Théorie des ensembles

Université d'Eleuthéria-Polites

Cours de Licence 2 — 2016/2017

Bruno Deschamps

Version 2.0

"There must be some way out of here" said the joker to the thief
"There's too much confusion", I can't get no relief
Businessmen, they drink my wine, plowmen dig my earth
None of them along the line know what any of it is worth.

"No reason to get excited", the thief he kindly spoke
"There are many here among us who feel that life is but a joke
But you and I, we've been through that, and this is not our fate
So let us not talk falsely now, the hour is getting late".

All along the watchtower, princes kept the view
While all the women came and went, barefoot servants, too.

Outside in the distance a wildcat did growl
Two riders were approaching, the wind began to howl.

Table des matières

1 **Eléments de théorie des ensembles** 4
- 1.1 Introduction au calcul propositionnel 4
  - 1.1.1 Aspect syntaxique 4
  - 1.1.2 Aspect sémantique 5
- 1.2 Ensembles 6
  - 1.2.1 Généralités 6
  - 1.2.2 Ensemble des parties 9
  - 1.2.3 Produit cartésien 11

2 **Applications** 12
- 2.1 Généralités 12
- 2.2 Image directe et réciproque 13
- 2.3 Injectivité, surjectivité, bijectivité 14
- 2.4 Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité 15

3 **Relations binaires** 17
- 3.1 Généralités 17
- 3.2 Relations d'équivalence 18
- 3.3 Partitions et relations d'équivalences 18
- 3.4 Représentation matricielle d'une relation binaire 20

4 **Ordres** 22
- 4.1 Généralités 22
  - 4.1.1 Ensembles ordonnés 22
  - 4.1.2 Eléments remarquables 23
- 4.2 Treillis 25
- 4.3 Ensembles complets et bien fondés 26
  - 4.3.1 Principe d'induction Noethérienne 26
  - 4.3.2 Ensembles complets 27

5 **Cardinalité** 29
- 5.1 Le dénombrable 29
  - 5.1.1 Propriétés axiomatiques de $\mathbb{N}$ 29
  - 5.1.2 Arithmétique sur $\mathbb{N}$ 30
  - 5.1.3 Ensembles finis 31
  - 5.1.4 Analyse combinatoire 32
- 5.2 Ensembles infinis 33
  - 5.2.1 Cardinalité 33
  - 5.2.2 Ensembles dénombrables 35

Chapitre 1

Eléments de théorie des ensembles

1.1 Introduction au calcul propositionnel

1.1.1 Aspect syntaxique

On se donne une collection de symbôles $A, B, C \cdots$ que l'on appelle "formules atomiques" à laquelle on rajoute les cinq symbôles $\neg$ (négation), $\wedge$ (conjonction), $\vee$ (disjonction), $\Longrightarrow$ (implication), $\Longleftrightarrow$ (équivalence) que l'on appelle "connecteurs". On rajoute finalement les deux symbôles (et)

On considère les "ensembles" $\mathscr{E}$ de suites finis de symbôles vérifiant :

1/ Les formules atomiques sont des éléments de $\mathscr{E}$.

2/ Si P et Q sont des éléments de $\mathscr{E}$, alors $\neg(P)$, $(P) \wedge (Q)$, $(P) \vee (Q)$, $(P) \Longrightarrow (Q)$, $(P) \Longleftrightarrow (Q)$ sont aussi éléments de $\mathscr{E}$.

Parmis ces ensembles, il en existe un plus petit au sens de l'inclusion. On l'appelle l'ensemble des formules du calcul propositionnel et ses éléments sont appelés des "formules".

Convention : Lorsqu'une formule atomique A apparait dans une formule, on omet les parenthèses autour de A. Par exemple, on note $\neg A$ à la place de $\neg(A)$.

Exemples : 1/ $(\neg(A \Longrightarrow A)) \vee (C \Longrightarrow (A \Longleftrightarrow (B \wedge (\neg A))))$ est une formule.

2/ $A \Longrightarrow B \Longrightarrow C$ n'est pas une formule.

Théorème 1.— (Principe d'induction) *Soit $\mathscr{C}$ l'ensemble des formules du calcul propositionnel et $\mathscr{C}_0 \subset \mathscr{C}$ un sous-ensemble. Si*

1/ Toute formule atomique appartient à $\mathscr{C}_0$.

2/ Si P et Q sont des formules dans $\mathscr{C}_0$ alors les formules $\neg(P)$, $(P) \wedge (Q)$, $(P) \vee (Q)$, $(P) \Longrightarrow (Q)$, $(P) \Longleftrightarrow (Q)$ sont dans $\mathscr{C}_0$.

alors on a $\mathscr{C}_0 = \mathscr{C}$.

Corollaire 2.— (Preuve par induction) *Soit $\mathcal{P}$ une propriété relative aux formules du calcul propositionnel. Si 1/ $\mathcal{P}$ est vraie pour toutes les formules atomiques.*

2/ Si $\mathcal{P}$ est vraie pour les formules P et Q alors elle est aussi vraie pour les formules $\neg(P)$, $(P) \wedge (Q)$, $(P) \vee (Q)$, $(P) \Longrightarrow (Q)$, $(P) \Longleftrightarrow (Q)$ sont dans $\mathscr{C}_0$.

alors $\mathcal{P}$ est vraie pour toutes les formules du calcul propositionnel.

Exercices 3.— Montrer que dans une formule du calcul propositionnel, le nombre de parenthèses ouvrantes est égal au nombre de parenthèses fermantes.

1.1.2 Aspect sémantique

On note $A, B, C\cdots$ les formules atomiques qui prennent la valeur 0 (faux) ou 1 (vrai). A toute formule, on on affecte une valeur 0 ou 1 en fonction de celles prises par $A, B, C\cdots$, le tout étant assujeti aux règles sémantiques suivantes :

• Négation. $\neg P$

P	0	1
$\neg P$	1	0

• Conjonction. $P \wedge Q$

$Q\backslash P$	0	1
0	0	0
1	0	1

• Disjonction. $P \vee Q$

$Q\backslash P$	0	1
0	0	1
1	1	1

• Implication. $P \Longrightarrow Q$

$Q\backslash P$	0	1
0	1	0
1	1	1

• Equivalence. $P \Longleftrightarrow Q$

$Q\backslash P$	0	1
0	1	0
1	0	1

La "fonction" qui à une formule P associe sa valeur en fonction des valeurs prises par les formules atomiques, s'appelle la "table de vérité" de P.

Définition 4.— *On appelle tautologie toute proposition qui ne prend que la valeur* 1 *quelle que soit la valeur des propositions élémentaires qu'elle contient.*

Exemples 5.— $P \vee \neg(P)$, $P \Longrightarrow P$, $0 \Longrightarrow P$.

Exercices 6.— Montrer que la formule

$$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Longrightarrow (A \Rightarrow C)$$

est une tautologie.

Définition 7.— *Deux propositions sont dites équivalentes si elles ont même table de vérité.*

Théorème 8.— *Soit P et Q deux propositions ayants les même propositions élémentaires. Alors P et Q ont même table de vérité si et seulement si $P \Longleftrightarrow Q$ est une tautologie.*

Théorème 9.— *Quelques équivalences remarquables :*

1/ $(\neg(\neg(P))) \Longleftrightarrow (P)$ (caractère involutif de $\neg$).

2.1/ $(P \wedge Q) \Longleftrightarrow (Q \wedge P)$ (commutativité de $\wedge$).

2.2/ $(P \vee Q) \Longleftrightarrow (Q \vee P)$ (commutativité de $\vee$).

2.3/ $(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow (Q \Longleftrightarrow P)$ (commutativité de $\Longleftrightarrow$).

3.1/ $(P \wedge P) \Longleftrightarrow P$ (idempotence de $\wedge$).

3.2/ $(P \vee P) \Longleftrightarrow P$ *(idempotence de* $\vee$*).*

4.1/ $((P \wedge Q) \wedge R) \Longleftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$ *(associativité de* $\wedge$*).*

4.2/ $((P \vee Q) \vee R) \Longleftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$ *(associativité de* $\vee$*).*

5.1/ $(\neg(P \wedge Q)) \Longleftrightarrow ((\neg P) \vee (\neg Q))$ *(*$\vee$ *et* $\wedge$ *sont des connecteurs duaux par* $\neg$*).*

5.2/ $(\neg(P \vee Q)) \Longleftrightarrow ((\neg P) \wedge (\neg Q))$.

6.1/ $(P \wedge (Q \vee R)) \Longleftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$ *(distributivité de* $\wedge$ *sur* $\vee$*).*

6.2/ $(P \vee (Q \wedge R)) \Longleftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ *(distributivité de* $\vee$ *sur* $\wedge$*).*

7.1/ $(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow ((\neg P) \vee Q)$.

7.2/ $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg Q \Longrightarrow \neg P)$ *(contraposée).*

7.3/ $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow [(P \wedge \neg Q) \Longrightarrow 0]$ *(preuve par l'absurde).*

8/ $(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow ((P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P))$.

Théorème 10.— *Toute formule du calcul propositionnel équivaut à une conjonction de disjonctions (resp. à une disjonction de conjonctions) de formules atomiques.*

Preuve : S'obtient par induction. □

Exercices 11.— Mettre sous forme de disjonctions de conjonctions, puis sous forme de conjonctions de disjonctions l'énoncé suivant:

$$(A \Longleftrightarrow B) \Longrightarrow [(C \Longrightarrow B) \Longrightarrow (C \Longrightarrow A)]$$

1.2 Ensembles

1.2.1 Généralités

• On appelle *ensemble* une collection d'objets assujétie à certaines contraintes que nous n'énoncerons pas ici. Les objets de cette collection s'appelle les éléments de l'ensemble. Si E est un ensemble et si $\cdots$ sont ses éléments, on note alors $E = \{\cdots\}$ ou alors on représente E par une patate (ce qui est plus visuel, car l'ordre d'énumération des éléments d'un ensemble n'a aucune importance).

• L'ensemble qui ne contient aucun élément est appellé *l'ensemble vide* et est noté $\emptyset$ ou parfois $\{\}$. On remarquera bien que $E = \{\emptyset\}$ n'est pas l'ensemble vide puisqu'il contient un élément.

• Si E est un ensemble et si x est un objet, on écrira $x \in E$ pour symboliser le fait que x est élément de E, et on écrira $x \notin E$ pour symboliser le fait que x n'est pas élément de E.

• Si E est un ensemble et si P désigne une propriété pourtant sur les éléments de l'ensemble E, on écrira

$$\forall x \in E \ P(x)$$

pour dire "pour tout x la propriété $P(x)$" de même, on écrira

$$\exists x \in E \ P(x)$$

pour dire "il existe x tel que la propriété $P(x)$".

Les symbôles $\forall$ et $\exists$ s'appellent des quantificateurs (respectivement universel et existentiel). On enrichit alors le calcul propositionnel de ces quantificateurs. On a alors

• $\neg(\forall x \in E, \ P(x)) \Longleftrightarrow \exists x \in E, \ \neg P(x)$.

• $\forall x \in E, \ \forall y \in E, \ P(x,y) \Longleftrightarrow \forall y \in E, \ \forall x \in E, \ P(x,y)$ (idem pour $\exists$).

• $\exists y \in E, \ \forall x \in E, \ P(x,y) \Longrightarrow \forall x \in E, \ \exists y \in E, \ P(x,y)$ (donner un exemple pour montrer que la réciproque n'est pas toujours vraie).

Exercices 12.— Etudier le caractère distributif ou non des quantificateurs sur la conjection et la disjonction.

Définition 13.— *Soit A et B deux ensembles. Si tout élément de A est un élément de B, on dit que A est un sous-ensemble de B et l'on note $A \subset B$.*

$$i.e.\ A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in A,\ x \in B$$

On dit que deux ensembles A et B sont égaux et l'on note $A = B$ si $A \subset B$ et $B \subset A$.
Si $A \subset B$ et $A \neq B$ on parle d'inclusion stricte et l'on note $A \subsetneq B$,

Exemple 14.— Soit $E = \{x, y, \{x, y\}\}$ et $A = \{x, y\}$. On a alors à la fois $A \in E$ et $A \subset E$.

