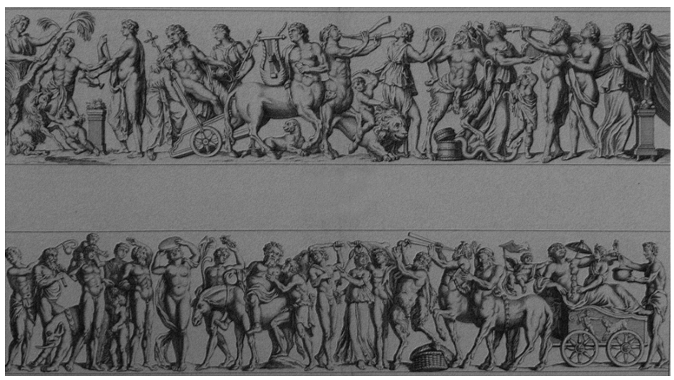
Des extensions de groupes



Bruno Deschamps
Le Mans — 2011

à Juillet l'universelle
et à Octobre, pleine d'espoir...

Table des matières

1 Cohomologie des groupes

1.1 Généralités

On considère un groupe G, un groupe abélien A et une action à gauche φ de G sur A. On notera dans la suite a^g l'action de $g \in G$ sur $a \in A$. Etant donné un entier $n \geq 0$, on appelle *n-cochaîne de G à valeurs dans A relativement à l'action φ* (ou plus simplement *n-cochaîne*) toute application $f : G^n \longrightarrow A$. L'ensemble des n-cochaînes sera noté $C^n(G,A)$, cet ensemble a une structure naturelle de groupe abélien.

On définit alors une application dite de *cobord* $d_n : C^n(G,A) \longrightarrow C^{n+1}(G,A)$ de la manière suivante : pour $f \in C^n(G,A)$ et $g_1, \cdots, g_{n+1} \in G^{n+1}$, on pose

$$d_n(f)(g_1,\cdots,g_{n+1}) =$$
$$f(g_2,\cdots,g_{n+1})^{g_1} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(g_1,\cdots,g_i g_{i+1},\cdots,g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1,\cdots,g_n)$$

On constate que l'application de cobord est un morphisme de groupes et en rajoutant le groupe trivial, on obtient une suite

$$0 \xrightarrow{d_{-1}} C^0(G,A) \xrightarrow{d_0} C^1(G,A) \xrightarrow{d_1} \cdots$$

On appelle *n-cocycle* tout élément de $\ker(d_n)$ et *n-cobord* tout élement de $\mathrm{Im}(d_{n-1})$.

Exemple 1.— (basses dimensions).

$n = 0$. Les cochaînes s'assimilent aux éléments de A. Il y a un seul 0-cobord qui est la constante nulle et les 0-cocycles sont les éléments de $a \in A$ tel que pour tout $g \in G$, $a^g = a$. Ainsi l'ensemble des 0-cocycles est A^G.

$n = 1$. Les 1-cobords sont les applications de la forme $g \longmapsto a^g - a$ (ou $g \longmapsto a^g a^{-1}$ en notations multiplicatives) avec $a \in A$. Les 1-cocycles sont les applications f qui vérifient pour tout $g_1, g_2 \in G$,

$$f(g_1 g_2) = f(g_2)^{g_1} + f(g_1)$$

(ou $f(g_1g_2) = f(g_2)^{g_1} f(g_1)$ en notations multiplicatives). De telles applications s'appellent aussi des *homomorphismes croisés*.

$n = 2$. Les 2-cobords sont les applications de la forme $(g_1, g_2) \longmapsto f(g_2)^{g_1} - f(g_1g_2) + f(g_1)$ (ou $(g_1, g_2) \longmapsto f(g_2)^{g_1} f(g_1g_2)^{-1} f(g_1)$ en notations multiplicatives) avec $f \in C^1(G,A)$. Les 2-cocycles sont les applications f qui vérifient pour tout $g_1, g_2, g_3 \in G$,

$$f(g_2,g_3)^{g_1} + f(g_1, g_2g_3) = f(g_1g_2, g_3) + f(g_1, g_2)$$

(ou $f(g_2,g_3)^{g_1} f(g_1,g_2g_3) = f(g_1g_2,g_3) f(g_1,g_2)$ en notations multiplicatives). De telles applications s'appellent aussi des *systèmes de facteurs*.

Théorème 2.— *Pour tout $n \geq 0$, on a $d_n \circ d_{n-1} = 0$.*

Preuve :

---

2 Extensions de groupes

2.1 Généralités

Étant donnés deux groupes N et G, on appelle *extension de N par G* toute suite exacte de groupes de la forme :

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{h} \Gamma \xrightarrow{f} G \longrightarrow 1$$

Il existe une notion "d'isomorphisme" relative à la notion d'extensions : deux extensions de N par G

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{h_0} \Gamma_0 \xrightarrow{f_0} G \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{h_1} \Gamma_1 \xrightarrow{f_1} G \longrightarrow 1$$

seront dites *équivalentes* s'il existe un isomorphisme $\psi : \Gamma_0 \longrightarrow \Gamma_1$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & & \Gamma_0 \arrow[dd, "\psi"] \arrow[dr, "f_0"] & & \\ 1 \arrow[r] & N \arrow[ur, "h_0"] \arrow[dr, "h_1"'] & & G \arrow[r] & 1 \\ & & \Gamma_1 \arrow[ur, "f_1"'] & & \end{tikzcd}$$

soit commutatif. La relation "être équivalentes" est visiblement d'équivalence sur l'ensemble des extensions de N par G. Les classes d'équivalence pour cette relation, sont appelées les classes d'extensions de N par G. Une question importante de la théorie des groupes consiste à décrire les classes d'extensions d'un groupe par un autre. Nous allons voir que l'outil cohomologique est précieux pour cette description.

Etant donné

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{h} \Gamma \xrightarrow{f} G \longrightarrow 1$$

une extension de N par G, le fait que $h(N)$ soit distingué dans G permet de définir une action Φ de Γ sur N par

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & \Gamma & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(N) \\ & g & \longrightarrow & \Phi_g : x \longmapsto h^{-1}(gh(x)g^{-1}) \end{array}$$

L'image par Φ du sous-groupe $h(N)$ est exactement le sous-groupe $\mathrm{Int}(N)$ des automorphismes intérieurs de N et d'après ???, Φ permet ainsi de définir par passage au quotient un morphisme $\widetilde{\Phi} : \Gamma/h(N) \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)/\mathrm{Int}(N)$. On en déduit, *via* f, l'existence d'un morphisme $\widehat{\Phi} : G \longrightarrow \mathrm{Out}(N)$. On a ainsi le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r] \arrow[d, "h"] & \mathrm{Int}(N) \arrow[d] \\
G \arrow[dr, "\simeq", "\omega"'] \arrow[drr, bend right, "\widehat{\Phi}=\widetilde{\Phi}\circ\omega"'] & \Gamma \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & \mathrm{Aut}(N) \arrow[d] \\
 & \frac{\Gamma}{h(N)} \arrow[r, "\widetilde{\Phi}"] & \mathrm{Out}(N)
\end{tikzcd}$$

Définitions 3.— *1/ Etant donnés deux groupes N et G, on appelle action extérieure de G sur N tout morphisme de G dans* $\mathrm{Out}(N)$*.*

2/ Etant donnée $1 \longrightarrow N \xrightarrow{h} \Gamma \xrightarrow{f} G \longrightarrow 1$ *une extension de N par G, l'action extérieure $\widehat{\Phi}$ de G sur N définie précédemment s'appelle l'action extérieure relative à l'extension, on dit alors que l'extension est une extension de N par G relative à $\widehat{\Phi}$.*

Considérons une extension de N par G relative à une action extérieure $\widehat{\Phi}$,

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r] & \Gamma_0 \arrow[r, "f"] & G \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s"] & 1
\end{tikzcd}$$

et s une section ensembliste de f (i.e. pour tout $g \in G$, $f \circ s(g) = g$). Pour tout $g \in G$, on pose

$$\begin{array}{rccc} \Psi_g : & N & \longrightarrow & N \\ & x & \longmapsto & h^{-1}\left(s(g)h(x)s(g)^{-1}\right) \end{array}$$

Ceci permet de définir une application $\Psi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$, dont on notera $\widehat{\Psi}$ l'image dans $\mathrm{Out}(N)$.

Proposition 4.— *Avec les notation précédentes, on a $\widehat{\Psi} = \widehat{\Phi}$. En particulier, pour une extension* $1 \longrightarrow N \xrightarrow{h} \Gamma \xrightarrow{f} G \longrightarrow 1$ *donnée, son action extérieure relative est entièrement déterminée par le choix (arbitraire) d'une section ensembliste s de f.*

Preuve : Comme le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, bend left, "s"] \arrow[dr, "\omega"'] & \Gamma \arrow[l, "f"] \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{Aut}(N) \arrow[d, "\theta"] \\
& \frac{\Gamma}{h(N)} \arrow[r, "\widetilde{\Phi}"] & \mathrm{Out}(N)
\end{tikzcd}$$

est commutatif, on a

$$\widehat{\Psi} = \theta \circ \Phi \circ s = \widetilde{\Phi} \circ \pi \circ s = \widetilde{\Phi} \circ \omega \circ f \circ s = \widetilde{\Phi} \circ \omega = \widehat{\Phi}$$

Corollaire 5.— *Si deux extensions sont équivalentes, alors leurs actions extérieures relatives sont égales.*

Preuve : Considérons deux extensions équivalentes

$$\begin{tikzcd}
& & \Gamma_0 \arrow[dd, "\psi"] \arrow[dr, "f_0"] & & \\
1 \arrow[r] & N \arrow[ur, "h_0"] \arrow[dr, "h_1"'] & & G \arrow[r] \arrow[ul, bend right, "s_0"'] \arrow[dl, bend left, "s_1"] & 1 \\
& & \Gamma_1 \arrow[ur, "f_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

ψ étant un isomorphisme qui fait commuter le diagramme et s_0 (resp. s_1) une section ensembliste de f_0 (resp.f_1). Soit $g \in G$, comme $f_0 \circ \psi^{-1} \circ s_1(g) = g$, on en déduit qu'il existe $\lambda \in N$ tel que

$$\psi^{-1}(s_1(g)) = s_0(g)h_0(\lambda)$$

Ainsi, si $x \in N$ alors

$$\begin{array}{rcl}
h_1^{-1}(s_1(g)h_1(x)s_1(g)^{-1}) & = & h_0^{-1} \circ \psi^{-1}(s_1(g)\psi(h_0(x))s_1(g)^{-1}) \\
& = & h_0^{-1}(s_0(g)h_0(\lambda)h_0(x)h_0(\lambda^{-1})s_0(g)^{-1}) \\
& = & h_0^{-1}(s_0(g)h_0(\lambda x \lambda^{-1})s_0(g)^{-1})
\end{array}$$

Ainsi l'image de g dans $\mathrm{Aut}(N)$ relativement à s_0 différe de celle relativement à s_1 de l'automorphisme intérieur $x \mapsto \lambda x \lambda^{-1}$. Leurs images dans $\mathrm{Out}(N)$ sont donc égales.

