Exercices sur les séries de fonctions

Université d'Eleuthéria-Polites
République de Poldévie

Licence 2

Bruno Deschamps

Version 1.1

Suites de fonctions

Etude de suites explicites

Exercice 1.— Pour $p \geq 1$ et $x > 0$, on pose

$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}}$$

Etudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_p)_p$.

Exercice 2.— Sur quels intervalles y-a-t-il convergence uniforme pour la suite $(f_n)_n$ lorsque :

a) $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

b) $f_n(x) = 4^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}})$ pour $x \in [0,1]$.

Exercice 3.— Etudier sur $[0,+\infty[$ la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_n$ définie par

$$u_n(x) = x^n \ln x$$

Exercice 4.— Etudier sur $[0,1]$ la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_n$ définie par

$$u_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$$

Exercice 5.— Pour $n \geq 0$ et $x \in [0,+\infty[$, on pose $u_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$.

a) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(u_n)_n$ sur $[a,+\infty[$ pour $a > 0$.

b) Même question sur $[0,+\infty[$.

Exercice 6.— Pour $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$.

a) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(u_n)_n$ sur $]-\infty,a] \cup [a,+\infty[$ pour $a > 0$.

b) Même question sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.— Pour $n \geq 0$ et $x \in [0,+\infty[$, on pose $u_n(x) = nx^2 e^{-nx}$.

a) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(u_n)_n$ sur $[a,+\infty[$ pour $a > 0$.

b) Même question sur $[0,+\infty[$.

Exercice 8.— Pour $n \geq 0$ et $x > 0$, on pose $u_n(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{nx}\right)$ et $u_n(0) = 0$.

a) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(u_n)_n$ sur $[-a,a]$ pour $a > 0$.

b) Même question sur $[0,+\infty[$.

Exercice 9.— Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{-n}$.

a) Etudier la limite simple de la suite $(f_n)_n$.

b) Montrer que, pour tout $x > 0$, la suite $(f_n(x))_n$ est strictement décroissante et en déduire que

$$f_n(x) > \lim_n f_n(x)$$

c) Après avoir montré que, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$$

justifier que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0,a]$ (avec $a > 0$).

d) Etablir qu'en fait, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Exercice 10.— Pour $x \in [0,\pi/2]$, on pose $f_n(x) = n\sin x \cos^n x$.

a) Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

b) Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(t)dt$. Y-a-t-il convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$?

c) Justifier qu'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans $]0,\pi/2]$.

Exercice 11.— Soit $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n^2x(1-nx)$ si $x \in [0,1/n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

a) Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$.

b) Calculer $\int_0^1 f_n(t)dt$. Y a-t-il convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$?

c) Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[a,1]$ avec $a > 0$.

Exercice 12.— Etudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_n$ données par $f_n(x) = \sin^n(x)\cos(x)$.

Exercice 13.— a) Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = x(1+n^\alpha e^{-nx})$ définies sur $\mathbb{R}^+$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \geq 0$, converge simplement vers une fonction f à déterminer.

b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.

c) Calculer $\lim_n \int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})dx$.

Propriétés et contre-exemples

Exercice 14.— Soit $(P_n)_n$ une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f. Montrer que f est nécessairement une fonction polynomiale.

Exercice 15.— Soient $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ deux suites de fonctions d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$, qui convergent uniformément vers des fonctions f et g supposées bornées. Montrer que la suite $(f_ng_n)_n$ converge uniformément vers la fonction fg.

Exercice 16.— Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$ est elle-même une fonction uniformément continue.

Exercice 17.— Etablir que la limite simple d'une suite de fonctions convexes d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$ est convexe.

Exercice 18.— Soient $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions décroissantes et continues telles que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que cette convergence est uniforme.

Exercice 19.— (Théorème de Dini) On considère une suite décroissante $(f_n)_n$ de fonctions continues d'un segment $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et qui converge vers la fonction nulle. On désire montrer que la convergence est en fait uniforme.

a) Justifier l'existence de $\lim_n \|f_n\|_\infty$.

b) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$.

c) En observant que pour tout $p \leq n$, $f_n(x_n) \leq f_p(x_n)$, montrer finalement que $\lim_n \|f_n\|_\infty = 0$.

Exercice 20.— Soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

Montrer que chaque f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ et que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f qui n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 21.— Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément mais pas la suite $(f_n^2)_n$.

Exercice 22.— (Théorème de Bernstein-Weierstrass) On se donne une application continue f :

$[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour $n \geq 1$, on définit le n-ème polynôme de Bernstein associé à f par la formule

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

1/ a) Justifier que, pour $n \geq 1$ fixé, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}[x] \\ f & \longmapsto & B_n(f) \end{array}$$

est $\mathbb{R}$-linéaire.

b) Calculer explicitement les polynômes $B_n(f)$ lorsque

- $f(x) = 1$,
- $f(x) = x$,
- $f(x) = x(x-1)$.

c) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k (k-nx)^2 x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x)$.

2/ On fixe $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tous $x, y \in [0,1]$, $|x-y| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$. On fixe un tel α dans la suite.

Pour $x \in [0,1]$ et $n \geq 1$, on considère les ensembles d'indices

$$A_{n,x} = \left\{ k = 0, \cdots, n / \left| x - \frac{k}{n} \right| \leq \alpha \right\} \text{ et } B_{n,x} = \left\{ k = 0, \cdots, n / \left| x - \frac{k}{n} \right| > \alpha \right\}$$

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k \in A_{n,x}} C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k \in B_{n,x}} C_n^k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\alpha^2 n}$.

c) Prouver alors que la suite $(B_n(f))_n$ converge uniformément vers f.

3/ En déduire le théorème de Weierstrass : *toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômes.*

4/ (Application) On considère une fonction continue sur un segment $[a,b]$. Montrer que, si pour tout $n \geq 0$, $\displaystyle\int_a^b t^n f(t)dt = 0$ alors $f \equiv 0$.

Exercices généraux

Exercice 23.— Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et de dérivée seconde bornée. Montrer que la suite des fonctions $(g_n)_n$ où

$$g_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$$

converge uniformément vers f'.

Exercice 24.— Soit $f(x) = 2x(1-x)$ pour $x \in [0,1]$. Etudier la convergence de la suite $(f_n)_n$ où f_n est l'itérée n-ième de la fonction f.

Exercice 25.— Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par, $f_0(x) = x$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$f_{n+1}(x) = \frac{x}{2 + f_n(x)}$$

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 26.— On définit la suite de fonctions $(u_n)_n$ de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ par $u_0(x) = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t - t^2)dt$$

a) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

b) En déduire que pour $n, p \geq 0$, $\|u_{n+p} - u_n\|_\infty \leq \displaystyle\sum_{k \geq n+1} \frac{1}{k!}$.

c) Etablir que pour tout $x \in [0,1]$, la suite numérique $(u_n(x))_n$ est de Cauchy.

d) Etablir que la suite $(u_n)_n$ converge uniformément vers une fonction u non nulle vérifiant $u'(x) = u(x - x^2)$.

