainsi, si $z_1, z_2 \in \Omega$ vérifient $e^{z_1} = e^{z_2}$, alors $z_1 - z_2 \in 2i\pi\mathbb{Z} \cap]-2i\pi, 2i\pi[= \{0\}$, ce qui montre l'injectivité de $\exp|_\Omega$.
Notons $I = \exp(\Omega)$ l'image par la fonction exponentielle de Ω :

$$w \in I \quad \iff \quad (\exists z \in \Omega \quad w = e^z)$$

Soit $z = x + iy \in \Omega$. Nous avons $e^z = e^x e^{iy}$. L'étude menée précédemment de la restriction de $\exp$ à $\mathbb{R}$ montre que $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^\times$. L'étude menée précédemment de $\mathbb{U}$ (le cercle unité) montre que $\exp(]-i\pi, i\pi[) = \mathbb{U} \setminus \{-1\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} w \in I \quad &\iff \quad \left(\exists \rho \in \mathbb{R}_+^\times \quad \exists \alpha \in \mathbb{U} \setminus \{-1\} \quad w = \rho\alpha\right)\\ &\iff \quad w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-\end{aligned}$$

(b) Soit $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Par définition de $\log w$, $e^{\log w} = w$. En écrivant $\log w = x + iy$ (où $-\pi < y < \pi$) nous obtenons $w = e^{\log w} = e^x e^{iy}$. Ainsi, en identifiant,

$$(e^x = |w| \quad \text{et} \quad y = \arg(w)) \quad \iff \quad (x = \ln|w| \quad \text{et} \quad y = \arg(w))$$

(c) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Remarquons que $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est étoilé par rapport à 1 : $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est donc simplement connexe. Soit $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(z,r) \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Posons $Y = \log z$. Pour $h \in \mathrm{B}(0,r)$, définissons k à l'aide de la formule $Y + k = \log(z+h)$. Il s'avère alors que $\dfrac{\log(z+h) - \log z}{h} = \dfrac{k}{h}$. Travaillons par implications.

$$\begin{aligned}(Y = \log z \quad \text{et} \quad Y + k = \log(z+h)) \quad &\Longrightarrow \quad \left(e^Y = z \quad \text{et} \quad e^{Y+k} = z + h\right)\\ &\Longrightarrow \quad h = e^{Y+k} - e^Y = e^Y(e^k - 1) = z(e^k - 1)\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\log(z+h) - \log z}{h} = \frac{k}{h} = \frac{1}{z} \cdot \frac{k}{e^k - 1}$$

Or les applications $z \mapsto \log z$, $z \mapsto \arg z$ et $z \mapsto \ln z$ sont continues et $k = \log(z+h) - \log z$, donc lorsque $h \to 0$, on a $k \to 0$. Prenons donc le Développement en Série Entière de exp en 0 :

$$e^k = 1 + k + \frac{k^2}{2} + \dots \quad \Longrightarrow \quad \frac{e^k - 1}{k} = 1 + \frac{k}{2} + \dots$$

Cette égalité montre donc que lorsque $h \to 0$, on a $\frac{e^k - 1}{k} \to 1$, c'est-à-dire

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log(z+h) - \log z}{h} = \frac{1}{z}$$

i.e. log est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et de dérivée $z \mapsto \frac{1}{z}$. □

Remarque 161.

1. $z \mapsto \log z$ est une primitive de $z \mapsto \frac{1}{z}$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Il s'agit de **la** primitive de $z \mapsto \frac{1}{z}$ vérifiant $\log 1 = 0$.
2. $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^\times$ puisque $\displaystyle\int_{\substack{\mathbb{U} \\ \text{orienté } +}} \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2i\pi \neq 0$.
3. Soit $g : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ **continue** telle que
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \quad e^{g(z)} = z$$
Alors
$$\exists n \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \quad g(z) = \log z + 2in\pi$$

Démonstration. 3. $e^{g(z)} = e^{\log z} \quad \Longrightarrow \quad \exists! n(z) \in \mathbb{Z} \quad \log z = g(z) + 2in(z)\pi$
Ceci permet de définir une application

$$\begin{array}{rccc} n : & \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & z & \longmapsto & \dfrac{g(z) - \log(z)}{2i\pi} \end{array}$$

Les fonctions log et g étant continues, l'application n définie ci-dessus est également continue. L'ensemble $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ est connexe. Comme l'image continue d'un connexe est connexe, l'image de n est donc un sous-ensemble connexe de $\mathbb{Z}$. L'ensemble $\mathbb{Z}$ étant discret (du point du vue topologique), un connexe de $\mathbb{Z}$ est obligatoirement un singleton. L'application n est donc constante sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, d'où cette dernière remarque. □

Remarque 161 (suite).

4. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \quad e^{\log z} = z$
Attention : $\log(e^z) = z \iff z \in \Omega$
5. Pour $n \in \mathbb{Z}$, notons $g_n : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \to \mathbb{C}$ l'application définie par $g_n(z) = 2in\pi + \log z$. Les applications g_n sont les uniques applications continues g définies sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ vérifiant $e^{g(z)} = z$.

Exemple 162. $\log(e^{2i\pi}) = \log 1 = \log(e^0) = 0$ car $2i\pi \notin \Omega$ mais $0 \in \Omega$. Ainsi, pour $z = 2i\pi$, on a $\log(e^z) \neq z$.

Remarque 163 (suite).

6. Généralement, $\log(zz') \neq \log(z) + \log(z')$

Exemple 164. Choisissons $z = i = e^{\frac{i\pi}{2}}$ et $z' = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, de telle sorte que $\log z = \frac{i\pi}{2}$ et $\log z' = \frac{2i\pi}{3}$. Cependant, $\log(zz') = \log\left(e^{\frac{7i\pi}{6}}\right) = \log\left(e^{-\frac{5i\pi}{6}}\right) = -\frac{5i\pi}{6} \neq \log z + \log z'$.