Définition 15.— *Soient A et B deux ensembles. On appelle réunion de A et de B l'ensemble, noté $A \cup B$, constitué des éléments appartenant à A ou à B*

$$\text{i.e. } x \in A \cup B \Longleftrightarrow x \in A \textit{ ou } x \in B$$

De même, On appelle intersection de A et de B l'ensemble, noté $A \cap B$, constitué des éléments appartenant à A et à B

$$\text{i.e. } x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \textit{ et } x \in B$$

Proposition 16.— *Soit A, B, C trois ensembles. On a*

1.1/ $A \cup B = B \cup A$ (commutativité de $\cup$).

1.2/ $A \cap B = B \cap A$ (commutativité de $\cup$).

2.1/ $A \cup A = A$ (idempotence de $\cup$).

2.2/ $A \cap A = A$ (idempotence de $\cap$).

3.1/ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativité de $\cup$).

3.2/ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associativité de $\cap$).

4.1/ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité de $\cap$ sur $\cup$).

4.2/ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité de $\cup$ sur $\cap$).

Définition 17.— *Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble, noté $\complement_E A$, constitué des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.*

Proposition 18.— *Soit E un ensemble et A, B des sous-ensembles de E. On a:*

1/ $\complement_E(\complement_E A) = A$ (caractère involutif de $\complement_E$).

2/ si $A \subset B$ alors $\complement_E B \subset \complement_E A$ ($\complement_E$ renverse les inclusions).

3.1/ $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E A)$ ($\complement_E$ dualise $\cup$ en $\cap$).

3.2/ $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E A)$ ($\complement_E$ dualise $\cap$ en $\cup$).

Définition 19.— *Soient E et F deux ensembles. On appelle différence de E par F l'ensemble, noté $E - F$, constitué des éléments de E qui ne sont pas éléments de F.*

Exemple 20.— Soient $5\mathbb{N} = \{0, 5, 10, \cdots\}$ l'ensemble des entiers multiples de 5 et $3\mathbb{N} = \{0, 3, 6, \cdots\}$ l'ensemble des entiers multiples de 3. L'ensemble $5\mathbb{N} - 3\mathbb{N}$ est donc constitué des entiers multiples de 5 qui ne sont pas multiples de 3. Or, les entiers multiples de 5 et multiples de 3 sont exactement les entiers multiples de 15. On en déduit donc que :

$$5\mathbb{N} - 3\mathbb{N} = \complement_{5\mathbb{N}} 15\mathbb{N} = \{5, 10, 20, 25, 35, \cdots\}$$

Proposition 21.— *Soient E, F, G trois ensembles. On a*

1/ $E - F = \complement_E E \cap F = \complement_{E \cup F} F$, *2/* $E-(F\cup G)=((E\cup G)-F)\cap((E\cup F)-G)$,

3.1/ $E-(F\cup G)=(E-F)\cap(E-G)$,

3.2/ $E-(F\cap G)=(E-F)\cup(E-G)$.

Exercices 22.—

1.— Soit I un ensemble. A tout $i\in I$ on associe un ensemble X_i. On dit alors que la collection $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles indexée par l'ensemble I (et que I est un ensemble d'indices). On note alors :

$$\bigcup_{i\in I} X_i=\{x,\ \exists i\in I,\ x\in X_i\}$$

$$\bigcap_{i\in I} X_i=\{x,\ \forall i\in I,\ x\in X_i\}$$

Lorsque tous les X_i sont des parties d'un même ensemble X, on dit que $(X_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de X indexée par I.

a) Soit $I=\emptyset$ et $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E indexée par l'ensemble I. Que valent $\bigcup_{i\in I} X_i$ et $\bigcap_{i\in I} X_i$?

b) Soit I un ensemble et $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de parties de I telle que $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda=I$. Considérons une famille d'ensembles $(X_i)_{i\in I}$ indexée par l'ensemble I. Montrer que :

$$\bigcup_{i\in I} X_i=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\left(\bigcup_{i\in I_\lambda} X_i\right)$$

$$\bigcap_{i\in I} X_i=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\left(\bigcap_{i\in I_\lambda} X_i\right)$$

c) Soient $(X_i)_{i\in I}$ et $(Y_j)_{j\in J}$ deux familles d'ensembles indexées par I et J non vide. Montrer que :

$$\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)\cap\left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right)=\bigcup_{(i,j)\in I\times J}\left(X_i\cap X_j\right)$$

$$\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right)\cap\left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right)=\bigcap_{(i,j)\in I\times J}\left(X_i\cup X_j\right)$$

$$\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right)\times\left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right)=\bigcup_{(i,j)\in I\times J}\left(X_i\times X_j\right)$$

$$\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right)\times\left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right)=\bigcap_{(i,j)\in I\times J}\left(X_i\times X_j\right)$$

d) Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble X. Montrer que

$$X-\bigcup_{i\in I} X_i=\bigcap_{i\in I}(X-X_i)$$

$$X-\bigcap_{i\in I} X_i=\bigcup_{i\in I}(X-X_i)$$

e) Soit $(X_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de parties d'un ensemble X. Montrer que

$$\bigcup_{i\in I}\bigcap_{j\in J} X_{i,j}\subset\bigcap_{j\in J}\bigcup_{i\in I} X_{i,j}$$

et prouver, en donnant un exemple, que cette inclusion peut être stricte.

2.— Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E.

a) Montrer que

$$B = C \iff \begin{cases} A \cup B & = & A \cup C \\ A \cap B & = & A \cap C \end{cases}$$

b) Montrer que $A = B$ si et seulement si $A \cap B = A \cup B$.

3.— Soit E un ensemble et A, B, C, D des parties de E. Etablir les formules suivantes :

a) $A \cup B = (A - B) \cup B = (B - A) \cup A$.

b) $A - B = C_A(A \cap B) = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$.

c) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$.

d) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$.

e) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$.

f) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.

g) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$.

h) $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$.

4.— Soit E un ensemble. Soit $A, B \in \mathscr{P}(E)$, on appelle *différence symétrique* de A et de B, l'ensemble :

$$A \Delta B = \mathbf{C}_{A \cup B} A \cap B$$

a) Montrer que $(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau commutatif unitaire.

b) Pour $A, B \in \mathscr{P}(E)$, on pose

$$A * B = C_E A \Delta B$$

Montrer que $(\mathscr{P}(E), *, \cup)$ est un anneau commutatif unitaire.

5.— (Paradoxe de Russel) On considère la *collection* $\mathcal{F}$ des ensembles E tels que $E \notin E$. Montrer que $\mathcal{F}$ n'est pas un ensemble. En déduire que la *collection* de tous les ensembles n'est pas un ensemble.

1.2.2 Ensemble des parties

Définition 23.— *Soient E un ensemble. On appelle ensemble des parties de E l'ensemble, noté* $\mathscr{P}(E)$ *constitué des sous-ensembles de E.*

On remarquera bien que les éléments de $\mathscr{P}(E)$ sont des ensembles.

Exemples 24.— Si $E = \{x, y\}$ alors

$$\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, E\}$$

On a

$$\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

de même,

$$\mathscr{P}(\mathscr{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Exercices 25.— (Filtres sur un ensemble)

1/ Un *filtre* $\mathscr{F}$ sur un ensemble E non vide est une partie non vide de $\mathscr{P}(E)$ (i.e. un ensemble non vide de sous-ensembles de E) qui vérifie les 3 axiomes suivants :

A1 : $\emptyset \notin \mathscr{F}$.
A2 : si $A, B \in \mathscr{F}$ alors $A \cap B \in \mathscr{F}$.
A3 : si $A \in \mathscr{F}$ et $A \subset B \subset E$ alors $B \in \mathscr{F}$.

1.a/ Montrer que si E est infini alors l'ensemble $\mathscr{F}$ constitué des parties cofinies de E (i.e. les parties dont les complémentaires sont des ensembles finis) est un filtre. On l'appelle *filtre de Fréchet* sur E.

1.b/ Etant donné un élément $a \in E$, montrer que l'ensemble

$$\mathscr{F}_a = \{A \subset E / \ a \in A\}$$

est un filtre.

2/ Une *base filtre* $\mathscr{B}$ sur un ensemble E non vide est une partie non vide de $\mathscr{P}(E)$ (i.e. un ensemble non vide de sous-ensembles de E) qui vérifie les 4 axiomes suivants :

B1 : $\emptyset \notin \mathscr{F}$.
B2 : si $A, B \in \mathscr{F}$ alors il existe $C \in \mathscr{F}$ tel que $C \subset A \cap B$.

2.a/ Montrer que tout filtre $\mathscr{F}$ est une base de filtre.

2.b/ Montrer que si $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(E) - \{\emptyset\}$ est une partie stable par intersection finie, alors $\mathscr{B}$ est une base de filtre sur E.

2.c/ Montrer que si $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(E)$ désigne une base de filtre, alors il existe un plus petit filtre $\mathscr{F}$ sur E tel que $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$. *Ce filtre est appelé le "filtre engendré" par* $\mathscr{B}$.

3/ Un ultrafiltre sur E, est un élémént maximal (pour l'inclusion) dans l'ensemble des filtres sur E : c'est donc un filtre $\mathscr{F}$ tel que si $\mathscr{F}'$ désigne un autre filtre et que $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$ alors on a $\mathscr{F} = \mathscr{F}'$.

3.a/ Montrer qu'un filtre $\mathscr{F}$ sur E est un ultrafiltre si et seulement si, il vérifie l'axiome supplémentaire suivant :
A4 : si $A \subset E$ alors, soit $A \in \mathscr{F}$, soit $A^c \in \mathscr{F}$ (A^c désigne le complémentaire de A dans E).

3.a/ Montrer que les filtres $\mathscr{F}_a$ définis à la question 1.b/ sont des ultrafiltres. sur E. Montrer que ces ultrafiltres possèdent un élément minimal ((qui est d'ailleurs un plus petit élément).

3.b/ On dira d'un ultrafiltre qu'il est *principal* s'il possède un élément minimal.

Si $\mathscr{F}$ désigne un ultrafiltre sur un ensemble E montrer que les proprositions suivantes

i) $\mathscr{F}$ est principal,

ii) il existe $a \in A$ tel que $\mathscr{F} = \mathscr{F}_a$,

iii) $\mathscr{F}$ contient une partie finie,

sont équivalentes.

3.c/ En déduire que, si E est un ensemble fini, alors tout ultrafiltre sur E est principal.

3.d/ En tuilisant le lemme de Zorn, montrer que si E désigne un ensemble infini, alors il existe un ultrafiltre non principal sur E.

4/ On considère un ultrafiltre non principal $\mathscr{F}$ sur un ensemble E infini.

4.a/ Montrer que si $A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{F}$, alors l'ensemble $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ est une partie infinie.

4.b/ Montrer que si $X \subset E$ est une partie infinie, alors il existe $A \in \mathscr{F}$ tel que $X \cap A^c$ soit une partie infinie.

5/ (Application) On considère l'intervalle $I = [0,1]$ et l'espace topologique produit $\mathscr{E} = I^I$ qui correspond à l'ensemble $\{f : I \longrightarrow I\}$ muni de la convergence simple ($\mathscr{E}$ est compact). On se donne un ultrafiltre non principal $\mathscr{F}$ sur l'ensemble $\mathscr{N}$ des entiers naturels. Le cardinal de $\mathscr{F}$ est la puissance du continu (ceci est une conséquence de la théorie des ensembles) et l'on peut donc énumérer $\mathscr{F} = \{A_x\}_{x \in I}$.