Exercice 27.— On note E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continues. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}dt$$

On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par $f_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $f_{n+1} = \Phi(f_n)$.

a) Etudier la suite $(f_n)_n$.

b) Si l'on note $f = \lim_n f_n$, trouver une équation différentielle dont f est solution. Y a-t-il unicité de la solution nulle en 0 ?

Séries de fonctions

Exercices élémentaires

Exercice 28.— (convergences) Etudier les convergences simple et normale des séries de fonctions suivantes :

a) $\displaystyle\sum \frac{x^n}{1+x^n}$ sur $[0,+\infty[$, puis sur $[0,1]$, puis sur $[0,a]$ avec $0 < a < 1$.

b) $\displaystyle\sum \frac{x^2}{n^3+x^3}$ sur $[0,+\infty[$ puis sur $[0,a]$ avec $0 < a < 1$;

c) $\displaystyle\sum \frac{x}{n^3+x^3}$ sur $[0,+\infty[$.

d) $\sum x^{2n}$ sur $[0,1]$, puis sur $[0,a]$ avec $0 < a < 1$. Etudier aussi sa convergence uniforme.

Exercice 29.— On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{x^2}{x^4+n}$.

a) Etudier la convergence simple de cette série de fonctions sur $\mathbb{R}$.

b) En utilisant le théorème des restes des séries alternées, montrer que la convergence est aussi uniforme.

c) Prouver finalement que la série ne converge normalement sur aucune partie de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 30.— (continuité) Montrer que les fonctions suivantes sont définies et continues :

a) $f(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2+\sin(nx)}$ sur $\mathbb{R}$; b) $g(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ sur $\mathbb{R}$; c) $h(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{nx+1}$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 31.— (dérivabilité) Montrer que les fonctions suivantes sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \sum_{n\geq 0} e^{-n}\sin(n^2x)$; b) $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^3}$; c) $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+x^2}$.

Exercice 32.— (dérivabilité) Prouver que la série de fonction $\sum \frac{(-1)^n}{(n+x)}$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. On note $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+x)}$. Montrer que f est dérivable et que, pour tout $x>0$, on a

$$f'(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$$

Exercice 33.— (intégration) Montrer que la série de fonction $\sum x^n$ converge normalement sur $I=[0,1/a]$ pour $a>1$. En déduire que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{na^n} = \ln\left(\frac{a}{a-1}\right)$.

Etude de séries explicites

Exercice 34.— Sur $[0,+\infty[$, on considère la série de fonctions de terme général $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.

a) Montrer que $\sum u_n$ converge simplement.

b) Prouver que $\sum u_n$ converge normalement sur tout segment inclus dans $[0,+\infty[$ et en déduire que $S(x) = \sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est une fonction continue.

c) Vérifier que, pour $n\geq 1$, on a

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2+n^2} \geq \frac{1}{5}$$

et en déduire que $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.

d) En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer $\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice 35.— Pour $x\in[0,1]$, $a\in\mathbb{R}$ et $n\geq 1$, on pose $u_n(x) = n^a x^n(1-x)$.

a) Etudier la convergence simple sur I de la série $\sum u_n$. On notera dans la suite S la somme de la série.

b) Etudier la convergence normale.

c) On suppose dans cette question que $a=0$. Calculer S sur $[0,1[$. En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

d) On suppose $a>0$. Démontrer que la convergence n'est pas uniforme sur I.

Exercice 36.— Etudier la convergence simple et normale de la série de fonctions de terme général $u_n(x) = nx^2e^{-x\sqrt{n}}$. La série converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 37.— On considère la série de fonctions $\sum nxe^{-n^2x}$.

a) Montrer que cette série converge simplement vers une fonction S sur $\mathbb{R}^+$.

b) Etudier sa convergence normale puis uniforme sur $\mathbb{R}^+$. Même question sur les intervalles de la forme $[a,+\infty[$ avec $a>0$.

c) Montrer que S est continue sur $]0+\infty[$ mais pas en 0.

d) Montrer que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\simeq} xe^{-x}$ (premier terme de la série). En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.

e) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} S(x)$.

(On pourra encadrer les sommes partielles par des intégrales faisant intervenir la fonction $t \longmapsto xte^{-xt^2}$.)

Exercice 38.— Sur $]0,+\infty[$, on considère la série de fonctions $\sum \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$.

a) Montrer que cette série converge simplement vers une fonction S.

b) Montrer que la convergence est uniforme sur tout intervalle de la forme $[A,+\infty[$ avec $A>0$. En déduire que S est continue.

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.

d) Montrer que S est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et expliciter S'.

Exercice 39.— Trouver un équivalent simple en 0^+ de la fonction $f(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$.

Exercice 40.— On considère un paramètre $\alpha > 0$ et la série de fonctions $\sum x^{n^\alpha}$.

a) Montrer que cette série converge simplement vers une fonction S sur $[0,1[$ et que la convergence est normale sur tout segment de la forme $[0,a]$ avec $0<a<1$. En déduire que S est continue.

b) Donner un équivalent simple de S au voisinage gauche de 1 en fonction de α.

Exercice 41.— On se donne un réel $x \in]0,\pi[$ et l'on considère la série de fonctions (en la variable t) $\sum t^{p-1}\sin(px)$.

a) Montrer que cette série converge simplement sur $]-1,1[$ vers une fraction rationnelle S que l'on déterminera. Montrer que S est en fait définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

b) En calculant $\displaystyle\int_0^1 \sum_{p=1}^{n} t^{p-1}\sin(px)dt$ et en utilisant le théorème de convergence dominé, montrer que la série $\sum \dfrac{\sin(px)}{p}$ converge et que

$$\sum_{p\geq 1} \frac{\sin(px)}{p} = \frac{\pi - x}{2}$$

c) En exploitant la même stratégie, calculer $\sum\limits_{p\geq 1} (-1)^p \dfrac{\sin(px)}{p}$.

Exercice 42.— Etudier la convergence simple et uniforme de la série de fonctions

$$\sum (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$$

puis la continuité de sa somme S. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \ln\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$.

Exercice 43.— Justifier l'existence sur $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ de $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sum\limits_{n\geq 1}\left(\dfrac{1}{x-n} + \dfrac{1}{x+n}\right)$.

1/ Montrer que f est impaire, 1-périodique et qu'elle vérifie les équations fonctionnelles

$$f(1-x) = -f(x) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$$

2/ On se restreint donc à l'intervalle $I =]0,1[$.

a) Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$ et expliciter $f^{(n)}$ grâce à une série.

b) En déduire que f est strictement décroissante et étudier la convexité de f.

c) Donner des équivalents simples de f au voisinages de 0^+ et de 1^-.

