Analyse réelle

CAPES de Mathématiques — Le Mans 2009/2010

Version 2.0

Bruno Deschamps

Tout un monde lointain, absent, presque défunt,
Vit dans tes profondeurs, forêt aromatique !

Table des matières

1 Une introduction au corps des nombres réels

1.1 Principales propriétés de $\mathbb{R}$.

1.1.1 Le corps des nombres réels.

On commence par rappeler quelques définitions :

• Soit E un ensemble et $\leq$ une relation binaire. On dit que $\leq$ est une relation d'ordre si elle est reflexive, transitive et antisymétique. L'ensemble $E, \leq$ est alors dit ordonné.
Si on a $\forall (x,y) \in E,\ x \leq y \ ou\ y \leq x$, $\leq$ est alors appellé ordre total et $E, \leq$ est dit totalement ordonné.

• Soient $E, \leq$ un ensemble totalement ordonné, $F \subset E$ et $x \in E$. on dit de x que c'est :

un majorant de F si $\forall y \in F,\ y \leq x$.

un minorant de F si $\forall y \in F,\ x \leq y$.

le plus grand élément de F si $x \in F$ et x majorant de F.

le plus petit élément de F si $x \in F$ et x minorant de F.

la borne supérieure de F si x est le plus petit des majorants de F.

la borne inférieure de F si x est le plus grand des minorants de F.

Une partie majorée d'un ensemble totalement ordonné n'admet pas forcément une borne supérieure. Par exemple, dans $\mathbb{Q}, \leq$, le corps ordonné des nombres rationnels,si l'on considère l'ensemble des nombres rationnels positifs de carré strictement inférieur à 2

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{Q}^+ / x^2 < 2\}$$

alors cet ensemble est majoré (par exemple par 2) mais n'admet pas de borne supérieure. En effet, s'il admettait une borne supérieure s, celle-ci vérifierait $s^2 = 2$ (voir plus loin pour une justification). On pourrait donc écrire $s = p/q$ où p et q serait deux entiers non nuls premier entre eux. On aurait donc $p^2 = 2q^2$. Donc p^2 et q^2 ne seraient pas premier entre eux, ce qui est absurde.

Cette carence pose problème, notament pour l'étude des suites. C'est pourquoi, pour faire de l'analyse on est amené à travailler dans un ensemble plus gros que $\mathbb{Q}$, un ensemble qui vérifie lui cette propriété : $\mathbb{R}$.

Caractérisation de $\mathbb{R}$.— *L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est muni de deux lois de compositions interne $(+, .)$ et d'une relation d'ordre $\leq$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1) $(\mathbb{R}, +, .)$ *est un* **corps commutatif**.

2) L'ordre $\leq$ est total dans $\mathbb{R}$.

3) Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c)$ et $(a \leq b \text{ et } c \geq 0 \Longrightarrow ac \leq bc)$.

4) $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

5) **Propriété d'archimède***: $\forall a > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N}^*;\ x \leq na$.*

6) **Propriété de la borne supérieure***: Toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure.*

Remarque : Les propriétés $1), 2), 3), 5)$ peuvent se résumer en disant que $\mathbb{R}$ est un **corps totalement ordonné archimédien** (en fait, on peut démontrer qu'à elles seules ces propriétés implique la propriété 4)). On remarque que $\mathbb{Q}$ vérifie aussi toutes ces propriétés à l'exception de la propriété 6).

Notations: On note :

$\mathbb{R}^+$, l'ensemble des réels positifs i.e. $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$.

$\mathbb{R}^{*+}$, l'ensemble des réels strictement positifs i.e. $\mathbb{R}^{*+} = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$.

$\mathbb{R}^-$, l'ensemble des réels négatifs i.e. $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$.

$\mathbb{R}^{*-}$, l'ensemble des réels strictement négatifs i.e. $\mathbb{R}^{*-} = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$.

Des propriétés 1), 2), 3), on déduit sans difficulté que pour tous $a, b, c, a^{'}, b^{'} \in \mathbb{R}$,

- $a \leq b \Longleftrightarrow -b \leq -a$.
- $a < b \Longleftrightarrow -b < -a$, (version stricte).
- $a \leq b$ et $a^{'} \leq b^{'} \Longrightarrow a + a^{'} \leq b + b^{'}$.
- $a < b$ et $a^{'} < b^{'} \Longrightarrow a + a^{'} < b + b^{'}$, (version stricte).
- $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq a^{'} \leq b^{'} \Longrightarrow 0 \leq aa^{'} \leq bb^{'}$.
- $0 < a < b$ et $0 < a^{'} < b^{'} \Longrightarrow 0 < aa^{'} < bb^{'}$, (version stricte).

Règle des signes:

$$ab > 0 \Longleftrightarrow (a > 0 \ et \ b > 0) \ ou \ (a < 0 \ et \ b < 0)$$

$$ab < 0 \Longleftrightarrow (a > 0 \ et \ b < 0) \ ou \ (a < 0 \ et \ b > 0)$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $x^2 > 0$, donc $1 > 0$ d'où $-1 < 0$ et donc l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution. Donc $\mathbb{R}$ n'est pas **algébriquement clos** (i.e. Il existe un polynôme à coefficients réels de degré plus grand que 1 qui n'admet pas de racine réelle).

Remarque: $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^{*+}$ sont stable par l'addition et la multiplication.

Valeur absolue: $\mathbb{R}$ étant totalement ordonné, toute partie non vide et finie de $\mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum. En particulier, pour tout réel x, $max(-x, x)$ existe.

Définition.— *Soit $x \in \mathbb{R}$, on appelle valeur absolue de x et on note $|x|$ le réel $max(-x, x)$.*

Proposition.— *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^{*+}$ alors :*

- $|a| \geq 0$.
- $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$.
- $|a| = |-a|$.
- $|a - b| \leq r \Longleftrightarrow a - r \leq b \leq a + r$.
- $|a - b| < r \Longleftrightarrow a - r < b < a + r$.
- $|a + b| \leq |a| + |b|$, *(première inégalité triangulaire).*
- $||a| - |b|| \leq |a - b|$, *(deuxième inégalité triangulaire).*
- $|ab| = |a||b|$.
- $\forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

• $\forall(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \left|\prod_{i=1}^{n} x_i\right| = \prod_{i=1}^{n}|x_i|.$

Distance entre deux réels

Définition.— *Si a et b sont deux réels, on appelle distance (euclidienne) de a à b et l'on note $d(a,b)$, le réel $|b-a|$. On définit ainsi une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.*

Théorème.— *On a les propriétés suivantes :*

1) $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ d(a,b)=0 \Longleftrightarrow a=b$ (Séparation).

2) $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,\ d(a,b)=d(b,a)$ (Symétrie).

3) $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^3,\ d(a,c)\leq d(a,b)+d(b,c)$ (Inégalité triangulaire).

Ces trois propriétés sont fondamentales. Elles jouent un role centrale en topologie. Il est interressant de remarquer qu'il existe bien d'autres applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiants ces trois propriétés. Par exemple $d(a,b)=|a|+|b|$ ou $d(a,b)=max(|a|,|b|)$.

1.1.2 Bornes supérieures et inférieures dans $\mathbb{R}$.

On vient de voir que l'une des grosse nouveauté de $\mathbb{R}$ (par rapport à $\mathbb{Q}$) était la propriété de la borne supérieure. Nous allons voir une façon plus "topologique" de caractériser une borne supérieure.

Théorème.— *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\beta=\sup\{x\in A\}$,

ii) $\beta\in\mathbb{R},\ \forall a\in A,\ a\leq\beta$ et $\forall y\in\mathbb{R},\ ((\forall a\in A, a\leq y)\Longrightarrow \beta\leq y)$,

iii) $\beta\in\mathbb{R},\ \forall a\in A,\ a\leq\beta$ et $\forall\epsilon\in\mathbb{R}^{*+},\ \exists a\in A;\ \beta-\epsilon<a\leq\beta$.

Preuve : $i)\Longleftrightarrow ii)$ est évident.

$i)\Longleftrightarrow iii)$: $\beta\in\mathbb{R},\ \forall a\in A,\ a\leq\beta$ traduit que β est un majorant de A. Soit $\beta^{'}$ le plus petit majorant de A (donc la borne supérieure).

$(non\ i)\Longrightarrow non\ iii))$: supposons $\beta>\beta^{'}$ et posons $\epsilon=(\beta-\beta^{'})/2$. Alors $\nexists a\in A$ tel que $\beta-\epsilon<a<\beta$ car $\beta-\epsilon>\beta^{'}$ on aurait alors $a>\beta^{'}$ ce qui nierait le fait que $\beta^{'}$ majore a donc A.

$(non\ iii)\Longrightarrow non\ i))$ Soit ϵ tel qu'il n'existe pas $a\in A$ tel que $\beta-\epsilon<a<\beta$. Alors $\beta-\epsilon\geq\beta^{'}$ et donc $\beta>\beta^{'}$.

Dans $\mathbb{R}$ on a une version duale de la propriété de la borne supérieure :

Théorème.— *Toute partie A de $\mathbb{R}$ minorée, admet une borne inférieure.*

Preuve : Soit A une partie minorée de $\mathbb{R}$, alors la partie $-A=\{-x,\ x\in A\}$ est une partie majorée. Elle admet donc une borne supérieure β. Il s'ensuit que $-\beta$ est une borne inférieure de A.
On a, comme pour la borne supérieure :

Théorème.— *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\beta=\inf\{x\in A\}$,

ii) $\beta\in\mathbb{R},\ \forall a\in A,\ a\geq\beta$ et $\forall y\in\mathbb{R},\ ((\forall a\in A, a\geq y)\Longrightarrow \beta\geq y)$,

iii) $\beta\in\mathbb{R},\ \forall a\in A,\ a\geq\beta$ et $\forall\epsilon\in\mathbb{R}^{*+},\ \exists a\in A;\ \beta+\epsilon>a\geq\beta$.

Remarque: La borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$ n'appartient pas forcement à cette partie: Par exemple $\sup]0,1[=1$ et $1 \notin]0,1[$.

1.2 Suites réelles.

1.2.1 Définitions, propriétés.

Définition.— *Une suite réelle U est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note $U=(U_n)_n$ ou plus simplement $(U_n)_n$ la suite $U : n \longmapsto U(n)$.*

L'ensemble des suites réelles est naturellement noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition.— *Une suite réelle U est dite majorée (resp. minorée, resp. bornée) quand le sous-ensemble $U(\mathbb{N}) = \{U_n; n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ est majoré (resp. minoré, resp. majoré et minoré).*

Définition.— *Une sous-suite d'une suite $(U_n)_n$ (dite aussi suite extraite de U) est une suite de la forme $(U_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Définition.— (Convergence de suite) *On dit qu'une suite réelle $(U_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}$ (ou est convergente) si et seulement si il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n > N\ |U_n - l| < \epsilon$$

On dit alors que l est la limite de $(U_n)_n$.

Théorème.— *Si une suite $(U_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}$ alors sa limite est unique.*

Preuve : Supposons que $(U_n)_n$ admette deux limites distinctes l_1 et l_2. Prenons $\epsilon = |l_1 - l_2|/3$. D'après la definition :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N};\ \forall n > N_1\ |U_n - l_1| < \epsilon$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N};\ \forall n > N_2\ |U_n - l_2| < \epsilon$$

alors pour un entier n supérieur à la fois à N_1 et N_2 on a

$$|l_1 - l_2| \le |l_1 - U_n| + |U_n - l_2| < 2\epsilon < |l_1 - l_2|$$

ce qui est absurde.

———

Terminologie: On dit "*$(U_n)_n$ converge vers l*" ou "*l est limite de $(U_n)_n$*" ou bien encore "*$(U_n)_n$ tend vers l quand n tend vers plus l'infini*". On écrit alors $U_n \to l$ ou $l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Théorème.— *On a les propriétés suivantes :*

1) Toute suite réelle convergente est bornée.

2) Toute sous suite, d'une suite réelle convergente, converge vers la même limite.

Preuve : 1) Si N est associé à $\epsilon = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \le max(|l|+1, |u_0|, \cdots, |u_N|)$.
2) Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croît strictement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \ge n$.

———

1.2.2 Suites adjacentes.

Définition.— *Deux suites (a_n) et (b_n) sont dites adjacentes lorsque (a_n) est une suite croissante et que (b_n) est décroissante et que l'on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(a_n, b_n) = 0$.*

Théorème.— *Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles adjacentes, alors:*
1) Ces deux suites converge vers la même limite l.
2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq l \leq b_n$.

Preuve : 1) La suite $(a_n - b_n)$ étant croissante de limite 0, elle ne peut prendre que des valeurs négatives. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \leq b_n$. Soit $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$, cet ensemble est majoré par b_0, donc il admet une borne supérieure l. Soit $\epsilon > 0$:
Par le critère de la borne supérieure: $\exists p \in \mathbb{N}; l - \epsilon < a_p \leq l$.
Par convergence de $(b_n - a_n)$: $\exists q \in \mathbb{N}; \forall n \geq q; |b_n - a_n| < \epsilon$.
Donc pour $n \geq N = max(p,q)$ on a :
$l - \epsilon < a_p \leq a_N \leq a_n \leq l$ et
$a_n \leq b_n < a_n + \epsilon \leq l + \epsilon$ d'où:

$$|a_n - l| < \epsilon \ et\ |b_n - l| < \epsilon$$

Les suites (a_n) et (b_n) convergent vers l.
2) On remarque pour terminer que:
$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq l$ (borne sup.)
$\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n \geq l$ (sinon, $\forall n \leq p, b_n \leq b_p < l$:ceci contredit $b_n \to l$.)

———

Théorème.— (Théorème des segments emboités) *Soit $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments décroissante pour la relation d'inclusion et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(a_n, b_n) = 0$. Alors:*

1) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ est un singleton $\{l\}$.
2) Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ convergent toute deux vers l.

Preuve : Il est clair que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont des suites adjacentes. Elles convergent donc toutes deux vers une limite l. Il est clair que $\forall n,\ l \in [a_n, b_n]$ donc l appartient bien à l'intersection. S'il existe $\alpha \neq l$ dans l'intersection alors soit $\epsilon = |l - \alpha|$. Il existe n tel que $d(a_n, b_n) < \epsilon$. Mais alors l et α sont dans $[a_n, b_n]$ donc $d(a_n, b_n) \geq \epsilon$ ce qui est absurde.

———

1.2.3 Suites de Cauchy.

Définition.— *Une suite de réels $(U_n)_n$ est dite de Cauchy si elle vérifie:*

$$\forall \epsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}; \forall (p,q) \in \mathbb{N}(p \geq N \ et\ q \geq N) \Longrightarrow |u_p - u_q| < \epsilon$$

Remarque: On a, de façon équivalente, la formulation suivante :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}; \forall (p,k) \in \mathbb{N} p \geq N \Longrightarrow |u_{p+k} - u_p| < \epsilon$$

Proposition.— *On a les deux propriétés suivantes :*

1) Toute suite convergente est de Cauchy.

2) Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve : 1) Si $p,q \geq N$, $|u_p - u_q| = |u_p - l + l - u_q| \leq |u_p - l| + |l - u_q| < \epsilon/2 + \epsilon/2$, avec N associé à $\epsilon/2$ dans la def de la convergence.
2) On prend $\epsilon = 1$ et on a $|u_n| \leq max(|u_0|, \cdots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1)$

———

Théorème.— *Toute suite de Cauchy réelle eﬆ convergente.*

Preuve : Si la suite $(u_n)_n$ eﬆ de cauchy, elle eﬆ bornée, on peut donc définir $a_n = \inf\limits_{k \geq n}(u_k)$ et $b_n = \sup\limits_{k \geq n}(u_k)$. On a $a_n \leq a_{n+1}$ et $b_n \geq b_{n+1}$.
Soit $\epsilon > 0$, il exiﬆe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $p,q > N$ on ait $|u_p - u_q| < \epsilon/3$. Pour tout $n > N$ il exiﬆe $p_n, q_n > n$ tels que $a_n \leq u_{p_n} \leq a_n + \epsilon/3$ et $b_n - \epsilon/3 \leq u_{q_n} \leq b_n$ de telle sorte que $0 \leq b_n - a_n \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$.
La suite de segments $[a_n, b_n]$ eﬆ donc décroissante et leur longueur tend vers 0. Il exiﬆe alors un unique réel a tel que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{a\}$.
En gardant les mêmes notations, pour tout $\epsilon > 0$, si $n \geq N$, u_n et a sont dans $[a_N, b_N]$, donc $|a - u_n| \leq |b_N - a_N| \leq \epsilon$. La suite $(u_n)_n$ converge vers a.

———

Remarques: 1) Les propriétés 1) et 2) de la proposition 1.2. sont valables dans $\mathbb{Q}$.
2) Le théorème, en revanche, n'eﬆ pas valable pour les suites dans $\mathbb{Q}$. Considérons par exemple la suite définie par $U_n = 10^{-n} E(10^n \sqrt{2})$. C'eﬆ une suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ et pourtant elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.
3) On dit que $\mathbb{R}$ eﬆ **complet** parce que toute suite de Cauchy y eﬆ convergente. On peut d'ailleur montrer qu'à un isomorphisme près $\mathbb{R}$ eﬆ le seul **corps totalement ordonné archimédien complet**.

1.2.4 Suites monotones.

Définition.— *Une suite de réels $(U_n)_n$ eﬆ dite croissante (resp. décroissante) si pour tout $n \geq 0$ on a $U_{n+1} \geq U_n$ (resp. $U_{n+1} \leq U_n$).*

Une suite réelle qui eﬆ croissante ou décroissante eﬆ dite monotone.

Théorème.— (dit de "la limite monotone") *Soit $(U_n)_n$ une suite monotone. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $(U_n)_n$ eﬆ bornée,

ii) $(U_n)_n$ converge.

Preuve : $ii) \Rightarrow i)$ eﬆ déjà fait.

$i) \Rightarrow ii)$ Supposons $(U_n)_n$ croissante et posons $U = \{U_n / n \in \mathbb{N}\}$. Par hypothèse, U eﬆ un ensemble non vide majoré, il admet donc une borne supérieure, notons la l. Par la caractérisation de la borne supérieure, pour tout $\epsilon > 0$, il exiﬆe $x \in U$ tel que $l - \epsilon < x \leq l$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x = U_{n_0}$ alors pour tout $n \geq n_0$, on a

$$l - \epsilon < U_{n_0} \leq U_n \leq l$$

et donc par suite $|U_n - l| < \epsilon$. On en déduit donc que $(U_n)_n$ converge vers l.

———

Thème — Propriétés équivalentes au théorème de la borne supérieure *En reprenant les preuves faites précédement, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) Théorème de la borne supérieure,

ii) Théorème des suites adjacentes,

iii) Théorème des segments emboités,

iv) Théorème de la limite monotone,

v) $\mathbb{R}$ *est complet.*

Thème — Une construction de $\mathbb{R}$ **:** *On considère sur* $\mathbb{Q}$ *la notion de suite de Cauchy en reprenant la même définition que celle proposée ci-dessus, mais en prenant soin de prendre* ϵ *rationnel. On note* $\mathcal{C}$ *l'ensemble des suites de Cauchy sur* $\mathbb{Q}$*.*

a) Montrer que, muni de l'addition et de la multiplication des suites, $\mathcal{C}$ *est un anneau commutatif et unitaire dans lequel s'injecte de manière naturelle le corps* $\mathbb{Q}$*.*

b) On considère I *l'ensemble des éléments de* $\mathcal{C}$ *qui convergent vers* 0*. Prouver que* I *est un idéal maximal de* $\mathcal{C}$*.*

c) En déduire que l'anneau quotient $\mathcal{C}/I$ *est un corps et que ce corps vérifie les 6 propriétés fondamentales qui définissent* $\mathbb{R}$*.*

1.3 Approximation décimale d'un réel.

1.3.1 Partie entière d'un réel.

Soit x un nombre réel. D'après la propriété d'Archimède, il existe deux entiers p et q tels que $x \leq p$ et $-x \leq q$ soit $-q \leq x$. Alors $\{m \in \mathbb{Z}; m \leq x\}$ est une partie non vide ($-q$ y appartient) et majorée (par p), donc admet un maximum. **Définition.—** *La partie entière de* x *est le plus grand entier inférieur à* x*. Elle est noté* $E(x)$ *ou parfois* $[x]$*. Par définition on appelle partie fractionnaire de* x *le réel* $x - E(x)$*. On la note* $< x >$*.*

Lemme.— *On a les propriétés suivantes :*

1) $\forall x \in \mathbb{R},\ m = E(x) \Longleftrightarrow (m \in \mathbb{Z} \text{ et } m \leq x < m+1)$*.*

2) $x \longmapsto E(x)$ *croît sur* $\mathbb{R}$*.*

3) $x \longmapsto < x >$ *est périodique de période* 1*.*

Lemme.— (Division euclidienne) *Soit* a *un réel strictement positif. Pour tout réel* x*, il existe un unique couple* (q, r) *dans* $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ *tel que*

$$x = aq + r, \text{ avec } 0 \leq r < a$$

Preuve : On prend $q = E(x/a)$ et $r = x - aq$.

1.3.2 Nombres décimaux. Approximation décimale d'un réel.

Définition.— *On appelle rationnel décimal tout élément de* $\mathbb{Q}$ *pouvant s'écrire* $p/10^n$ *avec* $p \in \mathbb{Z}$ *et* $n \in \mathbb{N}$*.*

Notation : si $0 \leq p < 10^n$, p s'écrit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} 10^k$ avec $a_1, \cdots, a_n \in [\![0, 9]\!]$ (représentation d'un entier en base dix). On note alors

$$\frac{p}{10^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} = 0, a_1 a_2 \cdots a_n$$

L'entier a_i est alors appelé la i^{eme} décimale.