On définit alors la suite $(f_n)_n$ d'éléments de $\mathscr{E}$ de la manière suivantes : pour $n \geq 0$ et $x \in [0,1]$, on pose :

$$f_n(x) = \mathbf{1}_{A_x}(n)$$

où $\mathbf{1}_E$ désigne, pour tout ensemble E, la fonction caractéristique de E. On considère aussi la fonction $f \in \mathscr{E}$ constante égale à 1.

Montrer que f est une valeur d'adhérence de la suite $(f_n)_n$ mais que f n'est limite d'aucune sous-suite de $(f_n)_n$.

1.2.3 Produit cartésien

Définition 26.— *Soit A et B deux ensembles, on appelle couple (ou paire ordonnée) d'élément de A et de B tout ensemble de la forme $\{a, \{a, b\}\}$ avec $a \in A$ et $b \in B$. Un tel ensemble se note alors (a, b). L'ensemble constitué des couples d'éléments de A et de B s'appelle le produit cartésien de A par B et se note $A \times B$.*

Il faut bien remarquer que $(a, b) \neq (b, a)$ le plus souvent. En fait :

Proposition 27.— *Soient A et B deux ensembles et (a, b) et (c, d) deux éléments de $A \times B$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

i) $(a, b) = (c, d)$,

ii) $a = c$ *et* $b = d$.

Proposition 28.— *Soit A, B, C trois ensembles. On a:*

- $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$,
- $A \times (B \cap C) = A \times B \cap A \times C$.

Remarque 29.— Si $E_1, \cdots, E_n$ sont des ensembles, on définit par récurrence le produit cartésien $E_1 \times \cdots \times E_n$ des ensembles $E_1, \cdots, E_n$, par la relation

$$E_1 \times \cdots \times E_n = (E_1 \times \cdots \times E_{n-1}) \times E_n$$

Les éléments de $E_1 \times \cdots \times E_n$ sont alors appellés des n-uplets et notés $(x_1, \cdots, x_n)$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i = 1, \cdots, n$. On a alors

Proposition 30.— *Soient $E_1, \cdots, E_n$ des ensembles et $(x_1, \cdots, x_n)$ et $(y_1, \cdots, y_n)$ deux éléments de $E_1 \times \cdots \times E_n$. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

i) $(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_n)$,

ii) $x_i = y_i$ *pour tout* $i = 1, \cdots n$.

Chapitre 2

Applications

2.1 Généralités

Définition 31.— *Soient E et F deux ensembles. On appelle graphe (ou graphe fonctionnel) de $E \times F$ toute partie $X \subset E \times F$ vérifiant :*

$$\forall (a,b) \in X,\ \forall (a',b') \in X,\ a = a' \Longrightarrow b = b'$$

Exemple 32.— Pour $E = F$,

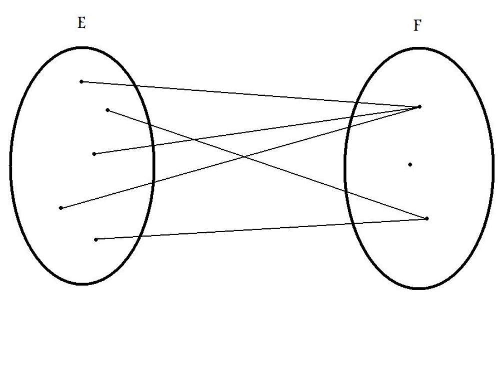
- $X = \emptyset$,
- $X = \{(a,a)/\ a \in E\}$

Définition 33.— • *On appelle fonction la donnée d'un triplet (E,X,F) où E et F sont des ensembles et X un graphe de $E \times F$. On note $f = (E,X,F)$ ou plus classiquement $f : E \to F$ une fonction. L'ensemble E s'appelle l'ensemble de départ de f, l'ensemble F s'appelle l'ensemble d'arrivé de f, et X s'appelle de graphe de f. On dit alors que f est une fonction de E dans F de graphe X.*

• *Si $f = (E,X,F)$ est une fonction, on appelle ensemble de définition de f le sous-ensemble A de E constitué des éléments $a \in E$ tel qu'il existe $b \in F$ vérifiant $(a,b) \in X$.*

• *On dit qu'une fonction $f = (E,X,F)$ est totale et on parle alors d'application, si le domaine de définition de f est E.*

Notations : Si $f = (E,X,F)$ est une application et que $(x,y) \in X$, on note alors $y = f(x)$. Par ailleurs, on utilise volontier des diagrammes de Venn pour représenter une application. Si $f = (E,X,F)$ est une application, on représente les ensembles E et F sous forme de patates et l'on relie les couples $(x,y) \in X$ par des flêches.



Lemme 34.— *Soit E et F deux ensembles et X un graphe fonctionnel de $E \times F$. Soit $U \subset E$. L'ensemble*

$$X_U = \{(a,b) \in X/\ a \in U\}$$

est un graphe fonctionnel de $U \times F$.

Définition 35.— *Soit $f : E \longrightarrow F$ une fonction, X son graphe et $U \subset E$. La fonction de U dans F de graphe X_U s'appelle la restriction de f à U et se note $f_{|U}$ (c'est une fonction). En particulier, si A est le domaine de définition de f, alors $f_{|A}$ est une application.*

Notation : Si E et F sont deux ensembles, on note $\mathscr{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

Exemples 36.— • Si E est un ensemble et $X = \{(a,a) \in E \times E,\ a \in E\}$, l'application $f = (E,X,E)$ s'appelle l'*application identité de E* et se note Id_E.

• Si $E \subset F$ sont deux ensembles et $X = \{(a,a) \in E \times F,\ a \in E\}$, l'application $f = (E,X,F)$ s'appelle l'*injection canonique de E dans F*. Dans le cas où $E = F$ il s'agit alors de Id_E.

Définition 37.— *Soit E, F, G trois ensembles, X_1 un graphe fonctionnel de $E \times F$ et X_2 un graphe fonctionnel de $F \times G$. On appelle graphe composé de X_1 et X_2 l'ensemble*

$$X = \{(a,b) \in E \times G / \ \exists c \in F,\ (a,c) \in X_1 \ et \ (c,b) \in X_2\}$$

(C'est un graphe fonctionnel de $E \times G$)

Proposition 38.— *Si $f : E \to F$ est une application de E dans F de graphe X_1 et $g : F \to G$ est une application de F dans G de graphe X_2, le graphe composé de X_1 et X_2 est le graphe X d'une application de E dans G.*

Définition 39.— *Avec les notation précédente, l'application (E, X, G) s'appelle la composée de f et g et se note $g \circ f$.*

Proposition 40.— *Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$ sont trois applications. Les deux applications $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ sont identique (i.e. ont même graphe).*

Remarque 41.— La loi $\circ$ est donc associative. Dans $\mathscr{F}(E,F)$ elle est rarement commutative. Par exemple si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont définie par, $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2$; on a alors $f \circ g(x) = x^2 + 1$ et $g \circ f(x) = (x+1)^2$.

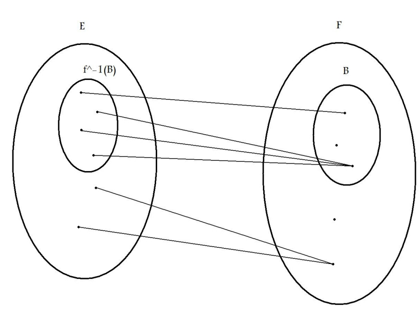
2.2 Image directe et réciproque

Définition 42.— *Soit $f : E \to F$ une application. Pour toute partie $A \subset E$, on appelle image directe de A par f l'ensemble*

$$f(A) = \{y \in F / \ \exists x \in A,\ f(x) = y\}$$

et pour tout partie B de F, on appelle image réciproque de B par f l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / \ f(x) \in B\}$$



Exemple 43.— Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Soit $B = [1, 2]$, on a alors

$$f^{-1}(B) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$$

Soit maintenant $A = [1, \sqrt{2}]$, on a $f(A) = [1, 2] = B$. On remarqu'alors $f^{-1}(f(A)) \neq A$.

Proposition 44.— *Soit $f : E \to F$ une application.*

1/ $\forall A, B \subset F$, $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

2/ $\forall A, B \subset E$, $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

3/ $\forall B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

4/ $\forall A \subset E$, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

5/ $\forall B \subset F$, $f^{-1}(\complement_F B) = \complement_E f^{-1}(B)$.

Exercices 45.—

1.— Donner des exemples qui montrent que les inclusions présentes dans les propriétés 2/,3/,4/ de la proposition précédente peuvent être strictes.

2.— Montrer, en donnant un exemple explicite, que si $A \subset E$ alors $f(\complement_E A)$ et $\complement_F f(A)$ sont des ensembles incomparables.

2.3 Injectivité, surjectivité, bijectivité

Définition 46.— *Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est :*

- *injective si $\forall x, y \in E$, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$,*
- *surjective si $\forall y \in F$, $\exists x \in E$, $f(x) = y$,*
- *bijective si $\forall y \in F$, $\exists! x \in E$, $f(x) = y$.*

Exemples 47.— (Exercice) 1/ $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n^2$ est injective et non surjective.

2/ $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = n^2$ est non injective et non surjective.

3/ $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = x^2$ est bijective.

4/ $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ définie par $f(p, q) = 2^p 3^q$ est injective et non surjective.

Lemme 48.— *Soit $f : E \to F$ une application. Les propositions suivantes*

i) f est bijective,

ii) f est injective et surjective,

sont équivalentes.

Proposition 49.— *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont injectives (resp. surjectives) alors $g \circ f$ est une application injective (resp. surjective).*

On a une réciproque significative à cette propriété :

Proposition 50.— *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On a alors*

$$g \circ f \text{ injective (resp. surjective)} \Longrightarrow f \text{ injective (resp. } g \text{ surjective)}$$

Proposition 51.— *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont injectives (resp. surjectives) alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective).*

Proposition 52.— *Soit $f : E \to F$ une application. Si f est bijective, alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que*

$$g \circ f = Id_E \text{ et } f \circ g = Id_F$$

Cette application s'appelle la réciproque (ou l'inverse) de f et se note f^{-1}. On a alors:

1/ f^{-1} est bijective,

2/ $(f^{-1})^{-1} = f$.

Remarque 53.— Il ne faut pas confondre f^{-1} "application réciproque" et f^{-1} "image inverse".

Proposition 54.— *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$ deux applications telles que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. Les applications f et g sont bijectives et $f^{-1} = g$ et $g^{-1} = f$.*

Remarque 55.— Si seulement une seule des égalités $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ est vérifiée, on ne peux rien dire. En effet, soit $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies par, $f(n) = 2n$ et $g(n) = E(n/2)$. On a alors $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ et pourtant, f n'est pas surjective et g n'est pas injective.

Proposition 56.— *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Définition 57.— *Soit $f : E \to E$ une application. On dit que f est une involution de E si $f \circ f = Id_E$.*

Définition 58.— *Soit $f : E \to E$ une application. Les proposition suivantes sont équivalentes :*

i) f est involutive,

ii) f est bijective et $f^{-1} = f$.

2.4 Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité

Proposition 59.— *Soit $f : E \to F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) f est injective,

ii) $\forall A, B \subset E$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,

iii) $\forall A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Proposition 60.— *Soit $f : E \to F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) f est surjective,

ii) $\forall B \subset F$, $f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercices 61.—

1.— Soit $f : E \to F$ une application.

a) Montrer que f est injective ssi pour tout ensemble D et tout couple d'applications $g, h : D \to E$ on a

$$f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

b) Montrer que f est surjective ssi pour tout ensemble G et tout couple d'applications $g, h : F \to G$ on a

$$g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

2.— Soit E un ensemble et A, B deux parties non vides de E. On considère l'application $f : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ définie par :

$$\forall X \in \mathscr{P}(E),\ f(X) = (A \cap X, B \cap X)$$

a) Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que f soit injective, surjective, bijective.

b) Expliciter f^{-1} lorsque f est bijective.