Exercice 44.— On considère la fonction $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

a) Montrer que S est définie et continue sur $I =]-1,+\infty[$.

b) Etudier la monotonie de S.

c) Calculer $S(x+1) - S(x)$.

d) Déterminer un équivalent simple de $S(x)$ en -1^+.

e) Etablir que, pour tout $n \geq 1$, $S(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et en déduire un équivalent simple de $S(x)$ en $+\infty$.

Exercice 45.— On considère la fonction $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{x}{n(1+nx^2)}$.

a) Montrer que S est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et que S est impaire.

b) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et donner une expression de S' sous forme de séries.

c) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a $S(x) = \dfrac{\pi^2}{6x} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

d) Prouver que S n'est pas dérivable en 0 mais que le graphe de S présente une tangente verticale en 0.

Exercice 46.— Montrer que, pour tout $x \in]0,\pi[$, on a

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\cos^n(x)\sin(nx)}{n} = -x$$

Exercices d'applications

Exercice 47.— Montrer que pour tout réel $a > 0$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^a} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{1+na}$.

Exercice 48.— (Fonction zêta de Riemann) Pour tout $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^x}$.

1/ a) En étudiant la convergence de la série sur $[A,+\infty[$ avec $A > 1$, montrer que ζ est bien définie.

b) Prouver que ζ est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ et expliciter $\zeta^{(n)}$ par une série. En déduire que ζ est une fonction convexe et décroissante.

c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\zeta(x) = 1$ et que $\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\simeq} \dfrac{1}{x-1}$.

2/ On considère la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1}\frac{dt}{t^x}\right)$.

a) Montrer que f est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

b) Que vaut $\zeta(x) - f(x)$ sur $]1,+\infty[$?

c) Prouver finalement qu'au voisinage de 1^+, on a $\zeta(x) = \dfrac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$ où γ désigne la constante d'Euler-Mascheroni.

3/ a) Etudier la fonction $\widetilde{\zeta}(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^x}$.

b) Trouver une équation fonctionnelle satisfaite par ζ et $\widetilde{\zeta}$ sur $]1,+\infty[$.

c) Déterminer $\lim_{x\to 0^+} \widetilde{\zeta}(x)$.

Indication. On pourra remarquer que $1 + 2\widetilde{\zeta}(x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n\left(\dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+1)^x}\right)$.

Exercice 49.— On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définies sur $[-1,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x^n \sin nx$$

1/ Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]-1,1[$.

2/ On considère $a \in]0,1[$.

a) Montrer que la série $\sum f_n'$ converge normalement sur $[-a,a]$.

b) En déduire que la fonction $f = \sum f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et que, sur cet intervalle,

$$f'(x) = \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{1 - 2x\cos x + x^2}$$

(Indication. On pourra remarquer que $x^n \sin nx = \mathscr{I}m((xe^{ix})^n)$.)

c) En déduire que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x\sin x}{1 - x\cos x}\right)$.

3/ On se place désormais sur le segment $[-1,1]$ et, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [-1,1]$, on pose

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k \sin kx$$

a) Montrer que, pour $n \geq 2$, on a $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{x^k \sin kx}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{A_k(x)}{k(k+1)} + \dfrac{A_n(x)}{n}$.

b) Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que sur $[-1,1]$ on ait $\|A_n\|_\infty \leq M$ pour tout $n \geq 1$.

c) En déduire que $\sum \dfrac{x^n \sin nx}{n}$ converge simplement sur $[-1,1]$ et que, pour tout $x \in [-1,1]$, on a

$$f(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{A_k(x)}{k(k+1)}$$

d) En étudiant la convergence normale de cette dernière série de fonctions, montrer que f est continue sur $[-1,1]$.

e) En déduire les valeurs de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin n}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \dfrac{\sin n}{n}$.

Exercice 50.— (Exemple de fonction continue nulle part dérivable) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\phi(x) = d(x,\mathbb{Z}) = \inf\{|x-k| / \ k \in \mathbb{Z}\}$$

et l'on considère la fonction

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x)$$

a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est 1-périodique.

b) Montrer que f n'est dérivable en aucun point.

Exercice 51.— On considère une fonction $\phi : [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ ($a > 0$) et l'on cherche des fonctions f continues en 0 telles que $f(0) = 0$ et vérifiant l'équation fonctionnelle

$$f(x) - f(x/2) = \phi(x)$$

pour tout $x \in [-a,a]$.

1/ Montrer que si f existe alors elle est unique.

2/ On suppose dans cette question que ϕ est continue et qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant $P(0) = 0$ et tel que $|\phi(x)| \leq |P(x)|$ pour tout $x \in [-a,a]$.

a) Montrer que la fonction $f(x) = \sum_{n\geq 0} \phi\left(\frac{x}{2^n}\right)$ est l'unique solution au problème.

b) Prouver que si ϕ est de classe $\mathscr{C}^p$, il en est de même de f.

c) Déterminer f lorsque ϕ est un polynôme et lorsque $f(x) = |x|^\alpha$ avec $\alpha > 0$.

Exercice 52.— En étudiant la série de fonction $\sum \frac{(-1)^n}{n!}(x\ln x)^n$ sur $[0,1]$, montrer que

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}$$

Séries entières

Rayon de convergence

Exercice 53.— Donner le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ lorsque

a) a_n est le n-ème chiffre de l'écriture décimale de $\sqrt{2}$.

b) a_n est le nombre de chiffre de l'écriture décimale de n.

c) a_n est une suite périodique.

d) $a_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$.

Exercice 54.— Déterminer le rayon de convergence des séries suivantes ($a > 0$):

1/ $\sum \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ 2/ $\sum \frac{n!}{2n!} z^n$ 3/ $\sum \frac{(1+i)^n}{n2^n} z^{3n}$ 4/ $\sum (2+in) z^n$ 5/ $\sum \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!} z^n$

6/ $\sum a^{\sqrt{n}} z^n$ 7/ $\sum (\ln n) z^n$ 8/ $\sum \sin\left(\frac{1}{2n}\right) z^n$ 9/ $\sum \frac{(-i)^n (n!)^n}{(2n+1)!} z^n$ 10/ $\sum \ln(1 + \sin 1/n) z^n$

Exercice 55.— On considère une suite complexe $(\lambda_n)_n$. Montrer que les séries entières $\sum \lambda_n z^n$ et $\sum \frac{n}{n^2+n-2} \lambda_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 56.— On considère un entier $p \geq 1$ fixé et une suite $(a_n)_n$ de complexes non nuls telle que $\lim_n \left|\frac{a_{n+p}}{a_n}\right| = \ell \in [0,+\infty]$. On cherche à déterminer le rayon de convergence R de la série entière

$S(z) = \sum_n a_n z^n$.

Pour tout $i = 0, \cdots, p-1$, on considère la série entière $S_i(z) = \sum_k a_{kp+i} z^{kp+i}$ dont on note R_i le rayon de convergence. Montrer que $R = R_0 = \cdots = R_{p-1}$ et déterminer alors R en fonction de ℓ et p.