Proposition 165.

$$\forall z \in \mathscr{B}(0,1) \quad \log(1+z) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

Démonstration. Rappelons que $\frac{1}{1+z} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n$, le rayon de convergence de la série précédente étant $R = 1$. La dérivée (au sens complexe) de $z \mapsto \log(1+z)$ est $z \mapsto \frac{1}{1+z}$. Le théorème sur l'intégration terme à terme d'une série entière permet donc de conclure à l'égalité

$$\forall z \in \mathscr{B}(0,1) \quad \log(1+z) = \log(1) + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

□

Définition 166. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On appelle **détermination principale de la fonction «puissance α»** l'application notée $z \mapsto z^\alpha$ et définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \exp(\alpha \log z) \end{array}$$

Exemple 167. $i^i = e^{i \log i} = e^{-\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R}$.

Proposition 168. *(a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. L'application $z \mapsto z^\alpha$ est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$.*
(b) $\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \forall \beta \in \mathbb{C} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \quad z^{\alpha+\beta} = z^\alpha z^\beta$

Démonstration. (a) $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ est analytique en tant que composée d'applications analytiques (la fonction $\exp$ est analytique sur $\mathbb{C}$). De plus, d'après la règle de la dérivée de la composée,

$$(z^\alpha)' = \frac{\alpha}{z} e^{\alpha \log z} = \alpha e^{-\log z + \alpha \log z} = \alpha e^{(\alpha-1)\log z} = \alpha z^{\alpha-1}$$

□

Attention. On peut avoir $z_1^\alpha z_2^\alpha \neq (z_1 z_2)^\alpha$.

Exemple 169. Si $z = \rho e^{i\theta}$ où $\theta \in \,]-\pi, \pi[$, alors $z^i = e^{-\theta + i \ln \rho}$ et $|z^i| = e^{-\theta} \in \,]e^{-\pi}, e^{\pi}[$. En prenant $z = -1 - i = \sqrt{2} e^{-\frac{3i\pi}{4}}$, on obtient $|z^i| = e^{\frac{3\pi}{4}}$. Choisissons donc $z_1 = z_2 = z$, de sorte que

$$\left|(z_1)^i (z_2)^i\right| = \left|(z_1)^i\right| \cdot \left|(z_2)^i\right| = e^{\frac{3\pi}{2}} \neq \left|(z_1 z_2)^i\right| = \left|\left(2e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^i\right| = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

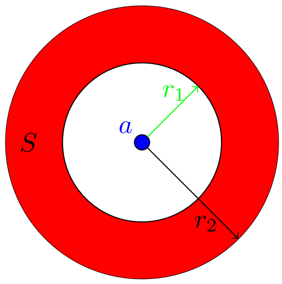
Chapitre 4

Singularités et résidus

I. Points singuliers isolés et séries de Laurent

Définition 170. Soit $a \in \mathbb{C}$ et soient $0 < r_1 < r_2$. On appelle **couronne** de centre a et de rayons r_1, r_2 l'ensemble

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}(a, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ r_1 < |z-a| < r_2\}$$



Lemme 171. *Soit $\mathscr{S} = \mathscr{S}(a, r_1, r_2)$. Soit $f : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ analytique. Soient $r, \widetilde{r} > 0$ vérifiant $r_1 < r < \widetilde{r} < r_2$. Intéressons-nous aux deux lacets $\gamma, \widetilde{\gamma} : [0, 2\pi] \to \mathscr{S}$ de $\mathscr{S}$ définis par $\gamma(t) = a + re^{it}$ et $\widetilde{\gamma}(t) = a + \widetilde{r}e^{it}$. Alors*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\widetilde{\gamma}} f(z)\mathrm{d}z$$

Démonstration. Les lacets γ et $\widetilde{\gamma}$ sont homotopes dans $\mathscr{S}$. En effet, l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0;1] \times [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathscr{S} \\ (s,t) & \longmapsto & a + (sr + (1-s)\widetilde{r})\, e^{it} \end{array}$$

réalise une homotopie de $\widetilde{\gamma}$ sur γ restant dans $\mathscr{S}$. Le théorème de Cauchy (théorème 142) implique alors l'égalité des deux intégrales. □

Proposition 172. *En gardant les notations du lemme 171, on a*

$$\forall z \in \mathscr{S} \qquad (r < |z-a| < \widetilde{r}) \quad \Longrightarrow \quad f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{f(u)}{u-z}\mathrm{d}u - \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma} \frac{f(u)}{u-z}\mathrm{d}u$$

Démonstration. Soit $z \in \mathscr{S}$ tel que $r < |z-a| < \widetilde{r}$. Soit $g : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ définie par

$$g(u) = \begin{cases} \dfrac{f(u)-f(z)}{u-z} & \text{, si } u \neq z \\ f'(z) & \text{, si } u = z \end{cases}$$

Lors de la démonstration du corollaire 152, nous avons vu que g est analytique sur $\mathscr{S}$. Le lemme 171 implique alors que $\displaystyle\int_\gamma g(u)\mathrm{d}u = \int_{\widetilde{\gamma}} g(u)\mathrm{d}u$. Cette dernière égalité se récrit

$$\int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}\mathrm{d}u - f(z)\int_\gamma \frac{\mathrm{d}u}{u-z} = \int_{\widetilde{\gamma}} \frac{f(u)}{u-z}\mathrm{d}u - f(z)\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{\mathrm{d}u}{u-z}$$

Or $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}u}{u-z} = 2i\pi\,\mathrm{j}(z,\gamma) = 0$ et $\displaystyle\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{\mathrm{d}u}{u-z} = 2i\pi\,\mathrm{j}(z,\widetilde{\gamma}) = 2i\pi$. Il en découle l'égalité souhaitée. □

Théorème 173. *En gardant les notations du lemme 171.*

(a) Il existe deux séries entières $\sum c_n u^n$ et $\sum d_n u^n$ de rayons de convergence respectifs $R \geq r_2$ et $R' \geq \dfrac{1}{r_1}$ telles que

$$\forall z \in \mathscr{S} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n}$$