Proposition.— *Si x est un réel, et n un entier naturel, $p_n = E(10^n x)$ est l'unique entier tel que :*

$$\frac{p_n}{10^n} \leq x < \frac{p_n + 1}{10^n}$$

Définition.— *On dit alors que* $\dfrac{p_n}{10^n}$ *est la* **valeur approchée décimale par défaut** *à* 10^{-n} *près de x et que* $\dfrac{p_n+1}{10^n}$ *est la* **valeur approchée décimale par excés** *à* 10^{-n} *près de x.*

Proposition.— *Si x est un réel, la suite* $\left(\dfrac{p_n}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *de ses décimales approchées par défaut converge vers x dans $\mathbb{R}$.*

Preuve : En effet, pour $\epsilon > 0$ fixé, on a: $0 \leq x - p_n/10^n \leq 1/10^n < 1/n < \epsilon$ si $n > E(1/\epsilon)$.

———

1.3.3 Developpement décimal illimité d'un réel.

On reprend les notations du paragraphe précédent, avec x réel et n entier > 0. L'entier $p_0 = m = E(x)$ est aussi la partie entière du rationnel décimal $p_n/10^n$. Donc

$$\frac{p_n}{10^n} - m = 0, a_1 a_2 \cdots a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} \ avec\ a_i \in \{0, 1, 2 \cdots, 9\}$$

On a:

$$a_{n+1} = E(10^{n+1}x) - 10E(10^n x)$$

Exercice : Montrer qu'il existe une unique suite d'entiers compris entre 0 et 9, $(a_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n > 0$, la valeur décimale approchée par défaut à $1/10^n$ près de x s'écrive $E(x) + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i}$.

Cette suite, à laquelle on adjoint l'entier $a_0 = p_0$, détermine x puisque

$$x = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{10^i} \right)$$

Définition.— *On appelle* **développement décimal illimité (propre) du réel** *x et on écrit $x = a_0 + 0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ ou (si $x > 0$), $x = b_l \cdots b_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ ($b_l \cdots b_0$ étant les chiffres de l'écriture de a_0 en base dix), la suite d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par:*

$$a_0 = E(x),\ et\ pour\ n \geq 1,\ a_n = E(10^n x) - 10E(10^{n-1}x)$$

Soit, réciproquement, une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $a_i = 0, 1, \cdots, 9$. Soit $u_0 = a_0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = a_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^n}$.

Lemme.— *La suite $(U_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}$.*

Preuve : En effet, elle est de Cauchy puisque pour $n > q > 1$:

$$0 \leq U_n - U_q = \sum_{i=q+1}^{n} \frac{a_i}{10^i} \leq 9 \sum_{i=q+1}^{n} \frac{1}{10^i} \leq \frac{9}{10^{q+1}} \frac{1 - \frac{1}{10^{n-q}}}{1 - \frac{1}{10}} \leq \frac{1}{10^q}$$

et si $N > 1/\epsilon$, $\forall q \leq N$, $1/10^q < \epsilon$.

Reprenons le lemme précédent et désignons par x la limite de $(U_n)_n$. Deux cas se présentent alors :

1er cas) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists k > n$; $a_k \neq 9$.

Fixons un entier n et prenons un entier $k > n$ tel que $a_k \neq 9$. La suite $(U_p)_p$ est croissante et pour $p \geq k$, on a :

$$0 \leq U_p - U_n \leq \sum_{i=n+1}^{p} \frac{9}{10^i} - \frac{1}{10^k} = \frac{9}{10^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{10^{p-n}}}{1 - \frac{1}{10}} - \frac{1}{10^k}$$

$$0 \leq U_p - U_n \leq \frac{9}{10^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - \frac{1}{10^k} = \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^k}$$

ce qui donne

$$a_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} \leq U_p \leq a_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^k}$$

En faisant tendre p vers l'infini, on obtient alors:

$$U_n \leq x \leq U_n + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^k} < U_n + \frac{1}{10^n}$$

Finalement:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} \leq x < a_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i} + \frac{1}{10^n}$$

donc $a_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i}$ est la valeur décimale approchée à $1/10^n$ près par défaut de x.
Dans ce cas précis, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ correspond exactement pour x au développement décimal illimité propre obtenu précédement.

2ème cas) $\exists n \in \mathbb{N}^*$; $\forall k > n$, $a_k = 9$.

Dans ce cas,

$$\forall k > n,\ U_k = U_n + 9 \sum_{i=n+1}^{k} \frac{1}{10^i} = U_n + \frac{9}{10^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{10^{k-n}}}{1 - \frac{1}{10}} = U_n + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^k}$$

et par conséquent $U_k \to U_n + 1/10^n$ rationnel décimal. Donc x est un rationnel décimal et pour $k > n$, U_k n'est pas la valeur approchée décimale par défaut à $1/10^k$ près de x.
On parle alors de **développement décimal illimité impropre de x:**

$$x = a_0 + 0, a_1 \cdots a_n 999 \cdots 9 \cdots$$

En résumé, on vient de montrer que si $x \in \mathbb{R}$ n'est pas rationnel alors il ne possède qu'un unique développement décimal illimité (i.e. il existe une unique suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $a_i = 0, 1, \cdots, 9$ telle que $x = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n 10^{-n}$). Si x est rationnel, alors il en existe deux.

Exercice : Déduire de ce résultat que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

1.4 Topologie de $\mathbb{R}$.

1.4.1 Densité.

Définition.— *On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y,\ \exists a \in A;\ x < a < y$$

Proposition.— *Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) A est dense dans $\mathbb{R}$.

ii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y$ il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, strictement croissante d'éléments de A vérifiant: $\forall n \in \mathbb{N},\ x < a_n < y$

Exemples : • $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En effet, soient $x < y$ deux réels et $\alpha = y - x > 0$. D'aprés la propriété d'Archimède, $\exists n \in \mathbb{N};\ n > 1/\alpha$. C'est à dire $1/n < \alpha$. Soit $p = E(nx)$, alors on a :

$$x < \frac{p+1}{n} < y$$

en effet $p \leq nx < p+1$ donc $(p+1)/n > x$. Or $1/n < y-x$ et $p/n \leq x$ donc $(p+1)/n < y$.

• $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En effet, on a montré précédement que $\sqrt{2} \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Soit $x < y$, alors $\frac{x}{\sqrt{2}} < y\sqrt{2}$. $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < y\sqrt{2}$. Si $r \neq 0$ alors $r\sqrt{2}$ est irrationnel et $\frac{x}{\sqrt{2}} < r\sqrt{2} < y\sqrt{2}$. Si $r = 0$, alors toujours par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $r' \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < r' < \frac{y}{\sqrt{2}}$. De même $r'\sqrt{2}$ est irrationnel et $\frac{x}{\sqrt{2}} < r'\sqrt{2} < y\sqrt{2}$

1.4.2 Voisinages dans $\mathbb{R}$.

Définition.— *On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant:*

$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3,\ (a \in I, b \in I \text{ et } a \leq c \leq b) \Longrightarrow c \in I$$

Proposition.— *Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si I est une partie convexe i.e.*

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \theta \in [0,1],\ (1-\theta)x + \theta y \in I$$

Par récurrence, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (\theta_1, \cdots, \theta_n) \in (\mathbb{R}^+)^n,\ ((x_1, \cdots, x_n) \in I^n \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i \in I$$

Remarque: Un intervalle non vide et non réduit à un point est nécéssairement infini.

Classification:

1. Les intervalles bornés:

   (a) $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ $(a \leq b)$.

   (b) $]a,b[= \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ $(a < b)$.

(c) $]a,b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ $(a < b)$.
(d) $[a,b[= \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$ $(a < b)$.

2. Les intervalles non bornés:

(a) $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R};\ x > a\}$ $(a \in \mathbb{R})$.
(b) $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R};\ x \geq a\}$ $(a \in \mathbb{R})$.
(c) $]-\infty,b[= \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}$ $(b \in \mathbb{R})$.
(d) $]-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}$ $(b \in \mathbb{R})$.
(e) $]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$

Définition.— *Soit x un réel. Une partie V de $\mathbb{R}$ est dite voisinage de x si et seulement si*

$$\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2;\ \alpha < x < \beta \text{ et }]\alpha,\beta[\subset V$$

De façon équivalente une partie V est un voisinage de x dans $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $\epsilon > 0$ tel que $]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset V$.

Notation: On note $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans $\mathbb{R}$.

Proposition.— *On a les propriétés suivantes :*

i) Tout intervalle ouvert contenant x est un voisinage de x.

ii) Toute intersection finie de voisinages de x est un voisinage de x.

iii) Toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de x est un voisinage de x.

Définition.— *Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on dit que $a \in A$ est un point intérieur à A si et seulement si $A \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(a)$. L'intérieur de A est l'ensemble des points intérieurs à A. On le note $\overset{\circ}{A}$. Ainsi*

$$a \in \overset{\circ}{A} \Longleftrightarrow \exists\epsilon > 0;\ ]a-\epsilon, a+\epsilon[\subset A$$

Proposition.— *Soit $A, B, A_1, \cdots, A_p$ des parties de $\mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :*

1) $\overset{\circ}{A} \subset A$.

2) $A \subset B \Longrightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

3) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.

4) $\overset{\circ}{\left(\bigcap_{1\leq k\leq p} A_k\right)} = \bigcap_{1\leq k\leq p} \overset{\circ}{A_k}$.

5) $\bigcup_{1\leq k\leq p} \overset{\circ}{A_k} \subset \overset{\circ}{\left(\bigcup_{1\leq k\leq p} A_k\right)}$.

Exemples: i) $\overset{\circ}{\overbrace{[a,b]}} = \overset{\circ}{\overbrace{]a,b[}} = \overset{\circ}{\overbrace{[a,b[}} = \overset{\circ}{\overbrace{]a,b]}} =]a,b[$.

ii) $\overset{\circ}{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

iii) $\overset{\circ}{\mathbb{N}} = \emptyset$; $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$; $\overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}} = \emptyset$.

iv) $\overset{\circ}{\overbrace{\{x\}}} = \emptyset$.

v) $\overset{\circ}{\overbrace{[0,1[\cup[1,2]}} = \overset{\circ}{\overbrace{[0,2]}} =]0,2[\neq \overset{\circ}{\overbrace{[0,1[}} \cup \overset{\circ}{\overbrace{[1,2]}} =]0,1[\cup]1,2[$.

Définition.— *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et α un réel. On dit que α est un point adhérent à A si et seulement si tout voisinage de α rencontre A:*

$$\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha),\ V \cap A \neq \emptyset$$

L'adhérence de A, noté $\overline{A}$, est l'ensemble des points adhérents à A.

Lemme.— *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\alpha \in \overline{A} \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0,\ \exists a \in A;\ |a - \alpha| < \epsilon$$

de même:

$$\alpha \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}};\ \lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$$

Proposition.— *Soient $A, B, A_1, \cdots, A_p$ des parties de $\mathbb{R}$, on a les relations suivantes:*

1. $A \subset \overline{A}$.
2. $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
4. $\overline{\bigcup_{1\le k\le p} A_k} = \bigcup_{1\le k\le p} \overline{A_k}$.
5. $\overline{\bigcap_{1\le k\le p} A_k} \subset \bigcap_{1\le k\le p} \overline{A_k}$.
6. *Si A est majorée (resp. minorée), $\sup(A) \in \overline{A}$ (resp. $\inf(A) \in \overline{A}$).*

Exemples : i) $\overline{[a,b]} = \overline{]a,b[} = [a,b]$.
ii) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}/\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$.
$\overline{]0,1[} \cap \overline{]1,2[} = \{1\} \neq \overline{]0,1[\cap]1,2[} = \overline{\emptyset} = \emptyset$.

Lemme.— *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) A est dense dans $\mathbb{R}$.

ii) $\overline{A} = \mathbb{R}$.

On peut donc généraliser la notion de densité:

Définition.— *Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On dit que A est dense dans B si et seulement si $\overline{A} = B$.*

Proposition.— *On a les relations suivantes entre intérieur et adhérence:*

1. $C_{\mathbb{R}}\overline{A} = C_{\mathbb{R}}\overset{\circ}{A}$.
2. $C_{\mathbb{R}}\overset{\circ}{A} = \overline{C_{\mathbb{R}}A}$.
3. $\overline{\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}} = \overline{\overset{\circ}{A}}$.
4. $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}} = \overset{\circ}{\overline{A}}$.

5. *Il existe des parties A de $\mathbb{R}$ telles que les sept ensembles $X, \overline{X}, \mathring{X}, \overline{\mathring{X}}, \mathring{\overline{X}}, \mathring{\overline{\mathring{X}}}, \overline{\mathring{\overline{X}}}$ soient distincts deux à deux.*

6. *On appelle frontière de A l'ensemble $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{C_{\mathbb{R}} A}$, et extérieur de A l'ensemble $Ext = C_{\mathbb{R}} \overline{A}$.*

7. $\mathring{Ext}(A) = Ext(A)$.

Définition.— *Une partie Ω de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ si c'est un voisinage de chacun de ses points:*

$$\forall x \in \Omega,\ \Omega \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x)$$

Remarque: Comme la définition l'indique, $\emptyset$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Lemme.— *Si Ω est une partie non vide de $\mathbb{R}$, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*
i) Ω *ouvert.*
ii) $\forall x \in \Omega,\ \exists \epsilon > 0;\ ]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset \Omega$.
iii) $\Omega = \mathring{\Omega}$.

Proposition.— *On a les propriétés suivantes :*

i) Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

ii) Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

iii) Tout ouvert est réunion d'une famille d'intervalles ouverts.

Théorème.— *Si A est une partie de $\mathbb{R}$ alors $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A.*

Définition.— *Un fermé de $\mathbb{R}$ est par définition le complémentaire dans $\mathbb{R}$ d'un ouvert de $\mathbb{R}$.*

Lemme.— *Si F est une partie de $\mathbb{R}$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*
i) F fermé de $\mathbb{R}$.
ii) $F = \overline{F}$.
iii) $\overline{F} \subset F$.
iv) Toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'élements de F qui converge dans $\mathbb{R}$ converge dans A.

Proposition.— *On a les propriétés suivantes :*

i) Toute intersection de fermés est un fermé.

ii) Toute réunion finie de fermés est un fermé.

Théorème.— *Si A est une partie de $\mathbb{R}$ alors $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.*

Exemples d'ouverts:
.) $]a, b[$
.) $]a, +\infty[$
.) $]-\infty, a[$
.) $\mathbb{R}$

Exemples de fermés:
.) $[a, b]$
.) $\{a\}$
.) $\mathbb{R}$

Attention:
Il existe des ensembles à la fois ouverts et fermés. Par exemple $\emptyset$ et $\mathbb{R}$. On

pourrait montrer qu'il n'y a que ces deux ensembles qui vérifient cette propriété, on dit alors que $\mathbb{R}$ est connexe.

Il existe des ensembles qui ne sont ni ouvert ni fermé. Par exemples $]0,1], \mathbb{Q}$.

Définition.— *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*
On appelle **ouvert de** *A toute intersection d'un ouvert de $\mathbb{R}$ avec A.*
On appelle **fermé de** *A toute intersection d'un fermé de $\mathbb{R}$ avec A.*
Si x est un point de A, on appelle **voisinage de** *x* **dans** *A, toute intersection d'un voisinage de x dans $\mathbb{R}$ avec A.*

Lemme.— *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*
i) F est un fermé de A. *ii) $C_A F$ est un ouvert de A.*

Proposition.— *Soit A une partie de $\mathbb{R}$, alors*
i) Toute réunion d'ouverts de A est un ouvert de A.
ii) Toute intersection finie d'ouverts de A est un ouvert de A.
iii) Toute réunion finie de fermés de A est un fermé de A.
iv) Toute intersection de fermés de A est un fermé de A.

Définition.— *Soit $(U_n)_n$ une suite réelle. On dit qu'un réel λ est une valeur d'adhérence de la suite $(U_n)_n$ si et seulement si elle vérifie les propriétés équivalentes suivantes:*
i) $\forall \epsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N; |U_n - \lambda| < \epsilon$.
ii) Pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $|U_n - \lambda| < \epsilon$ est infini.

Lemme.— *Si $(U_n)_n$ est une suite réelle, le réel λ est une valeur d'adhérence de $(U_n)_n$ si et seulement si il existe une sous-suite $(U_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers λ.*

Preuve : Soit λ une valeur d'adhérence de $(U_n)_n$. Il existe un entier n_0 tel que $|U_{n_0} - \lambda| < 1$. On pose $\varphi(0) = n_0$. On suppose avoir $\varphi(0) < \varphi(1) < \cdots < \varphi(n)$ tels que $|U_{\varphi(k)} - \lambda| < 1/k$, alors l'ensemble $\{p \in \mathbb{N}; |U_p - \lambda| < 1/(n+1)\}$ est infini, donc il existe un tel p tel que $p > \varphi(n)$, on pose $\varphi(n+1) = p$. Il est clair que $lim_{n\to} U_{\varphi(n)} = \lambda$.
Réciproquement, si $U_{\varphi(n)} \to \lambda$ alors $\forall \epsilon > 0 \{|U_{\varphi(n)} - \lambda| < \epsilon\}$ est infini, donc a fortiori l'ensemble $\{|U_n - \lambda| < \epsilon\}$. λ est donc valeur d'adhérence.

Remarque: Si une suite est convergente, elle admet une unique valeur d'adhérence: sa limite. En effet, toute sous suite converge vers sa limite.

Théorème.— (Bolzano-Weierstrass) *Toute suite réelle bornée a au moins une valeur d'adhérence.*

Preuve : Soit $(U_n)_n$ une suite réelle bornée. On veut montrer par récurrence la propriété suivante $D(p)$: $\exists a_0, \cdots, a_p, b_0, \cdots, b_p$ tels que $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_p < b_p \leq b_{p-1} \leq \cdots \leq b_0$, $\forall k = 0, \cdots, p$, $(b_k - a_k) = (b_{k-1} - a_{k-1})/2$ et $\{n \in \mathbb{N}; U_n \in [a_k, b_k]\}$ est infini.
$D(0)$ est vraie. En effet la suite étant bornée, il existe a, b telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a < U_n < b$.
Si $D(p)$ est vrai soit alors $c_p = (b_p + a_p)/2$. On définit $\mathcal{N}_p = \{n \in \mathbb{N};\ U_n \in [a_p, c_p]\}$ et $\mathcal{N}_p' = \{n \in \mathbb{N};\ U_n \in [c_p, b_p]\}$. Si $\mathcal{N}_p$ est infini on prend $a_{p+1} = a_p$ et $b_{p+1} = c_p$. Sinon $\mathcal{N}_p'$ est infini et l'on prend $a_{p+1} = c_p$ et $b_{p+1} = b_p$.
La propriété $D(p)$ est ainsi héréditaire.
La suite de segments $[a_p, b_p]_{p\in\mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses du théorème des segments emboités. On note c l'unique élément de l'intersection de ces segments. Soit $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{a-b}{\epsilon}$ alors $0 \leq b_N - a_N = \frac{b-a}{2^N} < \frac{a-b}{N} < \epsilon$, mais $a_N \leq c \leq b_N$ et $\{n \in \mathbb{N};\ a_N \leq U_n \leq b_N\}$ est infini. Donc $\{n \in \mathbb{N}; |U_n - c| < \epsilon\}$ est infini et c est valeur d'adhérence de (U_n).

———

Remarque : Le procédé adopté pour construire les segments emboités est appellé

procédé de dichotomie.

Définition.— *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite compacte lorsque toute suite d'éléments de A admet au moins une valeur d'adhérence dans A.*

Théorème.— *Les parties compactes de $\mathbb{R}$ sont exactement les fermés bornés.*

Preuve : Soit A un compact. Soit $x \in \overline{A}$. Il existe donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers x. Cette suite n'a qu'une seule valeur d'adhérence: sa limite. Donc $x \in F$, ainsi $\overline{F} \subset F$ et F est fermé. Si A n'était pas bornée, il existerait une suite $a_{n\,n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| > n$, toute sous-suite n'étant pas bornée, ne pourrait converger.
Réciproquement si A est borné toute suite d'éléments de A admet une sous-suite convergeant dans $\mathbb{R}$. Comme A est fermé, elle converge dans A. A est compacte.

———

1.4.3 La droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition.— *On appelle droite numérique achevée et l'on note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, obtenu en adjoignant à $\mathbb{R}$ deux éléments, muni d'un ordre total prolongeant celui de $\mathbb{R}$ en posant:*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -\infty < x < +\infty$$

Attention: $\overline{\mathbb{R}}$ n'a pas de structure algébrique. Notament les opérations suivantes n'ont aucun sens: $x + \infty$, $x.(+\infty)$ $+\infty - \infty$ etc...

Lemme.— *Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.*

Preuve : Soit A une partie de $\overline{\mathbb{R}}$. Si A est majorée dans $\mathbb{R}$, alors A admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, c'est aussi une borne supérieure de A dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Si A n'est pas majorée dans $\mathbb{R}$, alors $+\infty$ est une borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.
On a la même chose pour les bornes inférieures.

———

Définition.— *On appelle voisinage dans $\mathbb{R}$ de $+\infty$ toute partie V de $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $[a,+\infty[\subset V$. L'ensemble de ces voisinages est noté $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(+\infty)$.*
On appelle voisinage dans $\mathbb{R}$ de $+\infty$ toute partie V de $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty,b] \subset V$. L'ensemble de ces voisinages est noté $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(-\infty)$.

Les ensembles $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(-\infty)$ et $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(+\infty)$ ont les même propriétés que $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}(x)$ lorsque x est réel, en particulier celle d'intersection finie.

Définition.— *$\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ est dit adhérent à $A \subset \mathbb{R}$ lorsque pour tout $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha)$, $V \cap A = \emptyset$.*

Définition.— *Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on dit qu'un élément a de $\overline{\mathbb{R}}$ est un point d'accumulation de A si et seulement si a est adhérent à $A - \{a\}$; c'est à dire si tout voisinage de a rencontre A en un autre point que a.*

Remarque: Tout point d'accumulation est un point d'adhérence mais la réciproque est fausse. Ainsi tout réel est un point d'accumulation de $\mathbb{Q}$, mais $\mathbb{N}$ ne possède aucun point d'accumulation.