Exercice 57.— On suppose que les séries entières $\sum a_{2n} z^n$ et $\sum a_{2n+1} z^n$ ont pour rayons de convergence respectifs $R > 0$ et $R' > 0$. Déterminer celui de $\sum a_n z^n$.

Exercice 58.— On considère une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence r.

a) Montrer que si $r > 0$ alors la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$. Que peut-on dire de r si $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence fini ?

b) Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{1+|a_n|} z^n$ a pour rayon de convergence $\max(1, r)$.

c) Quel est le rayon de convergence de la série $\sum |a_n|^\alpha z^n$ où α désigne un réel ?

d) Montrer que le rayon de convergence R de la série $\sum (a_0 + \cdots + a_n) z^n$ vérifie

$$\inf(1, r) \leq R \leq r$$

Exercice 59.— On considère deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs r_1 et r_2. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n b_n z^n$ vérifie $R \geq r_1 r_2$. A-t-on toujours égalité ?

Exercice 60.— Montrer que le rayon de convergence d'une série $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure de l'ensemble des réels $r \geq 0$ tels que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k r^k\right)_n$ soit bornée.

Comportement au bord

Exercice 61.— On considère la série entière $f(x) = \sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

1/ a) Quel est son rayon de convergence R de cette série ?

b) Y-a-t-il convergence de la série en $x = \pm R$?

2/ a) Montrer que $\ell = \lim_{x \to 1^-} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ existe et que, pour tout $N \geq 1$ et tout $x \in [0, 1[$, on a $\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \leq f(x) \leq \ell$.

b) En déduire que, pour tout $N \geq 1$, on a $N \sin\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \leq \ell$. Que vaut ℓ ?

3/ On considère la série entière $g(x) = \sum_{n \geq 2} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

a) Sur $]-R, R[$, exprimer la fonction $x \longmapsto (1-x) f(x)$ en fonction de g. En déduire que le rayon de convergence de g est également R.

b) Montrer que la série g converge normalement sur $[0, 1]$ (on pourra appliquer judicieusement l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\sin x$). Que vaut $g(1)$?

c) Montrer finalement qu'au voisinage de 1^-, on a $f(x) = o\left(\frac{1}{1-x}\right)$

Exercice 62.— (Théorèmes taubériens) On considère une série entière réelle $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon 1 et telle que $\lim_{x\to 1^-} = \ell \in \mathbb{R}$.

1/ Montrer que, si $a_n \geq 0$ pour tout n, alors la série $\sum a_n$ converge et $\sum_{n\geq 0} a_n = \ell$.

2/ On suppose dans cette partie que $a_n = o(1/n)$. Pour $N \geq 1$ et $x \in [0,1[$, on note $A(x) = S(x) - \ell$, $B_N(x) = \sum_{n=0}^{N}(1-x^n)a_n$ et $C_N(x) = \sum_{n\geq N+1} a_n x^n$.

a) Vérifier que $\sum_{n=0}^{N} a_n - \ell = A(x) + B_N(x) - C_N(x)$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un indice N_0 tel que, pour tout $N \geq N_0$,

$$|C_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{N(1-x)}$$

c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un indice N_1 tel que, pour tout $N \geq N_1$,

$$|B_N(x)| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{N_1} n|a_n| + \varepsilon N(1-x)$$

d) Montrer finalement que la série $\sum a_n$ converge et que $\sum_{n\geq 0} a_n = \ell$.

Exercice 63.— On considère deux suites de réels strictement positifs $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$. On fait les hypothèses suivantes :

- La série entière $B = \sum b_n x^n$ a un rayon de convergence 1.
- La série numérique $\sum a_n$ diverge.
- $\lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in \mathbb{R}$.

1/ Montrer que la série entière $A = \sum a_n x^n$ a un rayon de convergence 1.

2/ Prouver que $\lim_{x\to 1^-} \frac{A(x)}{B(x)} = \lambda$.

3/ (Applications)

a) Trouver un équivalent simple au voisinage de 1^- de $\sum_{n\geq 1} \ln n x^n$.

b) Déterminer $\lim_{x\to 1^-} (1-x)^p \sum_{n\geq 0} n^{p-1} x^n$ où p est un entier naturel non nul.

Exercice 64.— Donner un équivalent en 1^- de la série entière $\sum x^{n^2}$.

Développement en séries entières

Exercice 65.— Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes :

1/ $z \longmapsto \dfrac{-1}{(z+1)^2}$ 2/ $z \longmapsto \dfrac{2}{(z+1)^3}$ 3/ $z \longmapsto \dfrac{1}{1+z+z^2+z^3+z^4}$ 4/ $z \longmapsto \dfrac{e^z}{1-z}$

5/ $x \longmapsto (x+\sqrt{1+x^2})^\alpha$ 6/ $x \longmapsto (\arcsin x)^2$ 7/ $x \longmapsto \ln(1+x-2x^2)$ 8/ $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

Exercice 66.— Que penser du développement en 0 d'une fonction d.e.s.e paire (resp. impaire) ?

Exercice 67.— (Développement de la fonction tan)

a) Pour $n \geq$, exprimer sur $[0, \pi/2[$ la fonction $\tan^{(n)}$ en fonction des fonctions $\tan, \cdots, \tan^{(n-1)}$. En déduire que $\tan^{(n)} \geq 0$ sur $[0, \pi/2[$.

b) Montrer que la série de Taylor f de tan en 0 converge sur $[-\pi/2, \pi/2[$.

c) Montrer que $f' = 1 + f^2$ et en déduire que $f = \tan$.

d) Prouver que le rayon de convergence de f est $\pi/2$.

Exercice 68.— Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-1/x^2} \text{ si } x \neq 0 \\ &= 0 \text{ si } x = 0 \end{aligned}$$

est $\mathcal{C}^\infty$ mais n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 69.— On considère la fonction de la variable réelle

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} e^{-n} e^{in^2 x}$$

Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ mais qu'elle n'est pas développable en série entière en 0.
(On pourra montrer que, pour tout $k \geq 1$, on a $|f^{(k)}(0)| \geq k!.k^k e^{-k}$.)

Exercice 70.— On considère une fonction $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ (avec $a > 0$) de classe $\mathscr{C}^\infty$ telle que les dérivées successives de f soient toutes positives.

a) Montrer que, pour tout $x \in [-a, a]$ et tout $n \geq 0$, on a

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \cdots + x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + R_n(x)$$

où $R_n(x) = x^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)du$.

b) Prouver alors que, pour tout $x \in]-a, a[$, on a $|R_n(x)| \leq \left|\dfrac{x}{a}\right|^{n+1} R_n(a) \leq \left|\dfrac{x}{a}\right|^{n+1} f(a)$.

c) En déduire que f est développable en série entière en 0.