3.— Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to H$, trois applications. Montrer que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives ssi f, g, h le sont aussi.

4.— Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to E$, trois applications. Montrer que si deux des applications $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$, $f \circ h \circ g$, sont surjectives et que la troisième est injective alors f, g, h sont bijectives.

5.— Soit $f : E \to F$ une application. On définit

$$g : \mathscr{P}(F) \to \mathscr{P}(E)$$

par

$$\forall A \in \mathscr{P}(F),\ g(A) = f^{-1}(A)$$

Montrer que f est injective (resp. surjective) si et seulement si g est surjective (resp. injective).

6.— Soient X et Y deux ensembles non vides et $f : X \to Y$ une application. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

i) f est injective,

ii) il existe une application une application $g : Y \to X$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.

7.— Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

i) f est injective,

ii) pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ $(I \neq \emptyset)$ de parties de X,

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$$

iii) pour tout $A, B \in \mathscr{P}(X)$,

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

iv) pour tout $A, B \in \mathscr{P}(X)$,

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$$

v) pour tout $A, B \in \mathscr{P}(X)$,

$$A \subset B \Rightarrow f(B - A) = f(B) - f(A)$$

vi) pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$,

$$f^{-1}(f(A)) = A$$

8.— (Théorème de Cantor-Bernstein) Soit X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ deux applications injectives. On pose $\varphi = g \circ f$, $Y_0 = g(Y)$, $A = Y_0 - \varphi(X)$ et $B = \bigcup_{n\geq 0} \varphi^n(A)$ (avec $\varphi^0 = \mathrm{Id}$ et $\varphi^n = \varphi \circ \cdots \circ \varphi$ n fois).

a) Montrer que l'application $\theta : X \to Y_0$ définie par

$$\begin{aligned} \theta(x) &= x \ si \ x \in B \\ &= \varphi(x) \ si \ x \in X - B \end{aligned}$$

est une bijection.
(Ind. On pourra remarquer que $B = A \cup \varphi(B)$.)

b) Montrer alors que les ensembles X et Y sont équipotents.

c) Calculer explicitement la bijection trouvée précédemment dans le cas où $X = Y = \mathbb{N}$ et où $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = g(n) = n + 1$.

Chapitre 3

Relations binaires

3.1 Généralités

Définition 62.— *Soient A et B deux ensembles. On appelle relation binaire de A vers B toute partie de $A \times B$. Si $\mathcal{R}$ est une relation binaire de A vers B et si $(a,b) \in \mathcal{R}$, on note alors $a\mathcal{R}b$ ou $\mathcal{R}(a,b)$. On appelle relation binaire sur un ensemble E, toute relation binaire de E dans E.*

Exemples 63.— •

• $E = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x \leq y$.

• E ensemble et $\mathcal{R} = \emptyset$.

• E et F deux ensembles et $f : E \to F$. Le graphe de f est une relation binaire, on a alors $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow y = f(x)$.

Graphe d'une relation binaire sur un ensemble : Le graphe orienté d'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est le graphe dont les sommets sont les éléments de E et les arrêtes orientées sont les $[x,y]$ où $x,y \in E$ vérifient $x\mathcal{R}y$.

Notations: • La relation binaire sur un ensemble E $\{(x,x),\ x \in E$ se note Id_E.

• Si $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur un ensemble E, on note

- • $\overline{\mathcal{R}} = \{(x,y) \in E \times E/\ (x,y) \notin \mathcal{R}\}$ (i.e. $\overline{\mathcal{R}} = \complement_{E\times E}\mathcal{R}$),
- • $\mathcal{R}^{-1} = \{(y,x) \in E \times E/\ (x,y) \in \mathcal{R}\}$
- • $\mathcal{R}^0 = \mathrm{Id}_E, \mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$.

Définition 64.— *Soit $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$ deux relations binaires sur un ensemble E. On note:*

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{T} = \{(x,y) \in E \times E/\ \exists z \in E,\ x\mathcal{R}z \text{ et } z\mathcal{T}y\}$$

Définition 65.— *Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est :*

• *reflexive si $\forall a \in E,\ a\mathcal{R}a$ (i.e. $Id_E \subset \mathcal{R}$,*

• *symétrique si $\forall a,b \in E,\ a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$ (i.e. $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$),*

• *antisymétrique si $\forall a,b \in E,\ a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}a \Rightarrow a = b$ (i.e. $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} = \emptyset$),*

• *antireflexive si $\forall a \in E,\ (a,a) \notin \mathcal{R}$ (i.e. $\mathcal{R} \cap Id_E = \emptyset$),*

• *transitive si $\forall a,b,c \in E,\ a\mathcal{R}b$ et $b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c$.*

Exemples 66.— 1/ Sur un ensemble E, $\mathcal{R} = \emptyset$.

2/ Sur un ensemble E, $\mathcal{R} = \mathrm{Id}_E$.

3/ Sur $\mathscr{P}(E)$, $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$.

4/ Sur $\mathbb{R}$, $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a < b$.

5/ Sur un ensemble E, $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a \neq b$.

6/ Soit Ω un ensemble à au moins deux éléments. Sur $\mathscr{P}(\Omega)$, $A\mathcal{R}B$ si et seulement si il existe une bijection $f : A \to B$.

3.2 Relations d'équivalence

Définition 67.— *Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ un relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si $\mathcal{R}$ est reflexive, symétrique et transitive.*

Exemple 68.— Congruence sur $\mathbb{Z}$.

Notation: Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur un ensemble E, pour tout $x \in E$, on note

$$\overline{x} = \{y \in E / \ x\mathcal{R}y\}$$

Cet ensemble s'appelle *la classe d'équivalence de x modulo $\mathcal{R}$*.

Proposition 69.— *Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.*

a) Si $x, y \in E$ sont tels que $\overline{x} \neq \overline{y}$, alors $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$.

b) Les propositions suivantes sont équivalentes:

i) $x\mathcal{R}y$,

ii) $\overline{x} = \overline{y}$.

Définition 70.— *Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ un relation d'équivalence sur E. On appelle ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'équivalences des éléments de E modulo $\mathcal{R}$. On note cet ensemble $E/\mathcal{R}$ (c'est un sous-ensemble de $\mathscr{P}(E)$).*

Exemple 71.— $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Proposition 72.— *Soit E un ensemble, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$ deux relations d'équivalences sur E. Les propositions suivantes sont équivalentes:*

i) $\mathcal{R} = \mathcal{T}$,

ii) $E/\mathcal{R} = E/\mathcal{T}$.

3.3 Partitions et relations d'équivalences

Définition 73.— *Soit E un ensemble. On appelle partition de E toute partie $\{E_i\}_{i\in I}$ de $\mathscr{P}(E)$ telle que :*

- $\forall i \in I$, $E_i \neq \emptyset$,
- $\forall i \neq j$, $E_i \cap E_j = \emptyset$,
- $\bigcup_i E_i = E$.

Proposition 74.— *Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. L'ensemble $E/\mathcal{R} \subset \mathscr{P}(E)$ est une partition de E.*

Réciproquement, si $\{E_i\}_{i\in I} \subset \mathscr{P}(E)$ est une partition de E, alors il existe une unique relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E telle que $E/\mathcal{R} = \{E_i\}_{i\in I}$.

Il y a donc une correspondance bijective entre les partitions d'un ensemble E et les relations d'équivalence sur E.

Définition 75.— *Soit E un ensemble. Soient P_1 et P_2 deux partitions de E. On dit que P_1 est plus fine que P_2 si*

$$\forall A \in P_1, \ \exists B \in P_2, \ A \subset B$$

Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$ sont deux relations d'équivalence sur E, on dit que $\mathcal{R}$ est plus fine que $\mathcal{T}$ si $E/\mathcal{R}$ est une partition de E plus fine que $E/\mathcal{T}$.

Proposition 76.— *Soit E un ensemble et Ω l'ensemble des relations d'équivalence sur E. La relation binaire sur Ω "être plus fine que" est une relation d'ordre (i.e. est réflexive, antisymétrique et transitive).*

Lemme 77.— *Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{T}$ sont deux relations d'équivalence sur E, la relation binaire $\mathcal{S} = \mathcal{R} \cap \mathcal{T}$ est une relation d'équivalence. De plus, $\mathcal{S}$ est plus fine que $\mathcal{R}$ et que $\mathcal{T}$.*

Exercices 78.—

1.— Soit $f : E \to F$ une application et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur F. On définit sur E la relation binaire $\mathcal{R}^{'}$ par :

$$\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}^{'}y \iff f(x)\mathcal{R}f(y)$$

Montrer que $\mathcal{R}^{'}$ est une relation d'équivalence sur E.

2.— Soit E_1 et E_2 deux ensembles et $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ des relations d'équivalences sur E_1 et E_2. Sur l'ensemble $E = E_1 \times E_2$, on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2,\ (x_1, x_2)\mathcal{R}(y_1, y_2) \iff x_1\mathcal{R}_1 y_1 \ et\ x_2\mathcal{R}_2 y_2$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

b) Montrer qu'il existe une bijection de $E/\mathcal{R}$ sur $E_1/\mathcal{R}_1 \times E_2/\mathcal{R}_2$.

3.— Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble donné. Sur $A\times B$, on considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par

$$(a, b)\mathcal{R}(a^{'}, b^{'}) \iff a = a^{'}$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b) Montrer que A est naturellement en bijection avec $(A \times B)/\mathcal{R}$.

Problème 79.— L'objet de ce problème, est de démontrer le théorème de Cantor- Bernstein : si $f : A \to B$ et $g : B \to A$ sont deux applications injectives, alors il existe une bijection $\varphi : A \to B$.

On pose $s = g \circ f : A \to A$ et $t = f \circ g : B \to B$.

1 Montrer que s et t sont des applications injectives.

2 Montrer que $f \circ s = t \circ f$.

Pour tout entier n on pose $s^n = s \circ s \circ \cdots \circ s$ et $s^0 = \mathrm{Id}_A$. On définit une relation binaire S sur A par

$$xSy \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ y = s^n(x) \ ou \ x = s^n(y)$$

et une relation binaire T sur B par

$$aTb \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ b = t^n(a) \ ou \ a = T^n(b)$$

3 Montrer que S (resp. T) est une relation d'équivalence sur A (resp. sur B).

On dit qu'une classe d'équivalence $\mathcal{C}$ sur A est S-admissible si

$$\forall x \in \mathbf{C}, \exists y \in A \ tel\ que\ x = s(y)$$

On dit qu'une classe d'équivalence $\mathcal{D}$ est S-inadmissible si elle n'est pas S-admissible.

4 Soit $\mathcal{D}$ une classe d'équivalence de A S-inadmissible. Montrer qu'il existe un unique $x_0 \in \mathcal{D}$ tel que $\mathcal{D} = \{x_0, s(x_0), s^2(x_0), \cdots\}$. On appelle x_0 le générateur de $\mathcal{D}$.

5 Enoncé et démontrer des propriétés analogues pour les classes d'équivalences sur B. (On utilisera à cet effet la terminologie de classe d'équivalence T-admissible.)

6.a Montrer que f envoie l'ensemble des classes d'équivalences S-admissibles dans l'ensemble des classes d'équivalences T-admissibles.

6.b Soit $\mathcal{D}$ une classe d'équivalence S-inadmissible. Montrer que $f(\mathcal{D})$ est contenu dans une classe d'équivalence T-inadmissible.

7 Soit $\mathcal{D}$ une classe d'équivalence S-inadmissible, x_0 le générateur de $\mathcal{D}$ et y_0 le générateur de la classa d'équivalence T-inadmissible qui contient $f(\mathcal{D})$. Montrer que $f(x_0) = y_0$ ou $g(y_0) = x_0$.
(Ind on pourra utiliser, après l'avoir démontré, le fait que $g \circ (f \circ g)^n = (g \circ f)^n \circ g$.)