Lemme.— *Pour que a soit un point d'accumulation de A, il faut et il suffit que pour tout voisinage V de a, $V \cap A$ soit infini.*

Définition.— *Si A est une partie de $\mathbb{R}$, on appelle point isolé de A tout point de A qui n'est pas point d'accumulation de A, c'est à dire tout point de A ayant un voisinage V* *tel que $V \cap A = \{a\}$.*

Exemple: Tout point de $\mathbb{N}$ est isolé, un ensemble est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si il n'a pas de point isolé.

1.5 Limites de suites.

1.5.1 Suites réelles.

Rappel: On dit qu'une suite réelle $(U_n)_n$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n > N,\ |U_n - l| < \epsilon$$

On a vu que dans ce cas la suite $(U_n)_n$ est bornée et que sa limite est unique. La définition s'étend facilement au cas des suites "définies à partir d'un certain rang": $(U_n)_{n\geq q}$.

Proposition.— *Soient $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ deux suites réelles et $l, \alpha, \beta, \lambda, \mu$ des réels. On a la propriétés suivantes :*

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |U_n - l| = 0.$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Longrightarrow \lim\limits_{n\to n} |U_n| = |l|.$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lambda$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \mu \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha U_n + \beta V_n = \alpha\lambda + \beta\mu.$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ *et V_n bornée* $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n V_n = 0.$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lambda$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \mu \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n V_n = \lambda\mu.$

6) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ *avec $l \neq 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq m \Longrightarrow 0$ et* $\lim\limits_{n\to+\infty, n\geq m} \dfrac{1}{U_n} = \dfrac{1}{l}.$

Proposition.— *On a les propriétés suivantes :*

1) Si une suite réelle $(U_n)_n$ converge vers l et que $\alpha < l < \beta$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ \alpha < U_n < \beta$.

2) Si les suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ convergent respectivement vers les réel l et l'. Alors s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq p,\ U_n < V_n$, alors $l \leq l'$.

3) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites telles que :

i) (a_n) et (b_n) converge vers la même limite l.

ii) $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_0$, $a_n \leq c_n \leq b_n$,

alors $(c_n)_n$ converge vers l.

Définition.— *Soit $(U_n)_n$ une suite réelle.*

i) On dit que (U_n) tend vers $+\infty$ et l'on note $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ *si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geq N\, U_n \geq A$$

ii) On dit que (U_n) tend vers $-\infty$ et l'on note $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ *si*

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geq N\, U_n \leq A$$

Remarque : Si $(U_n)_n$ est une suite réelle et $l \in \overline{\mathbb{R}}$, la propriété $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ peut s'exprimer de façon unifiée par:

$$\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(l), \exists N \in \mathbb{N}; \forall n \geq N \ U_n \in V$$

Proposition.— *Soit $(U_n)_n$ une suite réelle.*

1. *Si $U_n > 0$ pour $n \geq n_0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{U_n} = 0$*
2. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ et si pour tout $n \geq n_0$, $V_n \geq U_n$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$.*
3. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n + V_n) = +\infty$.*
4. *$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \in \mathbb{R}^{*+} \cup \{+\infty\}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n V_n = +\infty$.*

1.5.2 Extension de la notion de convergence aux suites complexes.

Définition.— *Une suite complexe est une application U de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.*

Note: On utilise les même notations pour les suites complexes que pour les suites réelles.

Définition.— *On dit qu'une suite complexe $(U_n)_n$ converge (dans $\mathbb{C}$) lorsqu'il existe $l \in C$ tel que:*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N};\ \forall n \geq N\ |u_n - l| < \epsilon$$

Note: On garde la même terminologie et les même notations pour la convergence des suites complexes que pour celles des suites réelles.

Proposition.— *Si une suite complexe converge, sa limite est unique.*

Lemme *De la définition on déduit les propriétés suivantes :*

i) Toute suite complexe convergente est bornée.
ii) $\forall (U_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\forall l \in \mathbb{C}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Longleftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \overline{u_n} = \bar{l}$$

Proposition.— *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes et $l, \alpha, \beta, \lambda, \mu$ des complexes.*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} |U_n - l| = 0.$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Longrightarrow \lim\limits_{n\to n} |U_n| = |l|.$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lambda$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \mu \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha U_n + \beta V_n = \alpha\lambda + \beta\mu.$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ *et* V_n *bornée* $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n V_n = 0.$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lambda$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \mu \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n V_n = \lambda\mu.$
6. *Si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$ avec $l \neq 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq m \Longrightarrow 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty, n\geq m} \dfrac{1}{U_n} = \dfrac{1}{l}$.*

Théorème.— *Soit $(U_n)_n$ une suite complexe, on pose pour tout n $a_n = Re(u_n)$ et $b_n = Im(u_n)$. Alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:*

$$(\lim_{n\to+\infty} u_n = a+ib) \Longleftrightarrow (\lim_{n\to+\infty} a_n = a \text{ et } \lim_{n\to+\infty} b_n = b)$$

1.5.3 Suites de Cauchy dans $\mathbb{C}$.

Définition.— *Une suite complexe $(U_n)_n$ est dite de Cauchy dans $\mathbb{C}$ si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall p > N \forall q > N,\ |u_p - u_q| < \epsilon$$

Théorème.— *Une suite complexe converge si et seulement si elle est de Cauchy dans $\mathbb{C}$.*

2 Fonctions continues

2.1 Limites de fonctions et continuité.

2.1.1 Limites de fonctions réelles de variable réelle.

Dans ce paragraphe, on envisage des fonctions réelles de variable réelle, c'est à dire des applications d'une partie $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition.— *Soit $f : D \to \mathbb{R}$, α un point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f a pour limite l en α ou que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers α, et on note $\lim_{x\to\alpha} f(x) = l$, si et seulement si :*

$$\forall W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(l),\ \exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha);\ \forall x \in V \cap D,\ f(x) \in W$$

Soit maintenant $A \subset D$ et α un point adhérent à A. On dit que f a pour limite l en α suivant A ou que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers α dans A, et l'on note $\lim_{x\to\alpha, x\in A} f(x)$ lorsque $\lim_{x\to\alpha} f_{|A}(x) = l$.

Lemme.— *Soit A et A' deux parties de D. Il y a équivalence entre $\lim_{x\to\alpha, x\in A} f(x) = l$ et $\lim_{x\to\alpha, x\in A'} f(x) = l$, lorsqu'il existe $V_0 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha)$ tel que $A' \cap V_0 = A \cap V_0$.*

Lemme.— *Soit l et l' dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si $\lim_{x\to\alpha, x\in A} f(x) = l$ et $\lim_{x\to\alpha, x\in A} f(x) = l'$ alors $l = l'$.*

Preuve : En effet si $l \neq l'$ alors il existe W et W' deux ouverts de $\mathbb{R}$ qui voisinnent respectivement l et l' et tels que $W \cap W' = \emptyset$. Il existerait donc V et V' deux voisinages de α tels que $f(V \cap A) \subset W$ et $f(V' \cap A) \subset W'$. Mais $V \cap V' \cap A \neq \emptyset$...

Théorème.— (Critère séquentiel) *Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $A \subset D$ une partie non vide et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\lim_{x\to\alpha, x\in A} f(x) = l$,

ii) $\forall (a_n) \in A^{\mathbb{N}},\ \lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = l$.

Preuve : <u>Condition necessaire</u>: Soit (a_n) une suite d'éléments de A telle que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$. On a donc:

$$\forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha),\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geq N,\ a_n \in V$$

maintenant $\lim_{x\to\alpha,\ x\in A} f(x) = l$. On a donc:

$$\forall W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(l),\ \exists V_0 \in \mathcal{V}_\alpha;\ \forall x \in V_0 \cap A,\ f(x) \in W$$

Ainsi soit $W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(l)$, soit V_0 vérifiant la condition ci-dessus, comme eſt un voisinage de α, il exiſte $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N\ a_n \in V_0$, donc $f(a_n) \in W$ ainsi:

$$\forall W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha),\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall n \geq N,\ f(a_n) \in W$$

<u>Condition suffisante</u>: Raisonnons par l'absurde et supposons que l n'eſt pas limite de $f(x)$ en α suivant A:

$$\exists W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(l),\ \forall V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha);\ \exists x \in V \cap A,\ f(x) \notin W$$

Alors pour $n \in \mathbb{N}^*$,
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on prend $V_n =]\alpha - 1/n, \alpha + 1/n[$,
- Si $\alpha = +\infty$, on prend $V_n = [n, +\infty[$,
- Si $\alpha = -\infty$, on prend $V_n =]\infty, n]$,

et l'on choisit a_n dans $V_n \cap A$ tel que $f(a_n) \notin W$. Alors la suite a_n tend vers α mais $f(a_n)$ ne tend pas vers l.

———

Théorème.— *Soient D et Δ deux parties de $\mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : \Delta \to \mathbb{R}$. Soient $A \subset D$ et $B \subset \Delta$ tel que $f(A) \subset B$ et soient $\alpha, \beta, l \in \overline{\mathbb{R}}$ tels α soit adhérent à A (alors β eſt adhérent à B)*

$$Si\ \lim_{x\to\alpha, x\in A} f(x) = \beta\ et\ \lim_{y\to\beta, y\in B} g(y) = l\ alors\ \lim_{x\to\alpha, x\in A} g\circ f(x) = l$$

Preuve : β eſt un point adhérent à B car $f(A) \subset B$ et $f(x)$ tend vers β quand x tend vers α dans A.
La démonſtration s'obtient en apliquant le critère séquentiel du théorème précédent.

———

Lemme.— *Soit $l \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{x\to\alpha, x\in A} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha);\ \forall x \in V \cap A\ |f(x) - l| < \epsilon$$

Si on suppose α réel alors:

$$\lim_{x\to\alpha, x\in A} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists\eta > 0 \forall x \in A\ |x - \alpha| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Si on suppose $\alpha = \pm\infty$ alors:

$$\lim_{x\to+\infty, x\in A} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists x_\epsilon \in \mathbb{R} \forall x \in A\ x > x_\epsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

$$\lim_{x\to-\infty, x\in A} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall\epsilon > 0,\ \exists x_\epsilon \in \mathbb{R} \forall x \in A\ x < x_\epsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$$

Théorème.— (Critère de Cauchy) *Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Pour que f admette une limite réelle en α suivant A, il faut et il suffit qu'elle vérifiele critère de Cauchy:*

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha);\ \forall (x, y) \in V \cap A\ |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Preuve : Condition nécessaire: Si $f(x) \to l$ alors

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha);\ \forall x \in A \cap V |f(x) - l| < \epsilon/2$$

Donc pour $(x, y) \in A \cap V$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - l| + |f(y) - l| < \epsilon$$

Condition suffisante: On suppose maintenant que

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists V_\epsilon \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha);\ \forall (x, y) \in V_\epsilon \cap A\ |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ une suite tendant vers α et $\epsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n > n_0 \Longrightarrow x_n \in V_\epsilon$, donc:

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p > n_0 \forall q > n_0\ |f(x_p) - f(x_q)| < \epsilon$$

Donc la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle converge donc vers un réel l.
Soit maintenant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ une autre suite tendant vers α. On définit la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ z_{2n} = x_n \text{ et } z_{2n+1} = y_n$$

Cette suite tend vers α donc d'après ce qui précède $(f(z_n))$ converge vers un réel l'. Mais $(f(z_{2n}))$ est une sous-suite de $(f(z_n))$ convergeant vers l. Donc $l = l'$. Ainsi $(f(z_{2n+1}))$ converge vers l c'est à dire que $(f(y_n))$ converge vers l.
Par le critère séquentiel on en déduit $\lim\limits_{x\to\alpha,\ x\in A} f(x) = l$.

Proposition.— *Soient f_1, f_2 deux fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}$ et l_1, l_2 des réels. On suppose que $\lim_{x\to\alpha, x\in A} f_1(x) = l_1$ et que $\lim_{x\to\alpha, x\in A} f_2(x) = l_2$. On a :*

i) $\lim\limits_{x\to\alpha, x\in A} |f_1(x)| = |l_1|$.
ii) Si $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\lim\limits_{x\to\alpha, x\in A} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2$.
iii) $\lim\limits_{x\to\alpha, x\in A} f_1(x) f_2(x) = l_1 l_2$.
iv) Si $l_1 \neq 0$ alors $\exists V_0 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha)$, $\exists m > 0$; $\forall x \in V_0 \cap A$, $|f_1(x)| \geq m$ et

$$\lim_{x\to\alpha, x\in A\cap V_0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{l_2}{l_1}$$

Preuve : Toutes les propriétés découlent du critère séquentiel.

Proposition.— *Soient f_1, f_2, f_3 trois fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}$ et l, l_1, l_2 trois réels. On a :*

i) S'il existe $V_0 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha)$ tel que f_1 soit bornée sur $V_0 \cap A$ et si de plus $\lim\limits_{x\to\alpha, x\in A} f_2(x) = 0$, *alors* $\lim\limits_{x\to\alpha, x\in A} f_1(x) f_2(x) = 0$.
ii) Si $\lim\limits_{x\to\alpha, x\in A} f_1(x) = l_1$ *et* $\lim\limits_{x\to\alpha, x\in A} f_2(x) = l_2$ *et si en outre il existe $V_0 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha)$ tel que pour tout $x \in V_0 \cap A$, $f_1(x) \leq f_2(x)$, alors $l_1 \leq l_2$.*
iii) Si $\lim\limits_{x\to\alpha, x\in A} f_1(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x\to\alpha, x\in A} f_2(x) = l$ *et si en outre il existe $V_0 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha)$ tel que pour tout $x \in V_0 \cap A$, $f_1(x) \leq f_3(x) \leq f_2(x)$, alors* $\lim\limits_{x\to\alpha, x\in A} f_3(x) = l$.

Preuve : Critère séquentiel.

On prend f, g, f_1, f_2 des applications de $A \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on considère $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à A.

Lemme.—

$$\lim_{x\to\alpha, x\in A} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \forall C \in \mathbb{R},\ \exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha);\ \forall x \in V \cap A,\ f(x) > C$$

$$\lim_{x\to\alpha, x\in A} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \forall C \in \mathbb{R},\ \exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha);\ \forall x \in V \cap A,\ f(x) < C$$

Proposition.— *On a :*

i) $\lim\limits_{x\to\alpha, x\in A} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha, x\in A} -f(x) = +\infty.$
ii) S'il existe $V_0 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha)$ *tel que pour tout* $x \in V_0 \cap A,\ f(x) > 0$, *alors*

$$\lim_{x\to\alpha, x\in A} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \lim_{x\to\alpha, x\in V_0\cap A} \frac{1}{f(x)} = 0$$

iii) S'il existe $V_0 \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(\alpha)$ *tel que pour tout* $x \in V_0 \cap A,\ g(x) \geq f(x)$, *alors*

$$\lim_{x\to\alpha, x\in A} f(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to\alpha, x\in A} g(x) = +\infty$$

iv) Si $\lim\limits_{x\to\alpha, x\in A} f_1(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to\alpha, x\in A} f_2(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *alors,*

$$\lim_{x\to\alpha, x\in A} f_1(x) + f_2(x) = +\infty$$

v) Si $\lim\limits_{x\to\alpha, x\in A} f_1(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to\alpha, x\in A} f_2(x) = l \in \mathbb{R}^{*+} \cup \{+\infty\}$ *alors,*

$$\lim_{x\to\alpha, x\in A} f_1(x) f_2(x) = +\infty$$

Preuve : Critère séquentiel.

2.1.2 Limites particulières.

1.— Limite à droite en α réel:
C'est le cas où A est de la forme $]\alpha, \alpha'[$. On ecrit

$$\lim_{x\to\alpha, x>\alpha} f(x) = l \ ou \ \lim_{x\to\alpha^+} f(x) = l \ au\ lieu\ de \ \lim_{x\to\alpha, x\in A} f(x) = l$$

Le critère de limite devient donc:

$$\forall W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(l),\ \exists \eta > 0;\ \forall x \in]\alpha, \alpha+\eta[,\ f(x) \in W$$

N.B. Quand $l \in \mathbb{R}$, on le note parfois $f(\alpha + 0)$.

2.— Limite à gauche en α réel:
C'est le cas où A est de la forme $]\alpha'', \alpha$. On ecrit

$$\lim_{x\to\alpha, x<\alpha} f(x) = l \ ou \ \lim_{x\to\alpha^-} f(x) = l \ au\ lieu\ de \ \lim_{x\to\alpha, x\in A} f(x) = l$$

Le critère de limite devient donc:

$$\forall W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(l),\ \exists \eta > 0;\ \forall x \in]\alpha-\eta, \alpha[,\ f(x) \in W$$

N.B. Quand $l \in \mathbb{R}$, on le note parfois $f(\alpha - 0)$.

3.— Limite en α par valeurs différentes, ou limite pointée:
C'est le cas où A est de la forme $]\alpha'', \alpha'[/\{a\}$. On ecrit

$$\lim_{x\to\alpha, x\neq\alpha} f(x) = l \text{ au lieu de } \lim_{x\to\alpha, x\in A} f(x) = l$$

Le critère de limite devient donc:

$$\forall W \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(l),\ \exists \eta > 0;\ \forall x \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[\ (x \neq \alpha),\ f(x) \in W$$

N.B. On a l'équivalence:

$$\lim_{x\to\alpha, x\neq\alpha} f(x) = l \Longleftrightarrow (\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = l \text{ et } \lim_{x\to\alpha^-} f(x) = l)$$

2.1.3 Fonctions monotones.

Définition.— *Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$, alors:*
f **croît (ou f est croissante)** *signifie:* $\forall (a, a') \in D^2,\ a \leq a' \Longrightarrow f(a) \leq f(a')$.
f **décroît (ou f est décroissante)** *signifie:* $\forall (a, a') \in D^2,\ a \leq a' \Longrightarrow f(a) \geq f(a')$.
(Dans ces deux cas on dit que f est **monotone***)*
f **croît strictement (ou f est strictement croissante)** *signifie:* $\forall (a, a') \in D^2,\ a < a' \Longrightarrow f(a) < f(a')$.
f **décroît strictement (ou f est strictement décroissante)** *signifie:* $\forall (a, a') \in D^2,\ a < a' \Longrightarrow f(a) > f(a')$.
(Dans ces deux cas on dit que f est **strictement monotone**.
De même si A est une partie de D, on dira que f est croissante, décroissante etc... sur A si $f_{|A}$ est croissante, décroissante etc...

Lemme.— *On a les propriétés suivantes :*

i) f est croissante si et seulement si $-f$ est décroissante.

ii) La somme de deux fonctions croissantes est croissante.

iii) Le produit de deux fonctions positives croissantes est une fonction croissante mais l'ensemble des fonctions monotones sur A n'est stable ni par l'addition ni par la multiplication.

Théorème.— *Soit f une application croissante de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ (avec a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf_{\overline{\mathbb{R}}}(f(]a,b[)) \text{ et } \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup_{\overline{\mathbb{R}}}(f(]a,b[))$$

Preuve : Quitte à changer x en $-x$, on peut se contenter d'étudier la limite en b.

Premier cas: Si la fonction est majorée, $M = \sup_{\overline{\mathbb{R}}}(f(]a,b[))$ est élément de $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in]a, b[,\ f(x) \leq M$. Soit alors $\epsilon > 0$. Le réel $M - \epsilon$ n'étant pas un majorant de f, il existe $y \in]a, b[$ tel que $f(y) > M - \epsilon$.
Mais alors comme f est croissante

$$\forall x \in]y, b[,\ M - \epsilon < f(x) \leq M$$

donc $\lim_{x\to b^-} f(x) = M$ (En effet $\exists V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(b)$ tel que $V \cap]a, b[=]y, b[$).

Deuxième cas: La fonction n'est pas majorée et $M = +\infty$. Pour tout réel A, A n'est pas majorant, donc il existe $y \in]a, b[$ tel que $f(y) > A$, mais comme f est croissante:

$$\forall x \in]y, b[,\ f(x) \geq f(y) > A$$

donc $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$.

Corollaire.— *Si f est monotone sur un intervalle I et si c est point intérieur à I, alors f a, au point c, des limites à gauche et à droite réelles. De plus*

$$f(c-0) \leq f(c) \leq f(c+0)$$

Preuve : On applique le théorème précédent aux restriction de f à chacun des intervalles

$$I^{'} = I\cap]-\infty, c[\ et \ I^{''} = I\cap]c,+\infty[$$

qui sont non vide car c est intérieur à I.

Proposition.— *Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$. On suppose $f(A) \subset B$. Si f et g sont toutes deux monotones (resp. strictement monotones), alors $g \circ f$ est monotone (resp. strictement monotone).*

Exercices : 1/ Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application monotone vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires. Montrer que f est continue.

2/ Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} x \neq 0 \Longrightarrow f(x) \neq 0 \\ f(1) = 1 \\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall x \neq 0,\ f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)} \end{cases}$$

(Ind. En étudiant $f\left(\dfrac{1}{x(1-x)}\right)$ montrer que $f(x)^2 = f(x^2)$ et, par suite, que f est croissante.)

2.1.4 Continuité.

Dans ce paragraphe A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Définition.— *Soit f une application de A dans $\mathbb{R}$ et $a \in A$. La fonction f est dite*

"continue à droite en a" si $\displaystyle\lim_{x\to a, x\in A\cap]a,+\infty[} f(x) = f(a)$, *$(a \neq max(A))$.*

"continue à gauche" en a si $\displaystyle\lim_{x\to a, x\in A\cap]-\infty,a[} f(x) = f(a)$, *$(a \neq min(A))$.*

"continue en a" si $\displaystyle\lim_{x\to a, x\in A/\{a\}} f(x) = f(a)$, *ou, ce qui revient au même, si* $\displaystyle\lim_{x\to a, x\in A} f(x) = f(a)$.

Lemme.— (formulations équivalentes)*On a :*

f continue à droite de a équivaut à $\forall\epsilon > 0,\ \exists\eta > 0\ \forall x \in A(x > a \ et\ |x-a| < \eta) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.
f continue à gauche de a équivaut à $\forall\epsilon > 0,\ \exists\eta > 0\ \forall x \in A(x < a \ et\ |x-a| < \eta) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.
f continue en a équivaut à $\forall\epsilon > 0,\ \exists\eta > 0\ \forall x \in A(|x-a| < \eta) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$.