(b) Les séries $\sum c_n u^n$ et $\sum d_n u^n$ sont uniques pour cette propriété. Plus précisément, prenons $r_1 < r < r_2$ et notons $\delta : [0, 2\pi] \to \mathscr{S}$ le lacet défini par $\delta(t) = a + re^{it}$. Alors

$$\forall n \geq 0 \quad c_n = \frac{1}{2i\pi}\int_\delta \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\mathrm{d}u \qquad\qquad \forall m \geq 1 \quad d_m = \frac{1}{2i\pi}\int_\delta f(u)(u-a)^{m-1}\mathrm{d}u$$

Démonstration. (a) Soit $z \in \mathscr{S}$. Choisissons $r, \widetilde{r} > 0$ tels que $r_1 < r < |z-a| < \widetilde{r} < r_2$. Soit $I = [0; 2\pi]$ et soient $\gamma, \widetilde{\gamma} : I \to \mathscr{S}$ les lacets définis par $\gamma(t) = a + re^{it}$ et $\widetilde{\gamma}(t) = a + \widetilde{r}e^{it}$. D'après le théorème 151, l'application $z \longmapsto \frac{1}{2i\pi}\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{f(u)}{u-z}\mathrm{d}u$ $\left(\text{resp. } z \longmapsto \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}\mathrm{d}u\right)$ est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \widetilde{\gamma}(I)$ (resp. $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$). De plus, la formule de Cauchy assure que pour tout $z \in \mathscr{B}(a, \widetilde{r})$,

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\widetilde{\gamma}} \frac{f(u)}{u-z}\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n; \qquad\qquad c_n = \int_{\widetilde{\gamma}} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\mathrm{d}u.$$

Intéressons-nous désormais à la seconde intégrale. Si $u \in \gamma(I)$, comme $z \in \{w \in \mathbb{C} \ : \ |w| > r\}$, on a $\left|\frac{u-a}{z-a}\right| = \frac{r}{|z-a|} < 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{f(u)}{u-z} &= \frac{f(u)}{z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{u-a}{z-a}} = \frac{f(u)}{z-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{u-a}{z-a}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} f(u)\frac{(u-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\end{aligned}$$

Le lacet $\gamma(I)$ est compact et f est continue, donc f est majorée sur le lacet $\gamma(I)$. La série $\sum f(u)\frac{(u-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$ converge donc normalement sur $\gamma(I)$. Nous pouvons donc intervertir $\sum$ et $\int$ dans l'intégrale qui nous intéresse :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}\mathrm{d}u &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \sum_{n=0}^{+\infty} f(u)\frac{(u-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\int_\gamma f(u)(u-a)^n\mathrm{d}u \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{d_m}{(z-a)^m} \qquad\qquad \text{où } d_m = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(u)(u-a)^{m-1}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

La proposition 172 permet alors de déduire les égalités qui permettent de conclure la démonstration du point (a).

Remarque 174. Soit $r_0 \in]r_1, r_2[$. Le lacet $\gamma_0 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ d'expression $\gamma_0(t) = a + r_0 e^{it}$ est homotope à la fois à γ et à $\widetilde{\gamma}$ dans $\mathscr{S}(a, r_1, r_2)$. Le théorème de Cauchy nous donne donc les égalités

$$c_n = \int_{\gamma_0} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\mathrm{d}u \qquad\qquad d_n = \int_{\gamma_0} f(u)(u-a)^{n-1}\mathrm{d}u$$

(b) **Unicité** : Supposons que

$$\forall z \in \mathscr{S} \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c'_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d'_n}{(z-a)^n}$$

Soient $r, \widetilde{r}$ vérifiant $r_1 < r < \widetilde{r} < r_2$. Soit $m \in \mathbb{N}$. Les séries $\sum c'_n(z-a)^n$ et $\sum \frac{d'_n}{(z-a)^n}$ convergent normalement sur $\{z \in \mathbb{C} \ : \ r < |z-a| < \widetilde{r}\}$. Dans l'intégrale $\int_\gamma f(u)(u-a)^m\mathrm{d}u$, les signes $\sum$ (dû à l'égalité précédente) et $\int$ peuvent donc être intervertis.

$$\int_\gamma f(u)(u-a)^m\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty} c'_n \int_\gamma (u-a)^{m-n-1}\mathrm{d}u + \sum_{n=1}^{+\infty} d'_n \int_\gamma (u-a)^{m+n-1}\mathrm{d}u$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la valeur de $\int_\gamma (z-a)^k\mathrm{d}z$, où $k \in \mathbb{Z}$.

$$\int_\gamma (z-a)^k\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} r^k e^{ikt} ire^{it}\mathrm{d}t = \begin{cases} r^{k+1}\left[\frac{e^{i(k+1)t}}{k+1}\right]_0^{2\pi} = 0 & \text{si } k \neq -1 \\ 2i\pi r^{k+1} & \text{si } k = -1\end{cases}$$

Nous pouvons donc en déduire que, si $m \geq 0$, alors $\displaystyle\int_\gamma f(z)(z-a)^m \mathrm{d}z = 0 + 2i\pi d'_m$. Si $m < 0$, alors $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^m} \mathrm{d}z = 2i\pi c'_{-m-1} + 0$. L'unicité découle des égalités

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)(z-a)^m \mathrm{d}z = \begin{cases} c_{-m-1} & \text{, si } m < 0 \\ d_{m+1} & \text{, si } m \geq 0 \end{cases}$$

démontrées au point (a). □

DÉFINITION 175. En gardant les notations du lemme 171.
L'écriture $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n}$ s'appelle le **développement en série de Laurent** de la fonction f en a sur $\mathscr{S} = \mathscr{S}(a, r_1, r_2)$.