Remarque 6.— 1/ On fera bien attention au fait que la notion d'extension ne dépend pas uniquement du groupe, mais bien de la suite exacte en entier. Par exemple, les suites exactes

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 1} \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

sont des extensions de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ par lui-même relativement à la même action exterieure, elles ont toutes deux même groupe et pourtant elles ne sont pas équivalentes.

2/ Quand N est abélien, $\mathrm{Int}(N)$ est trivial et donc $\mathrm{Out}(N)$ se confond à $\mathrm{Aut}(N)$. Dans cette situation, les actions extérieures sont donc exactement les actions.

3/ Si l'on note C le centre de N alors toute action extérieure de G sur N induit une action sur C. En effet, puisque C est un sous-groupe caractéristique de N (voir ???), on a donc un morphisme (de restriction) $\mathrm{Aut}(N) \longrightarrow \mathrm{Aut}(C)$. Il est évident que $\mathrm{Int}(N)$ est inclus dans le noyau de ce morphisme, on en déduit d'après ??? l'existence d'un morphisme $\mathrm{Out}(N) \longrightarrow \mathrm{Aut}(C)$ qui, composé avec l'action extérieure, donne une action de G sur C. De manière pratique, cette action ce décrit par le choix arbitraire d'une section S :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Int}(N) \arrow[d] & \\
 & \mathrm{Aut}(N) \arrow[r, "r"] \arrow[d, shift right] & \mathrm{Aut}(C) \\
G \arrow[r, "\widehat{\Phi}"] & \mathrm{Out}(N) \arrow[u, bend right, "S"'] &
\end{tikzcd}$$

L'action φ de G sur C induite par $\widehat{\Phi}$ est alors égale à $\varphi = r \circ S \circ \widehat{\Phi}$.

La problématique que nous allons tenter de résoudre dans les paragraphes ci-dessous est la suivante : étant donné N et G et une action extérieure $\widehat{\Phi}$, existe-t-il des extensions de N par G d'action extérieure relative égale à $\widehat{\Phi}$ et, le cas échéant, peut-on décrire ces extensions à équivalence près? Nous noterons dans la suite $\mathrm{Ext}_{\widehat{\Phi}}(N,G)$ l'ensemble des classes d'extensions de N par G relativement à $\widehat{\Phi}$. Nous allons voir que lorsque $\mathrm{Ext}_{\widehat{\Phi}}(N,G)$ est non vide, cet ensemble est paramétré par $H^2(G,C)$ où C est le centre de N (l'action considérée étant celle induite par $\widehat{\Phi}$ sur C). Nous verrons aussi que l'obstruction à l'existence d'une extension se lit dans $H^3(G,C)$.

2.2 Cas des extensions à noyau abélien

On considère ici un groupe G de neutre e et un groupe abélien N. On se donne une action exterieure φ, c'est-à-dire ici tout simplement une action (remarque 6-2) de G sur N et on s'intéresse à $\mathrm{Ext}_{\varphi}(N,G)$. Remarquons préalablement que cet ensemble n'est jamais vide puisque la suite exacte

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \times_{\varphi} N \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

où $G \times_{\varphi} N$ désigne le produit semi-direct de N par G relativement à φ est bien une extension de N par G relativement à l'action φ.

Considérons une extension de N par G relativement à φ,

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N \arrow[r] & \Gamma_0 \arrow[r, "f"] & G \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s"] & 1 \end{tikzcd}$$

et s une section ensembliste de f. Afin de ne pas alourdir les notations on confondra quand c'est possible N avec son image dans Γ_0. On notera, pour $g \in G$ et $x \in N$, $x^g = \varphi(g)(x)$. Ainsi, d'après le paragraphe précédent, on a $x^g = s(g)xs(g)^{-1}$.

Pour tout $g, g^{'} \in G$, les éléments $s(gg^{'})$ et $s(g)s(g^{'})$ sont dans la même classe modulo N. Il existe donc un unique $t(g, g^{'}) \in N$ tel que

$$s(gg^{'}) = t(g, g^{'})s(g)s(g^{'})$$

Ceci permet de définir une application $t : G \times G \longrightarrow N$ (relative au choix de s).

Proposition 7.— *1/ L'application t précédemment définie est un 2-cocycle, c'est* le 2-cocycle associé *à la section s.*

2/ Si t (resp. $t^{'}$) est le 2-cocycle associé à une section s (resp. $s^{'}$) de l'extension, alors t et $t^{'}$ diffèrent d'un cobord. Ainsi, on peut associer de manière naturel à l'extension un élement de $H^2_\varphi(G, N)$.

3/ Si deux extensions de N par G sont équivalentes alors les deux éléments de $H^2_\varphi(G, N)$ associés à chacune de ces deux extensions sont égaux.

Preuve : 1/ Si l'on applique l'associativité du produit dans G au trois éléments $g, g^{'}, g^{''} \in G$ on trouve séparément

$$\begin{array}{rcl} s((gg^{'})g^{''}) & = & t(gg^{'}, g^{''})s(gg^{'})s(g^{''}) \\ & = & t(gg^{'}, g^{''})t(g, g^{'})s(g)s(g^{'})s(g^{''}) \\ \text{et } s(g(g^{'}g^{''})) & = & t(g, g^{'}g^{''})s(g)s(g^{'}g^{''}) \\ & = & t(g, g^{'}g^{''})s(g)t(g^{'}, g^{''})s(g^{'})s(g^{''}) \\ & = & t(g, g^{'}g^{''})s(g)t(g^{'}, g^{''})s(g)^{-1}s(g)s(g^{'})s(g^{''}) \\ & = & t(g, g^{'}g^{''})t(g^{'}, g^{''})^g s(g)s(g^{'})s(g^{''}) \end{array}$$

On en déduit que pour tout $g, g^{'}, g^{''} \in G$

$$t(gg^{'}, g^{''})t(g, g^{'}) = t(g, g^{'}g^{''})t(g^{'}, g^{''})^g$$

ce qui montre que t est un 2-cocycle.

2/ Comme s et $s^{'}$ sont des sections de f, il existe une application $h_0 : G \longrightarrow N$ tel que pour tout $g \in G$,

$$s^{'}(g) = h_0(g)s(g)$$

Par ailleurs, pour tout $g, g' \in G$, on a

$$\begin{array}{rcl} s'(gg') & = & h_0(gg')s(gg') \\ & = & h_0(gg')t(g,g')s(g)s(g') \\ & = & h_0(gg')t(g,g')h_0(g)^{-1}s'(g)h_0(g')^{-1}s'(g') \\ & = & t(g,g')h_0(gg')h_0(g)^{-1}(h_0(g')^{-1})^g s'(g)s'(g') \end{array}$$

et comme $s'(gg') = t'(g,g')s'(g)s'(g')$ on en déduit que pour tout $g, g' \in G$, on a

$$t(g,g')t'(g,g')^{-1} = h_0(g)h_0(gg')^{-1}h_0(g')^g$$

qui est l'expression d'un 2-cobord. Ainsi, t et t' diffèrent d'un 2-cobord, leurs classes dans $H^2_\varphi(G,N)$ sont donc égales.

3/ Considérons deux extensions équivalentes

$$\begin{tikzcd} & & \Gamma_0 \arrow[dd, "\psi"] \arrow[dr, "f_0"] & & \\ 1 \arrow[r] & N \arrow[ur] \arrow[dr] & & G \arrow[r] \arrow[ul, bend right, "s_0"'] \arrow[dl, bend left, "s_1"] & 1 \\ & & \Gamma_1 \arrow[ur, "f_1"] & & \end{tikzcd}$$

ψ étant un isomorphisme qui fait commuter le diagramme et s_0 (resp. s_1) une section ensembliste de f_0 (resp.f_1). On considère t_0 (resp. t_1) le 2-cocycle associé à s_0 (resp. s_1). Pour tout $g, g' \in G$ on a $s_0(gg') = t_0(g,g')s_0(g)s_0(g')$ et par suite, en composant par ψ,

$$\psi \circ s_0(gg') = t_0(g,g')\psi \circ s_0(g)\psi \circ s_0(g')$$

Puisque ψ est un isomorphisme faisant commuter le diagrammme, $\psi \circ s_0$ est une autre section de f_1. l'égalité prédédente assure que son 2-cocycle associé est t_0. D'après le 2/, t_0 et t_1 diffèrent d'un 2-cobord et définissent donc un même élément dans $H^2_\varphi(G,N)$.