Exercice 71.— (Théorème de réalisation de Borel)

A/ On se donne $0 < a < b$ deux réels et l'on va construire une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et qui vérifie $f_{|[-a,a]} \equiv 1$ et $f_{|\mathbb{R}-[-b,b]} \equiv 0$.

a) En utilisant la fonction de l'exercice 67, construire une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ et qui vérifie $f(x) > 0$ pour $x \in]a, b[$ et $f(x) = 0$ pour $x \notin]a, b[$.

b) Pour une fonction ψ vérifiant les propriétés du a), on considère la fonction φ définie par

$$\varphi(x) = \frac{\displaystyle\int_{|x|}^{+\infty} \psi(t)dt}{\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(t)dt}$$

Montrer que la fonction φ a les propriétés que l'on recherche dans cette question A/.

B/ On considère une suite de complexes $(a_n)_n$ et l'on va construire une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ et qui vérifie $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ pour tout $n \geq 0$.

Pour cela, on considère une fonction φ qui vérifie les propriétés de la partie A/ et, pour tout $n \geq 0$, on considère la fonction $\varphi_n(x) = x^n \varphi(x)$.

a) Montrer que φ_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et prouver que $M_n = \max(\|\varphi_n\|_\infty, \|\varphi_n'\|_\infty, \cdots, \|\varphi_n^{(n)}\|_\infty) \neq +\infty$.

b) Calculer $\varphi_n^{(p)}(0)$ pour tout $p \geq 0$.

c) Montrer qu'il existe une suite $(\lambda_n)_n$ de réels strictement positifs telle que $\lim_n \lambda_n = +\infty$ et elle que la série $\sum \dfrac{|a_n| M_n}{\lambda_n}$ converge.

On considère alors la fonction $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \varphi(\lambda_n x)$.

d) Montrer que f a les propriétés que l'on recherche dans cette question B/.

Calculs de sommes

Exercice 72.— Pour les séries entières S suivantes, calculer le rayon de convergence R de S, une expression simple de S sur $]-R, R[$ de la fonction associée et, quand cela à un sens la valeur de la série numérique associée à $S(\pm R)$:

1/ $\sum \dfrac{n-1}{n!} x^n$ 2/ $\sum \dfrac{n+2}{n+1} x^n$ 3/ $\sum \dfrac{n^2-n-2}{n!} x^n$ 4/ $\sum \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n}$

5/ $\sum \dfrac{x^n}{4n^2-1}$ 6/ $\sum \dfrac{x^{2n}}{2n+1}$ 7/ $\sum \dfrac{n^3}{n!} x^n$ 8/ $\sum (-1)^{n+1} n x^{2n+1}$

9/ $\sum \dfrac{x^{2n}}{4n^2-1}$ 10/ $\sum H_n x^n$ où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$

Exercice 73.— On fixe un entier $p \geq 1$ et l'on considère le complexe $\xi_p = e^{\frac{2i\pi}{p}}$ et le polynôme $P(t) = 1 + t + \cdots + t^{p-1}$.

a) Calculer $P(\xi_p^k)$ pour tout entier $k \geq 0$.

b) En déduire une expression simple de $S(x) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{x^{pn}}{(pn)!}$.

Exercice 74.— On considère la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n+(-1)^n}$.

a) Déterminer le rayon de convergence puis écrire la fonction somme sous la forme de fonctions usuelles.

b) Montrer la convergence puis calculer la valeur de $\sum_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

Exercice 75.— On considère un polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$. Déterminer le rayon de convergence ainsi que la somme de la série entière $\sum P(n) z^n$.

Séries génératrices

Exercice 76.— On considère les deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par, $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$, et, pour tout $n \geq 0$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

Etudier le rayon de convergence ainsi que la somme de la série entière $\sum u_n x^n$.

Exercice 77.— (Nombre de dérangements)

1/ On fixe un entier $n \geq 1$ et on "appelle" permutation tout bijection de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$ dans lui-même. On note S_n l'ensemble des permutations et, pour tout entier $0 \leq k \leq n$, on note $S_{n,k}$ l'ensemble des permutations ayant k-points fixes, c'est-à-dire

$$\sigma \in S_{n,k} \Longleftrightarrow \sharp\{i = 1, \cdots, n/\ \sigma(i) = i\} = k$$

et l'on pose $D_{n,k} = \sharp S_{n,k}$. Un "dérangement" est par définition un élément de $S_{n,0}$ et l'on note plus simplement $d_n = D_{n,0}$ le nombre de dérangements dans S_n. On convient que $d_0 = 1$.

Montrer que, pour $0 \leq k \leq n$, on a $D_{n,k} = C_n^k d_{n-k}$ et que l'on a aussi

$$n! = \sum_{k=0}^{n} D_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d_{n-k}$$

2/ On s'intéresse à la série entière $\sum \frac{d_n}{n!} x^n$.

a) Montrer que cette série a un rayon de convergence $R \geq 1$. Sur $]-1,1[$, on pose $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$.

b) Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a $e^x f(x) = \frac{1}{1-x}$.

3/ a) Déduire de ce qui précède que, pour tout $n \geq 0$, $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

b) Montrer que la suite $(d_n/n!)_n$ possède une limite finie non nulle. Que représente cette limite d'un point de vue "probabiliste" ?

Exercice 78.— (Nombre d'involutions) Une involution de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$ est une permutation σ vérifiant $\sigma \circ \sigma = Id$. On note I_n le nombre d'involutions et l'on convient que $I_0 = 1$.

a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$.

b) Montrer que la fonction $S(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ est définie sur $]-1,1[$ et que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a $S'(x) = (1+x)S(x)$.

c) En déduire une expression de $S(x)$, puis de I_n.

Exercice 79.— (Nombres de Catalan) On considère la suite $(a_n)_n$ définie par récurrence par $a_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. On note $S = \sum a_n z^n$ la série génératrice associée.

a) Montrer que S l'unique série entière qui vérifie l'équation $xS^2 - S + 1 = 0$ dans l'algèbre des séries entières $\mathbb{R}[[x]]$.

b) Chercher une fonction f, définie au voisinage de 0 et $\mathscr{C}^\infty$, qui vérifie l'équation fonctionnelle $xf(x)^2 - f(x) + 1 = 0$.

c) En déduire que S a pour rayon de convergence $1/4$ et exprimer simplement les valeurs des réels a_n.

Exercice 80.— (Série génératrice de Wallis) On considère la suite de Wallis $(W_n)_n$, où $W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$.