EXEMPLE 176. La fonction $f(z) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} z^n + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n z^n}$ est analytique sur $\mathscr{S} = \mathscr{S}\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$. On vérifie que $f(z) = \dfrac{2z}{2z-1} + \dfrac{1}{1-z}$.

II. Étude au voisinage d'un point frontière isolé

DÉFINITION 177. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Soit $a \in \Omega$. Le point a est appelé **point frontière isolé** de Ω si

$$\exists \varepsilon > 0 \qquad \mathscr{B}(a,\varepsilon) \cap \Omega = \mathscr{B}(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$$

EXEMPLE 178. Pour $\Omega = \mathbb{C}^\times$, 0 est un point frontière isolé.

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et soit $a \in \mathbb{C}$ un point isolé de Ω. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\Omega \cap \mathscr{B}(a,\varepsilon) = \mathscr{B}(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytique. Soit $\mathscr{S} = \mathscr{S}(a, 0, \varepsilon) = \mathscr{B}(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$. Supposons que f possède un développement en série de Laurent sur $\mathscr{S}$ (i.e. f possède un développement en série de Laurent sur $\mathscr{S}(a, r_1, \varepsilon)$ pour tout $0 < r_1 < \varepsilon$) :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n}$$

DÉFINITION 179. La fonction $U : \mathscr{S} \to \mathbb{C}$ définie par $U(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n}$ est appelée la **partie singulière** de f en a.

REMARQUE 180. L'hypothèse d'existence d'un développement en série de Laurent sur $\mathscr{S} = \mathscr{S}(a, 0, \varepsilon)$ implique que le rayon de convergence de la série entière $\sum d_n u^n$ est $R = +\infty$.

CLASSIFICATION :

1. $\mathbf{U(z) \equiv 0}$.

   L'égalité $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ montre que f est prolongeable en une fonction analytique sur $\mathscr{B}(a,\varepsilon)$.
   Supposons que f ne soit pas identiquement nulle sur $\mathscr{B}(a,\varepsilon)$. Dans ce cas, il existe un coefficient c_n non nul. Notons $\omega(f,a) = \inf\{n \in \mathbb{N} \ : \ c_n \neq 0\} = n_0$. On a

   $$f(z) = (z-a)^{n_0}\left(c_{n_0} + c_{n_0+1}(z-a) + \dots\right) = (z-a)^{n_0} f_1(z)$$

   où f_1 est analytique sur $\mathscr{B}(a,\varepsilon)$ et vérifie $f_1(a) \neq 0$.

   DÉFINITION 181. L'entier n_0 défini ci-dessus s'appelle l'**ordre du zéro** a.

   Réciproquement, s'il existe une fonction analytique f_1 vérifiant d'une part $f_1(a) \neq 0$, d'autre part qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(z) = (z-a)^{n_0} f_1(z)$, alors $\omega(f,a) = n_0$.

2. $\mathbf{U(z)}$ **est un polynôme en** $\mathbf{\dfrac{1}{z-a}}$.

   $$U(z) = \frac{d_1}{z-a} + \dots + \frac{d_n}{(z-a)^n}$$

   DÉFINITION 182. On dit que a est un **pôle** d'ordre n de f et l'on note $\omega(f,a) = -n$.

Dans ce cas, $f(z) = (z-a)^{-n} f_1(z)$, où f_1 est une fonction analytique sur $\mathscr{B}(a,\varepsilon)$ et vérifie $f_1(a) \neq 0$. En effet, il suffit de prendre

$$f_1(z) = d_n + d_{n-1}(z-a) + \cdots + d_1(z-a)^{n-1} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-a)^{n+k}$$

Réciproquement, s'il existe une fonction f_1 analytique sur $\mathscr{B}(a,\varepsilon)$ vérifiant $f_1(a) \neq 0$ et s'il existe $n \geq 1$ tel que $f(z) = (z-a)^{-n} f_1(z)$ sur $\mathscr{B}(a,\varepsilon) \smallsetminus \{a\}$, alors la partie singulière de f en a est un polynôme en $\dfrac{1}{z-a}$ et $\omega(f,a) = -n$.

3. **$\mathbf{U(z)}$ n'est pas un polynôme en $\mathbf{\dfrac{1}{z-a}}$.**

$$\forall N > 0 \quad \exists n \geq N \quad d_n \neq 0$$

Dans ces conditions, on dit que a est un **point singulier essentiel** de f.

Définition 183. Dans la situation ci-dessus donnée au point 2, on dit que f est **méromorphe** sur $\Omega \cup \{a\}$.

Théorème 184. *Gardons les notations de la classification. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) f est méromorphe sur $\Omega \cup \{a\}$

(ii) il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'il existe deux fonctions g et h analytiques sur $\mathscr{B}(a,\varepsilon)$ vérifiant $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ pour $z \in \mathscr{B}(a,\varepsilon)$ avec $\omega(f,a) = \omega(g,a) - \omega(h,a) < 0$.

Démonstration. (i) $\implies$ (ii) Il suffit de prendre $g(z) = f_1(z)$ et $h(z) = (z-a)^{-\omega(f,a)}$.
(ii) $\implies$ (i) Écrivons $g(z) = (z-a)^{n_0} g_1(z)$, où $n_0 = \omega(g,a)$ et $g_1(a) \neq 0$ (resp. $h(z) = (z-a)^{m_0} h_1(z)$, où $m_0 = \omega(h,a)$ et $h_1(a) \neq 0$). On a

$$f(z) = (z-a)^{n_0 - m_0} \frac{g_1(z)}{h_1(z)}$$

D'après le principe des zéros isolés, $\dfrac{g_1}{h_1}$ est localement analytique en a. On en déduit que $\omega(f,a) = n_0 - m_0$, d'où le fait que f soit méromorphe sur $\Omega \cup \{a\}$. □

Théorème 185 (Caractérisation de $\omega(f,a)$). *Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique non identiquement nulle. Soit $a \in \mathbb{C}$ un point frontière isolé de $\mathcal{D}$. Supposons que a ne soit pas un point singulier essentiel de f. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Il y a équivalence entre*