En utilisant les propriétés sur les limites, on trouve :

Proposition.— *i) Soit a un point intérieur à A, alors f continue en a équivaut à f continue à gauche et à droite de a.*

ii) f eſt continue en a (resp. à gauche de a, resp. à droite de a) équivaut à pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élement de A convergeant vers a (resp. et $\forall n\ a_n < 0$, resp. et $\forall n\ a_n > 0$) $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a)$.

iii) Si f et g sont continues en a (resp. à gauche de a, resp. à droite de a) alors $f+g$ et fg sont continues en a (resp. à gauche de a, resp. à droite de a).

iv) Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : B \to \mathbb{R}$ tels que $f(A) \subset B$ et que f continue en a et g en $f(a)$, alors $g \circ f$ eſt continue en a.

Définition.— *$f : A \to \mathbb{R}$ eſt dite continue si et seulement si elle eſt continue en tout point de A:*

$$\forall a \in A,\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Si $B \subset A$, f eſt dite continue sur B si et seulement si $f_{|B}$ eſt continue.

Remarque: Si A eſt un intervalle I non vide alors f continue sur I équivaut à f continue en tout point intérieur à I et si I a un maximum b, f eſt continue à gauche de b et si I a un minimum a, f eſt continue à droite de a.

Théorème.— *$f : A \to \mathbb{R}$ eſt continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de $\mathbb{R}$ par f eſt un ouvert (relatif) de A.*

Preuve : Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et $\Omega = f^{-1}(\mathcal{O})$. Pour tout $x \in \Omega$, il exiſte $\epsilon(x) > 0$ tel que

$$]f(x)-\epsilon(x), f(x)+\epsilon(x)[\subset \mathcal{O}[$$

f étant continue en x, il exiſte $\eta(x) > 0$ tel que:

$$f(]x-\eta(x), x+\eta(x)[) \subset]f(x)-\epsilon(x), f(x)+\epsilon(x)[\subset \mathcal{O}[$$

Soit $\Omega' = \bigcup\limits_{x\in\Omega}]x-\eta(x), x+\eta(x)[$. Il eſt clair que ω' eſt un ouvert de $\mathbb{R}$, mais $\omega = A \cap \Omega'$ donc Ω eſt un ouvert (relatif) de A.
Réciproquement: Soit a un point de A et $\epsilon > 0$. Comme $f^{-1}(]f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon[)$ eſt un ouvert de A, il exiſte $\eta > 0$ tel que:

$$]a-\eta, a+\eta[\subset f^{-1}(]f(a)-\epsilon, f(a)+\epsilon[)$$

c'eſt à dire

$$\forall x \in]a-\eta, a+\eta[,\ |f(x)-f(a)| < \epsilon$$

et ainsi f eſt continue en tout $a \in A$.

———

Corollaire.— *$f : A \to \mathbb{R}$ eſt continue si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de $\mathbb{R}$ par f eſt un fermé (relatif) de A.*

Preuve : Le corollaire eſt en fait équivalent au théorème par passage au complémentaire: En effet soit $\mathcal{F}$ un fermé de $\mathbb{R}$ alors $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}\mathcal{F} = \mathcal{O}$ eſt un ouvert de $\mathbb{R}$. $\mathcal{F}$ et $\mathcal{O}$ forment une partition de $\mathbb{R}$ donc $f^{-1}(\mathcal{F})$ et $f^{-1}(\mathcal{O})$ forment une partition de $f^{-1}(\mathbb{R}) = A$. Ainsi si f eſt continue alors $f^{-1}(\mathcal{O})$ eſt un ouvert relatif de A donc son complémemtaire dans A eſt un fermé relatif de A, c'eſt à dire $f^{-1}(\mathcal{F})$ eſt fermé relatif de A. Ceci étant valable pour n'importe quel ouvert et fermé la réciproque en découle.

———

Théorème.— *Soit $f : A \to \mathbb{R}$. f eſt continue si et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers un point de A, la suite $(f(a_n))$ eſt convergente.*

Preuve : Condition nécessaire: Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ et si f est continue en a alors $\lim\limits_{n\to a} f(x) = f(a)$ donc par le critère séquentiel $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a)$.
Condition suffisante: Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, par hypothèse $\exists l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = l$. Considérons la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{2n} = a_n \ et \ b_{2n+1} = a$$

(b_n) converge vers a, par hypothèse $(f(b_n))$ est convergente, mais $(f(b_{2n})$ converge vers l et $(f(b_{2n+1}))$ converge vers $f(a)$, donc $l = f(a)$. Par le critère séquentiel on en déduit que $\lim\limits_{n\to a} f(x) = f(a)$, donc f est continue en a.

Exercice : On considère A l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \\ \exists B, C \geq 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) \leq f(y)(1 + B|x|)^C \end{cases}$$

a) Soit $g(x) = 1 + |x|$ et $h(x) = 2^x$. Montrer que $g \in A$ et $h \notin A$.

b) Prouver que si f est élément de A alors f est continue.

c) Montrer que $f \in A \Longrightarrow f^s \in A$.

2.1.5 Propriétés des applications continues.

Proposition.— *Si f et g sont des applications continues de A dans $\mathbb{R}$ et λ et μ des réels, alors $|f|$, $\lambda f + \mu g$ et fg sont continues. Si, de plus, g ne s'annule pas, alors f/g est continue.*

Conséquence: Toute fonction polynôme est continue. Toute fonction rationnelle (i.e. tout rapport de deux fonctions polynômes) est continue sur sont domaine de définition.

Proposition.— *Si f est une application continue de A dans $\mathbb{R}$ et g une application continue de B dans $\mathbb{R}$, alors si $f(A) \subset B$ $g \circ f$ est continue.*

Proposition.— *Soient f une application de A dans $\mathbb{R}$, a un point de $\overline{A}/A$ et $l \in \mathbb{R}$. On pose $A' = A \cup \{a\}$. On suppose que $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = l$. Alors, il existe une unique application $\tilde{f}$ continue de A' dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$\tilde{f}_{|A} = f$$

L'application $\tilde{f}$ s'appelle le **prolongement par continuité** *de f en a.*

Preuve : Soit $x \in A$, on pose $\tilde{f}(x) = f(x)$, et $\tilde{f}(a) = l$. Il est clair que $\tilde{f}$ est continue sur A. Maintenant comme $\lim\limits_{x\to a, x\in A} f(x) = l$ il s'ensuit que $\lim\limits_{x\to a, x\in A'} \tilde{f}(x) = l$ et donc $\tilde{f}$ est continue en a. Donc $\tilde{f}$ est continue sur A'. L'unicité provient du fait que si $g : A' \to \mathbb{R}$ est une autre application vérifiant les conditions du théorème alors $g(a) \neq l$ or $\lim\limits_{x\to a, x\in A} g(x) = l$ donc g n'est pas continue en a.

Théorème.— *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application continue et A une partie compacte de D, alors $f(A)$ est compacte.*

Preuve : Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(A)$. Donc il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A tel que $b_n = f(a_n)$. A étant compact, il existe une sous-suite

$(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $a \in A$. f étant continue $(b_{\varphi(n)}) = f(a_{\varphi(n)})$ converge aussi vers $f(a) \in f(A)$. Ainsi $f(A)$ eſt compact.

Corollaire.— *Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue. Si A eſt compact alors f eſt bornée et atteint ses bornes.*

Preuve : A étant compact, $f(A)$ eſt compact donc borné donc f eſt borné. Mais $f(A)$ eſt aussi fermé donc il contient ses borne m et M. Ainsi il exiſte $X_M \in A$ et $x_m \in A$ tel que $f(x_M) = M$ et $f(x_m) = m$.

Remarque: On déduit de ce corollaire que $|f|$ à un maximum. On le note $\|f\|_\infty$.

2.1.6 Uniforme continuité.

Définition.— *Soit $f : A \to \mathbb{R}$. On dit que f eſt niformément continue si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \alpha > 0;\ \forall (x,y) \in A^2,\ (|x-y| < \alpha \longrightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$$

Définition.— *Soit $f : A \to \mathbb{R}$. On dit que f eſt lipschitzienne de rapport K ou que f eſt K-lipschitzienne si et seulement si*

$$\forall (x,y) \in A^2,\ |f(x) - f(y)| < K|x-y|$$

On dit que f eſt contractante si et seulement si f eſt K-lipschitzienne avec $0 \leq K < 1$.

Lemme.— *Soit f une application. On a : "f contractante" implique "f lipschitzienne" implique "f uniformément continue" implique "f continue".*

Preuve : • f eſt contractante $\Longrightarrow f$ eſt lipschitzienne eſt évident.

• f eſt lipschitzienne $\Longrightarrow f$ eſt uniformément continue : pour ϵ fixé on prend $\alpha = \epsilon/K$.

• f eſt uniformement continue $\Longrightarrow f$ eſt continue : on fixe $x_0 = x$ et on prend, pour ϵ fixé, le même α.

Théorème.— (Heine) *Soit A un compact de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$. Alors si f eſt continue, f eſt uniformément continue.*

Preuve : Supposons que f n'eſt pas uniformément continue sur A :

$$\exists \epsilon > 0;\ \forall \alpha > 0,\ \exists (x,y) \in A^2;\ |x-y| < \alpha \ et\ |f(x) - f(y)| \geq \epsilon$$

En prenant $\alpha = 1/2^n$ on obtient deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiants :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - y_n| < \frac{1}{2^n}\ et\ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$$

Comme A eſt compact, il exiſte une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $a \in A$ tel que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers a. Mais comme $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq 1/2^n$ alors $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers a. et par continuité de f, $(f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}))$ converge vers 0, ce qui eſt absurde.

Exercices : 1/ Soient $A = \mathbb{R}^+$ et $f(x) = x^2$, montrer que f eſt continue mais pas uniformément continue.

2/ Même question pour $A =]0,1]$ et $f(x) = 1/x$.

3/ Etudier l'uniforme continuité de $f(x) = \dfrac{1-\cos 2\pi x}{x^2 \log x}$.

4/ Soit $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \geq 0$ on ait $|f(t)| \leq at + b$.

5/ Montrer que $f(x) = \sin x^2$ n'est pas uniformément continue sur R.

2.1.7 Limites pour les fonctions à valeurs complexes.

Exercice : On considère ici des fonctions de la variable réelle à valeurs dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On reprend toutes les définitions concernant les limites dans le cas des fonctions à valeurs réelles, mais en entendant le symbole $|.|$ par "module" et non plus "valeur absolue". Reprendre l'ensemble des définitions et résultats obtenus dans la cas réel et regarder comment ils s'étendent aux cas complexe.

2.2 Valeurs intermédiaires.

Dans ce qui suit, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, non réduit à un point.

Théorème.— (dit des valeurs intermédiaires) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue et a et b deux éléments de I tels que $a < b$ et $f(a) \neq f(b)$. Alors*

$$\forall y \in]f(a), f(b)[,\ \exists x \in]a, b[,\ f(x) = y$$

Preuve: (Par dichotomie)
On suppose $f(a) < f(b)$ et $m \in]f(a), f(b)[$. On va définir par récurrence deux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ et considérer une suite auxiliaire $(c_n)_n$ définie pour $n \geq 0$ par $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, de la manière suivante :

i) $a_0 = a$, $b_0 = b$ (donc $c_0 = \dfrac{a+b}{2}$).

- Si $f(c_0) < m$, on pose $a_1 = c_0$ et $b_1 = b_0$.
- Si $f(c_0) \geq m$ on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = c_0$.

de sorte que $a_0 \leq a_1$, $b_1 \leq b_0$, $f(a_1) < m \leq f(b_1)$, $b_1 > a_1$ et $(b_0 - a_0) = 2(b_1 - a_1)$.

ii) On suppose qu'au rang $n \geq 1$ on a des réels $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$ et $b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0$ tels que pour tout $k = 1, \cdots, n$, $f(a_k) < m \leq f(b_k)$, $b_k > a_k$ et $(b_{k-1} - a_{k-1}) = 2(b_k - a_k)$. Au rang $n+1$:

- Si $f(c_n) < m$ on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
- Si $f(c_n) \geq m$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.

On a alors $f(a_{n+1}) < m \leq f(b_{n+1})$, $b_{n+1} > a_{n+1}$ et $(b_n - a_n) = 2(b_{n+1} - a_{n+1})$.

Les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ ainsi construites permettent d'obtenir la suite $([a_n, b_n])_n$ de segments emboités dont la longueur tend visiblement vers 0. Soit alors c l'unique élément de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = c$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c)$ car f est continue. Mais comme $f(a_n) < m \leq f(b_n)$, par passage à la limite on obtient $f(c) = m$. Maintenant $c \in [a,b]$ mais $c \neq a$ et $c \neq b$ car $f(a) < f(c) < f(b)$, donc $c \in]a, b[$.
Le cas $f(a) > f(b)$ se ramène au précédent en considérant la fonction $-f$.

Une démonstration "topologique" du théorème des valeurs intermédiaires: On se propose de donner ici une preuve du théorème des valeurs intermédiaires qui permet d'ouvrir une perspective bien plus générale pour cette propriété.

On rappelle qu'on appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie $A \subset \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall \alpha, \beta \in A,\ \forall t \in \mathbb{R},\ \alpha \leq t \leq \beta \Longrightarrow t \in A$$

Un théorème de structure assure que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les ensembles du type : $\emptyset$, $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$, $]a,b[$, $]-\infty,a[$, $]-\infty,a]$, $]b,+\infty[$, $[b,+\infty[$ et $\mathbb{R}$.

Remarque : Le théorème des valeurs intermédiaires a pour conséquence :

Corollaire.— *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Si $I \subset A$ est un intervalle alors $f(I)$ est un intervalle.*

Preuve : Exercice.

———

On rappelle qu'une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite connexe si A n'est pas réunion disjointe de deux ouverts relatifs de A non triviaux (i.e. si U_1, U_2 sont deux ouverts de $\mathbb{R}$ tels que $(U_1 \cap A) \cup (U_2 \cap A) = A$ et $(U_1 \cap A) \cap (U_2 \cap A) = \emptyset$, alors soit $(U_1 \cap A) = \emptyset$, soit $(U_2 \cap A) = \emptyset$).

Thème : connexité de $\mathbb{R}$.

On veut montrer que $\mathbb{R}$ est connexe. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux ouverts non vides U_1, U_2 tels que $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}$ et $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Comme $U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}$ on a $0 \in U_1$ ou $0 \in U_2$, disons $0 \in U_2$.

a) Montrer qu'un des deux ensembles $]-\infty,0[\cap U_1$, $]0,+\infty[\cap U_1$ est non vide. Disons $A_1 =]-\infty,0[\cap U_1 \neq \emptyset$.

b) Montrer que A_1 est fermé et que, par suite, $\alpha = \sup A_1$ est un élément de A_1.

c) On considère l'ensemble $A_2 = [\alpha,+\infty[\cap U_2$. Montrer que A_2 est un fermé et que $\inf A_2 = \alpha$. En déduire que $\alpha \in A_2$ et conclure.

Théorème fondamental.— *Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie connexe et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. La partie $f(A)$ est connexe (on dit plus simplement pour résumer que l'image d'un connexe par une application continue est connexe).*

Preuve : Soit $f : A \to f(A)$ continue et $A \neq \emptyset$ connexe. Supposons que $f(A)$ ne soit pas connexe, alors il existe Ω_1, Ω_2 deux ouverts non vide de $\mathbb{R}$ tels que $\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap f(A) = \emptyset$, $(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap f(A) = f(A)$ et $\Omega_1 \cap f(A) \neq \emptyset$, $\Omega_2 \cap f(A) \neq \emptyset$. Mais alors comme f est continue $\mathcal{O}_1 = f^{-1}(\Omega_1)$ et $\mathcal{O}_2 = f^{-1}(\Omega_2)$ sont des ouverts relatifs de A. Ils sont tout deux non vide, on a $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 = A$ et $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. Donc A n'est pas connexe, ce qui est absurde.

———

Proposition.— *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) A est connexe,

ii) A est un intervalle.

Preuve : $i) \Rightarrow ii)$ Supposons que A soit connexe et qu'il ne soit pas un intervalle. Alors il existe α, β, γ des réels tels que $\alpha < \gamma < \beta$ et $\alpha, \beta \in A$ et $\gamma \notin A$. Mais alors $\mathcal{O}_1 = A \cap]-\infty, \gamma[$ est un ouvert relatif de A non vide (car il contient α), de même $\mathcal{O}_2 = A \cap]\gamma, +\infty[$ est un ouvert relatif de A non vide (car il contient β). Mais $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ et $\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2 = A$, ce qui est absurde car A est connexe.

$ii) \Rightarrow i)$ Supposons que A soit un intervalle non réduit à un point. On a vu que $\mathbb{R}$ était connexe, si $A =]a,b[$ alors $A = f(\mathbb{R})$ avec $f = ((b-a)/\pi)\mathrm{Arctan}(x) + (b+a)/2$, f étant continue A est connexe.
Les autres cas, $A =]a,b]$, $A = [a,b[$, $A = [a,b]$, $A =]a,+\infty[$, $A = [a,+\infty[$, $A =]-\infty,b[$, $A =]-\infty,b]$; sont laissés en exercice.

Avec cette proposition, on voit que le théorème fondamental peut être vu comme une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires (en fait la proposition montre que le théorème fondamental est équivalent au corollaire des valeurs intermédiaires énoncé ci-dessus). Il se trouve que ces deux théorèmes sont en fait équivalents (et donc équivalents au corollaire) :

Reprenons les hypothèses de l'énoncé du théorème des valeurs intermédiaires. Supposons que $f(a) < f(b)$ et considérons $m \in]f(a), f(b)[$. Comme $[a,b]$ est un intervalle et f est continue, $f([a,b])$ est un intervalle. Puisque $f(a), f(b) \in f([a,b])$ on a $m \in f([a,b])$ donc il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = m$. Les hypothèses montrent que c ne peut être égal ni à a ni à b, donc $c \in]a,b[$.

L'interêt de cette preuve "topologique" du théorème des valeurs intermédiaires est de montrer que ce théorème équivaut au théorème fondamental. Par ailleurs, ce théorème fondamental est en fait valable dans n'importe quel espace topologique, il constitue donc une généralisation topologique du théorème des valeurs intermédiaires.

Un conséquence du théorème des valeurs intermédiaires est :

Corollaire *Soit un segment $S = [a,b]$, $(a < b)$ et f une application continue de S dans $\mathbb{R}$. Alors $f(S)$ est un segment et f est uniformément continue sur S.*

Preuve : S est un intervalle compact, donc $f(S)$ est un intervalle compact, donc un segment. L'uniforme continuité de f découle du théorème de Heine.

Exercices : 1/ Un marcheur effectue un parcourt de 10 Km en une heure. Montrer que pendant cette heure, il existe un lapse de temps d'une demie heure pendant lequel le marcheur fait exactement 5 Km.

2/ Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue. Prouver qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

3/ Soient $f, g : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continues telles que $f \circ g = g \circ f$. Prouver qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.

2.3 Monotonie et continuité.

2.3.1 Propriétés

On considère dans cette partie un intervalle non vide I.

Proposition.— *Toute application de I dans $\mathbb{R}$, strictement monotone, est injective.*

Preuve : En effet supposons $x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(x')$. Si $x < x'$ alors $f(x) < f(x')$ ou $f(x) > f(x')$ et si $x < x'$ alors $f(x) < f(x')$ ou $f(x) > f(x')$. Donc $x = x'$.

Conséquence: Si f est strictement monotone, alors f induit une bijection de I sur $f(I)$. L'application réciproque $f^{-1} : f(I) \to I$ existe et est elle aussi strictement monotone (dans le même sens que f).

Théorème.— *Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$ continue et strictement croissante. Alors*

1. *Si $I = [a,b]$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ alors $f(I) = [f(a), f(b)]$.*
2. *Si $I = [a,b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$ alors $f(I) = [f(a), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$.*
3. *Si $I =]a,b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$ alors $f(I) =]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), f(b)]$.*
4. *Si $I =]a,b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ alors $f(I) =]\lim\limits_{x\to a^+} f(x), \lim\limits_{x\to b^-} f(x)[$.*

De plus l'application reciproque de f, f^{-1}, eﬆ continue et ﬆriﬆement monotone sur $f(I)$ (dans le même sens que f).

Preuve : On se limite au cas où $I = [a,b[$, les autres se traitant de manière semblable.
On sait déja que $f(I)$ eﬆ un intervalle. Posons $\alpha = f(a)$ et $\beta = \lim_{x\to b^-} f(x)$. β existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et eﬆ égale à $Sup(f(I))$ d'après le théorème de la limite monotone. Si $y_0 \in f(I)$ alors $y_0 = f(x_0)$ où $x_0 = f^{-1}(y_0)$, $x_0 \in I$. Or si $x \in]x_0, b[$ alors $y_0 < f(x)$ et comme $f(x) \in f(I)$, on a $f(x) \geq \beta$. Finalement $y_0 < \beta$. Cela prouve que $\beta \notin f(I)$, et puisque α eﬆ evidemment minimumde f, on a:

$$f(I) = [\alpha, \beta[$$

Reﬆe à prouver la continuité de f^{-1} en $y_0 \in f(I)$. Supposons y_0 intérieur à I (les autres cas se traitant similairement). Alors x_0 eﬆ intérieur à I par ﬆriﬆe croissance. Soit donc $\epsilon > 0$ tel que $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subset I$. On a:

$$f(x_0 - \epsilon) < y_0 < f(x_0 + \epsilon)$$

d'après la croissance ﬆriﬆe de f^{-1}, pour tout $y \in [f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon)]$, (qui eﬆ un voisinage de y_0 inclus dans $f(I)$), on a:

$$x - \epsilon = f^{-1}(f(x_0 - \epsilon)) \leq f^{-1}(y) \leq f^{-1}(f(x_0 + \epsilon)) = x_0 + \epsilon$$

ce qui prouve la continuité de f^{-1} en y_0.