La proposition précédente montre donc qu'à une classe d'extensions de N par G donnée on peut associer de manière naturelle un élément de $H^2_\varphi(G,N)$. Ainsi, il existe une application naturelle

$$\Theta : \mathrm{Ext}_\varphi(G,N) \longrightarrow H^2_\varphi(G,N)$$

Théorème 8.— *L'application Θ est une bijection.*

Preuve : Surjectivité de Θ : Soit t un 2-cocycle. Sur le produit cartésien (d'ensembles) $\Gamma = N \times G$, on considère la loi de composition $*$ suivante : pour tout $(x,g),(x',g') \in \Gamma$, on pose

$$(x,g) * (x',g') = (xx'^g t(g,g')^{-1}, gg') \qquad (1)$$

Muni de la loi $*$, Γ est un groupe. En effet :

• Associativité de $*$: soient $(x,g),(x^{'},g^{'}),(x^{''},g^{''})\in\Gamma$, on a d'une part

$$\begin{array}{rcl}\Big((x,g)*(x^{'},g^{'})\Big)*(x^{''},g^{''}) & = & (xx^{'g}t(g,g^{'})^{-1},gg^{'})*(x^{''},g^{''})\\ & = & (xx^{'g}x^{''gg^{'}}t(g,g^{'})^{-1}t(gg^{'},g^{''})^{-1},gg^{'}g^{''})\end{array}$$

et d'autre part

$$\begin{array}{rcl}(x,g)*\Big((x^{'},g^{'})*(x^{''},g^{''})\Big) & = & (x,g)*(x^{'}x^{''g^{'}}t(g^{'},g^{''})^{-1},g^{'}g^{''})\\ & = & (xx^{'g}x^{''gg^{'}}t(g^{'},g^{''})^{-1g}t(g,g^{'}g^{''})^{-1},gg^{'}g^{''})\end{array}$$

Comme t est un 2-cocycle, on a $t(g^{'},g^{''})^{g}t(g,g^{'}g^{''})=t(g,g^{'})t(gg^{'},g^{''})$ et donc il y a égalité des deux quantités considérées. La loi $*$ est bien associative.

• $(t(e,e),e)$ est un neutre bilatère pour $*$. En effet, remarquons pour commencer que comme t est un 2-cocycle, on a pour tout $g\in G$

$t(g,e)t(g,e)=t(g,e)t(e,e)^{g}$
(choix de $g^{'}=g^{''}=e$ dans la relation qui définit un 2-cocycles)
$t(e,g)t(e,e)=t(e,g)t(e,g)$
(choix de $g=g^{'}=e$ et "$g^{''}=g$")

c'est-à-dire que pour tout $g\in G$,

$$\begin{cases}t(g,e)=t(e,e)^{g}\\ t(e,g)=t(e,e)\end{cases}$$

Donc, pour tout $(x,g)\in\Gamma$, on a

$$\begin{array}{rcl}(x,g)*(t(e,e),e) & = & (xt(e,e)^{g}t(g,e)^{-1},g)\\ & = & (xt(g,e)t(g,e)^{-1},g)\\ & = & (x,g)\end{array}$$

et

$$(t(e,e),e)*(x,g)=(t(e,e)t(e,g)^{-1},g)=(x,g)$$

• Inversibilité : soit $(x,g)\in\Gamma$, on a

$$(x,g)*\left(\Big(x^{-1}t(g,g^{-1})t(e,e)\Big)^{g^{-1}},g^{-1}\right)=(t(e,e),e)$$

Ainsi (x,g) est inversible pour $*$ et

$$(x,g)^{-1}=\left(\Big(x^{-1}t(g,g^{-1})t(e,e)\Big)^{g^{-1}},g^{-1}\right)$$

Ainsi $(\Gamma,*)$ est bien un groupe. Maintenant l'application de projection

$$f: \begin{array}{ccc} \Gamma & \longrightarrow & G \\ (x,g) & \longmapsto & g \end{array}$$

est visiblement un épimorphisme de groupes et son noyau vaut

$$\ker(f) = \{(x,e)/\ x \in N\}$$

Considérons l'application

$$\lambda: \begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & \ker(f) \\ x & \longmapsto & (xt(e,e),e) \end{array}$$

qui est visiblement une bijection. Pour $x,y \in N$ on a

$$\begin{array}{rcl} \lambda(x)*\lambda(y) & = & (xt(e,e),e)*(yt(e,e),e) \\ & = & (xt(e,e)yt(e,e)t(e,e)^{-1},e) \\ & = & (xyt(e,e),e) \\ & = & \lambda(xy) \end{array}$$

ainsi λ est un isomorphisme, et donc on a la suite exacte

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\lambda} \Gamma \xrightarrow{f} G \longrightarrow 1$$

Nous allons montrer que cette suite exacte est une extension de N par G et que son image dans $H^2_\varphi(G,N)$ par Θ a pour représentant t. Ceci prouvera bien la surjectivité de Θ. À cet effet, considérons la section s de f suivante :

$$s: \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \Gamma \\ g & \longmapsto & (t(e,e),g) \end{array}$$

Pour tout $x \in N$ et tout $g \in G$, on a

$$\begin{array}{rcl} s(g)*\lambda(x)*s(g)^{-1} & = & (t(e,e),g)*(xt(e,e),e)*(t(g,g^{-1})^{g^{-1}},g^{-1}) \\ & = & (t(e,e)x^g t(e,e)^g t(g,e)^{-1},g)*(t(g,g^{-1})^{g^{-1}},g^{-1}) \\ & = & (t(e,e)x^g t(g,e)t(g,e)^{-1},g)*(t(g,g^{-1})^{g^{-1}},g^{-1}) \\ & = & (t(e,e)x^g,g)*(t(g,g^{-1})^{g^{-1}},g^{-1}) \\ & = & (t(e,e)x^g t(g,g^{-1})t(g,g^{-1})^{-1},e) \\ & = & (t(e,e)x^g,e) \end{array}$$

Ainsi, on a $\lambda^{-1}(s(g)*\lambda(x)*s(g)^{-1}) = x^g$ et donc l'action de G sur N induite par la suite exacte est bien égale à φ. Nous sommes bien en présence d'une extension.

Considérons maintenant le 2-cocycle t_0 associé à la section s. Par définition, pour tout $g,g' \in G$, on a

$$s(gg') = \lambda(t_0(g,g'))*s(g)*s(g') = (t_0(g,g')t(e,e),e)*s(g)*s(g')$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{array}{rcl} s(gg^{'})*s(g^{'})^{-1}*s(g)^{-1} & = & (t(e,e),gg^{'})*(t(g^{'},g^{'-1})^{g^{'-1}},g^{'-1})*(t(g,g^{-1})^{g^{-1}},g^{-1}) \\ & = & (t(e,e)t(g^{'},g^{'-1})^{g}t(gg^{'},g^{'-1})^{-1},g)*(t(g,g^{-1})^{g^{-1}},g^{-1}) \\ & = & (t(e,e)t(g^{'},g^{'-1})^{g}t(gg^{'},g^{'-1})^{-1}t(g,g^{-1})t(g,g^{-1})^{-1},e) \\ & = & (t(e,e)t(g^{'},g^{'-1})^{g}t(gg^{'},g^{'-1})^{-1},e) \end{array}$$

Comme t est un 2-cocycle, on a

$$t(g^{'},g^{'-1})^{g}t(gg^{'},g^{'-1})^{-1}=t(g,g^{'})t(g,e)^{-1}$$

et donc

$$s(gg^{'})*s(g^{'})^{-1}*s(g)^{-1}=(t(g,g^{'})t(e,e)^{-1\,g}t(e,e),e)$$

On en déduit que pour tout $g,g^{'}\in G$,

$$t(g,g^{'})t_0(g,g^{'})^{-1}=t(e,e)^{g}$$

Considérons l'application $h_0:G\longrightarrow N$ définie pour $x\in G$ par $h_0(x)=t(e,e)$. Pour $g,g^{'}\in G$ on a

$$h_0(g)h_0(gg^{'})^{-1}h_0(g^{'})^{g}=t(e,e)^{g}$$

On en déduit que $(g,g^{'})\longmapsto t(e,e)^{g}$ est un 2-cobord et donc t_0 et t, différant d'un 2-cobord, définissent un même élément de $H^2_{\varphi}(G,N)$. L'application Θ est bien surjective.

Injectivité de Θ : on considère

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N \arrow[r, "\lambda_0"] & \Gamma_0 \arrow[r, "f_0"] & G \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s_0"] & 1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & N \arrow[r, "\lambda_1"] & \Gamma_1 \arrow[r, "f_1"] & G \arrow[r] \arrow[l, bend left, "s_1"] & 1 \end{tikzcd}$$

deux extensions de N par G dont les classes ont même image par Θ. Nous allons montrer que ces deux extensions sont équivalentes, ce qui prouvera l'injectivité de la fonction Θ.