1. $\left(\forall k > -m \quad \lim\limits_{z\to a} \left|(z-a)^k f(z)\right| = 0\right) \quad \wedge \quad \left(\forall k < -m \quad \lim\limits_{z\to a} \left|(z-a)^k f(z)\right| = +\infty\right)$

2. $\omega(f,a) = m$

Démonstration. 2. $\implies$ 1. Écrivons $f(z) = (z-a)^m f_1(z)$, où f_1 est analytique dans un voisinage de a et $f_1(a) \neq 0$. Si $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\left|(z-a)^k f(z)\right| = |f_1(z)|\,|z-a|^{m+k} \underset{z\to a}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{, si } k \geq -m+1 \\ +\infty & \text{, si } k \leq -m-1 \end{cases}$$

1. $\implies$ 2. Remarquons dans un premier temps que si f se prolonge en une fonction holomorphe en a, alors $f(z) = (z-a)^{n_0} f_1(z)$, où $n_0 = \omega(f,a)$, f_1 est analytique et vérifie $f_1(a) \neq 0$. L'assertion 1. est donc vérifiée dans ce cas puisque

$$\lim_{z\to a} |z-a|^\ell = \begin{cases} 0 & \text{, si } \ell > 0 \\ 1 & \text{, si } \ell = 0 \\ +\infty & \text{, si } \ell < 0 \end{cases}$$

Intéressons-nous désormais au cas où f ne peut être prolongée en une fonction analytique en a. Écrivons $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_n}{(z-a)^n}$. Supposons dans un premier temps que d_n est nul pour n assez grand et posons $n_0 = -\omega(f,a) > 0$. Il s'agit de montrer l'égalité $n_0 = m$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n + \frac{d_1}{z-a} + \cdots + \frac{d_{n_0}}{(z-a)^{n_0}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n + \frac{1}{(z-a)^{n_0}} \left(d_{n_0} + d_{n_0-1}(z-a) + \cdots + d_1 (z-a)^{n_0-1}\right) \end{aligned}$$

Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}\left|(z-a)^k f(z)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^{n+k} + (z-a)^{k-n_0}\left(d_{n_0} + d_{n_0-1}(z-a) + \cdots + d_1(z-a)^{n_0-1}\right)\right| \\ &= |z-a|^{k-n_0} \underbrace{\left|d_{n_0} + d_{n_0-1}(z-a) + \cdots + d_1(z-a)^{n_0-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^{n+n_0}\right|}_{\underset{z\to a}{\longrightarrow}|d_{n_0}|}\end{aligned}$$

Les limites annoncées au point 1. montrent donc que $n_0 = m$ est l'unique possibilité, d'où le point 2. dans ce cas. Il s'agit désormais de montrer que si 1. est vraie, alors a n'est pas une singularité essentielle de f. Pour $n > -m$, on a

$$\begin{aligned}d_n &= \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(z)(z-a)^{n-1}\mathrm{d}z = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})r^{n-1}e^{(n-1)it}ire^{it}\mathrm{d}t \\ &= \frac{r^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{nit}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

D'après la propriété 1., $\lim\limits_{z\to a}|z-a|^n|f(z)| = 0$, donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists r_0 > 0 \quad \forall 0 < r < r_0 \quad |f(a+re^{it})| < \varepsilon r^{-n}$$

Ainsi, pour $n > -m$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |d_n| < \varepsilon$$

assertion qui implique que $d_n = 0$ et qui termine la démonstration. ☐

Proposition 186. *Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ analytique non identiquement nulle. Soit $a \in \mathcal{D}$. Soit n_0 l'unique entier $n \in \mathbb{N}$ vérifiant*

$$f(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \textit{et} \quad f^{(n)}(a) \neq 0$$

Alors $\omega(f,a) = n_0$.

Démonstration. En utilisant les formules de Taylor,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k = \sum_{k=n_0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k = (z-a)^{n_0} f_1(z)$$

où f_1 est analytique et vérifie $f_1(a) \neq 0$. On en déduit immédiatement que $\omega(f,a) = n_0$. ☐

Définition 187. On dit que f admet un ordre en a si $\omega(f,a)$ est bien défini.

Théorème 188. *Soient $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$. Soit $a \in \mathbb{C}$ un point frontière isolé de $\mathcal{D}$. On suppose que f et g admettent un ordre en a. Alors*

1. *fg est analytique et admet un ordre en a.*
   $\omega(fg,a) = \omega(f,a) + \omega(g,a)$
2. *$f+g$ est analytique et, si elle est non nulle, alors elle admet un ordre en a.*
   $\omega(f+g,a) \geq \min(\omega(f,a), \omega(g,a))$
   Si de plus $\omega(f,a) \neq \omega(g,a)$, il y a égalité dans l'inégalité précédente.
3. *$\dfrac{1}{f}$ est analytique au voisinage de a et possède un ordre.*
   $\omega\left(\dfrac{1}{f}, a\right) = -\omega(f,a)$

Démonstration. Soient $n_0 = \omega(f,a)$ et $m_0 = \omega(g,a)$. Écrivons $f(z) = (z-a)^{n_0} f_1(z)$, $g(z) = (z-a)^{m_0} g_1(z)$, où f_1, g_1 sont deux fonction holomorphes en a (et analytiques dans un voisinage de a) vérifiant $f_1(a) \neq 0$ et $g_1(a) \neq 0$.

1. Comme $f_1(a)g_1(a) \neq 0$, l'égalité $f(z)g(z) = (z-a)^{n_0+m_0} f_1(z)g_1(z)$ montre que $\omega(fg,a) = \omega(f,a) + \omega(g,a)$.
2. Quitte à échanger f et g, on peut supposer que $n_0 \leq m_0$. On a alors
   $$(f+g)(z) = (z-a)_0^n\left(f_1(z) + (z-a)^{m_0-n_0} g_1(z)\right) = (z-a)_0^n h_1(z)$$
   La fonction h_1 est holomorphe en a et est non nulle puisque $f+g \not\equiv 0$. Ceci montre que $f+g$ possède un ordre et
   $$\omega(f+g,a) = n_0 + \omega(h_1,a) \geq n_0$$
   Si de plus $n_0 < m_0$, alors $h_1(a) = f_1(a) \neq 0$, d'où l'égalité annoncée.