Montrer que la série entière $\sum W_n x^n$ a pour rayon de convergence 1 et exprimer $\sum_{n\geq 0} W_n x^n$ sur $]-1,1[$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 81.— (Nombre de solution d'une équation linéaire entière) On considère des entiers $a_1,\cdots,a_r>0$ et l'on note A_n le nombre de solutions $(x_1,\cdots,x_r)$ de l'équation

$$a_1x_1+\cdots+a_rx_r=n$$

formées de nombres entiers positifs.

a) Montrer que la série $\sum A_n z^n$ a un rayon de convergence ≥ 1 et que, pour tout $|z|<1$, on a

$$\sum_{n\geq 0} A_n z^n = \frac{1}{(1-z^{a_1})\cdots(1-z^{a_n})}$$

b) (Application) Montrer que le nombre de solutions (x,y,z) entières positives de l'équation $x+2y+3z=n$ est l'entier le plus voisin de $\dfrac{(n+3)^2}{12}$.

Exercice 82.— (Nombres de Bell et formule de Dobiński) Pour un entier $n\geq 1$, on note B_n le nombre de partitions de l'ensemble $\{1,\cdots,n\}$ autrement appelé n-ième nombre de Bell. On convient que $B_0=1$.

1/ a) Montrer que pour tout $n\geq 0$, $B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k$.

b) En déduire que, pour tout $n\geq 0$, $B_n\leq n!e^n$

2/ a) Montrer que la série entière $\sum \frac{B_n}{n!}x^n$ a un rayon de convergence infini.

b) Montrer que, pour tout $x\in[0,e^{-1}[$, on a $\sum_{n\geq 0}\frac{B_n}{n!}x^n=\exp(e^x-1)$.

3/ a) Montrer finalement la formule de Dobiński : pour tout $n\geq 0$, $B_n=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}$.

(Indication. On pourra remarquer que $e^{e^x}=\sum_{k\geq 0}\frac{e^{kx}}{k!}=\sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 0}\frac{k^n}{k!}\frac{x^n}{n!}$ et permuter les deux sommes infinies en utilisant le théorème de Fubini pour les séries doubles de réels positifs.)

b) Expliquer comment l'on peut obtenir la valeur de B_n à partir d'une certaine somme partielle dans la formule de Dobiński.

Résolution d'équations différentielles

Exercice 83.— Trouver l'unique série entière solution de l'équation différentielle

$$x(4-x)y'-(x+2)y=-2$$

et déterminer son rayon de convergence. En déduire la valeur de $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{C_{2n}^n}$.

Exercice 84.— Trouver l'unique solution de l'équation différentielle $y''+xy'+y=1$ qui vérifie $y(0)=y'(0)=0$.

Exercice 85.— On considère un paramètre $\lambda\in\mathbb{R}$ et, sur $]-1,1[$, la fonction $f(x)=\exp(\lambda\arcsin x)$.

a) Expliciter une équation différentielle linéaire du second ordre (E) vérifiée par f.

b) Chercher les séries entières solutions de (E).

c) En déduire que f est développable en série entière en 0 et donner son développement.

Zéros isolés

Exercice 86.— On considère $\mathscr{G}$ l'ensemble des séries entières de rayon de convergence non nul.

a) Montrer que $\mathscr{G}$ est une sous-$\mathbb{K}$-algèbre de $\mathbb{K}[[z]]$.

b) Prouver que $\mathscr{G}$ est un anneau intègre.

Exercice 87.— On considère deux séries entières f et g de rayons de convergence respectifs plus grand qu'un réel $R > 0$ donné.

a) Montrer que si, pour un réel $0 < r < R$, l'équation $f(z) = g(z)$ admet une infinité de solutions sur la boule fermée $B_f(0, r)$ alors $f = g$.

b) Donner un exemple où $f \neq g$ et l'équation $f(z) = g(z)$ admet une infinité de solutions sur la boule ouverte $B(0, R)$.

Fonctions analytiques

Holomorphie

Exercice 88.— Déterminer les domaines d'holomorphie des fonctions suivantes : $z \longmapsto |z|$, $z \longmapsto \mathscr{R}e(z)$ et $z \longmapsto \mathscr{I}m(z)$.

Exercice 89.— Soit f une fonction holomorphe sur $D(0,1)$. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rccc} g: & D(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & \overline{f(\overline{z})} \end{array}$$

est holomorphe.

Principes du maximum et du prolongement analytique

Exercice 90.— Etudier l'existence et l'unicité de fonctions analytiques définies au voisinage de 0 et vérifiant pour tout entier $n \geq 1$:

a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$, b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$, c) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2n}\right)$, d) $f\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-n}$, e) $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{2^n}$.

Exercice 91.— Soit f une fonction analytique sur un domaine D. Montrer que si $K \subset D$ est compact alors f ne possède qu'un nombre fini de zéros sur K. Donner un exemple où si l'on suppose juste K borné (resp. fermé), f possède une infinité de zéros sur K.

Exercice 92.— Soient $f, g : D \longrightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions analytiques sur un domaine D. Montrer que si $fg = 0$ sur D alors $f = 0$ ou $g = 0$ sur D.

Exercice 93.— 1/ Montrer que $z \longmapsto \mathscr{R}e(z)$ est une fonction qui n'est holomorphe en aucun point de $\mathbb{C}$.

2/ On considère une fonction analytique f sur un domaine D et la fonction $g : z \longmapsto \mathscr{R}e(f(z))$.

a) Montrer que la fonction g possède sur tout compact $K \subset D$, un maximum absolu.

b) Prouver que si g possède un maximum local sur D alors g est constante (on pourra étudier la fonction $\exp(f)$).

c) A-t-on le même résultat pour la fonction $z \longmapsto \mathscr{I}m(f(z))$?

Exercice 94.— On considère une fonction <u>continue</u> $f : \overline{D(0,1)} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui est analytique sur $D(0,1)$.

1/ On suppose que $f = 0$ sur $C(0,1)$.

a) Montrer que, sur $\overline{D(0,1)}$, f est bornée et atteint ses bornes.

b) En déduire que $f = 0$ sur $\overline{D(0,1)}$.

2/ On se donne deux réels $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$ et l'on suppose que $f(e^{i\theta}) = 0$ pour tout $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ (i.e. $f = 0$ sur l'arc du cercle $C(0,1)$ compris entre les angles θ_1 et θ_2).

On considère un entier $m \geq 1$ tel que $2\pi/m \leq \theta_2 - \theta_1$ et l'on pose $\theta_0 = 2\pi/m$. On pose alors, pour tout $z \in \overline{D(0,1)}$,

$$h(z) = f(e^{i\theta_0}z)f(e^{2i\theta_0}z)\cdots f(e^{mi\theta_0}z)$$

a) Montrer que h est une fonction continue sur $\overline{D(0,1)}$ qui est analytique sur $D(0,1)$. Que vaut $h(z)$ pour $z \in C(0,1)$?

b) En utilisant l'exercice 91, montrer alors que $f = 0$ sur $\overline{D(0,1)}$.

Exercice 95.— 1/ On considère une fonction analytique $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Montrer que si $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |f(z)| = 0$ alors $f = 0$.

2/ En déduire que si $P \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme non constant alors P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert-Gauss).