Fixons s_0 et s_1 des sections de f_0 et f_1 et notons t_0 et t_1 les 2-cocycles associés à s_0 et s_1. Par hypothèse, t_0 et t_1 diffèrent d'un 2-cobord : $t_0^{-1}=ut_1^{-1}$ où $u:G\times G\longrightarrow N$ est telle qu'il existe $\omega:G\longmapsto N$ vérifiant pour tout $g,g^{'}\in G$,

$$u(g,g^{'})=\omega(g)\omega(gg^{'})^{-1}\omega(g^{'})^{g}$$

Pour tout $\gamma_0\in\Gamma_0$ il existe un unique $g\in G$ et un unique $x\in N$ tels que $\gamma_0=\lambda_0(x)s_0(g)$. On définit alors

$$\psi(\gamma_0)=\lambda_1(x\omega(g))s_1(g)$$

ce qui fait de ψ une application bijective de Γ_0 sur Γ_1. Soit $\gamma_0 = \lambda_0(x)s_0(g)$ et $\gamma_0^{'} = \lambda_0(x^{'})s_0(g^{'})$ deux éléments de Γ_0. On a

$$\begin{aligned}
\gamma_0\gamma_0^{'} &= \lambda_0(x)s_0(g)\lambda_0(x^{'})s_0(g^{'}) \\
&= \lambda_0(x)\lambda_0(x^{'g})s_0(g)s_0(g^{'}) \\
&= \lambda_0(x)\lambda_0(x^{'g})\lambda_0(g,g^{'})^{-1}s_0(gg^{'}) \\
&= \lambda_0(x)\lambda_0(x^{'g})\lambda_0(t_0(g,g^{'})^{-1})s_0(gg^{'}) \\
&= \lambda_0(xx^{'g}t_0(g,g^{'})^{-1})s_0(gg^{'})
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\psi(\gamma_0\gamma_0^{'}) &= \lambda_1(xx^{'g}t_0(g,g^{'})^{-1}\omega(gg^{'}))s_1(gg^{'}) \\
&= \lambda_1(xx^{'g}t_1(g,g^{'})^{-1}\omega(g)\omega(g^{'})^{g})s_1(gg^{'}) \\
&= \lambda_1(x\omega(g))\lambda_1(x^{'g}\omega(g^{'})^{g})\lambda_1(t_1(g,g^{'})^{-1})s_1(gg^{'}) \\
&= \lambda_1(x\omega(g))\lambda_1(x^{'g}\omega(g^{'})^{g})s_1(g)s_1(g^{'}) \\
&= \lambda_1(x\omega(g))s_1(g)\lambda_1(x^{'}\omega(g^{'}))s_1(g^{'}) \\
&= \psi(\gamma_0)\psi(\gamma_0^{'})
\end{aligned}$$

Ainsi ψ est un isomomorphisme. Il reste à vérifier que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& & \Gamma_0 \arrow[dd, "\psi"] \arrow[dr, "f_0"] & & \\
1 \arrow[r] & N \arrow[ur, "\lambda_0"] \arrow[dr, "\lambda_1"'] & & G \arrow[r] & 1 \\
& & \Gamma_1 \arrow[ur, "f_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

est bien commutatif. Commençons par remarquer que puisque

$$s_0(e) = s_0(ee) = \lambda_0(t_0(e,e))s_0(e)s_0(e)$$

on a $s_0(e) = \lambda_0(t_0(e,e)^{-1})$ et, de même, $s_1(e) = \lambda_1(t_1(e,e)^{-1})$. Par ailleurs, on a $t_0(e,e)^{-1} = u(e,e)t_1(e,e)^{-1}$ et comme $u(e,e) = \omega(e)$, on en déduit que $\omega(e)\lambda_1^{-1}(s_1(e)) = \lambda_0^{-1}(s_0(e))$ et par suite que

$$s_1(e)^{-1} = \lambda_1\left(\omega(e)\lambda_0^{-1}(s_0(e)^{-1})\right)$$

Ainsi, pour tout $x \in N$ on a

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \lambda_0)(x) &= \psi(\lambda_0(x)s_0(e)^{-1}s_0(e)) \\
&= \psi(\lambda_0(x\lambda_0^{-1}(s_0(e)^{-1}))s_0(e)) \\
&= \lambda_1\left(x\lambda_0^{-1}(s_0(e)^{-1})\omega(e)\right)s_1(e) \\
&= \lambda_1(x)\lambda_1\left(\lambda_0^{-1}(s_0(e)^{-1})\omega(e)\right)s_1(e) \\
&= \lambda_1(x)
\end{aligned}$$

Enfin, pour tout $\gamma_0 = \lambda_0(x)s_0(g) \in \Gamma_0$ on a

$$(f_1 \circ \psi)(\gamma_0) = f_1(\lambda_1(x\omega(g))s_1(g)) = g = f_0(\lambda_0(x)s_0(g)) = f_0(\gamma_0)$$

Ceci achève la preuve.

La bijection Θ permet de définir, à partir de la structure de $H^2_\varphi(G,N)$, une structure de groupe abélien sur $\mathrm{Ext}_\varphi(G,N)$. La formule 1 dans la preuve du théorème 8 permet de construire explicitement, à partir d'un 2-cocycle f, une extension E_f dont l'image de la classe par Θ est la classe de f dans $H^2_\varphi(G,N)$. Si l'on applique ceci au 2-cocycle trivial, on décrit donc le neutre de $\mathrm{Ext}_\varphi(G,N)$ et on constate, en appliquant la formule 1, qu'un représentant naturel de ce neutre n'est rien d'autre que la suite exacte relative au produit semi-direct de G par N :

$$1 \longrightarrow N \longrightarrow G \times_\varphi N \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

Notons que la classe neutre de $\mathrm{Ext}_\varphi(G,N)$ est en fait composée de l'ensemble des extensions qui admettent une section au sens de ???. Ainsi, on ne peut retrouver le groupe $G \times_\varphi N$ dans une extension de N par G que dans une seule classe d'extensions. Ce ne sera pas le cas pour tous les groupes apparaisant dans une extension, comme le montre l'exemple qui suit.

Exemple 9.— Appliquons ce qui précède pour décrire les classes d'extensions de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par lui-même (p étant un nombre premier). En appliquant la proposition ???, on déduit que $H^2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et donc $Ext(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ compte p éléments. Considérons les extensions suivantes :

$$E_0 \ : \ 1 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

et pour tout $i = 1, \cdots, p-1$

$$E_i : \qquad 1 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\times i} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

La conclusion générale pour le cas du noyau abélien est que l'ensemble des classes d'extensions de N par G est décrit biunivoquement par la réunion disjointe $\displaystyle\bigsqcup_{\varphi \in \mathrm{Aut}(N)} H^2_\varphi(G,N)$.

2.3 Cas général

2.3.1 Obstruction

On se fixe deux groupes N et G, on note C le centre de N. Pour toute action extérieure $\widehat{\Phi}$ de G sur N, on notera φ l'action de G sur C induite par $\widehat{\Phi}$ (remarque 6-3). Nous allons nous intéresser à l'éventuelle obstruction à l'existence d'une extension de N par G d'action extérieure relative $\widehat{\Phi}$ donnée.

Considérons à cet effet un relevé $L : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ de $\widehat{\Phi}$ pour le morphisme $\mathrm{Aut}(N) \xrightarrow{\theta} \mathrm{Out}(N)$ (i.e. $\theta \circ L = \widehat{\Phi}$). Soit alors l'application $f : G \times G \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ définie, pour $g_1, g_2 \in G$, par

$$f(g_1, g_2) = L(g_1 g_2) \circ L(g_2)^{-1} \circ L(g_1)^{-1}$$

Comme θ est un morphisme, on a $\theta(f(g_1,g_2)) = \theta \circ L(g_1 g_2) \theta \circ L(g_2)^{-1} \theta \circ L(g_1)^{-1} = 1$ et donc f est une application à valeurs dans $\mathrm{Int}(N)$. On considère un relevé $\overline{f} : G \times G \longrightarrow N$ de f pour le morphisme naturel $N \longrightarrow \mathrm{Int}(N)$. Ainsi, pour tout $g_1, g_2 \in G$ et tout $x \in N$ on a $f(g_1,g_2)[x] = \overline{f}(g_1,g_2) x \overline{f}(g_1,g_2)^{-1}$. Soit alors l'application $\mu_{L,\overline{f}} : G \times G \times G \longrightarrow N$ définie, pour $g_1, g_2, g_3 \in G$, par

$$\mu_{L,\overline{f}}(g_1,g_2,g_3) = L(g_1)\left[\overline{f}(g_2,g_3)^{-1}\right] \overline{f}(g_1, g_2 g_3)^{-1} \overline{f}(g_1 g_2, g_3) \overline{f}(g_1, g_2)$$

Proposition 10.— *L'application $\mu_{L,\overline{f}}$ ainsi définie est un 3-cocycle à valeurs dans C relativement à l'action φ induite par $\widehat{\Phi}$.*

Si L' est un autre relevé de $\widehat{\Phi}$ et $\overline{f'}$ est un relevé de l'application f' associée à L', alors les 3-cocycles $\mu_{L,\overline{f}}$ et $\mu_{L',\overline{f'}}$ diffèrent d'un 3-cobord. Réciproquement, si α est un 3-cocycle dans la même classe que $\mu_{L,\overline{f}}$ dans $H^3_\varphi(G,C)$, alors il existe L' un autre relevé de $\widehat{\Phi}$ et $\overline{f'}$ est un relevé de l'application f' associée à L' tels que $\alpha = \mu_{L',\overline{f'}}$.