2.3.2 Homéomorphisme d'intervalles.

Définition.— *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une application de I dans J. On dit que f eﬆ un homéomorphisme si f eﬆ un bijeﬆion de I sur J et si f et f^{-1} sont continues.*

Conséquences: Si f eﬆ un homéomorphisme de I sur J alors f^{-1} eﬆ un homéomorphisme de J sur I.
Si f eﬆ continue et ﬆriﬆement monotone sur I alors f eﬆ un homéomorphisme de I sur $f(I)$.

Théorème.— *Pour qu'une application f de I sur $J = f(I)$ soit un homéomorphisme, il faut et il suffit qu'elle soit continue et ﬆriﬆement monotone.*

Preuve:
Condition suffisante: Si f eﬆ ﬆriﬆement monotone elle eﬆ injeﬆive, comme elle eﬆ surjeﬆive elle eﬆ bijeﬆive. Si elle eﬆ en plus continue le théorème 1.3.1 montre que f^{-1} eﬆ continue.
Condition nécessaire: f étant un homéomorphisme, elle eﬆ continue et injeﬆive. Soit alors $\Delta = \{(x,y) \in I^2; x < y\}$. Fixons $(x_1, y_1) \in \Delta$ et soit $(x,y) \in \Delta$ un couple quelconque.

Pour $t \in [0,1]$, posons $u(t) = (1-t)x_1 + tx$ et $v(t) = (1-t)y_1 + ty$. Il eﬆ clair que $(u(t), v(t)) \in \Delta$ et que u et v sont continue.
Soit G l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$G(t) = f(v(t)) - f(u(t))$$

L'application G eﬆ continue, $G(0) = f(y_1) - f(x_1)$ et $G(1) = f(y) - f(x)$. G ne peut s'annuler car f eﬆ injective et $\forall t \in [0,1]$, $u(t) < v(t)$. $G(0)G(1) > 0$ car sinon d'après le théorème des valeurs intermédiaires G s'annulerait.
Donc $f(y) - f(x)$ eﬆ du même signe que $f(y_1) - f(x_1)$. Ce qui prouve bien que f eﬆ ﬆrictement monotone.

———

Exemples:
$x \mapsto \sin x$ induit un homéomorphisme de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1,1]$.
$x \mapsto \cos x$ induit un homéomorphisme de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
$x \mapsto \tan x$ induit un homéomorphisme de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
$x \mapsto \ln x$ induit un homéomorphisme de $\mathbb{R}^{*+}$ sur $\mathbb{R}$.

Définition.— *Deux intervalles I et J sont dits homéomorphes s'il existe un homéomorphisme de I sur J.*

Proposition.— *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si I et J sont homéomorphes ils sont ou bien tous deux compact, ou bien tous deux ouverts, ou bien tous deux semi-ouverts. Réciproquement*
i) Si I et J sont compacts non réduits à un point,
ii) Si I et J sont ouverts,
iii) Si I et J sont semi-ouverts,
Alors ils sont homéomorphes.

Preuve : D'après ce qui précède la première partie du théorème eﬆ automatique.
i) Si $I = [a,b]$ et $J = [c,d]$, $a < b$ et $c < d$ alors

$$f(x) = c + \frac{x-a}{b-a}(d-c)$$

eﬆ un homéomorphisme de $[a,b]$ sur $[c,d]$.
ii) Si $I =]a,b[$, $a < b$ alors

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$$

eﬆ un homéomorphisme de $]a,b[$ sur $\mathbb{R}$.
Si $I =]a,+\infty[$ alors

$$f(x) = \ln(x-a)$$

eﬆ un homéomorphisme de $]a,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.
Si $I =]-\infty,b[$ alors

$$f(x) = \ln(b-x)$$

eﬆ un homéomorphisme de $]-\infty,b[$ sur $\mathbb{R}$.
iii) Si $I = [a,b[$, $a < b$ alors

$$f(x) = \frac{x-a}{b-x}$$

eﬆ un homéomorphisme de $[a,b[$ sur $[0,+\infty[$.
Les autres cas s'obtiennent sans difficulté par symétrie ou composition.

———

3 Fonctions dérivables.

3.1 Dérivabilité.

3.1.1 Généralités.

Dans toute cette partie I et J désigneront des intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. On désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ indifferement par $\mathbb{K}$, ce qui permettra d'énoncer en une fois des résultats communs aux applications à valeurs dans $\mathbb{C}$ et aux applications à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition.— • *On dit que l'application $f : I \to \mathbb{K}$ est dérivable au point $a \in I$ si l'application $V(t)$ de $I/\{a\}$ dans $\mathbb{K}$ définie par*

$$V(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

admet une limite dans $\mathbb{K}$ en a suivant $I/\{a\}$. En cas d'existence, cette limite s'appelle dérivée de f en a et est notée $f^{'}(a)$.

• *On dit que l'application $f : I \to \mathbb{K}$ est dérivable à droite (resp. à gauche) au point $a \in I$ si l'intervalle $I_a^{'} = I \cap [a, +\infty[$ (resp. $I_a^{''} = I \cap] - \infty, a]$) n'est pas réduit à $\{a\}$ et si la restriction de f à $I_a^{'}$ (resp. $I_a^{''}$) est dérivable en a.*
Si elle existe, une telle dérivée s'appelle dérivée à droite (resp. à gauche) de f en a, on la note $f_d^{'}(a)$ (resp. $f_g^{'}(a)$).

• *Si l'application $f : I \to \mathbb{K}$ est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I et on note $f^{'}$ l'application qui à $x \in I$ associe le réel $f^{'}(x)$, on l'appelle fonction dérivée de f.*

Remarque: Si a est intérieur à I, l'existence de $f^{'}(a)$ équivaut à l'existence et à l'égalité de $f_d^{'}(a)$ et de $f_g^{'}(a)$. Dans ce cas $f^{'}(a) = f_d^{'}(a) = f_g^{'}(a)$.
La dérivabilité de f en a se traduit par l'existence d'une application ϵ de I dans $\mathbb{K}$ continue en a , telle que $\epsilon(a) = 0$ et telle que:

$$\forall t \in I,\ f(t) = f(a) + (t - a)f^{'}(a) + (t - a)\epsilon(t)$$

(pour $t \neq a$ on pose $\epsilon(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a} - f^{'}(a)$)
On en déduit que si f est dérivable en a elle est continue.

Théorème.— *On note $\mathcal{D}_a(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$ dérivable en $a \in I$ et $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications dérivables de I dans $\mathbb{K}$.*

i) $\mathcal{D}_a(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$ et l'application $f \to f^{'}(a)$ est linéaire de $\mathcal{D}_a(I, \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

ii) $\mathcal{D}_a(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$ et l'application $f \to f^{'}$ est linéaire de $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^I$.

iii) $\mathcal{D}_a(I, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^I$.

iv) $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre $\mathbb{K}^I$ et pour f et g dans $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ on a:

$$(fg)^{'} = f^{'}g + g^{'}f$$

v) Les inversibles de $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ sont les applications qui ne s'annulle pas sur I. Alors pour tout f de $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$, tel que $0 \notin f(I)$:

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{'} = -\frac{f^{'}}{f^2}$$

Preuve: Pour f et g dans $\mathcal{D}(I,\mathbb{K})$ et $t \neq a$ dans I, on a:

$$\frac{(fg)(t)-(fg)(a)}{t-a} = \frac{f(t)-f(a)}{t-a}g(t) + \frac{g(t)-g(a)}{t-a}f(a)$$

par passage à la limite on obtient le résultat. De même, si $0 \notin f(I)$:

$$\frac{1}{t-a}\left(\frac{1}{f(t)} - \frac{1}{f(a)}\right) = -\frac{1}{f(t)f(a)}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$$

Remarque: Si f est dérivable au point a et que $f(a) \neq 0$ alors $1/f$ est dérivable en a. Cela vient du fait que comme f est continue, il existe $\alpha > 0$ tel que sur $]a-\alpha, a+\alpha[$, f ne s'annulle pas.

Corollaire.— *On a comme conséquences :*

i) Dérivée d'un quotient. *Soit $f, g \in \mathcal{D}(I,\mathbb{K})$ telles que $0 \notin g(I)$, alors $f/g \in \mathcal{D}(I,\mathbb{K})$ et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

ii) Dérivée d'un produit fini de fonctions dérivables. *Si $f_1, \cdots, f_n$ sont des fonctions de $\mathcal{D}_a(I,\mathbb{K})$ ($n > 1$), alors $\prod_{i=1}^{n} f_i \in \mathcal{D}(I,\mathbb{K})$ et*

$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)'(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(a) \prod_{1\leq j\leq n, j\neq i} f_j(a)$$

3.1.2 Dérivée logarithmique.

Rappellons les notions suivantes:

i) Soit $f \in \mathcal{D}_a(I,\mathbb{K})$ telle que $f(a) \neq 0$. Le nombre réel ou complexe $\frac{f'(a)}{f(a)}$ s'appelle dérivée logarithmique de f au point a.

ii) Soit $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{K})$ telle que $0 \notin f(I)$. La fonction $\frac{f'}{f}$ s'appelle dérivée logarithmique de f.

On a alors

$$\forall (f,g) \in \mathcal{D}(I,\mathbb{K}^*)^2,\ \frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g} \ et\ \frac{(f/g)'}{(f/g)} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$$

Plus généralement

$$\frac{\left(\frac{f_1\cdots f_n}{g_1\cdots g_p}\right)'}{\frac{f_1\cdots f_n}{g_1\cdots g_p}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{f_i'}{f_i} - \sum_{j=1}^{p}\frac{g_j'}{g_j}$$

Exemple: Avec

$$f(x) = \frac{(x-1)^4(x+1)^3}{(x^2-x+1)^3}$$

on obtient
$$\frac{f^{'}(x)}{f(x)} = \frac{4}{x-1} + \frac{3}{x+1} - 3\frac{2x-1}{x^2-x+1}$$
d'où
$$f^{'}(x) = \frac{(x^3-3x^2+12x-2)(x-1)^3(x+1)^2}{(x^2-x+1)^4}$$

3.1.3 Composition de fonctions dérivables.

Proposition.— *On a les propriétés suivantes :*

i) Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{K}$ tels que $f(I) \subset J$. Alors si f est dérivable en a et g dérivable au point $f(a)$, $g \circ f$ est dérivable au point a et on a:
$$(g \circ f)^{'}(a) = g^{'}(f(a)) \times f^{'}(a)$$

ii) Si $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{D}(I,\mathbb{K})$, alors $g \circ f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{K})$ et
$$(g \circ f)^{'} = (g^{'} \circ f) \times f^{'}$$

Preuve : Soit $\Delta : J \to \mathbb{K}$ définie par $\Delta(x) = \dfrac{g(x)-g(f(a))}{x-f(a)}$ si $x \neq f(a)$ et $\Delta(f(a)) = g^{'}(f(a))$. Alors Δ est continue en $f(a)$ puisque g est dérivable en $f(a)$.
Pour tout $t \in I/\{a\}$,
$$\frac{1}{t-a}(g \circ f(t) - g \circ f(a)) = \frac{f(t)-f(a)}{t-a}\Delta \circ f(t)$$
On conclue par passage à la limite.

———

3.1.4 Dérivée d'une fonction réciproque.

Théorème.— *Si f est un homéomorphisme dérivable de I sur J tel que $0 \notin f^{'}(I)$, alors f^{-1} est dérivable sur J et*
$$(f^{-1})^{'} = \frac{1}{f^{'} \circ f^{-1}}$$

Preuve : Soit $a \in I$ et $b = f(a) \in J$. Définissons Δ de $I/\{a\}$ dans $\mathbb{R}$ par $\Delta(x) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Pour $y \in J/\{b\}$, on a $y \neq b \Longrightarrow f^{-1}(y) \neq f^{-1}(b)$, $\dfrac{f^{-1}(y)-f^{-1}(b)}{y-b} = \dfrac{1}{\Delta \circ f^{-1}(y)}$.
Or, f^{-1} est continue donc $f^{-1}(y)$ tend vers $f^{-1}(b) = a$ quand y tend vers b dans J. De plus, $\Delta(x)$ tend vers $f^{'}(a)$ quand x tend vers a. Le théorème de composition des limites et de l'inverse de la limite permet de conclure que f^{-1} est dérivable en b et
$$(f^{-1})^{'}(b) = \frac{1}{f^{'}(f^{-1}(b))}$$

———

3.1.5 Dérivées succesives.

Définition.— *Soit f une application d'un intervalle I dans $\mathbb{K}$.*

i) On dit que f est n fois dérivable sur I ($n \in \mathbb{N}$) ssi il existe n applications $\varphi_0, \cdots, \varphi_n$ dérivables de I dans $\mathbb{K}$ telles que:

$$\varphi_0 = f \text{ et } \forall i = 0, \cdots, n-2 \ \varphi_{i+1} = \varphi_i^{'}$$

La dérivée n-ième de f est alors $\varphi_{n-1}^{'}$. On la note $f^{(n)}$.

ii) On dit que f a une dérivée n-ième au point a, s'il existe un sous-intervalle $J \subset I$, voisinage de a dans I tel que f est $n-1$ fois dérivable sur J et tel que $f^{(n-1)}$ soit dérivable en a. On pose alors

$$f^{(n)}(a) = f^{(n-1)^{'}}(a)$$

Convention: On note plus souvent $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f^{'}$, $f^{(2)} = f^{''}$, $f^{(3)} = f^{'''}$, au dessus, on garde la notation "puissance".

Exemple:

$$\exp^{(n)}(x) = \exp x$$

$$\cos^n(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Si $P \in \mathbb{C}[X]$ et $d°P = p$ alors $\forall n > p$

$$P^{(n)}(x) = 0$$

Notations: Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{D}^n(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications n fois dérivables sur I; on note $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des applications n fois dérivables sur I telles que $f^{(n)}$ soit continue sur I.

Définition.— *Un élément de $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$ est appellé "application de classe $\mathcal{C}^n$ sur I". On peut aussi dire d'une telle application qu'elle est $\mathcal{C}^n$*
On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (ou est $\mathcal{C}^\infty$), si elle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout n.

Remarque: il est clair que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K}) \subset \mathcal{D}^n(I,\mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^{n-1}(I,\mathbb{K})$$

Ces inclusions sont strictes:
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x^2\sin(1/x)$ pour $x \neq 0$. Et soit la suite d'application f_n définie par $f_0 = f$ et f_n est la primitive de f_{n-1} qui s'annulle en 0. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mais $f_n \notin \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En effet, par construction même, f_n est $n-1$ fois dérivable. Par les théorèmes généraux, $f_n^{(n-1)}$ est dérivable pour $x \neq 0$ et

$$f_n^{(n-1)'} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

En 0, $f_n^{(n-1)}(x)/x = x\sin(1/x)$ admet 0 pour limite en 0, donc est dérivable en 0. Ainsi $f_n \in \mathcal{D}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$, mais $f_n^{(n)}$ n'a pas de limite en 0, donc $f_n \notin \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
Pour l'autre inclusion stricte, on recommence le même procédé avec $f(x) = |x|$.

Lemme.— *$\mathcal{D}^n(I,\mathbb{K})$ est un espace vectoriel et l'application $f \to f^{(n)}$ est linéaire de $\mathcal{D}^n(I,\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^I$.*

Théorème.— *Si f et g appartiennent à $\mathcal{D}^n(I,\mathbb{K})$, alors fg appartient à $\mathcal{D}^n(I,\mathbb{K})$ et on a:*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

(Formule de Leibniz)

Preuve : On fait une récurrence sur n:
$n = 0$, $(fg)^{(0)} = (fg) = fg$.
$n = 1$, $(fg)^{'} = f^{'}g + g^{'}f$.
Donc le résultat est vrai pour $n = 0, 1$.

Supposons le résultat vrai pour un n quelconque. Et supposons f et g $n+1$ fois dérivables sur I. Par hypothèse

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Or $\forall k = 0, 1, \cdots, n$ la fonction $f^{(k)}g^{(n-k)}$ est dérivable, donc (fg) appartient à $\mathcal{D}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (f^{(k)} g^{(n-k)})^{'}$$

Or $(f^{(k)}g^{(n-k)})^{'} = f^{(k+1)}g^{(n-k)} + f^{(k)}g^{(n-(k-1))}$ donc,

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum k = 0^{n-1} C_n^{k+1} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + C_n^0 f g^{(n+1)}$$

Comme $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ on a:

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n+1}^{k+1} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(n+1)}g + g^{(n+1)}f$$

Soit

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k} f^{(k)} g^{((n+1)-k)} + f^{(n+1)}g + g^{(n+1)}f$$

Théorème.— (Inverse et quotient) *a) Si $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ et f ne s'annulle pas sur I. Alors $f^{-1} \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$.*
b) Si f et g sont éléments de $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ et que g ne s'annulle pas sur I. Alors $(f/g) \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$.

Preuve : Par récurence, on démontre la propriété suivante:
$\mathcal{H}(n)$: si $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ et $0 \notin f(I)$ alors $(1/f) \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$
Il est clair que $\mathcal{H}(0)$ et $\mathcal{H}(1)$ sont vraies.
Supposons qu'au rang $n-1$, $\mathcal{H}(n-1)$ soit vraie, et considérons $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ telle que $0 \notin f(I)$. Donc $f^2 \in \mathcal{D}^{n-1}(I, \mathbb{K})$ et $0 \notin f^2(I)$, par hypothèse $(1/f^2)$ est $n-1$ fois dérivable sur I. Par la formule de Leibniz, $-f^{'} \times 1/f^2$ est $n-1$ fois dérivable. Donc $(1/f)^{'} \in \mathcal{D}^{n-1}(I, \mathbb{K})$, c'est à dire $(1/f) \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ (i.e $\mathcal{H}(n)$).

Corollaire.— *Les espaces $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$, $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathbb{K}^I$.*

Proposition.— *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, si $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{D}^n(J, \mathbb{K})$ et $f(I) \subset J$ alors $(g \circ f) \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$.*

Preuve : Par récurence, on démontre la propriété suivante:
$\mathcal{K}(n)$: si $f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{D}^n(J, \mathbb{K})$ et $f(I) \subset J$ alors $g \circ f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K})$

On a montrer $\mathcal{K}(1)$.
Supposons qu'au rang $n-1$, $\mathcal{K}(n-1)$ soit vraie, et considérons $f \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{D}^n(J,\mathbb{K})$ telles que $f(I) \subset J$. Par hypothèse de récurrence $g^{'} \circ f \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{K})$. Par la formule de Leibniz, $f^{'} \times g^{'} \circ f$ est $n-1$ fois dérivable. Donc $(g \circ f)^{'} \in \mathcal{D}^{n-1}(I,\mathbb{K})$, c'est à dire $(g \circ f) \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{K})$ (i.e $\mathcal{K}(n)$).

Proposition.— *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si f est un homéomorphisme n fois dérivable de I sur J tel que $0 \notin f^{'}(I)$, alors f^{-1} est n fois dérivable sur J.*

Preuve : Par récurence, on démontre la propriété suivante:
$\mathcal{L}(n)$: si $f \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$ homéomorphisme de I sur J tel que $0 \notin f^{'}(I)$ alors $f^{-1} \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$
On a montrer $\mathcal{L}(1)$.
Supposons qu'au rang $n-1$, $\mathcal{L}(n-1)$ soit vraie, et considérons $f \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$ homéomorphisme d'intervalle de I sur J tel que $0 \notin f^{'}(I)$. Par hypothèse de récurrence et par les propriétés précédente $\dfrac{1}{f' \circ f^{-1}} \in \mathcal{D}^{n-1}(I,\mathbb{R})$. Donc $(f^{-1})^{'} \in \mathcal{D}^{n-1}(I,\mathbb{R})$, c'est à dire $(f^{-1}) \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$ (i.e $\mathcal{L}(n)$).

Thème : polynômes d'Hermite.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x^2/2}$.

a) Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout entier naturel n il existe un polynôme $H_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) f(x)$$

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a

(1) $H_{n+1}(X) - XH_n(X) + nH_{n-1}(X) = 0$.

(2) $H_n^{'}(X) = nH_{n-1}(X)$.

(3) $H_n^{''}(X) - XH_n^{'}(X) + nH_n(X) = 0$.

En déduire l'expression de H_n pour les premières valeurs de n.

c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, H_n est scindé à racines simples et que pour tout entier $n \geq 2$ entre deux racines consécutives de H_n il existe une et une unique racine de H_{n-1} (on dit que les racines de H_{n-1} séparent celle de H_n).

3.2 Accroissements finis.

Proposition.— *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application admettant en un point x_0 intérieur à I un extrémum local. Si f est dérivable en x_0 alors $f^{'}(x_0) = 0$.*

Preuve : Supposons, par exemple, que f présente un maximum local en x_0. Il existe donc un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$ on ait $f(x) \leq f(x_0)$. Ainsi, si $x \in V$ est tel que $x < x_0$ alors $T(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ et donc $\lim\limits_{x \to x_0^-} T(x) \leq 0$. Si maintenant $x \in V$ est tel que $x > x_0$ alors $T(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ et donc $\lim\limits_{x \to x_0^+} T(x) \geq 0$. Comme $f^{'}(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} T(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} T(x)$ on en déduit que $f^{'}(x_0) = 0$.

Remarque : Cette condition est nécessaire mais bien sur pas suffisante : la fonction $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ et pourtant $x_0 = 0$ n'est pas un extrémum local pour f.

Dans la pratique, pour rechercher les extréma locaux d'une fonction f dérivable, on résoud l'équation $f'(x) = 0$ et on cherche ensuite parmis les solutions de cette équation celles qui fournissent effectivement des extréma.

Théorème.— (Rolle) *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Preuve : Si f est constante la proposition est évidente. Si f n'est pas constante, comme $[a,b]$ est un segment et f continue, $f([a,b])$ est un segment différent d'un point et comme $f(a) = f(b)$, f présente un extrémum absolu dans $]a,b[$. La proposition précédente montre alors le théorème.

———

Exercices : a) Interpréter graphiquement ce théorème.

b) En considérant une fonction auxiliaire judicieusement choisie, montrer la généralisation suivante du théorème de Rolle : si $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,+\infty[$ et dérivable sur $]a,+\infty[$ vérifiant $f(a) = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ alors il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$. Interpréter graphiquement ce résutat.