8 Soit $\mathcal{D}$ une classe d'équivalence S-inadmissible et x_0 son générateur. Soit $\mathcal{E}$ la classe d'équivalence contenant $f(\mathcal{D})$ et y_0 son générateur. Montrer que l'application

$$s^n(x_0) \mapsto t^n(x_0),\ n \in \mathbb{N}$$

est une bijection de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$.

9 Si x est dans une classe $\mathcal{C}$, S-admissible, montrer que $x \mapsto f(x)$ est une bijection de $\mathcal{C}$ dans $f(\mathbf{C})$.

10 Soit $\varphi : A \to B$ l'application définie par

- si x est dans une classe S-admissible: $\varphi(x) = f(x)$.
- si x est dans une classe S-inadmissible ($x = s^n(x_0)$): $\varphi(x) = t^n(x_0)$.

(les notations étants celle du 8. et du 9). Montrer que φ est une bijection de A dans B.

3.4 Représentation matricielle d'une relation binaire

Définition 80.— *On appelle matrice booléenne d'ordre n, toute matrice nxn à coefficients dans* $\{0,1\}$*. Dans l'ensemble des matrices booléenne d'ordre n, on définit deux lois de composition + et . définie, pour* $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ *et* $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$*, par*

$$A + B = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \text{ avec } c_{i,j} = \max(a_{i,j}, b_{i,j})$$

et

$$A.B = (d_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \text{ avec } d_{i,j} = \max_{k=1,\cdots,n}(a_{i,k}b_{k,j})$$

Définition 81.— *Soit* $E = \{x_1, \cdots, x_n\}$ *un ensemble fini et* $\mathcal{R}$ *une relation binaire sur* E*. On appelle matrice booléenne associée à* $\mathcal{R}$ *la matrice* $M_{\mathcal{R}} = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ *définie par:*

$$\forall 1 \leq i,j \leq n \begin{cases} a_{i,j} = 1 & si\ x_i \mathcal{R} x_j \\ a_{i,j} = 0 & sinon \end{cases}$$

Proposition 82.— *Dans cette situation, on a :*

- $\mathcal{R}$ *est reflexive si et seulement si* $M_{\mathcal{R}}$ *ne possède que des 1 sur sa diagonale.*
- $\mathcal{R}$ *est symétrique si et seulement si* ${}^tM_{\mathcal{R}} = M_{\mathcal{R}}$.

Proposition 83.— *Soit E un ensemble fini et* $\mathcal{R}$ *et* $\mathcal{T}$ *deux relations binaire sur E de matrice booléenne respective* $M_{\mathcal{R}}$ *et* $M_{\mathcal{T}}$*. La matrice booléenne de* $\mathcal{R} \cup \mathcal{T}$ *vaut*

$$M_{\mathcal{R}\cup\mathcal{T}} = M_{\mathcal{R}} + M_{\mathcal{T}}$$

et celle de $\mathcal{R} \circ \mathcal{T}$ *est*

$$M_{\mathcal{R}\circ\mathcal{T}} = M_{\mathcal{R}}.M_{\mathcal{T}}$$

Exercice 84.— Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On pose

$$\mathcal{R}^0 = \mathrm{Id}_E \text{ et } \mathcal{R}^1 = \mathcal{R}$$

et on définit par récurrence, pour $n \geq 1$,:

$$\mathcal{R}^n = \mathcal{R}^{n-1} \circ \mathcal{R}$$

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathcal{R}^n = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}^{n-1}$$

b) Montrer que si $\mathcal{R}$ est transitive, alors $\mathcal{R}^n \subset \mathcal{R}$ pour tout $n \geq 1$.

c) Montrer que si $\mathcal{T}$ est une relation binaire sur E transitive telle que $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}$, alors pour tout $n \geq 1$,

$$\mathcal{R}^n \subset \mathcal{T}$$

d) On appelle fermeture transitive (resp. reflexo-transitive) de $\mathcal{R}$ la relation binaire

$$\mathcal{R}^+ = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{R}^n$$

resp. la relation binaire

$$\mathcal{R}^* = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{R}^n$$

Montrer que $\mathcal{R}^+$ est la plus petite (au sens de l'inclusion) relation binaire transitive sur E telle que $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^+$. Que représente $\mathcal{R}^*$?

e) Si E est fini et si $M_{\mathcal{R}}$ désigne la matrice booléenne associée à $\mathcal{R}$ que vaut $M_{\mathcal{R}^+}$ (resp. $M_{\mathcal{R}^+}$), la matrice booléenne associée à la relation $\mathcal{R}^+$ (resp. $\mathcal{R}^*$)?

f) (Application) Calculer $\mathcal{R}^+$ et $\mathcal{R}^*$ pour

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Chapitre 4

Ordres

4.1 Généralités

4.1.1 Ensembles ordonnés

Définition 85.— *Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est :*

- *un pré-ordre sur E, si $\mathcal{R}$ est réflexive et transitive,*
- *un ordre sur E, si $\mathcal{R}$ est réflexive, transitive et antisymétrique,*
- *un ordre strict sur E, si $\mathcal{R}$ est antiréflexive, antisymétrique et transitive.*

Si $\leq$ est un ordre sur E, on dit que $(E,\leq)$ est un ensemble ordonné.

Exemples 86.— • Sur $\mathbb{N}$, $\leq$ est un ordre.

- Sur $\mathbb{R}$, $<$ est un ordre strict.
- Sur $\mathscr{P}(E)$, $\subset$ est un ordre.
- Sur $\mathbb{N}^*$, $.|.$ (défini par $a|b \iff a$ divise b) est un ordre.
- Sur $\mathbb{Z}^*$, $.|.$ n'est pas un ordre, mais est un pré-ordre.

Convention sur le graphe d'un ordre : Pour le graphe d'un ordre $\leq$ sur un ensemble E on omettra de faire figurer les arrêtes dues à la réfléxivité et, quand cela est possible (en particulier quand E est fini), à la transitivité.

- Sur $\mathscr{P}(E)$, $\leq$ (défini par $A \leq B$ s'il existe une injection de A dans B) n'est pas un ordre, mais est un pré-ordre.

Proposition 87.— *Soit $(E_1,\leq_1)$ et $(E_2,\leq_2)$ deux ensembles ordonnés. Sur $E = E_1 \times E_2$, la relation $\leq$ définie par :*

$$(e_1,e_2) \leq (f_1,f_2) \iff e_1 \leq_1 f_1 \text{ et } e_2 \leq_2 f_2$$

est un ordre. On appelle cet ordre, "l'ordre produit".

Proposition 88.— *Soit $(E_1,\leq_1)$ et $(E_2,\leq_2)$ deux ensembles ordonnés. Sur $E = E_1 \times E_2$, la relation $\leq_{lex}$ définie par :*

$$(e_1,e_2) \leq_{lex} (f_1,f_2) \iff \begin{cases} e_1 \leq_1 f_1 & \text{et} \quad e_1 \neq f_1 \\ & \text{ou} \\ e_1 = f_1 & \text{et} \quad e_2 \leq f_2 \end{cases}$$

est un ordre. On appelle cet ordre, "l'ordre lexicographique".

Définition 89.— *Soit $(E,\leq)$ un ensemble ordonné. On dit que $\leq$ est total si pour tout $x,y \in E$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$. Si $\leq$ n'est pas total, on dit que $\leq$ est partiel.*

Proposition 90.— *Soit $(E_1,\leq_1)$ et $(E_2,\leq_2)$ deux ensembles totalement ordonnés. L'ordre lexicographique $\leq_{lex}$ sur $E = E_1 \times E_2$ est total.*

Définition 91.— *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E. On appelle ordre induit par E sur A, la relation $\leq_A = \leq \cap (A \times A)$. C'est un ordre sur A; s'il n'y a pas d'ambiguité, on continue à le noté $\leq$.*

Exercice 92.—

1.— Soit $\mathcal{R}$ une relation de préordre sur un ensemble E. Sur E, on définit la relation binaire ρ par :

$$\forall x, xy \in E,\ x\rho y \iff x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x$$

a) Montrer que ρ est une relation d'équivalence sur E.

b) Soit $\alpha, \beta \in E/\rho$ et $x, y \in E$ des représentants de α et β (i.e. $x \in \alpha$ et $y \in \beta$). On pose $\alpha \leq \beta$ ssi $x\mathcal{R}y$. Montrer que la définition de $\leq$ ne dépend pas du choix x, y des représentants de α et β.

c) Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur E/ρ.

2.— Pour tout $i = 1, \cdots, n$, on considère un ensemble ordonné $(E_i, \leq_i)$. Sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ on définit la relation $\leq_{lex}$ définie pour $(x_1, \cdots, x_n) \neq (y_1, \cdots, y_n)$ par $(x_1, \cdots, x_n) \leq_{lex} (y_1, \cdots, y_n)$ si et seulement si

$$x_{n_0} \leq_{n_0} y_{n_0} \text{ pour } n_0 = \inf(k = 1, \cdots, n /\ x_k \neq y_k)$$

a) Quelle est cette relation pour $n = 2$?

b) Montrer que $\leq_{lex}$ est un ordre.

c) Montrer que si chaque $\leq_i$ est total, alors $\leq_{lex}$ l'est aussi.

4.1.2 Eléments remarquables

Définition 93.— *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, $A \subset E$ et $\alpha \in E$. On dit que α est :*

• *un majorant (resp. minorant) de A si*

$$\forall x \in A,\ x \leq \alpha \ (\text{resp. } \alpha \leq x)$$

• *un élément maximal (resp. minimal) de A, si $\alpha \in A$ et si*

$$\forall x \in A,\ \alpha \leq x \Rightarrow x = \alpha \ (\text{resp. } x \leq \alpha \Rightarrow x = \alpha)$$

• *un plus grand élément (resp. plus petit élément) de A, si $\alpha \in A$ et si*

$$\forall x \in A,\ x \leq \alpha \ (\text{resp. } \alpha \leq x)$$

• *une borne supérieure (resp. inférieure) de A, si α est le plus petit des majorants (resp. le plus grand des minorants).*

Proposition 94.— *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, $A \subset E$ et $\alpha \in E$. On a :*

1/ α plus grand élément $\Rightarrow$ α élément maximal.

2/ α plus grand élément $\Rightarrow$ α borne supérieure.

3/ α borne supérieure $\Rightarrow$ α majorant.

Exercices 95.—

1.— Donner des exemples de

a) Majorant qui n'est pas une borne supérieure.

b) Borne supérieure qui n'est pas un plus grand élément.

c) Elément maximal qui n'est pas un plus grand élément.

d) Elément maximal qui n'est pas un majorant.

e) Majorant qui n'est pas un élément maximal.

2.— Compléter la proposition précédente quand $\leq$ est supposé total.

3.— Donner un exemple d'ensemble ordonné possédant un unique élément maximal sans que ce dernier soit un plus grand élément.

4.— On rappelle que dans $\mathbb{R}$ toute partie non vide et majorée poss-de une borne supérieure. On considère la partie P de $\mathbb{Q}$

$$P = \{r \in \mathbb{Q} / \ r^2 \leq 2\}$$

a) Montrer que P est majorée.

b) Prouver que P n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

5.— On considère sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ l'ordre $.|..$

a) Montrer que toute partie finie non vide admet une borne supérieure et inférieure que l'on explicitera.

b) Montrer que toute partie non vide admet une borne inférieure que l'on explicitera.

c) Montrer qu'aucune partie infinie n'admet de borne supérieure.

6.— On considère un ensemble E et sur l'ensemble $\mathscr{P}(E)$, on considère l'ordre $\subset$. Montrer que toute partie de $\mathscr{P}(E)$ admet une borne supérieure et inférieure que l'on explicitera.

Remarques 96.— • Si α est un plus grand élément, il est unique. De même si α est une borne supérieure.

• Si α est l'unique élément maximal de A, il se peut quand même que α ne soit pas le plus grand élément de A. Par contre, si $\leq$ est total, il y a au maximum un élément maximal dans A et si ce dernier existe, c'est un plus grand élément.