Preuve : L'image dans $\mathrm{Int}(N)$ de $L(g_1)\left[\overline{f}(g_2,g_3)^{-1}\right]$ est $L(g_1) \circ f(g_2,g_3) \circ L(g_1)^{-1}$ et donc celle de $\mu_{L,\overline{f}}(g_1,g_2,g_3)$ vaut

$$\begin{array}{rl} & L(g_1) \circ f(g_2,g_3)^{-1} \circ L(g_1)^{-1} \circ f(g_1, g_2 g_3)^{-1} \circ f(g_1 g_2, g_3) \circ f(g_1, g_2) \\ = & L(g_1) \circ L(g_2) \circ L(g_3) \circ L(g_2 g_3)^{-1} \circ L(g_1)^{-1} \circ L(g_1) \circ L(g_2 g_3) \circ L(g_1 g_2 g_3)^{-1} \circ \\ & L(g_1 g_2 g_3) \circ L(g_3)^{-1} \circ L(g_1 g_2)^{-1} \circ L(g_1 g_2) \circ L(g_2)^{-1} \circ L(g_1)^{-1} \\ = & Id \end{array}$$

ce qui montre que $\mu_{L,\overline{f}}(g_1,g_2,g_3) \in \ker(N \longrightarrow \mathrm{Int}(N))$, noyau qui est précisément égal à C d'après ???. D'après la remarque 6-3 l'action φ d'un élément

$g \in G$ sur $x \in C$ eſt égale à $x^g = L(g)[x]$. Ainsi, pour tout $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$, on a

$$\begin{array}{rl}
& \mu_{L,\overline{f}}(g_2, g_3, g_4)^{g_1} \mu_{L,\overline{f}}(g_1, g_2, g_3)\mu_{L,\overline{f}}(g_1, g_2g_3, g_4) \\
= & L(g_1) \circ L(g_2)\left[\overline{f}(g_3, g_4)^{-1}\right] L(g_1)\left[\overline{f}(g_2, g_3g_4)^{-1}\right] L(g_1)\left[\overline{f}(g_2g_3, g_4)\right] \\
& L(g_1)\left[\overline{f}(g_2, g_3)\right] L(g_1)\left[\overline{f}(g_2, g_3)^{-1}\right] \overline{f}(g_1, g_2g_3)^{-1}\overline{f}(g_1g_2, g_3)\overline{f}(g_1, g_2) \\
& \mu_{L,\overline{f}}(g_1, g_2g_3, g_4) \\
= & L(g_1) \circ L(g_2)\left[\overline{f}(g_3, g_4)^{-1}\right] L(g_1)\left[\overline{f}(g_2, g_3g_4)^{-1}\right] L(g_1)\left[\overline{f}(g_2g_3, g_4)\right] \overline{f}(g_1, g_2g_3)^{-1} \\
& \overline{f}(g_1g_2, g_3)\overline{f}(g_1, g_2)\mu_{L,\overline{f}}(g_1, g_2g_3, g_4) \\
= & L(g_1) \circ L(g_2)\left[\overline{f}(g_3, g_4)^{-1}\right] L(g_1)\left[\overline{f}(g_2, g_3g_4)^{-1}\right] L(g_1)\left[\overline{f}(g_2g_3, g_4)\right] \\
& \mu_{L,\overline{f}}(g_1, g_2g_3, g_4)\overline{f}(g_1, g_2g_3)^{-1}\overline{f}(g_1g_2, g_3)\overline{f}(g_1, g_2) \\
& \text{(Car } \mu_{L,\overline{f}}(g_1, g_2g_3, g_4) \text{ eſt un élément de } C.\text{)} \\
= & L(g_1) \circ L(g_2)\left[\overline{f}(g_3, g_4)^{-1}\right] L(g_1)\left[\overline{f}(g_2, g_3g_4)^{-1}\right] L(g_1)\left[\overline{f}(g_2g_3, g_4)\right] \\
& L(g_1)\left[\overline{f}(g_2g_3, g_4)^{-1}\right] \overline{f}(g_1, g_2g_3g_4)^{-1}\overline{f}(g_1g_2g_3, g_4)\overline{f}(g_1, g_2g_3)\overline{f}(g_1, g_2g_3)^{-1} \\
& \overline{f}(g_1g_2, g_3)\overline{f}(g_1, g_2) \\
= & L(g_1) \circ L(g_2)\left[\overline{f}(g_3, g_4)^{-1}\right] L(g_1)\left[\overline{f}(g_2, g_3g_4)^{-1}\right] \overline{f}(g_1, g_2g_3g_4)^{-1}\overline{f}(g_1g_2g_3, g_4) \\
& \overline{f}(g_1g_2, g_3)\overline{f}(g_1, g_2) \\
= & \overline{f}(g_1, g_2)L(g_1) \circ L(g_2)\left[\overline{f}(g_3, g_4)^{-1}\right] \overline{f}(g_1, g_2)^{-1}\overline{f}(g_1, g_2)L(g_1)\left[\overline{f}(g_2, g_3g_4)^{-1}\right] \\
& \overline{f}(g_1, g_2g_3g_4)^{-1}\overline{f}(g_1g_2g_3, g_4)\overline{f}(g_1g_2, g_3)\overline{f}(g_1, g_2)\overline{f}(g_1, g_2)^{-1} \\
& \text{(On a conjugué par } \overline{f}(g_1, g_2)\text{, ce qui ne change rien puisqu'il s'agit d'un} \\
& \text{élément de } C.\text{)} \\
= & L(g_1g_2)\left[\overline{f}(g_3, g_4)^{-1}\right] \overline{f}(g_1, g_2)L(g_1)\left[\overline{f}(g_2, g_3g_4)^{-1}\right] \overline{f}(g_1, g_2g_3g_4)^{-1}\overline{f}(g_1g_2g_3, g_4) \\
& \overline{f}(g_1g_2, g_3) \\
= & L(g_1g_2)\left[\overline{f}(g_3, g_4)^{-1}\right] \overline{f}(g_1, g_2)L(g_1)\left[\overline{f}(g_2, g_3g_4)^{-1}\right] \overline{f}(g_1, g_2g_3g_4)^{-1}\overline{f}(g_1g_2, g_3g_4) \\
& \overline{f}(g_1, g_2)\overline{f}(g_1, g_2)^{-1}\overline{f}(g_1g_2, g_3g_4)^{-1}\overline{f}(g_1g_2g_3, g_4)\overline{f}(g_1g_2, g_3) \\
= & L(g_1g_2)\left[\overline{f}(g_3, g_4)^{-1}\right] \overline{f}(g_1, g_2)\mu_{L,\overline{f}}(g_1, g_2, g_3g_4)\overline{f}(g_1, g_2)^{-1}\overline{f}(g_1g_2, g_3g_4)^{-1} \\
& \overline{f}(g_1g_2g_3, g_4)\overline{f}(g_1g_2, g_3) \\
= & L(g_1g_2)\left[\overline{f}(g_3, g_4)^{-1}\right] \mu_{L,\overline{f}}(g_1, g_2, g_3g_4)\overline{f}(g_1g_2, g_3g_4)^{-1} \\
& \overline{f}(g_1g_2g_3, g_4)\overline{f}(g_1g_2, g_3) \\
& \text{(Car } \overline{f}(g_1, g_2)\mu_{L,\overline{f}}(g_1, g_2, g_3g_4)\overline{f}(g_1, g_2)^{-1} = \mu_{L,\overline{f}}(g_1, g_2, g_3g_4) \text{ puisque} \\
& \mu_{L,\overline{f}}(g_1, g_2, g_3g_4) \in C.\text{)} \\
= & L(g_1g_2)\left[\overline{f}(g_3, g_4)^{-1}\right] \overline{f}(g_1g_2, g_3g_4)^{-1}\overline{f}(g_1g_2g_3, g_4)\overline{f}(g_1g_2, g_3)\mu_{L,\overline{f}}(g_1, g_2, g_3g_4) \\
& \text{(Puisque } \mu_{L,\overline{f}}(g_1, g_2, g_3g_4) \in C \text{ commute avec tous les éléments de } N.\text{)} \\
= & \mu_{L,\overline{f}}(g_1g_2, g_3, g_4)\mu_{L,\overline{f}}(g_1, g_2, g_3g_4)
\end{array}$$

et donc $\mu_{L,\overline{f}}$ eſt bien un 3-cocycle à valeur dans C relativement à φ.

Dans la suite de cette preuve pour tout $x \in N$, on notera σ_x l'automorphisme intérieur de N relatif à x (i.e. $\sigma_x(y) = xyx^{-1}$ pour tout $y \in N$). Soit maintenant $L^{'}$ un autre relevé de $\widehat{\Phi}$. Pour tout $g \in G$, il exiſte $x(g) \in N$ tel que

$$L^{'}(g) = \sigma_{x(g)} \circ L(g)$$

Pour $g_1, g_2 \in G$, on a donc

$$\begin{array}{rcl}
f'(g_1,g_2) & = & L'(g_1g_2)\circ L'(g_2)^{-1}\circ L'(g_1)^{-1} \\
& = & \sigma_{x(g_1g_2)}\circ L(g_1g_2)\circ L(g_2)^{-1}\circ \sigma_{x(g_2)^{-1}}\circ L(g_1)^{-1}\circ \sigma_{x(g_1)^{-1}} \\
& = & \sigma_{x(g_1g_2)}\circ L(g_1g_2)\circ L(g_2)^{-1}\circ L(g_1)^{-1}\circ L(g_1)\circ \sigma_{x(g_2)^{-1}}\circ L(g_1)^{-1}\circ \sigma_{x(g_1)^{-1}} \\
& = & \sigma_{x(g_1g_2)}\circ f(g_1,g_2)\circ \sigma_{L(g_1)[x(g_2)^{-1}]}\circ \sigma_{x(g_1)^{-1}} \\
& = & \sigma_{x(g_1g_2)}\circ \sigma_{\overline{f}(g_1,g_2)}\circ \sigma_{L(g_1)[x(g_2)^{-1}]}\circ \sigma_{x(g_1)^{-1}} \\
& = & \sigma_{x(g_1g_2)\overline{f}(g_1,g_2)L(g_1)[x(g_2)^{-1}]x(g_1)^{-1}} \\
& = & \sigma_{\overline{f'}(g_1,g_2)}
\end{array}$$

On en déduit qu'il existe $\lambda(g_1,g_2)\in C$ tel que

$$\overline{f'}(g_1,g_2) = x(g_1g_2)\overline{f}(g_1,g_2)L(g_1)[x(g_2)^{-1}]x(g_1)^{-1}\lambda(g_1,g_2)$$