Corollaire.— (Egalité des accroissements finis) *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Preuve : On considère la fonction auxiliaire $g(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$. Elle est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Comme $g(a) = \dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a} = g(b)$ le théorème de Rolle assure qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

———

Exercices : a) Interpréter graphiquement ce corollaire.

b) Montrer la généralisation suivante de la formule des accroissements finis : soient $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f'(c) \\ g(b)-g(a) & g'(c) \end{vmatrix} = 0$.

Interpréter graphiquement cette propriété en considérant la courbe paramétrique $t \mapsto (f(t), g(t))$.

Proposition.— *Soient $\varphi : [a,b] \to \mathbb{K}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si on suppose $\forall t \in]a,b[$, $|\varphi'(t)| \leq f'(t)$, alors*

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| \leq f(b) - f(a)$$

Preuve : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ alors d'après la généralisation du théorème des accroissements finis, on sait qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $|f(b)-f(a)|.|\varphi'(c)| = |\varphi(b)-\varphi(a)|.|f'(c)|$ mais $|\varphi'(c)| \leq f'(c)$ d'où le résultat.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors on pose $\varphi_1(t) = Re(\varphi(t))$ et $\varphi_2(t) = Im(\varphi(t))$. Si $\varphi(b) - \varphi(a) \in \mathbb{R}$ alors $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi_1(b) - \varphi_1(a)$ et comme $|\varphi_1{}'| \leq |\varphi'| \leq |f'|$ d'après ce qui précède

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| = |\varphi_1(b) - \varphi_1(a)| \leq f(b) - f(a)$$

Si $\varphi(b)-\varphi(a) \notin \mathbb{R}$ alors il existe $r \in \mathbb{R}^{*+}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\varphi(b)-\varphi(a) = re^{i\theta}$$

On pose $g(x) = e^{-i\theta}\varphi(x)$. g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, on a $g^{'}(x) = e^{-i\theta}\varphi^{'}(x)$, donc $|g^{'}(x)| \leq f^{'}(x)$ et d'après ce qui précède $|g(b)-g(a)| \leq f(b)-f(a)$. Mais $|g(b)-g(a)| = |\varphi(b)-\varphi(a)|$, le résultat en découle.

———

Corollaire.— (inégalité des accroissements finis) *Soient a et b deux réels ($a < b$) et $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ continue et dérivable sur $]a,b[$. Si $f^{'}$ est bornée sur $]a,b[$ alors*

$$|f(b)-f(a)| \leq |b-a| Sup_{a<t<b}|f^{'}(t)|$$

Preuve : Soit $M = Sup_{a<t<b}|f^{'}(t)|$ et soit $g(x) = Mx$, alors $|f^{'}(x)| \leq g^{'}(x)$ donc d'après la proposition

$$|f(b)-f(a)| \leq g(b)-g(a) = (b-a)M$$

———

Théorème.— (Egalité de Taylor-Lagrange) *Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^{n-1}([a,b],\mathbb{R})$ dérivable n fois sur $]a,b[$ alors*

$$\exists c \in]a,b[\; f(b) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

Preuve : On pose

$$g(t) = f(b) - f(t) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(b-t)^i}{i!} f^{(i)}(t) - A\frac{(b-t)^n}{n!}$$

On pose

$$A = \frac{n!}{(b-a)^n}(f(b) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^i}{i!} f^{(i)}(a))$$

de sorte que $g(a) = g(b)$. L'application g est continue sur $[a,b]$ car f est $\mathcal{C}^{n-1}$, et dérivable sur $]a,b[$ car f est n fois dérivable sur $]a,b[$. D'après Rolle $\exists c \in]a,b[$ tel que $g^{'}(c) = 0$, or

$$g^{'}(t) = -f^{'}(t) - \sum_{i=0}^{n-1} [-\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t) + \frac{(b-t)^k}{(k)!} f^{(k+1)}(t)] + A\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

c'est à dire

$$g^{'}(t) = -f^{'}(t) - (\frac{(b-t)^n}{(n-1)!} f^{(n)}(t) - f^{'}(t)) + A\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

donc

$$g^{'}(c) = \frac{(b-c)^{n-1}}{(n-1)!}(A - f^{(n)}(c))$$

comme $b-c \neq 0$ on a

$$A = f^{(n)}(c)$$

c'est à dire l'égalité attendue.

Cette formule, au rang $n = 1$, est exactement l'égalité des accroissements finis.

Exercice : Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et

$$A_x = \{\theta \in]0,1[/ \ \sin x = x - \frac{x^3}{6} \cos \theta x\}$$

a) Montrer que $A_x \neq \emptyset$.

b) Trouver un réel x_0 tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $|x| < x_0$ on ait $\sharp A_x = 1$. Pour un tel x, on note $\theta(x)$ l'unique élément de A_x.

c) Montrer que $\theta(x)$ admet une limite en 0 et calculer cette limite.

3.3 Conséquences.

3.3.1 Monotonie et dérivabilité.

Théorème.— *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$, alors:*

$i)$ f est croissante $\Longleftrightarrow \forall t \in \overset{\circ}{I},\ f'(t) \geq 0$

$ii)$ f est décroissante $\Longleftrightarrow \forall t \in \overset{\circ}{I},\ f'(t) \leq 0$

$iii)$ f est constante $\Longleftrightarrow \forall t \in \overset{\circ}{I},\ f'(t) = 0$

Preuve : $i)$ Si f est croissante sur I, on a pour $a \in \overset{\circ}{I}$ et pour $x \in I/\{a\}$, $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$.
Par prolongement des inégalité, $f'(a) \geq 0$. Donc la condition est nécessaire.
Si f' est positive sur $\overset{\circ}{I}$, alors soit $(x,y) \in I^2$ avec $x < y$, comme f est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x,y[$ tel que $f(y) - f(x) = (y - x)f'(c) \geq 0$ et f est croissante sur I.

$ii)$ Il suffit de considérer $-f$.

$iii)$ Résulte de la conjonction de $i)$ et $ii)$

Théorème.— *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Pour que f soit strictement croissante, il faut et il suffit que l'on ait les deux conditions suivantes:*

1) $\forall t \in \overset{\circ}{I},\ f'(t) \geq 0$

2) $A = \{t \in \overset{\circ}{I};\ f'(t) = 0\}$ est d'intérieur vide.

Preuve : Dire que $A = \{t \in \overset{\circ}{I};\ f'(t) = 0\}$ est d'intérieur vide signifie que A ne contient aucun intervalle ouvert.
Si f est strictement croissante, c'est d'une part qu'elle est croissante (d'où 1)) d'autre part que f' ne peut s'annuller sur tout un intervalle $]a,b[$ (a,b) appartenant à I, car sinon $f(a) = f(b)$ (d'où 2)).
Réciproquement, si 1) est vérifié alors f est croissante, et si il existait $a < b$ dans I tel que $f(a) = f(b)$, f serait constante sur $[a,b]$, donc $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, ceci contredirait 2).

Remarque: Il est trés important que f soit considérée sur un intervalle. En effet soit $f(x) = -1/x$ sur $\mathbb{R}^*$. f est continue et dérivable et $f'(x) = 1/x^2 > 0$, mais $f(1) = -1$ et $f(-1) = 1$.

Corollaire *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Pour que f soit strictement décroissante, il faut et il suffit que l'on ait les deux conditions suivantes:*

1) $\forall t \in \overset{\circ}{I},\ f^{'}(t) \leq 0$

2) $A = \{t \in \overset{\circ}{I};\ f^{'}(t) = 0\}$ *est d'intérieur vide.*

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème précédent à $-f$.

Remarque-exercice : Le fait que f soit strictement croissante si $f^{'}$ est strictement positive est donc présenté ici comme une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires. On se propose de donner ici, en exercice, une preuve de cette propriété qui n'utilise pas las valeurs intermédiaires.

On considère donc un intervalle ouvert I et une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable de dérivée strictement positive.

1) Montrer que pour tout $x_0 \in I$ il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que pour tout $t \in V_{x_0}$ on a $f(x_0) > f(t)$ si $x_0 > t$ et $f(x_0) < f(t)$ si $x_0 < t$.

2) On suppose qu'il existe deux réels $x, y \in I$ tels que $f(x) \geq f(y)$ et $x < y$ et on considère l'ensemble

$$E = \{t \in I/\ t > x \text{ et } f(t) \leq f(x)\}$$

a) Montrer que E n'est pas vide, en déduire que E possède une borne inférieure α.

b) Montrer que $\alpha > x$ et que $f(x) \geq f(\alpha)$. En déduire une absurdité. (Ind. Appliquer plusieurs fois le 1).)

d) Indiquer précisément où, dans la preuve, on s'est servi de l'hypothèse I intervalle.

Exercice : Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\begin{cases} f^{''}(x) > 0 \text{ pour tout } x \geq 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x f^{'}(x) - f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Montrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ est décroissante.

3.3.2 Dérivabilité aux bornes.

Théorème.— *Si f est une application continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f^{'}$ ait une limite l dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers a, alors f est dérivable en a et $f^{'}(a) = l$.*
Si $f^{'}$ a une limite infinie quand x tend vers a, f n'est pas dérivable en a et le graphe de f admet une tangente verticale au point a.

Preuve : Pour tout h tel que $a + h \in [a, b]$, il existe $c(h) \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f^{'}(c(h))$$

Or $c(h)$ tend vers a quand h tend vers 0, donc

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$$

f est donc dérivable en a et $f^{'}(a) = l$.

Remarque: On obtient le même résultat en b.

Exemple: $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, définie par $g(x) = \text{Arcsin}(1 - x^3)$, est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1]$ et

$$\forall x \in]0,1],\ g^{'}(x) = -\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{2-x^3}}$$

$g^{'}(x)$ tend vers 0 en 0, donc g est dérivable en 0 et $g^{'}(0) = 0$.

Corollaire.— *Si f est une application continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, et si $f^{'}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b]$ et a une limite réelle en a, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.*

Théorème.— (Dérivées des fonctions prolongées) *Soient $a \in R$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$ $(a < b)$, $n \in \mathbb{N}$ et f une application de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a,b[$. Si pour tout entier p tel que $0 \leq p \leq n$, $f^{(p)}$ admet une limite réelle au point a, alors f se prolonge en une application de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b[$.*

Preuve : Une récurence immédiate montre ce théorème à partir du théorème précédent.
On remarque qu'on obtient un énoncé équivalent en b.

———

Exercice : Soit l'application de $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall a \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = exp(-\frac{1}{x^2})$$

Montrer que f se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3.3.3 Fonctions dérivées et valeurs intermédiaires.

Théorème.— (Darboux) *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. Soit $x, y \in I$ et $\lambda \in [f^{'}(x), f^{'}(y)]$, il existe un réel $z \in [x,y]$ tel que $f^{'}(z) = \lambda$: une fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*

Preuve : Considérons la fonction

$$F(u) = \left(\frac{f(x) - f(u)}{x - u} - \lambda\right).\left(\frac{f(y) - f(u)}{y - u} - \lambda\right)$$

prolongée par continuité en x et en y par

$$F(x) = \left(f^{'}(x) - \lambda\right).\left(\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \lambda\right) \quad et \quad F(y) = \left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} - \lambda\right).\left(f^{'}(y) - \lambda\right)$$

Cette fonction est continue et comme

$$F(x)F(y) = \left(f^{'}(x) - \lambda\right).\left(f^{'}(y) - \lambda\right).\left(\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \lambda\right)^2 \leq 0$$

on en déduit par le théorème des valeurs intermédiaires que F s'annulle, c'est-à-dire qu'il existe $u \in [x,y]$ tel que (par exemple)

$$\frac{f(x) - f(u)}{x - u} = \lambda$$

Maintenant l'égalité des accroissement finis montre qu'il existe $z \in [x,u]$ tel que $\frac{f(x) - f(u)}{x - u} = f^{'}(z)$. On a donc $f^{'}(z) = \lambda$.

———

3.3.4 Les règles de L'Hospital.

Proposition.— (Régle de l'Hospital) *Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à I. On suppose qu'il existe un voisinage V de a tel que f et g soient dérivables sur $I \cap V/\{a\}$ et que $\forall x \in I \cap V/\{a\}$, $g^{'}(x) \neq 0$. On suppose en outre que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, alors*

$$\lim_{x\to a,\ x\in I\cap V/\{a\}} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = \lambda \Longrightarrow \lim_{x\to a,\ x\in I\cap V/\{a\}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \ \ (\lambda \in \overline{\mathbb{R}})$$

Preuve : Les hypothèses faites sur les limites en a de f et g montre que l'on peut les prolonger par continuité en a en posant $f(a) = g(a) = 0$. Maintenant, g ne peut pas s'annuler sur $V \cap I$ autre par qu'en 0, sinon le théorème de Rolle impliquerait que $g^{'}$ s'annule.
Supposons que a est intérieur à I (Les autres cas se déduisent facilement). Alors d'après la généralisation du théorème des accroissements finis, pour tout $x \in I \cap V$, $x > a$, il existe $c(x) \in]a, x[$ tel que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{f^{'}(c(x))}{g^{'}(c(x))}$$

Il est clair que $\lim_{x\to a^+} c(x) = a$ donc

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

On obtiendrait de même

$$\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

c'est à dire

$$\lim_{x\to a,\ x\in I\cap V/\{a\}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Proposition.— (Régle de l'Hospital au point infini) *Soient f et g deux applications de I ($+\infty$ adhérent à I) dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un voisinage V de $+\infty$ tel que f et g soit dérivable sur $I \cap V$ et que $\forall x \in I \cap V$, $g^{'}(x) \neq 0$. On suppose en outre que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, alors*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = \lambda \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \ \ (\lambda \in \overline{\mathbb{R}})$$

Preuve : On pose $V \cap I =]b, +\infty[$ $(b > 0)$ et on définit $u(t) = f(1/t)$ et $v(t) = g(1/t)$ pour $0 < t < (1/b)$.
Il est clair que u et v sont dérivable sur $]0, (1/b)[$ et que l'on a:

$$u^{'}(t) = \frac{-1}{t^2} f^{'}(\frac{1}{t})$$
$$v^{'}(t) = \frac{-1}{t^2} g^{'}(\frac{1}{t})$$

Maintenant $\lim_{x\to 0^+} u(x) = \lim_{x\to 0^+} v(x) = 0$ et $v^{'}(x)$ ne s'annule pas sur $]0, (1/b)[$. On a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{u^{'}(x)}{v^{'}(x)} = \lambda$$

donc d'après le théorème précédent:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{u(x)}{v(x)}=\lambda$$

c'est à dire

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$$

Remarque: Ce résultat reste bien évidemment valable en $-\infty$.

Proposition.— (Règle de l'Hospital généralisée) *Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$ et $a\in\overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à I. On suppose qu'il existe un voisinage V pointé de a tel que f et g soit dérivable sur $I\cap V$ et que $\forall x\in I\cap V,\ g^{'}(x)\neq 0$. On suppose en outre que $\lim_{x\to a} g(x)=+\infty$, alors*

$$\lim_{x\to a,\ x\in I\cap V}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}=\lambda \Longrightarrow \lim_{x\to a,\ x\in I\cap V}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda\ \ (\lambda\in\overline{\mathbb{R}})$$

Preuve : On distingue deux cas:

1) $a\in\mathbb{R}$ On suppose a intérieur à I. Sur $I\cap V$, on a $g^{'}(x)>0$, en effet d'après le théorème de Darboux si $g^{'}$ n'était pas de signe constant alors $g^{'}$ s'annullerait. Maintenant sir $g^{'}(t)<0$ g serait décroissante et donc ne pourrait pas tendre vers $+\infty$ en a.
Soit $t_0\in I\cap V\cap]a,+\infty[$ et $a<t<t_0$. D'après la généralisation des accroissements finis on peut écrire:

$$\forall t>a\ \exists c(t)\in]t,t_0[\ \ \frac{f(t)-f(t_0)}{g(t)-g(t_0)}=\frac{f^{'}(c(t))}{g^{'}(c(t))}$$

maintenant

$$\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{f(t)-f(t_0)}{g(t)-g(t_0)}(1-\frac{g(t_0)}{g(t)})+\frac{f(t_0)}{g(t)}$$

donc

$$\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{f^{'}(c(t))}{g^{'}(c(t))}(1-\frac{g(t_0)}{g(t)})+\frac{f(t_0)}{g(t)}$$

Supposons $\lambda\in\mathbb{R}$ On a alors

$$|\frac{f(t)}{g(t)}-\lambda|=|\frac{f^{'}(c(t))}{g^{'}(c(t))}-\lambda||(1-\frac{g(t_0)}{g(t)})|+|\lambda||\frac{g(t_0)}{g(t)}|+|\frac{f(t_0)}{g(t)}|$$

Maintenant fixons $\epsilon>0$.

$$\exists t_0,\ \forall t\in]a,t_0]\ |\frac{f^{'}(t)}{g^{'}(t)}-\lambda|<\frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)}$$

(En particulier $c(t)\in]a,t_0]$)

$$\exists t_1<t_0,\ \forall t\in]a,t_1]|(1-\frac{g(t_0)}{g(t)})|<1+\epsilon$$

$$\exists t_2<t_1,\ \forall t\in]a,t_2]|\frac{f(t_0)}{g(t)}|<\frac{\epsilon}{2}$$

Par conséquent:

$$\forall t \in]a,t_2]\ |\frac{f(t)}{g(t)} - \lambda| < \epsilon$$

et donc

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(t)}{g(t)} = \lambda$$

On a la même chose en a^- d'où le résultat.

Si $\lambda = +\infty$, alors pour $M > 0$ donné, on a:

$$\exists t_0,\ \forall t \in]a,t_0]\ \frac{f^{'}(t)}{g^{'}(t)} > M$$

(En particulier $c(t) \in]a,t_0]$)

$$\exists t_1 < t_0,\ \forall t \in]a,t_1](1 - \frac{g(t_0)}{g(t)}) > 1 - \frac{1}{M}$$

$$\exists t_2 < t_1,\ \forall t \in]a,t_2]|\frac{f(t_0)}{g(t)}| < 1$$

Comme on a:

$$\frac{f(t)}{g(t)} > \frac{f^{'}(c(t))}{g^{'}(c(t))}(1 - \frac{g(t_0)}{g(t)}) - |\frac{f(t_0)}{g(t)}|$$

Il s'ensuit

$$\forall t \in]a,t_2]\ \frac{f(t)}{g(t)} > M - 2$$

et donc

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(t)}{g(t)} = +\infty$$

On a la même chose en a^- d'où le résultat.

<u>2) $a = +\infty$</u> (Le cas $a = -\infty$ se traite de la même façon) On pose $b > 0$ tel que $]b,+\infty[\subset I \cap V$. On définit alors $u(t) = f(1/t)$ et $v(t) = g(1/t)$ pour $0 < t < (1/b)$.
Il est clair que u et v sont dérivable sur $]0,(1/b)[$ et que l'on a:

$$u^{'}(t) = \frac{-1}{t^2} f^{'}(\frac{1}{t})$$
$$v^{'}(t) = \frac{-1}{t^2} g^{'}(\frac{1}{t})$$

Maintenant $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x) = +\infty = 0$ et $v^{'}(x)$ ne s'annule pas sur $]0,(1/b)[$. On a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{u^{'}(x)}{v^{'}(x)} = \lambda$$

donc d'après la partie 1):

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{u(x)}{v(x)} = \lambda$$

c'est à dire

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$$

Thème : exemples et contre-exemples d'applications aux règles de l'Hospital.

L'interet majeur de cette règle est le calcul de limite. Nous illustrerons se propos à l'aide d'exemples:

Exercice : *Calculer*

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{Argch(x)}{\mathrm{Arccos}(\frac{1}{x})}$$

Exercice : *Trouver un équivalent au voisinage de $+\infty$ de*

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

(Ind. On le cherchera sous la forme $G(x) = x^\alpha e^{x^2}$.)

Mise en garde: *Il est tres important, pour ne pas se tromper, d'appliquer avec grandes précautions les règles de l'Hospital. Les erreurs les plus fréquemment commises consiste à appliquer ces règles dans le mauvais sens (c'est à dire de penser que si f/g à une limite alors $f^{'}/g^{'}$ à la même) où d'oublier une des conditions d'application (par exmple d'oublier de vérifier que f tend vers 0).*
Illustrons ces remarques:

Exercice : *Montrer que si $f(x) = x^2\sin(1/x)$ et $g(x) = x$, alors*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \ mais \ \lim_{x\to 0^+} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} \ n'existe \ pas.$$

C'est le cas où l'on applique dans le mauvais sens la règle. Toutefois on peut dire la chose suivante:

Lemme.— *Si f et g sont deux applications qui vérifient les hypothèses de la règle de l'Hospital et que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$ alors*

$$\lim_{x\to a} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} \ existe \ \Longrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = \lambda$$

Exercice : *Soient $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x$. Montrer que*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim_{x\to 0^+} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$$

Le problème vient ici du fait que l'on a pas supposé que f tendait vers 0 en 0.

4 Convexité.

4.1 Parties convexes de $\mathbb{R}^n$.

Définition.— *On considère un entier $n \geq 1$ et l'espace $\mathbb{R}^n$.*

• *Soient $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, on appelle segment d'extrémités $\underline{x}$ et $\underline{y}$ l'ensemble, noté $[\underline{x}, \underline{y}]$, constitué des points de $\mathbb{R}^n$ de la forme $t\underline{x} + (1-t)\underline{y}$ où $t \in [0,1]$.*

• *On dit d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ qu'elle est convexe si pour tout $\underline{x}, \underline{y} \in A$, $[\underline{x}, \underline{y}] \subset A$.*

Exercice : Donner des exemples de parties convexes et de parties non convexes de $\mathbb{R}^n$.

Théorème.— (Caractérisation de la convexité d'une partie) *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) A est convexe,

ii) pour tout entier $p \geq 2$, toute suite finie $\underline{x_1}, \cdots, \underline{x_p} \in A$ et toute suite finie $\alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{R}^+$ telle que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$, on a $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \underline{x_i} \in A$.