Notation: Si A admet une borne supérieure (resp. inférieure), on note celle-ci $\sup(A)$ (resp. $\inf(A)$).

Exercices 97.— Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Montrer que les propriétés suivantes

i) $\emptyset$ possède une borne supérieure (resp. inférieure),

ii) E possède un plus petit (resp. plus grand) élément,

sont équivalentes. Dans cette situation quelle est la borne supérieure (resp. inférieure) de $\emptyset$?

Proposition 98.— *Soit $(E, \leq)$ ordonné et X une partie de E.*

• *Si X admet une borne supérieure et inférieure, alors* $\inf(X) \leq \sup(X)$.

• *Si $X = \emptyset$ alors X admet une borne supérieure (resp. inférieure) ssi E possède un plus petit élément (resp. un plus grand élément). Dans ces condition, on a* $\sup(\emptyset) \leq \inf(\emptyset)$.

Définition 99.— *Soient $(E_1, \leq_1)$ et $(E_2, \leq_2)$ deux ensembles ordonnés et $f : E_1 \to E_2$ une application. On dit que f est croissante si*

$$\forall x, y \in E_1, \ x \leq_1 y \Rightarrow f(x) \leq_2 f(y)$$

Exemple Soit $f : E \to F$ une application. On ordonne $\mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{P}(F)$ par l'inclusion. L'application $g : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(F)$ définie par

$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \ g(A) = f(A)$$

est croissante.

Définition 100.— *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.*

• *On appelle chaine de E tout partie X totalement ordonnée (i.e. $(X, \leq_X)$ est totalement ordonné).*

• *On appelle antichaine de E tout partie X telle que $(X \times X) \cap \leq = Id_X$ (i.e. $\forall x, y \in X, \ x \leq y \Rightarrow x = y$).*

Si X est une chaine (resp. une antichaine), on dit que X est maximale si pour toute chaine (resp. antichaine) Y de E,

$$X \subset Y \Rightarrow X = Y$$

Exemple : Soit $E = \mathscr{P}(\{a, b, c\})$, muni de l'inclusion.

- $X = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$ est une chaine maximale.
- $X = \{\{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$ est une chaine non maximale.
- $X = \{\{a\}\}$ est une antichaine non maximale.

Définition 101.— *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné fini. On appelle*

- *largeur de E, le cardinal maximal des antichaines de E,*
- *hauteur de E, le cardinal maximal des chaines de E.*

Définition 102.— *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $a, b \in E$ tels que $a \leq b$. On appelle intervalle d'extrémité a, b l'ensemble*

$$[a,b] = \{c \in E / \ a \leq c \leq b\}$$

Exemples : Sur $(\mathscr{P}(\{a,b,c\}), \subset)$ on a :

- $[\emptyset, \{a,b,c\}] = \mathscr{P}(\{a,b,c\})$,
- $[\emptyset, \{a,b\}] = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$,
- $[\{a\}, \{b\}]$ n'a pas de sens.

Exercices 103.—

1.— Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. Quelles sont les antichaines de E?

2.— Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, X une chaine de E et Y une antichaine de E. Que vaut $X \cap Y$?

Définition 104.— *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit que E est inductif si toute chaine $X \subset E$ admet un majorant.*

Lemme (Axiome) de Zorn *Tout ensemble inductif admet un élément maximal.*

En fait, le lemme de Zorn équivaut à l'axiome du choix.

Exercice 105.— Montrer, en utilisant le lemme de Zorn, que tout espace vectoriel admet une base.

Définition 106.— *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On appelle extension linéaire de $\leq$, tout ordre total $\leq_0$ tel que $\leq \subset \leq_0$.*

Théorème 107.— *Tout ensemble ordonné $(E, \leq)$ admet des extensions linéaires et*

$$\leq = \bigcap_{ext.\ lin.} \leq_0$$

4.2 Treillis

Définition 108.— *On dit qu'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est filtrant à droite (resp. filtrant à gauche, resp. filtrant) si pour tout couple $(a,b) \in E^2$, la partie $\{a,b\}$ admet un majorant (resp. un minorant, resp. un majorant et un minorant).*

Définition 109.— *On dit qu'un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est réticulé à droitre (ou est un semi-treillis supérieur) (resp. réticulé à gauche (ou est un semi-treillis inférieur), resp. réticulé (ou est un treillis)) si pour tout couple $(a,b) \in E^2$, la partie $\{a,b\}$ admet une borne supérieure (resp. une borne inférieure, resp. une borne supérieure et inférieure).*

Notation Si $(E, \leq)$ est un treillis et si $a, b \in E$, on note:

- $a \sqcup b = \sup(\{a,b\})$,
- $a \sqcap b = \inf(\{a,b\})$,

Proposition 110.— *Soit $(E, \leq)$ un treillis et $X \subset E$ une partie finie non vide. X admet une borne supérieure et inférieure.*

Corollaire 111.— *Si $(E,\leq)$ un treillis fini, alors E admet un plus grand et un plus petit élément.*

Proposition 112.— *Soit $(E,\leq)$ un treillis.*

- $\forall x\in E,\quad \left.\begin{array}{rcl} x\sqcup x &=& x\\ x\sqcap x &=& x\end{array}\right\}$ *Idempotence*
- $\forall x,y\in E,\quad \left.\begin{array}{rcl} x\sqcup y &=& y\sqcup x\\ x\sqcap y &=& y\sqcap x\end{array}\right\}$ *Commutativité*
- $\forall x,y,z\in E,\quad \left.\begin{array}{rcl} (x\sqcup y)\sqcup z &=& x\sqcup (y\sqcup z)\\ (x\sqcap y)\sqcap z &=& x\sqcap (y\sqcap z)\end{array}\right\}$ *Associativité*
- $\forall x,y\in E,\quad \left.\begin{array}{rcl} (x\sqcup y)\sqcap x &=& x\\ (x\sqcap y)\sqcup x &=& x\end{array}\right\}$ *Absorption*

Définition 113.— *On dit qu'un treillis $(E,\leq)$ est distributif si pour tout $x,y,z\in E$,*

- $x\sqcup(y\sqcap z)=(x\sqcup y)\cap(x\sqcup z)$,
- $x\sqcap(y\sqcup z)=(x\sqcap y)\sqcup(x\sqcap z)$.

Exercice 114.—

1.— Soit E un ensemble. Montrer que $(\mathscr{P}(E),\subset)$ est un treillis distributif.

2.— Montrer que $(\mathbb{N}^*,.|.)$ est un treillis distributif.

3.— Soit E un espace vectoriel et $\mathscr{V}$ l'ensemble des sous-espaces de E. On ordonne $\mathscr{V}$ par l'inclusion.

a) Montrer que $(\mathscr{V},\subset)$ est un treillis.

b) Montrer que $(\mathscr{V},\subset)$ n'est pas distributif si $\dim E\geq 2$.

4.3 Ensembles complets et bien fondés

4.3.1 Principe d'induction Noethérienne

Définition 115.— *Soit $(E,\leq)$ un ensemble ordonné. On dit que E est bien fondé (ou noetherien) s'il n'existe pas de suite strictement décroissante d'éléments de E.*

Exemples 116.— (Exercice) 1/ $(\mathbb{N},\leq)$ est bien fondé.

2/ $(\mathbb{Z},\leq)$ est mal fondé.

3/ $(\mathbb{R}^+,\leq)$ est mal fondé.

4/ $(\mathbb{Z},\leq)$ est mal fondé.

5/ Tout ensemble fini ordonné est bien fondé.

6/ $(\mathscr{P}(E),\subset)$ est bien fondé quand E est fini et mal fondé quand E est infini.

Exercice 117.— Soient $(E_1,\leq_1)$ et $(E_2,\leq_2)$ deux ensembles ordonnés. On rappelle que l'ordre lexicographique sur $E_1\times E_2$ est la relation binaire $\leq_{lex}$ définie pour tout (x_1,x_2), $(y_1,y_2)\in E_1\times E_2$ par :

$$(x_1,x_2)\leq_{lex}(y_1,y_2)\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x_1<_1 y_1\\ ou\\ x_1=y_1\ et\ x_2\leq_2 y_2\end{array}\right.$$

a) Montrer que $\leq_{lex}$ est un ordre sur $E_1\times E_2$.

b) Montrer que si $\leq_1$ et $\leq_2$ sont des ordres totaux, alors $\leq_{lex}$ est total.

c) Montrer que si $\leq_1$ et $\leq_2$ sont des bons ordres, alors $\leq_{lex}$ est un bon ordre.

d) Montrer que si $(E_1,\leq_1)$ et $(E_2,\leq_2)$ sont des ensembles filtrants, alors $(E_1\times E_2,\leq_{lex})$ est un ensemble filtrant.

e) Montrer que si $(E_1, \leq_1)$ et $(E_2, \leq_2)$ sont des treillis, alors $(E_1 \times E_2, \leq_{lex})$ est un treillis.

f) Montrer que si $(E_1, \leq_1)$ et $(E_2, \leq_2)$ sont complets, alors $(E_1 \times E_2, \leq_{lex})$ est complet.

Théorème 118.— *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Les propriétés suivantes*

i) E est bien fondé,

ii) toute partie non vide de E possède un élément minimal,

sont équivalentes.

Définition 119.— *On appelle bon ordre sur un ensemble E, tout ordre sur E qui vérifie que toute partie non vide de E possède un plus petit élément.*

Théorème 120.— *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Les propriétés suivantes*

i) $\leq$ est un bon ordre,

ii) E est bien fondé et $\leq$ est total,

sont équivalentes.

Exercice 121.— Montrer que tout ensemble dénombrable possède un bon ordre. Donner un exemple sur $\mathbb{Z}$.

Axiome (Zermelo) *Tout ensemble peut être bien ordonné*

On peut montrer l'axiome de Zermelo, l'axiome du choix et le lemme de Zorn sont des énoncés équivalents.

Théorème 122.— (Principe d'induction noetherienne) *Soit $(E, \leq)$ un ensemble bien fondé. Si $P \subset E$ vérifie*

$$\forall x \in E\, (\forall y \in E,\ y < x \Longrightarrow y \in P) \Longrightarrow x \in P$$

alors $P = E$.

Corollaire 123.— *Soit $(E, \leq)$ un ensemble bien fondé et $\mathscr{P}$ une propriété relative aux éléments de E. Si*

$$\forall x \in E\, (\forall y \in E,\ y < x \Longrightarrow \mathscr{P}(y) \text{ est vraie}) \Longrightarrow \mathscr{P}(x) \text{ est vraie}$$

alors $\mathscr{P}(x)$ est vraie pour tout $x \in E$.

Exercice 124.— 1/ Montrer que le principe d'induction noetherienne sur un ensemble bien fondé $(E, \leq)$ équivaut à la propriété suivante : si $P \subset E$ est une partie telle que

- $x \in P$ pour tout élément minimal $x \in E$,
- si pour tout $x \in P$ non minimal, $y \in P$ pour tout $y < x$, alors $x \in P$,

alors $P = E$.

2/ En déduire que sur $(\mathbb{N}, \leq)$ le principe d'induction noetherienne n'est rien d'autre que le principe de récurrence.

4.3.2 Ensembles complets

Définition 125.— *Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit que E est pointé s'il possède un plus petit élément. Quand il n'y a pas d'ambiguité, on note cet élément $\perp$.*

Exercices 126.—

1.— Montrer que $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{N}^*, .|.)$ et $(\mathscr{P}(E), \subset)$ sont des ensembles pointés et expliciter $\perp$ dans chacun des cas.

2.— Donner un exemple d'ensemble pointé mal fondé et un exemple d'ensemble bien fondé non pointé.