Soit alors $g_1,g_2,g_3\in G$, on a

$$\begin{array}{rl}
& \mu_{L,\overline{f}}(g_1,g_2,g_3)\mu_{L',\overline{f'}}(g_1,g_2,g_3)^{-1} \\
= & \mu_{L,\overline{f}}(g_1,g_2,g_3)\overline{f'}(g_1,g_2)^{-1}\overline{f'}(g_1g_2,g_3)^{-1}\overline{f'}(g_1,g_2g_3)L(g_1)\left[\overline{f'}(g_2,g_3)\right] \\
= & \mu_{L,\overline{f}}(g_1,g_2,g_3)\lambda(g_1,g_2)^{-1}x(g_1)L(g_1)[x(g_2)]\overline{f}(g_1,g_2)^{-1}x(g_1g_2)^{-1}\lambda(g_1g_2,g_3)^{-1} \\
& x(g_1g_2)L(g_1g_2)[x(g_3)]\overline{f}(g_1g_2,g_3)^{-1}x(g_1g_2g_3)^{-1}x(g_1g_2g_3)\overline{f}(g_1,g_2g_3) \\
& L(g_1)[x(g_2g_3)^{-1}]x(g_1)^{-1}\lambda(g_1,g_2g_3)L(g_1)[x(g_2g_3)]L(g_1)\left[\overline{f}(g_2,g_3)\right] \\
& L(g_1)\circ L(g_2)\left[x(g_3)^{-1}\right]L(g_1)\left[x(g_2)^{-1}\right]L(g_1)[\lambda(g_2,g_3)] \\
= & \lambda(g_1,g_2)^{-1}x(g_1)L(g_1)[x(g_2)]\overline{f}(g_1,g_2)^{-1}x(g_1g_2)^{-1}\lambda(g_1g_2,g_3)^{-1}x(g_1g_2) \\
& L(g_1g_2)[x(g_3)]\overline{f}(g_1g_2,g_3)^{-1}\overline{f}(g_1,g_2g_3)L(g_1)[x(g_2g_3)^{-1}]x(g_1)^{-1}\lambda(g_1,g_2g_3) \\
& L(g_1)[x(g_2g_3)]L(g_1)\left[\overline{f}(g_2,g_3)\right]\mu_{L,\overline{f}}(g_1,g_2,g_3)L(g_1)\circ L(g_2)\left[x(g_3)^{-1}\right] \\
& L(g_1)\left[x(g_2)^{-1}\right]L(g_1)[\lambda(g_2,g_3)] \\
& \text{(Puisque } \mu_{L,\overline{f}}(g_1,g_2,g_3)\in C.\text{)} \\
= & \lambda(g_1,g_2)^{-1}x(g_1)L(g_1)[x(g_2)]\overline{f}(g_1,g_2)^{-1}x(g_1g_2)^{-1}\lambda(g_1g_2,g_3)^{-1}x(g_1g_2) \\
& L(g_1g_2)[x(g_3)]\overline{f}(g_1g_2,g_3)^{-1}\overline{f}(g_1,g_2g_3)L(g_1)[x(g_2g_3)^{-1}]x(g_1)^{-1}\lambda(g_1,g_2g_3) \\
& L(g_1)[x(g_2g_3)]\overline{f}(g_1,g_2g_3)^{-1}\overline{f}(g_1g_2,g_3)\overline{f}(g_1,g_2)L(g_1)\circ L(g_2)\left[x(g_3)^{-1}\right] \\
& L(g_1)\left[x(g_2)^{-1}\right]L(g_1)[\lambda(g_2,g_3)] \\
= & \left(\lambda(g_2,g_3)^{g_1}\lambda(g_1g_2,g_3)^{-1}\lambda(g_1,g_2g_3)\lambda(g_1,g_2)^{-1}\right)x(g_1)L(g_1)[x(g_2)]\overline{f}(g_1,g_2)^{-1} \\
& L(g_1g_2)[x(g_3)]\overline{f}(g_1g_2,g_3)^{-1}\overline{f}(g_1,g_2g_3)L(g_1)[x(g_2g_3)^{-1}]x(g_1)^{-1}L(g_1)[x(g_2g_3)] \\
& \overline{f}(g_1,g_2g_3)^{-1}\overline{f}(g_1g_2,g_3)\overline{f}(g_1,g_2)L(g_1)\circ L(g_2)\left[x(g_3)^{-1}\right]L(g_1)\left[x(g_2)^{-1}\right] \\
& \text{(Puisque } \lambda \text{ est à valeurs dans } C.\text{)} \\
= & \left(\lambda(g_2,g_3)^{g_1}\lambda(g_1g_2,g_3)^{-1}\lambda(g_1,g_2g_3)\lambda(g_1,g_2)^{-1}\right)x(g_1)L(g_1)[x(g_2)]\overline{f}(g_1,g_2)^{-1} \\
& L(g_1g_2)[x(g_3)]\overline{f}(g_1g_2,g_3)^{-1}\overline{f}(g_1,g_2g_3)L(g_1)[x(g_2g_3)^{-1}]x(g_1)^{-1}L(g_1)[x(g_2g_3)] \\
& \overline{f}(g_1,g_2g_3)^{-1}\overline{f}(g_1g_2,g_3)L(g_1g_2)\left[x(g_3)^{-1}\right]\overline{f}(g_1,g_2)L(g_1)\left[x(g_2)^{-1}\right]
\end{array}$$

On en déduit finalement que $\mu_{L,\overline{f}}\mu_{L',\overline{f'}}^{-1}$ est le 3-cobord relatif à la 2-cochaine λ.

Ainsi, étant donnés deux groupes G et N et une action extérieure $\widehat{\Phi} : G \longrightarrow \mathrm{Out}(N)$, on peut associer au triplet $(G, N, \widehat{\Phi})$ un élément $\widehat{\mu}(G, N, \widehat{\Phi}) \in H^3_\varphi(G, C)$ où C désigne le centre de N. C'est la classe des applications $\mu_{L,\overline{f}}$ décrites précédemment. Cet élément sera appelé *l'invariant d'obstruction associé au triplet* $(G, N, \widehat{\Phi})$. Cette terminologie est motivée par le théorème suivant :

Théorème 11.— *Soient G et N deux groupes et $\widehat{\Phi} : G \longrightarrow \mathrm{Out}(N)$ une action extérieure de G sur N. Les propriétés suivantes*

i) il existe une extension de N par G relativement à l'action extérieure $\widehat{\Phi}$,

ii) l'invariant d'obstruction $\widehat{\mu}(G, N, \widehat{\Phi})$ est l'élément neutre de $H^3_\varphi(G, C)$,

sont équivalentes.

Preuve : $i) \Rightarrow ii)$ Soit $1 \longrightarrow N \xrightarrow{\sigma} \Gamma \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$ une extension de N par G relativement à l'action extérieure $\widehat{\Phi}$. On a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{Aut}(N) \arrow[d, "p"] \\ G \arrow[r, "\widehat{\Phi}"] \arrow[u, bend left, "s"] & \mathrm{Out}(N) \end{tikzcd}$$

et on considère une section s de π. Pour tout $g \in G$, on pose $L(g) = \Phi \circ s(g)$ et L est alors un relevé de $\widehat{\Phi}$ à $\mathrm{Aut}(N)$. Pour tout $x \in N$ et tout $g \in G$ on a $L(g)[x] = s(g)xs(g)^{-1}$ et donc pour tout $g_1, g_2 \in G$,

$$\begin{array}{rcl} L(g_1g_2) \circ L(g_2)^{-1} \circ L(g_1)^{-1}[x] & = & f(g_1, g_2)[x] \\ & = & s(g_1g_2)s(g_2)^{-1}s(g_1)^{-1}xs(g_1)s(g_2)s(g_1g_2)^{-1} \end{array}$$

on peut donc poser $\overline{f}(g_1, g_2) = s(g_1g_2)s(g_2)^{-1}s(g_1)^{-1}$ et $\overline{f}$ devient un relevé de f à N. On a alors, pour tout $g_1, g_2, g_3 \in G$,

$$\begin{array}{rl} & \mu_{L,\overline{f}}(g_1, g_2, g_3) \\ = & L(g_1)\left[\overline{f}(g_2, g_3)^{-1}\right]\overline{f}(g_1, g_2g_3)^{-1}\overline{f}(g_1g_2, g_3)\overline{f}(g_1, g_2) \\ = & s(g_1)\left(s(g_2g_3)s(g_3)^{-1}s(g_2)^{-1}\right)^{-1} s(g_1)^{-1}\left(s(g_1g_2g_3)s(g_2g_3)^{-1}s(g_1)^{-1}\right)^{-1} \\ & s(g_1g_2g_3)s(g_3)^{-1}s(g_1g_2)^{-1}s(g_1g_2)s(g_2)^{-1}s(g_1)^{-1} \\ = & s(g_1)s(g_2)s(g_3)s(g_2g_3)^{-1}s(g_1)^{-1}s(g_1)s(g_2g_3)s(g_1g_2g_3)^{-1}s(g_1g_2g_3)s(g_3)^{-1} \\ & s(g_1g_2)^{-1}s(g_1g_2)s(g_2)^{-1}s(g_1)^{-1} \\ = & 1 \end{array}$$

ce qui prouve bien que $\widehat{\mu}(G, N, \widehat{\Phi})$ (qui est la classe dans $H^3_\varphi(G, C)$ de $\mu_{L,\overline{f}}$) est l'élément neutre.