Preuve : Exercice.

———

4.2 Fonctions convexes.

Dans ce qui suit, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

Définition.— *On appelle graphe (resp. épigraphe) de f l'ensemble des couples $(x, y) \in I \times \mathbb{R}$ tels que $y = f(x)$ (resp. $y \geq f(x)$). On dit que la fonction f est convexe si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.*

Théorème.— (Caractérisation de la convexité d'une fonction) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) f est convexe,

ii) pour tout $x, x' \in I$ et tout $t \in [0, 1]$, $f(tx + (1-t)x') \leq tf(x) + (1-t)f(x')$,

iii) pour tout $x_1, x_2 \in I$ ($x_1 < x_2$) et tout $x \in [x_1, x_2]$, on a $f(x) \leq a(x)$, où a est l'unique fonction affine qui coïncide avec f en x_1 et en x_2.

Preuve : Exercice.

———

Corollaire.— *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) f est convexe,

ii) pour tout entier $p \geq 2$, toute suite finie $x_1, \cdots, x_p \in I$ et toute suite finie $\alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{R}^+$ telle que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$, on a $f\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i f(x_i)$.

Preuve : Exercice.

———

Théorème.— (Inégalité des pentes) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) f est convexe,

ii) pour tout $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$ on a

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

iii) pour tout $u \in I$, la fonction $p_u : I - \{u\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$p_u(x) = \frac{f(x) - f(u)}{x - u}$$

est croissante.

Preuve : $i) \Rightarrow ii)$ Considérons la fonction affine a qui coïncide avec f en x et en z. Puisque f est convexe et que y est compris entre x et z, on a donc $f(y) \le a(y)$. Ainsi on a

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{a(y)-f(x)}{y-x} = \frac{a(y)-a(x)}{y-x} = \frac{a(z)-a(x)}{z-x} = \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

De même, on a

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{a(z)-a(x)}{z-x} = \frac{a(z)-a(y)}{z-y} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

$ii) \Rightarrow iii)$ Se déduit du $ii)$ en remplaçant le triplet (x,y,z) par (t_1,t_2,u), (t_1,u,t_2) et (u,t_1,t_2). Dans tous les cas on obtient $t_1 < t_2 \Rightarrow p_u(t_1) \le p_u(t_2)$.
$iii) \Rightarrow i)$ Considérons x,y,z tels que $x<y<z$. En choisissant $u=x$, on obtient

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

Considérons la fonction affine a qui coïncide avec f en x et z. On a donc

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{a(z)-a(x)}{z-x} = \frac{a(y)-a(x)}{y-x}$$

et donc $f(y)-f(x) \le a(y)-a(x)$. Comme $a(x)=f(x)$, on en déduit que pour tout $y \in]x,z[$, $f(y) \le a(y)$. La fonction f est donc convexe.

Exercice : (CAPES 2004) Soit $F, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications vérifiant

$$\forall x,y \in [a,b],\ F(y)-F(x) \ge (y-x)f(x)$$

Montrer que f est croissante et que F est convexe.

4.3 Convexité et dérivabilité.

Dans ce qui suit, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.

Théorème.— *Si f est convexe alors f est dérivable à droite et à gauche sur I (en particulier f est continue). De plus, pour tout $s,t,x \in I$ tels que $s<x<t$ on a*

$$\frac{f(x)-f(s)}{x-s} \le f_g'(x) \le f_d'(x) \le \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

Les applications f_d' et f_g' sont croissantes.

Preuve : L'inégalité des pentes assure que $\dfrac{f(x)-f(s)}{x-s} \le \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$ et de plus que l'application $p_x : t \longmapsto \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$ est croissante sur $I \cap]x,+\infty[$ et que l'application $q_x : t \longmapsto \dfrac{f(x)-f(s)}{x-s}$ est croissante sur $I \cap]-\infty,x[$.

Le théorème de la limite monotone assure que p_x a une limite à droite en x et donc que $f_d'(x)$ existe et que l'on a de plus

$$\frac{f(x)-f(s)}{x-s} \le f_d'(x) \le \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

En appliquant de nouveau le théorème de la limite monotone, on voit que q_x a une limite à gauche en x et donc que $f_g^{'}(x)$ existe et que l'on a de plus

$$\frac{f(x)-f(s)}{x-s} \leq f_g^{'}(x) \leq f_d^{'}(x) \leq \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

Etant dérivable à droite et à gauche en tout point, la fonction f est bien sur continue.

Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$. Pour tout $u \in]x, y[$ on a

$$f_g^{'}(x) \leq f_d^{'}(x) \leq \frac{f(u)-f(x)}{u-x} \leq \frac{f(y)-f(u)}{y-u} \leq f_g^{'}(y) \leq f_d^{'}(y)$$

ce qui assure la croissance des applications $f_g^{'}$ et $f_d^{'}$.

Corollaire.— *Si f est dérivable alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

i) f est convexe,

ii) $f^{'}$ est croissante.

Preuve : Exercice.

Corollaire.— *Si f est deux fois dérivable alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

i) f est convexe,

ii) $f^{''}$ est positive sur I.

Preuve : Immédiat.

Corollaire.— *Si f est dérivable alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

i) f est convexe,

ii) le graphe de f est situé au dessus de chacune de ses tangentes.

Preuve : $i) \Rightarrow ii)$ Soit $a \in I$. Si $t < a$ alors $\frac{f(t)-f(a)}{t-a} \leq f^{'}(a)$ et si $t > a$ alors $\frac{f(t)-f(a)}{t-a} \geq f^{'}(a)$. Donc pour tout $t \in I$ on a $f(t) \geq f(a) + (t-a)f^{'}(a)$.

$ii) \Rightarrow i)$ Supposons que pour tout $a, t \in I$ on ait $f(t) \geq f(a) + (t-a)f^{'}(a)$. Soient $a \leq b$ dans I, on a donc

$$\begin{cases} f(b) \geq f(a) + (b-a)f^{'}(a) \\ f(a) \geq f(b) + (a-b)f^{'}(b) \end{cases}$$

et par suite

$$f(a) \geq f(a) + (b-a)(f^{'}(a) - f^{'}(b))$$

et donc $f^{'}(a) - f^{'}(b) \leq 0$, c'est-à-dire $f^{'}$ croissante. Ainsi f est convexe.

Thème : Inégalités de convexité

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que

$$\sqrt[n]{x_1 . \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

b) Soient $p, q \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $u, v \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que

$$uv \leq \frac{1}{p} u^p + \frac{1}{q} v^q$$

c) En déduire l'inégalité de Hölder : si $p, q \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et si $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ sont $2n$ réels strictement positifs ($n > 0$) alors

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} . \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p \right)^{1/q}$$

d) En déduire l'inégalité de Minkowski : si $p > 1$ est un réel et si $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ sont $2n$ réels strictement positifs ($n > 0$) alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p \right)^{1/p}$$

Quelle conséquence topologique a cette inégalité pour $\mathbb{R}^n$?

e) Soient I, J deux intervalles homéomorphes de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow J$ un homéomorphisme. Soit $\mu = (\underline{x}, \underline{\alpha})$ où $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in I^n$ et $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{+n}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

On appelle moyenne d'ordre f de μ, le nombre réel

$$M_f(\mu) = f^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \right)$$

• *Pour $I =]0, +\infty[$, $\alpha_i = 1/n$ pour tout $i = 1, \cdots, n$ et $f(x) = 1/x$, $M_f(\mu)$ s'appelle la moyenne harmonique de $x_1, \cdots, x_n$. On la note $M_{-1}(x_1, \cdots, x_n)$.*

• *Pour $I =]0, +\infty[$, $\alpha_i = 1/n$ pour tout $i = 1, \cdots, n$ et $f(x) = x$, $M_f(\mu)$ s'appelle la moyenne arithmétique de $x_1, \cdots, x_n$. On la note $M_1(x_1, \cdots, x_n)$.*

• *Pour $I =]0, +\infty[$, $\alpha_i = 1/n$ pour tout $i = 1, \cdots, n$ et $f(x) = x^2$, $M_f(\mu)$ s'appelle la moyenne quadratique de $x_1, \cdots, x_n$. On la note $M_2(x_1, \cdots, x_n)$.*

• *Pour $I =]0, +\infty[$, $\alpha_i = 1/n$ pour tout $i = 1, \cdots, n$ et $f(x) = \log x$, $M_f(\mu)$ s'appelle la moyenne géométrique de $x_1, \cdots, x_n$. On la note $M_{\log}(x_1, \cdots, x_n)$.*

Montrer que pour tout $x_1, \cdots, x_n \in]0, +\infty[$ on a

$$M_{-1}(x_1, \cdots, x_n) \leq M_{\log}(x_1, \cdots, x_n) \leq M_1(x_1, \cdots, x_n) \leq M_2(x_1, \cdots, x_n)$$

5 Etude locale des fonctions.

5.1 Comparaison au voisinage d'un point.

Dans cette partie, on considère une partie D de $\mathbb{R}$ et a un point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérant à D. Les fonctions considérées sont des applications de D dans $\mathbb{K}$.

5.1.1 Prépondérance et négligeabilité.

Définition.— *Soit f et g deux fonctions de D dans $\mathbb{K}$. On dit que f est négligeable devant g (ou que g est prépondérante sur f) au voisinage du point a si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}(a);\ \forall x \in V \cap D\ |f(x)| < \epsilon |g(x)|$$

Dans ce cas on écrira

$$f(x) \underset{x\to a}{\ll} g(x) \quad (Notation\ de\ Hardy)$$

ou bien

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \circ(g(x)) \quad (Notation\ de\ Landau)$$

Quand il n'y a pas d'ambiguïté on note plus simplement $f \ll g$ ou $f = \circ(g)$ (Attention il ne s'agit pas d'une égalité au sens propre du terme).

Remarque: S'il existe un voisinage U_0 de a tel que sur $D \cap U_0$ g ne s'annulle pas alors

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \circ(g(x)) \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

. Dire qu'une fonction est $\circ(1)$ ou est négligeable devant 1 revient à dire qu'elle a une limite nulle en a:

$$f = \underset{x\to a}{=} \circ(1) \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = 0$$

Exemple: On prend $D =]0,+\infty[$ on prend $a = +\infty$.

$$\alpha < \beta \Longrightarrow x^\alpha \underset{x\to+\infty}{\ll} x^\beta$$

$$\alpha \in \mathbb{R}\ et\ \beta > 0 \Longrightarrow \ln(x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{\ll} x^\beta$$

$$\alpha \in \mathbb{R}\ et\ \beta > 0 \Longrightarrow x^\alpha \underset{x\to+\infty}{\ll} e^{\beta x}$$

Pour $a = 0$:

$$\alpha < \beta \Longrightarrow x^\beta \underset{x\to0}{\ll} x^\alpha$$

$$\alpha > 0\ et\ \beta > 0 \Longrightarrow |\ln(x)|^\alpha \underset{x\to+\infty}{\ll} x^{-\beta}$$

Proposition.— *L'ensemble des applications de D dans $\mathbb{K}$ négligeables devant g au voisinage du point a forment un espace vectoriel:*

$$\forall (f_1, f_2) \in \mathbb{K}^D,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f_1(x) \underset{x\to a}{=} \circ(g(x))\ et\ f_2(x) \underset{x\to a}{=} \circ(g(x)) \Longrightarrow (\lambda f_1 + f_2)(x) \underset{x\to a}{=} \circ(g(x))$$

On a aussi:

$$f_1(x) \underset{x\to a}{=} \circ(g_1(x))\ et\ f_2(x) \underset{x\to a}{=} \circ(g_2(x)) \Longrightarrow (f_1 f_2)(x) \underset{x\to a}{=} \circ(g_1(x) g_2(x))$$

Preuve : Ces deux propositions sont immédiates.

Proposition.— (Composition) *Soit $\varphi : A \to \mathbb{R}$ une application telle que $\varphi(A) \subset D$. Soit t_0 un point d'accumulation de A tel que $\lim\limits_{t\to t_0} \varphi(t) = a$. Alors si f et g sont deux applications de D dans $\mathbb{K}$,*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \circ(g(x)) \Longrightarrow f \circ \varphi(t) \underset{t\to t_0}{=} \circ(g \circ \varphi(t))$$

Preuve :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists V \in \mathcal{V}(a);\ \forall x \in D \cap V\ |f(x)| < \epsilon |g(x)|$$

Or $\exists W \in \mathcal{V}(t_0);\ \forall t \in W \cap A\ \varphi(t) \in V \cap D$, donc:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists W \in \mathcal{V}(t_0);\ \forall t \in W \cap A\ |f(\varphi(t))| < \epsilon |g(\varphi(t))|$$

———

Attention: On ne peut pas en général composer à gauche dans la relation $\ll$, i.e. Si $f = \circ(g)$, on ne peut rien dire de $\varphi \circ f$ et $\varphi \circ g$ dans le cas général. En effet, par exemple au voisinage de $+\infty$ on a $\sqrt{x} = \circ(x)$ mais on a pas $\sin(\sqrt{x}) = \circ(\sin(x))$, car pour $x_k = k\pi$ on a $sin(x_k) = 0$ et $\sin(sqrtx_k) \neq 0$. On a toute fois l'exception notable suivante :

Lemme.— *Soit $\alpha > 0$ alors*

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \circ(g(x)) \Longrightarrow |f(x)|^{\alpha} \underset{t \to t_0}{=} \circ(|g(x)|^{\alpha})$$

Preuve : Prendre $\epsilon^{'} = \epsilon^{\alpha}$.

———

5.1.2 Equivalence.

Définition.— *Soient f et g deux applications de D dans $\mathbb{K}$ et a un point de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D. On dit que f est éqyuivalente à g au voisinage de a ssi $f - g$ est négligeable devant g au voisinage de a. On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\simeq} g(x)$ ce qui équivaut à $f(x) - g(x) \underset{x \to a}{=} \circ(g(x))$.*

Lemme.— *Sur l'ensemble des application de D dans $\mathbb{K}$, "être équivalent à" au voisinage de a est une relation d'équivalence.*

Preuve :
Réflexivité: Il est clair que $f(x) \underset{x \to a}{\simeq} f(x)$.
Symétrie: Supposons que $f(x) \underset{x \to a}{\simeq} g(x)$ alors

$$\forall \epsilon > 0 \exists V_{\epsilon} \in \mathcal{V}(a),\ \forall x \in V_{\epsilon}\ (1 - \epsilon) g(x) \leq f(x) \leq (1 + \epsilon) g(x)$$

Donc

$$\forall x \in V_{\epsilon},\ \frac{1}{1+\epsilon} f(x) \leq g(x) \leq \frac{1}{1-\epsilon}$$

Les fonctions $\frac{1}{1+\epsilon}$ et $\frac{1}{1-\epsilon}$ tendent toutes deux vers 1, donc pour tout $\epsilon^{'} > 0$ il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$1 - \epsilon^{'} < \frac{1}{1+\epsilon} < \frac{1}{1-\epsilon} < 1 + \epsilon^{'}$$

Ainsi

$$\forall \epsilon^{'} > 0 \exists V \in \mathcal{V}(a)\ (V = V_{\epsilon}),\ \forall x \in V\ (1 - \epsilon^{'}) g(x) \leq f(x) \leq (1 + \epsilon^{'}) g(x)$$

c'est à dire

$$g(x) \underset{x \to a}{\simeq} f(x)$$

Transitivité: Soit f, g, h trois fonctions de D dans $\mathbb{K}$ telles que

$$f(x) \underset{x \to a}{\simeq} g(x)\ et\ g(x) \underset{x \to a}{\simeq} h(x)$$

Alors $\forall\epsilon > 0 \exists V_\epsilon \in \mathcal{V}(a),\ \forall x \in V_\epsilon\ (1-\epsilon)g(x) \leq f(x) \leq (1+\epsilon)g(x)$ mais on a aussi $\exists V_\epsilon^{'} \in \mathcal{V}(a),\ \forall x \in V_\epsilon^{'}\ (1-\epsilon)h(x) \leq g(x) \leq (1+\epsilon)h(x)$ on a par conséquent

$$\forall x \in V_\epsilon^{'} \cap V_\epsilon\ (1-\epsilon)^2 h(x) \leq g(x) \leq (1+\epsilon)^2 h(x)$$

Les fonctions $(1-\epsilon)^2$ et $(1+\epsilon)^2$ convergeant toutes deux vers 1, on applique le même raisonnement que précédement.

———

Remarque: S'il existe un voisinage U_0 de a tel que sur $D \cap U_0$ g ne s'annulle pas alors

$$f(x) \underset{x\to a}{\simeq} g(x) \Longleftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

D'après la définition, on traduira $f(x) \underset{x\to a}{\simeq} g(x)$ par

$$f(x) = g(x)(1+\epsilon(x)),\ avec\ \lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$$

Exemples:
i) Soit f une fonction polynôme s'écrivant

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

alors pour $x \neq 0$ on peut écrire

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \cdots + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}\right)$$

On en déduit

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\simeq} a_n x^n$$

ii) Si f est une application dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$ et $f^{'}(0) \neq 0$, alors

$$f(x) \underset{x\to 0}{\simeq} x f^{'}(0)$$

Ainsi

$$x \underset{x\to 0}{\simeq} \sin(x) \underset{x\to 0}{\simeq} sh(x) \underset{x\to 0}{\simeq} \mathrm{Arcsin}(x)$$

Plus généralement si f est dérivable en a et que $f^{'}(a) \neq 0$ alors

$$f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\simeq} (x-a) f^{'}(a)$$

Ainsi:

$$\ln x \underset{x\to 1}{\simeq} x - 1,\ e^x - 1 \underset{x\to 0}{\simeq} x,\ x^\alpha - 1 \underset{x\to 1}{\simeq} \alpha(x-1)$$

iii) Fonctions hyperboliques au voisinage de $+\infty$.

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = (1 + e^{-2x})\frac{e^x}{2} \underset{x\to+\infty}{\simeq} \frac{e^x}{2}$$

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = (1 - e^{-2x})\frac{e^x}{2} \underset{x\to+\infty}{\simeq} \frac{e^x}{2}$$

Proposition.— *Si* $f_1 \simeq g_1$ *et* $f_2 \simeq g_2$ *alors* $f_1 f_2 \simeq g_1 g_2$

Proposition.— (Composition) *Soit $\varphi : A \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(A) \subset D$. Soit t_0 un point d'accumulation de A tel que $\lim_{t\to t_0} \varphi(t) = a$. Alors si f et g sont deux applications de D dans $\mathbb{K}$,*

$$f(x) \underset{x\to a}{\simeq} g(x) \Longrightarrow f\circ\varphi(t) \underset{t\to t_0}{\simeq} g\circ\varphi(t)$$

Preuve : On applique la proposition précédente à $f-g$ et g.

Attention : • On ne peut pas, en général, additionner des équivalent: Si $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x+x^2$. On a $f(x)-g(x) \simeq_{x\to 0} -x^2$ et $g(x) \simeq_{x\to 0} x$. Pourtant $\sin(x) - x \simeq_{x\to 0} -x^3/6$.

• On ne peut pas de même, en général, composer des équivalent: En effet on a $x^2 + x \simeq_{x\to+\infty} x^2$ et pourtant $\lim_{x\to+\infty} e^{x^2+x}/e^{x^2} = +\infty$. Il y a pourtant deux exceptions notables:

Lemme.— *Soit $\alpha > 0$. Alors*

$$f(x) \underset{x\to a}{\simeq} g(x) \Longrightarrow |f(x)|^\alpha \underset{x\to a}{\simeq} |g(x)|^\alpha$$

Preuve : En effet si $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$ alors $\lim_{x\to a} (1+\epsilon(x))^\alpha = 1$. Il suffit donc de poser $\epsilon'(x) = (1+\epsilon(x))^\alpha - 1$.

———

Lemme.— *On suppose que $\lim_{x\to a} |g(x)| = 0$ ou $+\infty$. Alors*

$$f(x) \underset{x\to a}{\simeq} g(x) \Longrightarrow \ln(|f(x)|) \underset{x\to a}{\simeq} \ln(|g(x)|)$$

Preuve : En effet si $f(x) = g(x)(1+\epsilon(x))$ avec $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$ alors

$$\ln(|f(x)|) = \ln(|g(x)|) + \ln(|1+\epsilon(x)|) = \ln(|g(x)|)(1 + \frac{\ln(|1+\epsilon(x)|)}{\ln(|g(x)|)})$$

On a $\lim_{x\to a} \ln|g(x)| = +\infty$ donc $\lim_{x\to a} \dfrac{\ln(|1+\epsilon(x)|)}{\ln(|g(x)|)} = 0$.

———

5.2 Développements limités, formules de Taylor.

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et a un point réel adhérent à I. Pour un entier n, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré au plus n.

5.2.1 Développements limités.

Définition.— *On dit qu'une application $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ admet un développement limité d'ordre n en a, s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que :*

$$f(x) - P(x) \underset{x\to a}{=} \circ((x-a)^n)$$

On écrit alors $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \circ((x-a)^n)$.

Définition.— (développement limité en $\pm\infty$) *Si I est de la forme $]a,+\infty[$ (resp. $]-\infty,a[$), on dit qu'une application f de I dans $\mathbb{K}$ admet un développement limité d'ordre n en $+\infty$ (resp. en $-\infty$, s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que:*

$$f(x) - P\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{x^n}\right) \ (resp. \underset{x\to-\infty}{=} \circ\left(\frac{1}{x^n}\right))$$

On écrit alors $f(x) = a_0 + a_1/x + \cdots + a_n/x^n + \circ(1/x^n)$.

Remarque: Dans le cas d'un developpement limité en a, la translation $x+a$ et dans le cas d'un developpement limité en $\pm\infty$ la transformation $1/x$ permettent de se ramener au cas des developpements limités en 0. C'est donc ceux-la que nous étudierons par la suite.