3. On a
$$\frac{1}{f}(z) = (z-a)^{-n_0}\frac{1}{f_1(z)}$$
Comme $f_1(a) \neq 0$, la fonction $\dfrac{1}{f_1}$ est localement analytique en a et vérifie $\dfrac{1}{f_1}(a) \neq 0$. Ainsi, $\omega\left(\dfrac{1}{f}, a\right) = -\omega(f, a)$.

□

III. Résidus

Théorème 189. *Soit v une fonction entière : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $v(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} d_n z^n$. Alors pour tout $a \in \mathbb{C}$ et pour tout lacet $\gamma : I \to \mathbb{C}$ tel que $a \notin \gamma(I)$, on a*
$$\int_\gamma v\left(\frac{1}{z-a}\right)\mathrm{d}z = 2i\pi d_1\,\mathrm{j}(a,\gamma)$$

Démonstration. Montrons dans un premier temps que l'on peut intervertir les signes $\int$ et $\sum$. Posons $\delta = \mathrm{d}(a, \gamma(I))$. L'inégalité $|\gamma(t) - a| \geq \dfrac{\delta}{2}$ implique l'inégalité $\dfrac{1}{|\gamma(t)-a|} \leq \dfrac{2}{\delta}$ pour tout $t \in I$.Comme v est une fonction entière, la série $\sum d_n z^n$ converge uniformément vers v sur tout compact K de $\mathbb{C}$, en particulier sur le compact $\overline{\mathscr{B}\left(0, \frac{2}{\delta}\right)}$. Ceci montre donc que la série $\sum \dfrac{d_n\gamma'(t)}{(\gamma(t)-a)^n}$ converge normalement sur I. Ainsi,
$$\begin{aligned}\int_\gamma v\left(\frac{1}{z-a}\right)\mathrm{d}z &= \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_n\gamma'(t)}{(\gamma(t)-a)^n}\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n \int_I \frac{\gamma'(t)}{(\gamma(t)-a)^n}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} d_n \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}\end{aligned}$$
Remarquons que pour $n \neq 1$, la fonction $z \longmapsto \dfrac{1}{(z-a)^n}$ possède une primitive : $z \longmapsto \dfrac{1}{1-n}\cdot\dfrac{1}{(z-a)^{n-1}}$. En particulier, pour $n \neq 1$, le théorème 131 implique $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n} = 0$. Ainsi,
$$\int_\gamma v\left(\frac{1}{z-a}\right)\mathrm{d}z = d_1\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-a} = 2i\pi d_1\,\mathrm{j}(a,\gamma)$$

□

Définition 190. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ analytique. Soit $a \in \mathbb{C}$ un point frontière de $\mathcal{D}$. Notons $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_n}{(z-a)^n}$ le développement en série de Laurent de f en a. On appelle **résidu de f en a** le nombre
$$\mathrm{Res}_a(f) = d_1$$

Théorème 191 (Théorème des résidus). *Soit $\mathcal{D}$ un domaine **simplement connexe**. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{D}$ n nombres complexes deux à deux distincts. Posons $\widetilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$.*
*Soit $f : \widetilde{\mathcal{D}} \to \mathbb{C}$ une fonction analytique. Soit $\gamma : I \to \widetilde{\mathcal{D}}$ un **lacet**. Alors*
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi\sum_{k=1}^{n}\mathrm{j}(a_k,\gamma)\,\mathrm{Res}_{a_k}(f)$$

Démonstration. Pour $k \in [\![1;n]\!]$, notons $u_k(z)$ la partie singulière du développement en série de Laurent de f en a_k. Notons
$$u_k(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_n^{(k)}}{(z-a_k)^n}$$
et définissons pour $k \in [\![1;n]\!]$
$$v_k(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n^{(k)} u^n$$

de sorte que $u_k(z) = v_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$. Rappelons que chaque fonction v_k est analytique sur $\mathbb{C}$, donc u_k est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{a_k\}$. Posons $g(z) = f(z) - u_1(z) - \cdots - u_n(z)$ et fixons $k \in [\![1;n]\!]$. Pour $\ell \neq k$, l'application u_ℓ est analytique en a_k. De plus, par définition de u_k, la fonction $f - u_k$ est analytique dans un voisinage de a_k. Ainsi, g est analytique dans un voisinage de a_k. Ceci étant vrai pour $k \in [\![1;n]\!]$ quelconque, la fonction g est analytique sur $\mathcal{D}$.

Le domaine $\mathcal{D}$ est simplement connexe. Le théorème de Cauchy implique donc que $\int_\gamma g(z)\mathrm{d}z = 0$. Ainsi

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\int_\gamma u_k(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} 2i\pi \operatorname{Res}_{a_k}(f)\,\mathrm{j}(a_k,\gamma)$$

égalité qui démontre le théorème des résidus. □

Exemples de calcul des résidus

1. On suppose que a est un pôle d'ordre m de f : $f(z) = \frac{f_1(z)}{(z-a)^m}$. Considérons Le développement de Taylor de f_1 en a :

$$f_1(z) = f_1(a) + f_1'(a)(z-a) + \cdots + \frac{f^{m-1}(a)}{(m-1)!}(z-a)^{m-1} + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(z-a)^m + \ldots$$

Le développement en série de Laurent de f en a est donc

$$f(z) = \frac{f_1(a)}{(z-a)^m} + \frac{f_1'(a)}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{f^{m-1}(a)}{(m-1)!}\cdot\frac{1}{z-a} + \frac{f^{(m)}(a)}{m!} + \ldots$$

Ainsi $\operatorname{Res}_a(f) = \frac{f_1^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}$. De plus, lorsque $m = 1$, $\operatorname{Res}_a(f) = f_1(a)$.