$ii) \Rightarrow i)$ Si $\widehat{\mu}(G, N, \widehat{\Phi})$ est le neutre de $H^3_\varphi(G, C)$ alors, d'après la proposition 10, il existe un relevé L de $\widehat{\Phi}$ et un relevé $\overline{f}$ de l'application f associée à L tels que

$\mu_{L,\overline{f}} \equiv e$. Considérons alors sur l'ensemble $\Gamma = N \times G$ la loi de composition $*$ définie pour, $(x,g),(x',g')$, par

$$(x,g)*(x',g') = (xL(g)[x']\overline{f}(g,g')^{-1}, gg')$$

C'eſt une loi de groupe :

• Associativité de $*$: soient $(x,g),(x',g'),(x'',g'') \in \Gamma$, on a d'une part

$$\begin{aligned}
& \big((x,g)*(x',g')\big)*(x'',g'') \\
= \;& (xL(g)[x']\overline{f}(g,g')^{-1}, gg')*(x'',g'') \\
= \;& (xL(g)[x']\overline{f}(g,g')^{-1}L(gg')[x'']\overline{f}(gg',g'')^{-1}, gg'g'') \\
= \;& (xL(g)[x']\overline{f}(g,g')^{-1}f(g,g')\circ L(g)\circ L(g')[x'']\overline{f}(gg',g'')^{-1}, gg'g'') \\
= \;& (xL(g)[x']\overline{f}(g,g')^{-1}\overline{f}(g,g')L(g)\circ L(g')[x'']\overline{f}(g,g')^{-1}\overline{f}(gg',g'')^{-1}, gg'g'') \\
= \;& (xL(g)[x']L(g)\circ L(g')[x'']\overline{f}(g,g')^{-1}\overline{f}(gg',g'')^{-1}, gg'g'')
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
& (x,g)*\big((x',g')*(x'',g'')\big) \\
= \;& (x,g)*(x'L(g')[x'']\overline{f}(g',g'')^{-1}, g'g'') \\
= \;& (xL(g)[x']L(g)\circ L(g')[x'']L(g)[\overline{f}(g',g'')^{-1}]\overline{f}(g,g'g'')^{-1}, gg'g'')
\end{aligned}$$

On en déduit que $*$ eſt associative si et seulement si pour tout $x,x',x'' \in N$ et tout $g,g',g'' \in G$, on a

$$\begin{aligned}
& (xL(g)[x']L(g)\circ L(g')[x'']L(g)[\overline{f}(g',g'')^{-1}]\overline{f}(g,g'g'')^{-1}, gg'g'') \\
= \;& (xL(g)[x']L(g)\circ L(g')[x'']\overline{f}(g,g')^{-1}\overline{f}(gg',g'')^{-1}, gg'g'')
\end{aligned}$$

Ceci équivaut à ce que pour tout $g,g',g'' \in G$, on ait

$$L(g)[\overline{f}(g',g'')^{-1}]\overline{f}(g,g'g'')^{-1} = \overline{f}(g,g')^{-1}\overline{f}(gg',g'')^{-1}$$

ou encore à ce que $\mu_{L,\overline{f}} \equiv 1$.

• Notons e le neutre de G. Pour tout $g \in G$, on a $f(e,g) = L(g)\circ L(g)^{-1}L(e)^{-1} = L(e)^{-1}$. On en déduit que $\overline{f}(e,g)$ eſt conſtant, notons x_0 cette conſtante. On a alors, pour tout $(x,g) \in \Gamma$,

$$(x,g)*(x_0,e) = (xL(g)[\overline{f}(e,g)]\overline{f}(g,e)^{-1}, g)$$

Maintenant, puisque $\mu_{L,\overline{f}} \equiv 1$, on a

$$L(g)[\overline{f}(e,g)]\overline{f}(g,e)^{-1} = 1$$

(choix de $g_1 = g$, $g_2 = e$ et $g_3 = g$) et donc $(x,g)*(x_0,e) = (x,g)$. De même, on a

$$(x_0,e)*(x,g) = (\overline{f}(e,g)L(e)[x]\overline{f}(e,g)^{-1}, g) = (L(e)^{-1}\circ L(e)[x], g) = (x,g)$$

Ainsi, (x_0, e) est un élément neutre pour $*$.

• Inversibilité : soit $(x,g) \in \Gamma$, on a

$$\begin{array}{rcl} (x,g) * (L(g)^{-1}\left[x^{-1}\overline{f}(e,g)\overline{f}(g,g^{-1})\right], g^{-1}) & = & (xx^{-1}\overline{f}(e,g)\overline{f}(g,g^{-1})\overline{f}(g,g^{-1})^{-1}, e) \\ & = & (x_0, e) \end{array}$$

et donc $(x,g)^{-1} = (L(g)^{-1}\left[x^{-1}\overline{f}(e,g)\overline{f}(g,g^{-1})\right], g^{-1})$ pour la loi $*$.

$(\Gamma, *)$ est donc bien un groupe et la projection sur le deuxième facteur $\pi : \Gamma \longrightarrow G$ est visiblement un épimorphisme de groupe, de noyau (ensembliste) $N \times \{e\}$. Comme $f(e,e) = L(ee)L(e)^{-1}L(e)^{-1}$ on en déduit que $L(e) = f(e,e)^{-1}$. Ainsi donc, si l'on considère l'application $\sigma : N \longrightarrow \Gamma$ définie, pour $x \in N$, par

$$\sigma(x) = (xx_0, e) = (x\overline{f}(e,e), e)$$

alors pour tout $x, x' \in N$ on a

$$\begin{array}{rcl} \sigma(x) * \sigma(x') & = & (x\overline{f}(e,e), e) * (x'\overline{f}(e,e), e) \\ & = & (x\overline{f}(e,e)L(e)[x'\overline{f}(e,e)]\overline{f}(e,e)^{-1}, e) \\ & = & (x\overline{f}(e,e)\overline{f}(e,e)^{-1}x'\overline{f}(e,e)\overline{f}(e,e)^{-1}\overline{f}(e,e)^{-1}, e) \\ & = & (xx'\overline{f}(e,e), e) \\ & = & \sigma(xx') \end{array}$$

et donc σ est un monomorphisme de groupe induisant un isomorphisme sur le noyau de π. On en conclue que

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{\sigma} \Gamma \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

est une extension de N par G. D'après la proposition 4 l'action extérieure $\widehat{\Psi}$ de G sur N induite par cette suite exacte est entièrement définie par la donnée d'une section s de π. Choisissons la section s définie, pour $g \in G$, par

$$s(g) = (x_0, g)$$

et notons $\Psi : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ l'application définie par cette section (voir le paragraphe qui précède la proposition 4). Pour tout $g \in G$ et tout $x \in N$, on a

$$\begin{array}{rcl} \Psi_g(x) & = & \sigma^{-1}\left(s(g) * \sigma(x) * s(g)^{-1}\right) \\ & = & \sigma^{-1}\left((x_0, g) * (xx_0, e) * (L(g)^{-1}[\overline{f}(g,g^{-1})], g^{-1})\right) \\ & = & \sigma^{-1}\left((x_0L(g)[x]L(g)[x_0]\overline{f}(g,e)^{-1}, g) * (L(g)^{-1}[\overline{f}(g,g^{-1})], g^{-1})\right) \\ & = & \sigma^{-1}\left((x_0L(g)[x], g) * (L(g)^{-1}[\overline{f}(g,g^{-1})], g^{-1})\right) \\ & = & \sigma^{-1}\left((x_0L(g)[x]\overline{f}(g,g^{-1})\overline{f}(g,g^{-1})^{-1}, e)\right) \\ & = & \sigma^{-1}((x_0L(g)[x], e)) \\ & = & L(g)[x] \end{array}$$

On a donc $\Psi_g = L(g)$ pour tout $g \in G$, et donc $\widehat{\Psi} = \widehat{\Phi}$. L'action extérieure de G sur N induite par la suite exacte est bien $\widehat{\Phi}$.

2.3.2 Classification

Dans cette partie on suppose donné un triplet $(N, G, \phi : G \longrightarrow \mathrm{Out(N)})$ ainsi qu'un relevé $L : G \longrightarrow \mathrm{Aut(N)}$ et $f : G \times G \longrightarrow N$ tels que $\mu_{L,\overline{f}} \equiv e$. D'après la démonstration du théorème 11, on a alors qu'une extension est donnée par : $\Gamma = N \times G$ où la loi de composition $*$ est définie par

$$(x, g) * (x', g') = (xL(g)[x']\overline{f}(g, g')^{-1}, gg')$$

On dit que le couple $(L, \overline{f})$ est équivalent au couple $(L', \overline{f'})$ s'il existe un isomorphisme

$$\tau : (N \times G, \mu_{L,\overline{f}}) \longrightarrow (N \times G, \mu_{L',\overline{f'}})$$

tel que $\tau(1 \times N)$ soit l'identité et qu'il induise une application $\widehat{\tau} : G \longrightarrow G$ qui soit aussi l'identité.

En fait cette notion d'équivalence et celle d'extensions équivalentes sont les mêmes.

Proposition 12.— *Tout homomorphisme $\tau : (N \times G, \mu_{L,\overline{f}}) \longrightarrow (N \times G, \mu_{L',\overline{f'}})$ tel que $\tau|_N = id$ et que l'application quotient $\widehat{\tau} : G \longrightarrow G$ est également l'identité est de la forme $\tau(n, g) = (\kappa(g)n, g)$ où $\kappa(g) = c(g)n(g)^{-1}$ avec $c(g) \in G$ et $L'(g) = \sigma_{n(g)} \circ L(g)$.*

Preuve : On a $(n, 1) \longrightarrow (n, 1)$ et $(1, g) \longrightarrow (\kappa(g), g)$ pour un $\kappa : G \longrightarrow N$ par hypothèse. On a donc que $(1, g)(n, 1) \longrightarrow (\kappa(g), g)(n, 1)$ qui vaut $(\kappa(g)L'(g)[n], g)$. Mais on a aussi $(1, g)(n, 1) = (L(g)[n], g) = (L(g)[n], 1)(1, g)$ qui a pour image $(L(g)[n], 1)(\kappa(g), g) = (L(g)[n]\kappa(g), g)$.
Par identification on obtient donc $\kappa(g)L'(g)[n] = L(g)[n]\kappa(g)$. D'où le résultat en utilisant $L'(g) = \sigma_{n(g)} \circ L(g)$.