Exercice 96.— a) Soit f une fonction analytique non constante sur un domaine U. On suppose que f possède un minimum local en $z_0 \in U$. Montrer que $f(z_0) = 0$.

b) En déduire que si f est une fonction analytique qui ne s'annule pas sur un domaine U alors, pour tout réel $R > 0$ et tout $z_0 \in U$ tels que $\overline{D(z_0, R)} \subset U$, la fonction f atteint un maximum et un minimum sur $\overline{D(z_0, R)}$ et que ceci sont atteint sur le cercle $C(z_0, R)$.

Exercice 97.— Soit f une fonction analytique sur $D(0, R)$. Pour tout $r < R$, on pose

$$M(r) = \sup_{|z| \leq r} |f(z)|$$

Montrer que la fonction $r \longmapsto M(r)$ est une application croissante et continue sur $[0, R[$. Que penser de f si M n'est pas strictement croissante?

Exercice 98.— a) Soit f une fonction analytique non constante sur le disque $D(0, R)$. On suppose qu'il existe $0 < r < R$ tel que sur le cercle $|z| = r$ la fonction f soit de module constant. Montrer que f possède un zéro dans le disque $D(0, r)$.

b) Soit $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$ tels que $\max\{a_1, \cdots, a_n\} < 1$. On pose $U = \mathbb{C} - \{a_1, \cdots, a_n\}$ et on considère la fonction h définie pour $z \in U$ par

$$h(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1 - z\overline{a_k}}{z - a_k}$$

Montrer que h est analytique sur U, que $h(z) \neq 0$ sur $D(0,1)$ et que $|f(z)| = 1$ pour tout $|z| = 1$. N'est-ce pas contradictoire avec la question a)?

Exercice 99.— On utilise ici l'exercice précédent pour montrer qu'une fonction entière de module constant sur le cercle unité est en fait une fonction monomiale. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ une telle fonction.

a) Montrer que le résultat est vrai si $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(0,1)$.

b) On suppose que f s'annule au moins une fois dans $D(0,1)$ et on note $a_1, \cdots, a_n$ les zéros de f dans $D(0,1)$ comptés avec multiplicité. Justifier que les a_k sont bien en nombre fini.

c) Pour tout $z \in \mathbb{C} - \{a_1, \cdots, a_n\}$ on pose

$$g(z) = f(z) \prod_{k=1}^{n} \frac{1 - z\overline{a_k}}{z - a_k}$$

Montrer que l'on peut prolonger g en une fonction entière qui ne s'annule pas dans $D(0,1)$.

d) Montrer que g est constante.

e) En déduire que $a_k = 0$ pour tout $k = 1, \cdots, n$. Prouver finalement que f est monomiale.

Exercice 100.— Pour $m \geq 1$, on considère des fonctions analytiques $f_1, \cdots, f_m : D \longrightarrow \mathbb{C}$ sur un domaine D. Montrer que la fonction $|f_1|^2 + \cdots + |f_m|^2$ est constante si et seulement si chaque f_i est constante.

Montrer que l'on a la même équivalence si l'on remplace $|f_1|^2 + \cdots + |f_m|^2$ par $|f_1| + \cdots + |f_m|$.

Exercice 101.— 1/ (Lemme de Schwarz) On pose $D = D(0,1)$ et l'on considère une fonction analytique $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ \forall z \in D,\ |f(z)| < 1 \end{array}$$

a) Montrer que, pour tout $z \in D$, on a $|f(z)| < |z|$ (on pourra appliquer l'exercice 96). En déduire que $f'(0) \leq 1$.

b) Montrer que s'il existe $z_0 \in D - \{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ alors il existe $c \in \mathbb{U}$ tel que $f(z) = cz$ pour tout $z \in D$.

2/ (Application à l'étude des automorphismes du disque unité). Soit $f : D \longrightarrow D$ un automorphisme, c'est-à-dire une bijection telle que f et f^{-1} soient analytiques.

a) On suppose que $f(0) = 0$. En considérant f^{-1}, montrer que $f(z) = cz$ pour un certain $c \in \mathbb{U}$.

b) Soit $b \in D$. Montrer que la fonction

$$\varphi_b : z \longmapsto \frac{z + b}{1 + \overline{b}z}$$

est un automorphisme de D. Identifier sa réciproque et calculer $\varphi_b(0)$.

c) En déduire la forme de tous les automorphismes de D.

Séries de Fourier

Développements en séries de Fourier et applications

Exercice 102.— Déterminer le développement en série de Fourier des fonctions suivantes et calculer les sommes associées :

a) $f(x) = x^2$ pour $x \in [-\pi, \pi]$ et 2π-périodique. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

b) $f(x) = |x|$ pour $x \in [-\pi, \pi]$ et 2π-périodique. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

c) $f(x) = e^x$ pour $x \in [-\pi, \pi[$ et 2π-périodique. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+1}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$.

d) $f(x) = x - x^3$ pour $x \in]-1, 1]$ et 2-périodique. $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

e) $f(x) = \max(0, \sin x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}$.

Exercice 103.— Soit f la fonction impaire et 2π-périodique définie par $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ pour $x \in]0, \pi[$, et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation

$$g(x) = f(x+1) - f(x-1)$$

a) Déterminer les séries de Fourier de f et de g.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin^2 n}{n^2} = \frac{\pi - 1}{2}$.

Exercice 104.— On considère la fonction 2π-périodique f définie, pour $x \in [-\pi, \pi[$ par $f(x) = \cos(\alpha x)$ où $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ est fixé.

1/ Calculer la série de Fourier de f.

2/ En déduire que $\displaystyle\text{cotan}(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n\geq 1} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$.

3/ Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ converge vers une fonction g de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$ et calculer g'.

4/ En déduire que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

Retrouver alors la formule de Wallis.

Exercice 105.— Développer en série de Fourier la fonction $f(x) = \exp(e^{ix})$. En déduire que

$$\int_0^{2\pi} e^{2\cos t} dt = 2\pi \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!^2}$$

Exercice 106.— On se donne un paramètre $\lambda > 0$ et l'on considère la fonction 2π-périodique f définie, pour $x \in [-\pi, \pi]$, par $f(x) = \text{ch}(\lambda x)$.

a) Montrer que la série de Fourier associée à f converge vers f sur $\mathbb{R}$.

b) Exprimer les coefficients de Fourier de f en fonction de $\text{sh}(\lambda\pi)$.

c) En déduire une expression des valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2 + \lambda^2}$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2 + \lambda^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n^2 + \lambda^2)^2}$ faisant intervenir les valeurs $\text{ch}(\lambda\pi)$ et $\text{sh}(\lambda\pi)$.

(On rappelle que $\text{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\text{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.)