2. Supposons que $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, où P, Q sont **analytiques**. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) \neq 0$ et a est un zéro simple de Q. Alors $\operatorname{Res}_a f = \frac{P(a)}{Q'(a)}$.

En effet, écrivons $Q(z) = (z-a)Q_1(z)$, où $Q_1(a) \neq 0$. On en déduit

$$Q'(z) = Q_1(z) + (z-a)Q_1'(z) \qquad \Longrightarrow \qquad Q'(a) = Q_1(a)$$

Or

$$f(z) = \frac{1}{z-a}\cdot\frac{P(z)}{Q_1(z)}$$

et la fonction $z \mapsto \frac{P(z)}{Q_1(z)}$ est analytique dans un voisinage de a. Ainsi,

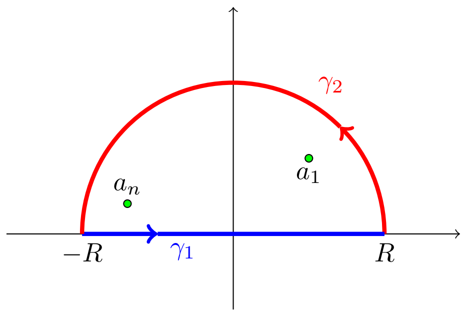
$$\frac{P(z)}{Q_1(z)} = \frac{P(a)}{Q_1(a)} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-a)^n \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Res}_a(f) = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

IV. Application au calcul intégral

Le but est de calculer des intégrales impropres $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, où f est la restriction à $\mathbb{R}$ d'une certaine fonction analytique toujours notée f (par abus de notation) :

$$f : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{où} \qquad \mathcal{D}' = \mathcal{D} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}, \quad a_k \notin \mathbb{R},$$

où $\mathcal{D}$ est un domaine simplement connexe comprenant le demi-plan supérieur.



Le théorème des résidus nous donne la valeur de l'intégrale de f le long d'un lacet. L'idée ici consistera, en prenant $R > \max\{|a_k| \ : \ 1 \leq k \leq n\}$, à concaténer deux chemins

$$\begin{array}{cccc} \gamma_1 : & [-R, R] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & t \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \gamma_2 : & [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & Re^{it} \end{array}$$

La concaténation $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$ est donc un lacet vérifiant $\mathrm{j}(a_k, \gamma) = 1$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. Ainsi, d'une part,

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{k=1}^n \mathrm{Res}_{a_k} f$$

et d'autre part,

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^R f(t)\mathrm{d}t + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z \tag{3}$$

Si l'on arrive à montrer que $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = 0$, alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2i\pi \sum_{k=1}^n \mathrm{Res}_{a_k} f$$

Application 192. $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, où $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et $\mathrm{pgcd}(P, Q) = 1$. Supposons de plus que $\deg(Q) \geq 2 + \deg P$ et que $Q(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Notons $a_1, \ldots, a_n$ les zéros de Q dans le demi-plan supérieur. L'hypothèse sur les degrés et la non annulation de Q sur $\mathbb{R}$ implique que f est intégrable sur $\mathbb{R}$. Utilisons les chemins introduits précédemment. Écrivons

$$P(z) = c_0 z^m + c_1 z^{m-1} + \cdots + c_m \qquad (c_0 \neq 0)$$
$$Q(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n \qquad (b_0 \neq 0)$$

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z \right| = \left| \int_0^\pi \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} Re^{it} \mathrm{d}t \right| \leq R \int_0^\pi \left| \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} \right| \mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned} \left|Q(Re^{it})\right| &= \left| b_0 R^n e^{int} + b_1 R^{n-1} e^{i(n-1)t} + \cdots + b_n \right| \geq |b_0| R^n - \left| b_1 R^{n-1} e^{i(n-1)t} + \cdots + b_n \right| \\ &\geq |b_0| R^n - |b_1| R^{n-1} - \cdots - |b_n| = |b_0| R^n \left(1 - \left|\frac{b_1}{b_0}\right| \cdot \frac{1}{R} - \cdots - \left|\frac{b_n}{b_0}\right| \cdot \frac{1}{R^n} \right) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\exists R_0 \quad \forall R > R_0 \quad \left|Q\left(Re^{it}\right)\right| \geq \frac{|b_0|}{2} R^n$$

En ce qui concerne P, l'inégalité triangulaire donne directement

$$\left|P\left(Re^{it}\right)\right| \leq |c_0| R^m \left(1 + \left|\frac{c_1}{c_0}\right| \cdot \frac{1}{R} + \cdots + \left|\frac{c_m}{c_0}\right| \cdot \frac{1}{R^m} \right)$$

Ainsi,

$$\exists R_0' \quad \forall R > R_0' \quad \left|P\left(Re^{it}\right)\right| \leq 2|c_0| R^m$$

En multipliant les deux inégalités pour $R > \max(R_0, R_0')$, nous obtenons

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z \right| \leq 4 \left|\frac{c_0}{b_0}\right| \pi R^{m-n+1}$$

Or $m - n + 1 \leq -1$, donc $\lim\limits_{R \to +\infty} \left| \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z \right| = 0$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{a_i \text{zéro de } Q} \mathrm{Res}_{a_i} f$$

Exemple 193. Calculons $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3}$. Notons $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, où $P(z) = 1$ et $Q(z) = \left(z^2+1\right)^3$. Les seuls zéros de Q étant $\pm i$, l'application 192 donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2i\pi\, \mathrm{Res}_i f$$