Théorème.— *L'application nulle admet pour unique développement limité en 0 à l'ordre n, le polynôme nul:*

$$0 = P(x) + \circ(x^n) \Longrightarrow P = 0$$

Preuve : Supposons qu'il existe $n > 0$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$ non nul tel que $0 = P(x) + \circ(x^n)$. Alors notons $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ et soit $p \leq n$ le plus petit entier tel que $a_p \neq 0$. On a donc:

$$-a_p x^p - \cdots - a_n x^n = \circ(x^n)$$

donc $-a_p - \cdots - a_n x^{n-p} = \circ(x^{n-p})$. En passant à la limite en 0, on en déduit que $a_p = 0$, ce qui est absurde.

———

Corollaire.— *Si f admet un développement limité en 0 d'ordre n, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que*

$$f(x) = P(x) + \circ(x^n)$$

Ce polynôme est appellé développement limité de f en 0 à l'ordre n. On le note alors $dl_n(f)$.

Preuve : Supposons que f admette deux développement limités en 0 à l'ordre n, P et Q, alors $P - Q$ est le développement limités en 0 à l'ordre n de la fonction nulle, donc est nulle. i.e. $P = Q$.

———

Corollaire.— *Si f admet un développement limité en 0 d'ordre n et que f est paire (resp. impaire), alors $dl_n(f)$ est pair (resp. impair).*

Preuve : On a $f(x) - P(x) = \circ(x^n)$ où $P = dl_n(f)$. On a donc $f(-x) - P(-x) = \circ(x^n)$ donc

$$\frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) - \frac{1}{2}(P(x) + P(-x)) = \circ(x^n)$$

f étant paire, on a $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$, par uncité du DL, on a donc $P(x) = \frac{1}{2}(P(x) + P(-x))$ c'est à dire P pair.

———

Corollaire.— *Si f admet un développement limité en 0 d'ordre n, alors pour tout $p = 0, 1, \cdots, n$ f admet un developpement limité d'ordre p en 0, obtenu en tronquant le développement limité d'ordre n de ses termes de degré $\geq p+1$. Ainsi pour $p \leq n$, $dl_p(f)$ est le reste de la division de $dl_n(f)$ par X^{n+1}.*

Preuve : On a $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n + \circ(x^n)$. Soit $p \leq n$, alors $a_{p+1}x^{p+1} + \cdots a_n x^n + \circ(x^n) = \circ(x^p)$ donc,

$$f(x) = a_0 x + \cdots a_p x^p + \circ(x^p)$$

Proposition.— *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. Pour tout n, l'ensemble $\mathcal{DL}_n(I)$ des applications de I dans $\mathbb{K}$ admettant un développement limité d'ordre n en 0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$. De plus l'application de $\mathcal{DL}_n(I)$ dans $\mathbb{K}_n[X]$ est linéaire. Enfin on a:*

$$\cdots \subset \mathcal{DL}_n(I) \subset \mathcal{DL}_{n-1}(I) \subset \cdots \subset \mathcal{DL}_1(I) \subset \mathcal{DL}_0(I)$$

Preuve : Si f et g sont dans $\mathcal{DL}_n(I)$ alors $(f+g)(x) = dl_n(f)(x) + dl_n(g)(x) + \circ(x^n)$. Donc $(f+g) \in \mathcal{DL}_n(I)$ et $dl_n(f+g)(x) = dl_n(f)(x) + dl_n(g)(x)$. Les inclusions sont conséquences du corollaire.

Remarque: On peut définir $\mathcal{DL}_\infty(I)$ comme étant l'ensemble des applicatins de I dans $\mathbb{K}$ admettant un développement limité à tout ordre on a donc

$$\mathcal{DL}_\infty(I) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{DL}_n(I)$$

Ainsi:

$$f \in \mathcal{DL}_\infty(I) \Longleftrightarrow \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}\ \forall m \in \mathbb{N},\ f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k + \circ(x^m)$$

5.2.2 Fonction admettant un développement limité.

Nous allons tenter dans cette partie de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction admette un DL au voisinage de 0. On regarde d'abord une condition nécessaire, puis une suffisante.

Lemme.— *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*
i) $f \in \mathcal{DL}_0(I)$
ii) f est continue en 0.

Preuve : Si $f(x) = a + \circ(1)$ alors on a vu que $\lim_{x\to 0} f(x) - a = 0$ c'est à dire $a = f(0)$ et f continue en 0.
Réciproquement, si f est continue en 0 alors $\lim_{x\to 0} f(x) - f(0) = 0$ donc $f(x) = f(0) + \circ(1)$. Ainsi $\mathcal{DL}_0(I)$ représente l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ continues en 0.

Lemme.— *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*
i) $f \in \mathcal{DL}_1(I)$
ii) f est dérivable en 0.

Preuve : Si $f(x) = f(0) + bx \circ(x)$ alors $limi_{x\to 0}(f(x) - f(0))/x = b$ c'est à dire $b = f^{'}(0)$ et f dérivable en 0.
Réciproquement, si f est dérivable en 0 alors $\lim_{x\to 0}(f(x) - f(0))/x = f^{'}(0)$ donc $f(x) = f(0) + f^{'}(0)x + \circ(x)$. Ainsi $\mathcal{DL}_1(I)$ représente l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dérivables en 0.

Corollaire.— *Si une application $f : I \to \mathbb{K}$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n $(n \geq 1)$, alors f est dérivable en 0.*

Preuve : Ceci est conséquence du fait que $\mathcal{DL}_n(I) \subset \mathcal{DL}_1(I)$.

Passons maintenant aux conditions suffisantes:

Théorème.— (Formule de Taylor-Young) *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $a \in I$. Si f eﬆ une application de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans $\mathbb{K}$, elle admet un développement limité d'ordre n au point a; plus exactement:*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \circ((x-a)^n)$$

Preuve pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Supposons $I =]\alpha, \beta[$. La formule de Taylor-Lagrange dit que:

$$\forall x \in]a, \beta[\exists c_x \in]a, x[,\ f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{(n)!} f^{(n)}(c_x)$$

On a donc:

$$f(x) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \frac{(x-a)^n}{(n)!} (f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a))$$

Quand x tend à droite vers a, par continuité de $f^{(n)}$, on a $\lim_{x\to a^+}(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)) = 0$. On a la même chose à gauche, par conséquent:

$$\frac{(x-a)^n}{(n)!}(f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(a)) \underset{x\to a}{=} \circ((x-a)^n)$$

Preuve pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: On utilise ici une autre formule de Taylor, qui permet de démontrer Taylor-Young dans tout les cas:

Théorème.— (Formule de Taylor-Laplace) *Soit f une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$, alors*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

En utilisant cette formule on a:

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)dt - \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

donc

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} (f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a))dt$$

La continuité de $f^{(n)}$ en a se traduit par

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0;\ \forall t \in]a-\alpha, a+\alpha[\ |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)| < \epsilon$$

Ainsi pour $x \in I$ tel que $|x-a| < \alpha$

$$|R_n(x)| \leq \epsilon \left| \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right| = \epsilon \frac{|x-a|^n}{n!}$$

Exercice : Donner une démonstration de la formule Taylor-Laplace

Pour résumer, une condition nécessaire pour avoir un DL à l'ordre n ($n \geq 1$) est que f soit dérivable; une condition suffisante est que f soit $\mathcal{C}^n$. Il y a un "fossé" entre ces deux conditions, fossé qu'il va être dur de franchir, on pourrait se contenter de l'existence de $f^{(n)}(0)$ en utilisant une version plus "pointue" de Taylor-Young, mais même là, la condition ne devient pas nécessaire. On va donner un exemple qui fixera bien les esprits quant à ce problème:

Soit $\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application caractéristique des rationnels. Nous avonx déja vu que cette application n'est continue en aucun point. Pour $n \in \mathbb{N}$ posons:

$$f_n(x) = x^{n+1}\chi(x)$$

Cette application n'est continue qu'en 0 et pourtant il est clair que

$$f_n(x) = \circ(x^n)$$

Donc f_n admet un Dl d'ordre n, et pourtant f n'est même pas $\mathcal{C}^0$ sur aucun voisinage de 0...

Application au calcul de DL de fonctions usuelles (en 0):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \circ(x^n)$$

$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n}) \ (ou \ \circ(x^{2n+1}))$$

$$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+1}) \ (ou \ \circ(x^{2n+2}))$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n}) \ (ou \ \circ(x^{2n+1}))$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+1}) \ (ou \ \circ(x^{2n+2}))$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \circ(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n) \text{ (pour } \alpha \in \mathbb{R}^*).$$

5.2.3 Primitivation et dérivation des développement limités.

Lemme.— *Soient f et g deux applications continues de I dans $\mathbb{K}$, et $a \in I$. On suppose que g est à valeurs réelles positives, alors*

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \circ(g(x)) \Longrightarrow \int_a^x f(t)dt \underset{x \to a}{=} \circ\left(\int_a^x g(t)dt\right)$$

Preuve : $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0;\ \forall t \in]a-\alpha, a+\alpha[\ |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)| < \epsilon$ Ainsi pour $x \in I$ tel que $|x-a| < \alpha$ on a:

$$|\int_a^x f(t)dt| \leq |\int_a^x |f(t)|dt| \leq \epsilon |\int_a^x g(t)dt|$$

———

Proposition.— *Soit f une application continue de I dans $\mathbb{K}$ ($0 \in I$) admettant un DL d'ordre n en 0:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots a_n x^n + \circ(x^n)$$

Alors l'application $F : x \to \int_0^x f(t)dt$ admet un développement limité d'ordre $n+1$ obtenu par primitivation de celui de f:

$$F(x) = a_0 x + a_1 \frac{x}{2} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \circ(x^{n+1})$$

Preuve : Si $P(x) = dl_n(x)$ alors $f(x) - P(x) = \circ(x^n)$. Pour $x > 0$ la fonction x^n est positive d'après le lemme précédent on a:

$$\int_0^x (f(t) - P(t))dt = \circ\left(\int_0^x t^n dt\right) = \circ\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = \circ(x^{n+1})$$

Pour $x < 0$, il suffit de changer x en $-x$ et d'écrire $f(x) - P(x) = \circ(|x^n|)$.

———

On peut donc toujours "primitiver" un DL, mais il n'est pas vrai que l'on puisse à coup sur dériver un DL. Soit, en effet, la fonction

$$f(x) = x^{n+1} \sin\left(\frac{1}{x^n}\right),\ f(0) = 0$$

La fonction f est continue et dérivable en tout point et sa dérivée vérifie

$$f'(x) = -n\cos\left(\frac{1}{x^n}\right) + (n+1)x^n \sin\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Il est clair que $f(x) = \circ(x^n)$, mais f' n'est pas continue en 0 donc n'admet aucun DL à aucun ordre en 0.

On peut néanmoins énoncer un résultat partiel pour la dérivation, qui est en fait qu'un théorème de primitivation "à l'envers":

Proposition.— *Si f est une application dérivable de I dans $\mathbb{K}$, si f a un développement limité d'ordre n et si f' a un développement limité d'ordre $n-1$, alors*

$$dl_{n-1}(f') = (dl_n(f))'$$

Preuve : On se ramène au voisinage de 0. Par hypothèse:

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + \circ(x^{n-1})$$

Le théorème de primitivation implique alors:

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \cdots + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + \circ(x^n)$$

Par unicité du DL, on a bien

$$dl_{n-1}(f^{'}) = (dl_n(f))^{'}$$

———

Un cas particulier d'application de ce théorème est celui des développement de Taylor-Young: Si f est de classe $\mathcal{C}^n$, elle a un DL à l'ordre n, mais $f^{'}$ est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$, alors $f^{'}$ a un DL d'ordre $n-1$ et la proposition peut s'appliquer.

5.2.4 Propriétés opératoires des développement limités.

On considère deux applications f et g de I $(0 \in I)$dans $\mathbb{K}$.

Proposition.— *Si f et g admettent chacune un développement limité d'ordre n, alors fg a un développement limité d'ordre n obtenu par troncature du produit des développements.*

Preuve : Si $f(x) = P(x) + \circ(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + \circ(x^n)$, alors

$$f(x)g(x) - P(x)Q(x) = P(x) \circ (x^n) + Q(x) \circ (x^n) + \circ(x^{2n}) = \circ(x^n)$$

———

Remarque: Dans la pratique, il n'est pas nécessaire, pour obtenir $dl_n(fg)$, de "pousser" les développement de f et g jusqu'a l'ordre n.
Plus précisément, si $p = val(dl_n(f))$ et $q = val(dl_n(g))$, il suffit de développer f à l'ordre $n-q$ et g à l'ordre $n-p$.
Par exemple, on veut le DL en 0 de $(\sin x - x)(\cos x - 1)$ à l'ordre 5.
$val(dl_5((\sin x - x))) = 3$ et $val(dl_5((\cos x - 1))) = 2$. On développe donc $(\sin x - x)$ à l'ordre 3 et $(\cos x - 1)$ à l'ordre 2:

$$(\sin x - x)(\cos x - 1) = (-\frac{x^3}{6})(-\frac{x^2}{2}) + \circ(x^5)$$

soit

$$(\sin x - x)(\cos x - 1) = \frac{x^5}{12} + \circ(x^5)$$

Lemme.— *Soient P et Q deux polynômes non nuls. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors il existe un couple unique (A, B) de polynômes tel que $d^o A \leq n$ et*

$$P(X) = A(X)Q(X) + X^{n+1}B(X)$$

On appelle alors $A(X)$, le quotient de la division selon les puissances croissantes de P par Q, à l'ordre n.

Preuve : Exercice.

———

Proposition.— *Soient f et g deux applications de I dans $\mathbb{K}$, $(0 \in I)$, telles que $g(0) \neq 0$. Si f et g admettent un développement limité d'ordre n, alors f/g a un développement limité d'ordre n, obtenu en divisant selon les puissance croissantes le polynôme $dl_n(f)$ par le polynôme $dl_n(g)$ à l'ordre n.*

Preuve : Par hypothèse on a $f(x) = P(x) + \circ(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + \circ(x^n)$, on écrit la division selon les puissances croissantes:

$$P(X) = A(X)Q(X) + X^{n+1}B(X)$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} - A(x) &= \frac{P(x) + \circ(x^n) - A(x)(Q(x) + \circ(x^n))}{g(0) + \circ(1)} \\ &= \frac{x^{n+1}B(x) + \circ(x^n) - A(x)\circ(x^n)}{g(0) + \circ(1)} = \circ(x^n)\end{aligned}$$

———

Corollaire.— *Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{K}$ admettant un développement limité respectivement à l'ordre n et à l'ordre m. Si le développement limité de g est non nul et a pour valuation q, le développement limité de f ayant p pour valuation (on prend $p = n$ si le DL est nul), si $p \geq q$, alors f/g admet un développement limité d'ordre r avec:*

$$r = min(n - q, m + p - 2q)$$

Preuve : On pose $f(x) = x^p f_1(x)$ et $g(x) = x^q g_1(x)$. Soit $s = min(n - p, m - q)$, alors f_1 et f_2 ont des développements limités d'ordre s, donc comme $g_1(0) \neq 0$, f_1/g_1 en admet aussi un au même ordre. Mais alors,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x^{p-q}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

d'où le résultat.

———

Remarque: Dans le cas où $p < q$, f_1/g_1 admet toujours un développement limité d'ordre s et on peut écrire:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x^{q-p}}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Cette remarque permet de définir la notion de développement limité généralisé.

Définition.— *Soit $f : I \to \mathbb{K}$ avec $0 \in I$. On dit que f admet un développement généralisé à la précision x^n en 0, s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et des scalaires $a_{-m}, \cdots, a_{-1}$ et $a_0, \cdots, a_n$ tels que:*

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_{-m}x^{-m} + a_{-m+1}x^{-m+1} + \cdots + a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \circ(x^n)$$

De même, si $Sup(I) = +\infty$, on dit que f à un développement généralisé à la précision $1/x^n$ en $+\infty$ s'il existe des des scalaires $a_{-m}, \cdots, a_{-1}$ et $a_0, \cdots, a_n$ tels que:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_{-m}x^{m} + a_{-m+1}x^{m-1} + \cdots + a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \circ(\frac{1}{x^n})$$

Proposition.— *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et contenant 0. Soit f une application de I dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(I) \subset J$ et g une application de J dans $\mathbb{K}$.*
Si f et g admettent un développement limité d'ordre n, alors $g \circ f$ aussi, et il est obtenu par troncature de $dl_n(g) \circ dl_n(f)$.

Preuve : Soit $f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \circ(x^n) = P(x) + x^n \varphi(x)$ avec $\varphi(x) \to 0$, $g(y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \cdots + b_n y^n + \circ(y^n) = Q(y) + y^n \psi(x)$ avec $\psi(x) \to 0$.
$g \circ f(x) - Q \circ P(x) = g \circ f(x) - g \circ P(x) + g \circ P(x) - Q \circ P(x)$
$= [g(P(x) + x^n\varphi(x)) - g(P(x))] + (P(x))^n \psi(P(x))$
$= b_1 x^n \varphi(x) + \circ(x^n \varphi(x)) + x^n (a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1})^n \psi(P(x))$

$= \circ(x^n)$
Comme $Q \circ P$ est un polynôme a priori de degré $2n$, $dl_n(g \circ f)$ est le reste de la division euclidienne de $Q \circ P$ par X^{n+1}.

Remarque: Pour trouver le DL d'un quotient, plutôt que d'utiliser la méthode de division selon les puissances croissantes, on peut utiliser la proposition précédente avec le DL:

$$\frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - \cdots + (-1)^n y^n + \circ(y^n)$$

Exemple: On cherche un DL à l'ordre 5 en 0 de $\tan x$. On écrit:

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}{1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^5)} \\
&= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})(1 - (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \circ(x^5)) + (-\frac{x^2}{2} + \circ(x^3))^2) \\
&= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120})(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4) + \circ(x^5) \\
&= \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \circ(x^5)
\end{aligned}$$

DL de fonctions usuelles obtenus par primitivation et composition (en 0):

$$\mathrm{Arctan}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{Argth}\, x = x + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{Arcsin}\, x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{1 \times 3 \times \cdots \times 2n-1}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{Argsh}\, x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times 2n-1}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+1})$$

Exercices :

1/ Donner des développement limités aux points et ordres indiqués des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \mathrm{Arccos}\left(\frac{x^2}{shx}\right)$ *en* 0 *à l'ordre* 4.

b) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$ *en* 0 *à l'ordre* 2.

c) $f(x) = \mathrm{Arccos}(\ln(\cos x))$ *en* 0 *à l'ordre* 4.

d) $f(x) = \left(\frac{1}{\mathrm{Arctan}(x)}\right)^2 - \frac{1}{x^2}$ *en* 0 *à l'ordre* 4.

e) $f(x)=\left(\frac{2}{\pi}\mathrm{Arccos}\frac{x}{x+1}\right)^{1/x}$ *en* 0 *à l'ordre* 2.

f) $f(x)=\frac{1}{\mathrm{Arcsin}(x)}-\frac{1}{x}$ *en* 0 *à l'ordre* 5.

g) $f(x)=(\tan x)(\cos x)^x-\frac{x^2}{\cos^2 x}$ *en* 0 *à l'ordre* 7.

2/ Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ch(x)}{1+sh(x)}\right)^x$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{\cos(ax)-\cos a}{\exp(-ax^2)-\exp(-a)}$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x}}$

d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$

e) $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+\sin x)^{1/x}-e^{1-x/2}}{(1+\tan x)^{1/x}-e^{1-x/2}}$

3/ a) Montrer que pour tout $n\geq 0$*, l'équation* $1+x-x^n=0$ *admet une unique solution positive, notée* x_n.

b) Prouver que $(x_n)_n$ *admet une limite et calculer cette limite.*

c) Donner un équivalent en fonction de n de la suite $(x_n)_n$.

d) Déterminer un développement limité de x_n *à l'ordre* 2 *en la variable* $1/n$.

4/ Soit $(a_n)_n$ *une suite réelle à valeurs dans l'intervalle* $]-1,+\infty[$.

a) Montrer que si $\frac{a_n}{\sqrt{n}}=o(1)$ *alors*

$$\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n\simeq_n e^{a_n}$$

b) Prouver que si $\lim_{n\to+\infty}a_n-\ln(1+a_n)=0$ *alors* $\lim_{n\to+\infty}a_n=0$*. En déduire que*

$$\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n\simeq_n e^{a_n}\iff\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=0$$

Thème : développement limité de la fonction tangente :

a) Montrer que la fonction $x\mapsto\tan x$ *de* $]-\pi/2,\pi/2[$ *dans* $\mathbb{R}$ *admet un développement limité à tout ordre de la forme*

$$\tan x=\sum_{n=0}^{N}a_{2n+1}x^{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

b) En utilisant la formule $\tan' x = \tan^2 x + 1$ *trouver une relation permettant de calculer* a_{2n+1} *en fonction de* $a_1, a_3, \cdots, a_{2n-1}$. *En déduire le développement à l'ordre* 17.

c) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 < a_{2n+1} < \dfrac{1}{2n+1}$.

d) Etudier l'existence de $\sum a_{2n+1}$.

Thème : développement limité d'une application réciproque :

Soient I *et* J *deux intervalles voisinant* 0 *et* $f : I \longrightarrow J$ *une bijection vérifiant* $f(0) = 0$ *et admettant à l'ordre* $n > 1$ *un développement limité en* 0 *à l'ordre* n

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

a) On suppose que $a_1 \neq 0$. *Montrer que* f^{-1} *admet un développement limité en* 0 *à l'ordre* n *dont les coefficients peuvent être déterminés, à partir des* a_i, *comme solution d'un système linéaire triangulaire.*

Application : trouver le dl à l'ordre 5 *en* 0 *de* f^{-1} *où* $f(x) = 2x - \mathrm{Arctan}\, x$.

b) On suppose que $a_1 = 0$ *et on note* k *la valuation de* $dl_n(f)$ *(on suppose que* $k < n$*). Montrer que* k *est impair et que* f^{-1} *admet un développement limité d'ordre* $n - k + 1$ *par rapport à la variable* $\sqrt[k]{x}$.

Application : trouver un développement généralisé avec deux termes non nuls l'ordre 5 *en* 0 *de* f^{-1} *où* $f(x) = sh\, x - \sin x$.