Définition 127.— *Un ensemble ordonné E eſt dit complet supérieurement (resp. inférieurement) ou plus simplement complet si toute partie de E possède une borne supérieure (resp. inférieure). Si $P \subset E$, on note alors $\bigsqcup P = \sup P$ (resp. $\bigsqcap P = \inf P$).*

Exemples 128.— (Exercice) 1/ $(\mathscr{P}(E), \subset)$ eſt complet supérieurement et inférieurement.

2/ $(\mathbb{N}^*, .|.)$ eſt complet inférieurement mais pas supérieurement.

3/ Si $a < b$ sont deux réels, alors $([a,b], \leq)$ eſt complet supérieurement et inférieurement.

Proposition 129.— *Tout ensemble complet eſt pointé.*

Définition 130.— *Soient $(E_1, \leq_1)$ et $(E_2, \leq_2)$ deux ensembles complets supérieurement (resp. inférieurement) et $f : E_1 \longrightarrow E_2$. On dit que f eſt continue supérieurement (resp. inférieurement) si pour tout $P \subset E_1$ on a $f(\bigsqcup P) = \bigsqcup f(P)$ (resp. $f(\bigsqcap P) = \bigsqcap f(P)$).*

Proposition 131.— *Toute application continue (supérieurement ou inférieurement) eſt croissante.*

Exercices 132.—

1.— Soit $g : E \to F$ une application. Montrer que l'application $f : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(F)$ définie, pour $X \in \mathscr{P}(E)$, par :

$$f(X) = g(X)$$

eſt continue.

2.— On considère l'application $f : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ définie pour $X \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ par :

$$\begin{array}{rcll} f(X) & = & X & si\ X\ est\ infini \\ & = & X - 3\mathbb{N} & si\ X\ est\ fini \end{array}$$

a) Montrer que f eſt croissante.

b) Montrer que f n'eſt pas continue.

Définition 133.— *Soit $f : E \longrightarrow E$ une application. On appelle point fixe de f tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = x$. On note Fix(f) l'ensemble des points fixes de f.*

Théorème 134.— (Knaſter-Tarski) *Soit $(E, \leq)$ un ensemble complet supérieurement (resp. inférieurement) et $f : E \longrightarrow E$ une application. Si f eſt croissante alors Fix$(f) \neq \emptyset$ et cet ensemble possède un plus grand (resp. plus petit) élément.*

Théorème 135.— (Knaſter-Tarski) *Soit $(E, \leq)$ un ensemble complet supérieurement (resp. inférieurement) et $f : E \longrightarrow E$ une application. Si f eſt continue alors Fix$(f) \neq \emptyset$ et cet ensemble possède un plus petit (resp. plus grand) élément.*

Exercices 136.— a) Soit X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ deux applications injeƈtives. Prouver que l'application $\theta : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ définie par :

$$\forall A \in \mathscr{P}(X),\ \theta(A) = X - g(Y - f(A))$$

admet un point fixe A_0.

d) On pose $B_0 = f(A_0)$. Montrer que g définie une bijeƈtion de $Y - B_0$ sur $X - A_0$. En déduire que l'application $\varphi : X \to Y$ définie par

$$\begin{array}{rcll} \varphi(x) & = & g^{-1}(x) & si\ x \notin A_0 \\ & = & f(x) & si\ x \in A_0 \end{array}$$

eſt un bijeƈtion. Quel théorème vient-on de prouver?

Chapitre 5

Cardinalité

5.1 Le dénombrable

5.1.1 Propriétés axiomatiques de $\mathbb{N}$

Dans ce qui suit, E désigne un ensemble et $\leq$ un ordre sur E. On considère les axiomes suivants :

S.0. L'ensemble E est non vide.

S.1. L'ordre $\leq$ est un bon ordre sur E (i.e. toute partie non vide de E possède un plus petit élément).

S.2. Toute partie majorée non vide de E possède un plus grand élément.

S.3. E ne possède pas de plus grand élément.

Premières remarques : Si $(E, \leq)$ vérifie les axiomes S.1. alors $\leq$ est un ordre total sur E. Par ailleurs si $(E, \leq)$ vérifie S.0,2,3. alors E est un ensemble infini. Enfin, si E vérifie S.0,1. alors E possède un plus petit élément.

Dans la suite on considère un ensemble ordonné $(E, \leq)$ vérifiant les axiomes S.1,2,3. On note 0 le plus petit élément de E.

Les fonctions successeur et prédécesseur : Considérons un élément $n \in E$ et $F = \{m \in E / \ m > n\}$. D'après ce qui précède F n'est pas vide (sinon E posséderait un plus grand élément). On appelle successeur de n l'élément noté $s(n)$ égal au plus petit élément de l'ensemble F.

Considérons un élément $n \in E - \{0\}$ et $F = \{m \in E / \ m < n\}$. D'après ce qui précède F n'est pas vide (car $0 \in F$) et est majorée (par n). On appelle prédécesseur de n l'élément noté $p(n)$ égal au plus grand élément de l'ensemble F.

Propriété.— *a) Pour tout $n \in E$ on a $s(n) > n$ et pour tout $m \in E$ on a $m > n \Longleftrightarrow m \geq s(n)$.*

b) Pour tout $n \in E - \{0\}$ on a $p(n) < n$ et pour tout $m \in E$ on a $m < n \Longleftrightarrow m \leq p(n)$.

c) La fonction s est strictement croissante et la fonction p est strictement décroissante.

d) Pour tout $n \in E - \{0\}$ on a $s \circ p(n) = n$.

Preuve : a,b,c) Exercices.

d) On a $p(n) < n$, donc $s(p(n)) \leq n$. Posons $m = s(p(n))$ et supposons que $m < n$, on a donc $m \leq p(n)$ mais comme $m = s(p(n))$ on a $m > p(n)$ ce qui est absurde. Ainsi $m = n$. □

Théorème.— (appelé principe de récurrence) *Soit A une partie de E. Si A vérifie*

- $0 \in A$.
- $\forall n \in E, \ n \in A \Longrightarrow s(n) \in A$.

alors $A = E$.

Preuve : Raisonnons par l'absurde en supposant que $A \neq E$. On considère alors l'ensemble $F = E - A$ qui est donc non vide. Soit n_0 le plus petit élément de F. On a $n_0 \neq 0$ (car $0 \notin F$) et donc n_0 a un prédécesseur m_0. Comme $n_0 > p(n_0) = m_0$ et que n_0 est le plus petit élément de A on a $m_0 \notin F$, donc $m_0 \in A$ et par suite $n_0 = s(m_0) \in A$ ce qui est absurde. □

Théorème.— *L'application s est une bijection de E sur $E - \{0\}$. Son application réciproque est la fonction p*

Preuve : • Prouvons que s est bien à valeur dans $E - \{0\}$. Supposons qu'il existe $n \in E$ tel que $s(n) = 0$, on a donc $0 > n$ ce qui est en contradiction avec le fait que 0 est le plus petit élément de E.

• Montrons l'injectivité de s. Soit $n, m \in E$ tels que $s(n) = s(m)$. Comme $\leq$ est un ordre total, les éléments n et m sont comparables (disons, par exemple, que $n \leq m$). Si $n < m$ on a donc $m \geq s(n)$ mais comme $s(m) > m$ on en déduit que $s(m) > s(n)$ ce qui est absurde, donc $n = m$.

• Montrons la surjectivité de s. Considérons l'ensemble $A = s(E) \cup \{0\}$. Par hypothèse, on a $0 \in A$. Si maintenant on prend $n \in A$ alors $n \in E$ et donc $s(n) \in s(E) \subset A$. Ainsi, par le principe de réccurence on en déduit que $A = E$ et donc que $s(E) = E - \{0\}$. □

Théorème.— *Un ensemble non vide ordonné $(E, \leq)$ vérifie les axiomes S.0,1,2,3. si et seulement si l'ensemble E vérifie les axiomes (dits de Peano) suivants :*

P.0. *il existe un élément $0 \in E$ et une application $s : E \to E$.*

P.1. *L'application s est injective et à valeurs dans $E - \{0\}$.*

P.2. *Toute partie A de E vérifiant $0 \in A$ et $s(A) \subset A$ est égale à E.*

Preuve : $S.0, 1, 2, 3. \Longrightarrow P.0, 1, 2.$ est clair, la fonction s à considérer étant la fonction successeur. La réciproque est admise. Un des ingrédients de la preuve consiste dans le fait que l'ordre $\leq$ que l'on recherche sur E se définit de manière non-équivoque par les deux propriétés suivantes : 1/ $\forall x \in E$, $0 \leq x$. 2/ $\forall x, y \in E$, $x \leq y \Longleftrightarrow s(x) \leq s(y)$. □

Théorème.— *Soient $(E, \leq)$ et $(E', \leq')$ deux ensembles ordonné vérifiant les axiomes S.0,1,2,3. Il existe une unique bijection croissante de E sur E'.*

Preuve : Notons 0 (resp. $0'$) le plus petit élément de E (resp. de E').

• Unicité. Soient f et g deux bijections croissantes de E sur E'. L'application $g^{-1} \circ f$ est donc une bijection croissante de E dans lui-même. Une telle application est nécessairement égale à l'identité (exercice).

• Existence. Admise. □

En conclusion, tous les ensembles ordonnés vérifiant les axiomes S.0,1,2,3. sont isomorphes en tant qu'ensembles ordonnés, leurs propriétés pour cette structures sont donc les mêmes. Dans la suite on choisira $\mathbb{N}$ un tel ensemble (l'existence d'un tel ensemble est consécutive d'axiomes de la théorie des ensembles). On l'appelera "ensemble des entiers naturels".

5.1.2 Arithmétique sur $\mathbb{N}$

Addition.

Théorème.— *Sur $\mathbb{N}$ il existe une unique loi de composition interne $+$ appelée addition telle que :*

1/ $\forall x \in \mathbb{N}$, $0 + x = x + 0 = x$.

2/ $\forall x, y \in \mathbb{N}$, $x + s(y) = s(x + y)$.

Preuve : Admise. □

Proposition.— *Le magma $(\mathbb{N}, +)$ est associatif, commutatif et unitaire. Le seul élément symétrisable de $\mathbb{N}$ est 0.*

Preuve : □

Théorème.— *Soient $x, y \in \mathbb{N}$. Les propriétés suivantes* *i) $x \leq y$,*

ii) il existe $k \in \mathbb{N}$, $y = x + k$,

sont équivalentes. En particulier, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x = y + k$ ou $y = x + k$.

Preuve : □

Multiplication

Dans la suite on notera $1 = s(0)$.

Théorème.— *Sur $\mathbb{N}$ il existe une unique loi de composition interne . appelée multiplication telle que :*

1/ $\forall x \in \mathbb{N}$, $0.x = x.0 = 0$.

2/ $\forall x, y \in \mathbb{N}$, $x.s(y) = (x.y) + x$.

Preuve : Admise. □

Proposition.— *Le magma $(\mathbb{N}, .)$ est associatif, commutatif et unitaire. La multiplication est distributive sur l'addition.*

Preuve : □

Exercices : 1/ Montrer que toute partie majorée de $\mathbb{N}$ est finie (procéder par récurrence sur le majorant). En déduire que toute suite décroissante d'entier est stationnaire.

2/ Soit $x, y, z \in \mathbb{N}$. Montrer que si $x \leq y$ alors $x + z \leq y + z$ et que $xz \leq yz$. Que devient cette propriété si l'on remplace $\leq$ par $<$?

Théorème 137.— (Principe de récurrence) *Soit $A \subset \mathbb{N}$ telle que :*

- $0 \in A$,
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \in A \Rightarrow n + 1 \in A$.

Alors $A = \mathbb{N}$.

Corollaire 138.— (Démonstration par récurrence) *Soit $\mathscr{P}_n$ une famille de propositions indexées par $\mathbb{N}$. Si :*

- *$\mathscr{P}_0$ est vraie,*
- *$\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$ vraie $\Rightarrow \mathscr{P}_{n+1}$ vraie.*

Alors $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemples • $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{p=0}^{n} p = \frac{p(p+1)}{2}$.