Afin de déterminer le résidu de f en i, écrivons $z = i + w$:

$$
\begin{aligned}
f(z) = f(i+w) &= \frac{1}{(w^2+2iw)^3} = -\frac{1}{8iw^3}\times\frac{1}{\left(1+\frac{w}{2i}\right)^3} \\
&= -\frac{1}{8iw^3}\left(1 - 3\frac{w}{2i} + 6\left(\frac{w}{2i}\right)^2 - 10\left(\frac{w}{2i}\right)^3 + \dots\right) \\
\operatorname{Res}_i f &= \frac{3}{16i} \\
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3} &= 2i\pi\times\frac{3}{16i} = \frac{3\pi}{8}
\end{aligned}
$$

Avant d'introduire le prochain exemple, nous aurons besoin du

Lemme 194 (de Jordan). *Soit* $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \;:\; \operatorname{Im} z \geq 0\}$. *Soit* $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ *une fonction méromorphe sur* $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \;:\; \operatorname{Im} z > 0\}$ *et continue sur* $\mathcal{D}$. *Soit* $a > 0$. *Définissons* g *à l'aide de la formule* $f(z) = e^{iaz} g(z)$. *Soit* $\gamma_R : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ *le demi-cercle défini par* $\gamma_R(t) = Re^{it}$.
Si $\max\left\{g\left(Re^{i\theta}\right) \;:\; \theta \in [0,\pi]\right\}$ *tend vers* 0 *lorsque* $R \to +\infty$, *alors*

$$
\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z = 0
$$

Démonstration. Nous avons

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z\right| &= \left|\int_0^\pi f(Re^{it}) iRe^{it}\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\pi \left|f(Re^{it})\right|\cdot Re^{it}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \left|g(Re^{it})\right| \left|e^{iaR\cos t - aR\sin t} e^{it}\right| R\mathrm{d}t = \int_0^\pi \left|g(Re^{it})\right| Re^{-aR\sin t}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Posons $M(R) = \max\left\{g\left(Re^{i\theta}\right) \;:\; \theta \in [0,\pi]\right\}$. Nous aurons besoin du

Lemme 194.1.

$$
\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \sin t \geq \frac{2t}{\pi}
$$

Démonstration du lemme 194.1. L'inégalité étant claire pour $t = 0$, nous supposerons $t > 0$ désormais. Intéressons-nous à la fonction h (prolongée par continuité en 0) d'expression $h(t) = \dfrac{\sin t}{t}$. Sa dérivée est $h'(t) = \dfrac{t\cos t - \sin t}{t^2} = \dfrac{t - \tan t}{t^2\cos t}$ pour $t \neq 0$. Rappelons $\cos t > 0$ pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Le signe de $h'(t)$ est donc identique au signe de $\ell(t) = t - \tan t$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Or $\ell'(t) = 1 - (1+\tan^2 t) = -\tan^2 t \leq 0$. La fonction ℓ est donc strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Comme $\ell(0) = 0$, la fonction ℓ est strictement négative sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. La fonction h est donc décroissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. En particulier, pour tout $t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $h(t) \geq h\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\pi}$. L'inégalité souhaitée s'obtient en multipliant par t lorsque $t > 0$. □

Revenons à la démonstration du lemme de Jordan.

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z\right| &\leq M(R)\int_0^\pi Re^{-aR\sin t}\mathrm{d}t = 2M(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-aR\sin t}\mathrm{d}t \\
&\leq 2M(R)\int_0^{\frac{\pi}{2}} Re^{-aR\frac{2t}{\pi}}\mathrm{d}t = M(R)\frac{\pi}{a}\left(1 - e^{-aR}\right)
\end{aligned}
$$

Or $\lim\limits_{R\to+\infty} M(R) = 0$ et $\lim\limits_{R\to+\infty}\left(1 - e^{-aR}\right) = 1$, donc

$$
\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \lim_{R\to+\infty} M(R)\frac{\pi}{a}\left(1 - e^{-aR}\right) = 0
$$

Cette inégalité termine la démonstration. □

Application 195. Calculons $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$, où $a > 0$. L'intégrale converge bien puisque, lorsque $x \to +\infty$, $\left|\dfrac{\cos x}{a^2+x^2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$. Remarquons que $x \mapsto \dfrac{\cos x}{a^2+x^2}$ est paire, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$. L'intégrale étant convergente,

$$
2I = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x
$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{a^2+x^2}$ est impaire, donc $\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = 0$. Ainsi,

$$2I = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos x + i\sin x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$$

Considérons les fonctions f et g d'expression $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{a^2+z^2}$ et $g(z) = \dfrac{1}{a^2+z^2}$. Ces des fonctions sont méromorphes sur $\mathbb{C}$. f et g ont les mêmes pôles : $\pm ia$. De plus,

$$\left|g\left(Re^{it}\right)\right| = \frac{1}{|R^2e^{2it}+a^2|} \leq \frac{1}{|R^2-a^2|} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \left(\text{car } \left|R^2e^{2it}+a^2\right| \geq \left|R^2-a^2\right| \text{ pour } R>0, t\in\mathbb{R}\right)$$

Notons $\gamma_{1,R} : [-R,R] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_{2,R} : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ les chemins définis par $\gamma_{1,R}(t) = t$ et $\gamma_{2,R}(t) = e^{it}$. Le lemme de Jordan implique $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_{2,R}} f(z)\mathrm{d}z = 0$. Le théorème des résidus (théorème 191) quant à lui implique $\int_{\gamma_{1,R}\vee\gamma_{2,R}} f(z)\mathrm{d}z = 2i\pi \operatorname{Res}_{ia} f$. Intéressons-nous au calcul de ce résidu :

$$f(z) = \frac{1}{z^2+a^2}e^{iz} = \frac{1}{z-ia}\times\frac{e^{iz}}{z+ia} = \frac{1}{z-ia}f_1(z)$$

f_1 est holomorphe en ia et $f_1(ia) \neq 0$:

$$\operatorname{Res}_{ia} f = f_1(ia) = \frac{e^{-a}}{2ia}$$

Ainsi,

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\frac{e^{ix}}{a^2+x^2}} \mathrm{d}x = i\pi \operatorname{Res}_{ia}(f) = \frac{\pi}{2ae^a}$$