Exercice 107.— On considère $f(z) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière complexe de rayon $R > 1$.

a) Justifier que la fonction $x \longmapsto f(e^{ix})$ est 2π-périodique et $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) En utilisant l'exercice 2, donner le développement en série de Fourier de cette fonction.

c) Montrer que $\displaystyle 2\pi \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 = \int_0^{2\pi} |f(e^{ix})|^2 dx$.

d) (Application) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_0^{2\pi} \exp(\lambda \cos t) dt = 2\pi \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^{2n}}{4^n . n!^2}$$

Exercice 108.— (Nombres de Bernoulli et valeurs de $\zeta(2m)$.)

On considère la fonction 2π-périodique P_1 définie par $P_1(0) = 0$ et, pour tout $x \in]0, 2\pi[$, $P_1(x) = \pi - x$. On définit alors une suite de fonctions $(P_m)_m$, par la relation de récurrence : pour $m \geq 2$,

$$P_m(x) = C_m + \int_0^x P_{m-1}(t)dt$$

où C_m est l'unique réel tel que $\displaystyle\int_0^{2\pi} P_m(t)dt = 0$.

1) Montrer que :

a) Pour tout $m \geq 1$, P_m est 2π-périodique.

b) La fonction P_2 est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

c) Pour tout $m \geq 3$, P_m est de classe $\mathscr{C}^{m-2}$.

2) En déduire, pour $m \geq 2$, une relation entre les coefficients de Fourier de P_{m+1} et de P_m. Donner alors le développement en série de Fourier de P_m pour tout $m \geq 1$.

3) Montrer finalement que, pour tout $m \geq 1$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2m}} = (-1)^m \frac{C_{2m}}{2}$.

4) On se donne $m \geq 2$.

a) Montrer que la fonction P_m est polynomiale sur $[0, 2\pi]$ et expliciter son polynôme associé en fonction des réels $C_2, \cdots, C_m$.

b) En déduire une relation de récurrence liant C_{m+1} à $C_2, \cdots, C_m$.

c) Prouver que $B_m = (-1)^m \dfrac{C_m}{2\pi^m}$ est un nombre rationnel positif.

d) En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2m}}$ pour $m = 1, 2, 3, 4$.

Exercice 109.— On considère une fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^p$ pour un certain $p \geq 1$ donné.

1) a) Pour tout $k = 0, \cdots, p$, calculer $c_n(f^{(k)})$ en fonction de $c_n(f)$.

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$|c_n(f)| \leq |c_n(f')| \leq \cdots \leq |c_n(f^{(p)})|$$

et que, si $|n| \geq 2$, alors

$$c_n(f) \neq 0 \Longrightarrow |c_n(f)| < |c_n(f')| < \cdots < |c_n(f^{(p)})|$$

2) On suppose qu'il existe deux indices $0 \leq i < j \leq p$ tel que $|f^{(j)}| \leq |f^{(i)}|$.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f^{(j)})|^2 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f^{(i)})|^2$.

b) En déduire une expression simple de f et, qu'en particulier, f est $\mathscr{C}^\infty$.

Exercices théoriques

Exercice 110.— Montrer que la série de Fourier d'une série trigonométrique qui converge uniformément est égale à elle-même.

Exercice 111.— (Caractérisation des fonctions $\mathscr{C}^\infty$) Pour une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ réglée et 2π-périodique et pour $n \in \mathbb{Z}$, on notera $c_n(f)$ le n-ième coefficient de la série de Fourier de f.

1/ Montrer que si deux fonctions sont continues et 2π-périodiques, alors elles ont même série de Fourier si et seulement si elles sont égales.

2/ Montrer que la série de Fourier d'une série trigonométrique qui converge uniformément est elle-même.

3/ Soit f une fonction réglée et 2π-périodique. Montrer que $\lim_{|n|} c_n(f) = 0$.

4/ On considère une fonction f de classe $\mathscr{C}^k$, pour un entier $k \geq 0$ donné, et 2π-périodique.

a) Exprimer $c_n(f^{(k)})$ en fonction de $c_n(f)$.

b) En déduire, en utilisant la question 3/, que $c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$.

5/ On se donne une fonction f continue et 2π-périodique et l'on suppose que $c_n(f) = o\left(\frac{1}{|n|^{k+2}}\right)$ pour un certain entier $k \geq 0$. On considère la série de Fourier S de f.

a) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^k$.

b) En utilisant les questions 1,2/ montrer que $f = S$ et en déduire que f est $\mathscr{C}^k$.

c) Caractériser les fonctions 2π-périodiques qui sont de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 112.— Montrer que, si f et g désignent deux fonctions reglées et 2π-périodique, alors on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)dt &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{c_n(f)}c_n(g) \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)c_{-n}(g) \end{aligned}$$

et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)c_n(g)e^{inx} \\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)f(t)dt &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 e^{inx} \end{aligned}$$

Exercice 113.— (Produit de convolution) Sur la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{R}eg_{2\pi}$ des fonctions 2π-périodiques et réglées on définit le produit de convolution $*$, par : pour $f, g \in \mathcal{R}eg_{2\pi}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt$$

a) Montrer que le produit de convolution $*$ est une loi de composition interne sur $\mathcal{R}eg_{2\pi}$ qui est bilinéaire, commutative, associative et sans élément neutre.

b) Montrer que, si f ou g est un polynôme trigonométrique alors $f * g$ en est un aussi.

c) Montrer que, si f ou g est de classe $\mathscr{C}^p$, alors $f * g$ l'est aussi.

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f * g) = c_n(f)c_n(g)$.

b) En utilisant l'exercice 111, montrer que la série de Fourier d'une convolée converge simplement vers cette convolée.

Exercice 114.— (Théorème de Féjer) On considère une fonction f continue et 2π-périodique. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $e_k(x) = e^{ikx}$. On considère alors, pour $n \geq 0$, les fonction $S_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k$ et , $C_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k$.

a) Montrer que $f * S_n$ est un polynôme trigonométrique. Que représente-t-il pour f ?

b) Montrer que si $x \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$, alors on a

$$C_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2$$

c) En déduire que, pour tout $n \geq 0$, $C_n \geq 0$ et $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} C_n(t)dt = 1$. Prouver que, pour tout $0 < \alpha \leq \pi$, la suite de fonctions $(C_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, \pi] - [-\alpha, \alpha]$.

d) Prouver finalement que $(f * C_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ et en déduire le théorème de Féjer : *toute fonction continue et 2π-périodique est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de polynômes trigonométriques et, plus précisément, f est la limite uniforme de la suite des moyennes de Cesàro des sommes partielles de la série de Fourier de f.*

Exercice 115.— On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui est 2π-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ et qui vérifie $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

A/ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f(x)| \leq \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}^*}\left|\frac{c_n(f')}{n}\right|$ et, en déduire que,

$$\|f\|_\infty^2 \leq \frac{\pi}{6}\int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx$$

B/ (Inégalité de Wirtinger) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx \leq \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx$$

et caractériser les cas d'égalités. Comparer cette inégalité avec celle que permet de fournir immédiatement la question A/.