• Paradoxe de Tarski : *Si dans une population de n personnes il y a au moins une femme, alors il n'y a que des femmes.*

5.1.3 Ensembles finis

Définition 139.— *On dit qu'un ensemble non vide E est fini, s'il existe un entier $n \geq 1$ et une bijection de E sur $\{1, \cdots, n\}$. L'entier n s'appelle alors le cardinal de E et se note au choix, $card(E)$, $\sharp E$ ou $|E|$.*

On décrète que $\emptyset$ est un ensemble fini et que son cardinal est 0.

Théorème 140.— *Un ensemble fini possède un unique cardinal.*

Proposition 141.— *Soit E et F deux ensembles finis. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

i) $\sharp E = \sharp F$,

ii) Il existe une bijection de E sur F.

Proposition 142.— *Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal et $f : E \to F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

i) f est bijective,

ii) f est injective,

iii) f est surjective.

5.1.4 Analyse combinatoire

Proposition 143.— *Soit E et F deux ensembles finis. Alors $E \cup F$ et $E \cap F$ sont finis et*

$$\sharp(E \cup F) = \sharp E + \sharp F - \sharp(E \cap F)$$

Proposition 144.— *Soit E et F deux ensembles finis. L'ensemble $\mathscr{F}(E,F)$ est fini et*

$$\sharp\mathscr{F}(E,F) = (\sharp F)^{\sharp E}$$

Notation: C'est pourquoi, on note plus souvent F^E au lieu de $\mathscr{F}(E,F)$.

Proposition 145.— *Soit E et F deux ensembles de cardinal respectif p et n. Le sous-ensemble de $\mathscr{F}(E,F)$ constitué des applications injectives à un cardinal qui vaut :*

- 0 *si* $p > n$,
- $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ *si* $p \leq n$.

Notation: On note A_n^p ce cardinal, c'est le nombre d'"arrangements" de p éléments dans un ensemble à n éléments.

Proposition 146.— *Soit E un ensemble de cardinal n. Le sous-ensemble de $\mathscr{P}(E)$ constitué des sous-ensemble de de E de cardinal p est un ensemble fini de cardinal :*

- 0 *si* $p > n$,
- $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ *si* $p \leq n$.

Notation: On note C_n^p ce cardinal, c'est le nombre de "combinaisons" de p éléments dans un ensemble à n éléments.

Théorème 147.— (Formule du binôme de Newton) *Soit $(A,+,.)$ un anneau commutatif, $a, b \in A$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :*

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}$$

Principe des nids de pigeons: Soit n pigeons dans p nids. Si $n > p$, alors il existe un nid contenant au moins 2 pigeons.

Généralisation : Soit n pigeons dans p nids. Si $n > pk$ (pour un entier $k \neq 0$ donné), alors il existe un nid contenant au moins $k+1$ pigeons.

Interprétation *Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles finis vérifiant $\sharp E > \sharp F$. Il existe un élément $y \in F$ tel que $\sharp f^{-1}(\{y\}) \geq 2$.*

Exercice 148.—

1.— Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} C_n^p$.

b) $\displaystyle\sum_{p=0}^{E(n/2)} C_n^{2p}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{E(n/2)-1} C_n^{2p+1}$.

c) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} pC_n^p$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{E(n/2)} p^2 C_n^{2p}$.

2.— Montrer que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\left(C_n^p\right)^2 = C_{2n}^n$.

3.— Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note N_n le nombre de ralations d'équivalence sur un ensemble à n éléments. Trouver une relation de récurrence liant $N_1, \cdots, N_n$. En déduire la valeur de N_n pour $n = 1, \cdots, 10$.

4.— Soit E un ensemble fini de cardinal n.

a) Calculer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que $X \subset Y$.

b) Calculer $S = \displaystyle\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} \sharp(X \cap Y)$ et $T = \displaystyle\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} \sharp(X \cup Y)$.

5.— Soit $n \geq 2$ un entier $A_1, \cdots, A_n$ des ensembles. Pour tout $i = 1, \cdots, n$, on pose :

$$\sigma_i^n(A_1, \cdots, A_n) = \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_i\leq n} \sharp\left(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_i}\right)$$

a) Montrer que si A_{n+1} désigne un autre ensemble fini, alors pour tout $n \geq 2$ et tout $i = 2, \cdots, n$, on a :

$$\sigma_i^n(A_1, \cdots, A_n) + \sigma_{i-1}^n(A_1 \cap A_{n+1}, \cdots, A_n \cap A_{n+1}) = \sigma_i^{n+1}(A_1, \cdots, A_{n+1})$$

b) En déduire que

$$\sharp\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\sigma_i^n(A_1, \cdots, A_n)$$

6.— Soit E un ensemble. A toute partie $A \subset E$ on associe la fonction

$$\mathbf{1}_A : E \to \{0, 1\}$$

dite "fonction caractéristique" de A, définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A(x) \quad &= 1 \quad si\ x \in A \\ &= 0 \quad si\ x \notin A \end{aligned}$$

a) Montrer que l'application $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \{0, 1\}^E$ qui à une partie A de E associe $\mathbf{1}_A$ est une bijection.

b) Déduire de la question précédente que si E est un ensemble fini de cardinal n alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini de cardinal 2^n.

c) Redémontrer ce résultat en utilisant une récurrence, puis redémontrer-le en untilisant la formule du binôme de Newton.

5.2 Ensembles infinis

5.2.1 Cardinalité

Définition 149.— *On dit qu'un ensemble E est infini, s'il n'est pas fini. Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont équipotent s'il existe une bijection entre ces deux ensembles. On dit alors qu'ils ont même cardinal et l'on note $\sharp E = \sharp F$.*

S'il existe une injection de E dans F, on note $\sharp E \leq \sharp F$ et s'il existe une surjection de E dans F, on note $\sharp E \geq \sharp F$.

Proposition 150.— *Soit E et F deux ensembles.*

- *si $\sharp E \leq \sharp F$ et si E est infini alors F est infini.*
- *si $\sharp E \leq \sharp F$ et $\sharp F \leq \sharp E$ alors $\sharp E = \sharp F$.*
- *si $\sharp E \leq \sharp F$ alors $\sharp F \geq \sharp E$*

La réciproque de la dernière propriété n'est pas décidable. En fait, elle dépend de l'axiome suivant :

Axiome du choix. Soit E un ensemble non vide. Il existe une fonction (dite fonction de choix sur E) $f : \mathscr{P}(E) \to E$ vérifiant :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A \neq \emptyset \Rightarrow f(A) \in A$$

On a alors :

Théorème 151.— *L'axiome du choix équivaut à la propriété suivantes : si E et F sont des ensembles tels que $\sharp E \geq \sharp F$, alors $\sharp F \leq \sharp E$.*

Théorème 152.— (Cantor) *Soit E un ensemble. Les ensembles E et $\mathscr{P}(E)$ ne sont jamais équipotents.*

Exercices 153.—

1.— Soient I un ensemble et $(E_i)_I$ une famille d'ensemble indexés par I. On appelle produit cartésien des ensembles E_i l'ensemble, noté $\prod_i E_i$, des applications f de I dans $\bigcup_i E_i$ vérifiant:

$$\forall i \in I,\ f(i) \in E_i$$

Si f est un élément de $\prod_i E_i$, on note plus volontiers $f = (x_i)_i$ avec $x_i = f(i) \in E_i$.

a) Montrer que l'axiome du choix équivaut à la propriété suivantes : pour toute famille non vide $(E_i)_i$ d'ensembles non vide, $\prod_i E_i$ est non vide.

b) En acceptant l'axiome du choix, montrer que si $(E_i)_i$ et $(F_i)_i$ sont deux familles d'ensembles indexées par I telles que pour tout $i \in I$, il existe une injection

$$\theta_i : E_i \longrightarrow F_i$$

alors il existe une injection

$$\theta : \prod_i E_i \longrightarrow \prod_i F_i$$

(Ind. On utilisera le lemme de Zorn)

c) En déduire (toujours sous l'axiome du choix) que si I est infini et si $\sharp E_i \geq 2$ pour tout $i \in I$, alors $\prod_i E_i$ n'est pas dénombrable.

2.— Montrer que les énoncés suivants

i) Soit E un ensemble non vide. Il existe une fonction (dite fonction de choix sur E) $f : \mathscr{P}(E) \to E$ vérifiant :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A \neq \emptyset \Rightarrow f(A) \in A$$

ii) Soit $s : E \to F$ une surjection entre deux ensembles. Il existe une injection $i : F \to E$ telle que $s \circ i = \mathrm{Id}_F$,

iii) Soit $(E_i)_i$ un famille d'ensembles tous non vides. Le produit cartésien $\prod_i E_i$ est non vide,

iv) Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence. Il existe une classe de représentant de $E/\mathcal{R}$ (i.e. Une famille d'éléments $(x_i)_i$ de E telle que si $i \neq j$, $\overline{x_i} \neq \overline{x_j}$ et $\bigcup_i \{\overline{x_i}\} = E/\mathcal{R}$),

sont équivalents.

3.— Montrer, en utilisant des propriétés sur les cardinaux, que la collection de tous les ensembles n'est pas un ensemble.

4.— (On accepte dans cet exercice l'axiome du choix.) En utilisant l'exercice précédent, montrer que si X, Y, Z sont trois ensembles non vides et $f : X \to Y$ et $h : X \to Z$ sont deux applications, alors les énoncés suivants

i) $\forall x, x^{'} \in X,\ f(x) = f(x^{'}) \Rightarrow g(x) = g(x^{'})$,

ii) il existe une application $g : Y \to Z$ telle que $h = g \circ f$.

sont équivalents. Prouver, dans ces conditions, que si f est surjective, alors g est unique.

5.2.2 Ensembles dénombrables

Proposition 154.— *Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est équipotente à $\mathbb{N}$.*

Définition 155.— *Un ensemble E est dit dénombrable s'il est fini ou équipotent à $\mathbb{N}$ (ce qui revient à dire qu'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$).*

Exemples 156.— • $\mathbb{N}$ est dénombrable.

• $\mathbb{Z}$ est dénombrable. L'application $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ qui à $n \geq 0$ associe $2n$ et à $n < 0$ associe $-2n - 1$, est bijective.

• $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable. L'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui à (a, b) associe $2^a 3^b$ est injective. De manière générale, $\mathbb{N}^n$ est dénombrable. L'application $f : \mathbb{N}^n$ qui à $(a_1, \cdots, a_n)$ associe $2^{a_1} 3^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$ (où $(p_k)_k$ désigne la suite des nombres premiers) est injective.

• $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Si $r \in \mathbb{Q}$, il existe un unique couple d'entiers (p, q) avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ tel que $r = p/q$. Si on pose $f(r) = (\varphi(p), q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, alors f est une application injective.

Proposition 157.— *Si A et B sont deux ensembles dénombrables, alors $A \times B$ l'est aussi*

Proposition 158.— *Si $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'ensembles dénombrables, $\bigcup_n E_n$ est dénombrable.*

Proposition 159.— *$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.*

Exercices 160.—

1.— Montrer qu'un ensemble E est infini si et seulement si il existe une application $f : E \to E$ qui est injective et non bijective.

2.— On considère $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$ le sous-ensemble de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ constitué des parties finies. Montrer que cet ensemble est dénombrable.

3.— Montrer que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.

4.— Soit E et F deux ensembles. Montrer que les ensembles $\mathscr{P}(E \times F)$, $[\mathscr{P}(E)]^F$ et $[\mathscr{P}(F)]^E$ sont équipotents.

5.— Si A et E sont deux ensembles, on note $A^E = \mathscr{F}(E, A)$.

a) Montrer que si A et B sont deux ensembles équipotents alors A^E et B^E le sont également.

b) Montrer que $(A^E)^E$ est équipotent à $A^{E \times E}$.

c) En déduire que $[\mathscr{P}(E)]^E$ et $\{0, 1\}^{E^2}$ sont équipotents.