Lemme 13.— *On suppose que*

$$\overline{f'}(g, g') = n(gg')\overline{f}(g, g')L(g)[n(g')^{-1}]n(g)^{-1}$$

alors, en posant $\kappa(g) = n(g)^{-1}$, on a l'équivalence $(N \times G, \mu_{L,\overline{f}}) \sim (N \times G, \mu_{L',\overline{f'}})$ où $L'(g) = \sigma_{n(g)} \circ L(g)$.

Preuve : En posant $\tau(1, g) = (n(g)^{-1}, g)$ on a que $\tau((1, g)(1, g')) = \tau(1, g)\tau(1, g')$. En effet, d'une part $\tau((1, g)(1, g')) = \tau(\overline{f}(g, g')^{-1}, gg') = (\overline{f}(g, g')^{-1}n(gg')^{-1}, gg')$ et d'autre part

$$\begin{aligned} \tau(1, g)\tau(1, g') &= (n(g)^{-1}, g)(n(g')^{-1}, g') \\ &= (n(g)^{-1}L'(g)[n(g')^{-1}]\overline{f'}(g, g')^{-1}, gg') \end{aligned}$$

Or par hypothèse,

$$\overline{f'}(g, g') = n(gg')\overline{f}(g, g')L(g)[n(g')^{-1}]n(g)^{-1}$$

D'où le résultat en utilisant $L'(g) = n(g)L(g)n(g)^{-1}$.

Pour notre classification on peut donc supposer que $L = L'$.

Théorème 14.— *$(N \times G, \mu_{L,\overline{f}}) \sim (N \times G, \mu_{L,\overline{f'}})$ si et seulement si on peut écrire $\overline{f'}(g_1, g_2) = \overline{f}(g_1, g_2)k(g_1, g_2)$ où $k : G \times G \longrightarrow C$ est un 2-cobord.*

Preuve : On suppose que τ existe. On a d'une part :

$$\begin{aligned} \tau((1,g)(1,g')) &= \tau(\overline{f}(g,g')^{-1}, gg') \\ &= (\kappa(gg')\overline{f}(g,g')^{-1}, gg'), \end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned} \tau(1,g)\tau(1,g') &= (\kappa(g), g)(\kappa(g'), g') \\ &= (\kappa(g)L(g)[\kappa(g')]\overline{f'}(g,g')^{-1}, gg'). \end{aligned}$$

Comme $L = L'$, $\kappa(g) \in C$ pour tout $g \in G$. Par identification, on obtient que : $\overline{f'}(g,g') = f(g,g')L(g)[\kappa(g')]\kappa(gg')^{-1}\kappa(g)$. Or on a que $L(g)[\kappa(g')] = \kappa(g')^g$ donc en posant $k(g,g') = \kappa(g')^g\kappa(gg')^{-1}\kappa(g)$, k est bien un 2-cobord.

Réciproquement, on définit $f'(g,g')$ comme dans le lemme précédent. Cette définition est la même que celle utilisée dans la preuve da la proposition 10 avec $\lambda(g,g') = 1$ pour tout $(g_1, g_2) \in G^2$. Or dans cette même démonstration nous avons vu que $\mu_{L,\overline{f}}$ et $\mu_{L',\overline{f'}}$ diffèrent du 3-cobord relatif à la 2-cochaine λ. Comme $\lambda = 1$ ici, on en déduit que $\mu_{L,\overline{f}} = \mu_{L,\overline{f'}} = 1$. On a donc l'équivalence attendue.

Théorème 15.— *L'ensemble des classes d'équivalence d'extensions de N par G pour l'action ϕ est isomorphe à $H^2_\phi(G, C)$.*

Preuve : Si $\mu_{L,\overline{f}} = \mu_{L,\overline{f'}} = 1$ alors $\mu_{L,\overline{f}}$ et $\mu_{L,\overline{f'}}$ diffèrent d'un 2-cobord. Réciproquement si on pose pour tout $(g_1, g_2) \in G^2, \overline{f'}(g_1, g_2) = \overline{f}(g_1, g_2)h(g_1, g_2)$ où h est un 2-cobord alors $\mu_{L,\overline{f}} = \mu_{L,\overline{f'}} = 1$.

Donc h est un 2-cobord si et seulement, en posant $(g_1, g_2) \in G^2, \overline{f'}(g_1, g_2) = \overline{f}(g_1, g_2)h(g_1, g_2)$, on a que $\mu_{L,\overline{f}} = \mu_{L,\overline{f'}} = 1$. De plus f est un 2-cocycle (on utilise l'associativité de la loi comme dans la preuve de la proposition 7).

Mais les choix possibles de $\overline{f'}$ représentent l'ensemble des extensions possibles.

Ainsi le théorème précédent conclue la démonstration.

2.4 Chaque élément de $H^3_\Phi(G, C)$ représente une obstruction

La construction "Pull-back".

Nous allons présenter ici une construction d'extension dans un cas très général que l'on utilisera dans le paragraphe suivant.

Définition 16.— *Soient G_1, G_2, G_3 trois groupes, $f_1 : G_1 \longrightarrow G_3, f_2 : G_2 \longrightarrow G_3$ deux homomorphismes. Alors on définit le "pull-back"*

$$G_1 \times_{G_3} G_2 = \{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2, f_1(g_1) = f_2(g_2) \in G_3\}$$

.

En restreignant, les deux projections $p_i : G_1 \times G_2 \longrightarrow G_i$, on obtient deux applications $p_i : G_1 \times_{G_3} G_2 \longrightarrow G_i$ et le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} G_1 \times_{G_3} G_2 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & G_1 \arrow[d, "f_1"] \\ G_2 \arrow[r, "f_2"] & G_3 \end{tikzcd}$$

Lemme 17.— *$G_1 \times_{G_3} G_2$ est un groupe et p_1, p_2 définis précédemment sont des homomorphismes.*

Preuve : Soient $(g_1, g_2), (g_1', g_2') \in G_1 \times_{G_3} G_2$. Comme f_1 et f_2 sont des homomorphismes, on a que $f_1(g_1 g_1') = f_1(g_1) f_1(g_1') = f_2(g_2) f_2(g_2') = f_2(g_2 g_2') \in G_3$ et que $f_1(g_1^{-1}) = f_1(g_1)^{-1} = f_2(g_2)^{-1} = f_2(g_2^{-1}) \in G_3$ i.e. $(g_1 g_1', g_2 g_2'), (g_1^{-1}, g_2^{-1}) \in G_1 \times_{G_3} G_2$ ce qui signifie que $G_1 \times_{G_3} G_2$ est bien un groupe.

Le fait que les applications p_1 et p_2 sont des homomorphismes en découle immédiatement.

Théorème 18.— *Supposons que $f_1 : G_1 \longrightarrow G_3$ est surjective, de noyau N. Alors $p_2 : G_1 \times_{G_3} G_2 \longrightarrow G_2$ est surjective de noyau N' isomorphe à N. On a donc une extension*

$$N' \triangleleft G_1 \times_{G_3} G_2 \longrightarrow G_2 = (G_1 \times_{G_3} G_2)/N'$$

où $N' = (N, 1)$.

Preuve : Pour $g_2 \in G_2$, on peut toujours trouver $g_1 \in G_1$ tel que $f_2(g_2) = f_1(g_1)$ car f_1 est surjective. Ainsi p_2 est également surjective. Le noyau de p_2 est l'ensemble des couples $(n, 1)$ avec $f_1(n) = 1 \in G_3$ ce qui est précisément N.

Une certaine extension universelle.

Pour un groupe G donné, pour tout système de générateurs $\{g_j, j \in J\}$ il existe une application surjective p du groupe libre $F(J)$ sur G, $p : F(J) \longrightarrow G$ définie par $p(j) = g_j$. Notons $N(J)$ le noyau de p. On a alors que $N(J) \triangleleft F(J) \to G$ est une extension de $N(J)$ par G. De plus cette extension est universelle dans le sens où si $N \triangleleft L \to G$ est une extension par G alors il existe un homomorphisme

$\Phi : F(J) \longrightarrow L$ tel que $\Phi|_{N(J)}$ a une image dans N et $\widehat{\Phi} : G \longrightarrow G$ eſt l'identité. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} N(J) \arrow[r] \arrow[d] & F(J) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"] & G \arrow[d, "="] \\ N \arrow[r] & L \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

$N(J)$ eſt libre comme sous groupe d'un groupe libre.
Nous allons maintenant étudier le cas particulier où $J = G\backslash\{1\}$ en utilisant la méthode du "pull-back". La surjeſtion $p : F(J) \longrightarrow G$ eſt donnée par $p([g]) = g$ où l'on note le générateur du groupe libre correspondant à l'élément $g \in J$ par $[g]$. Pour deux éléments $g, g' \in J$, on définit $|g, g'|$ par le produit $[g']^{-1}[g]^{-1}[gg']$. On a évidemment $|g, g'| \in \mathrm{Ker}(p)$.

Lemme 19.— *$N(J)$ eſt le groupe libre de générateurs $\{|g,g'|, g, g' \in J\}$ avec une aſtion définie par la formule $(\left|g', g''\right|)^{g^{-1}} = \left|g'', g\right|\left|g', g''g\right|\left|g'g'', g\right|^{-1}$.*

Preuve : On a :

$$\begin{array}{rcl} [g]^{-1}[g,g''][g] & = & [g]^{-1}[g'']^{-1}[g']^{-1}[g'g''][g] \\ & = & ([g]^{-1}[g'']^{-1}[g''g])([g''g]^{-1}[g']^{-1}[g'g''g])([g'g''g]^{-1}[g'g''][g]) \end{array}$$

Le groupe généré par $\{|g,g'|, g, g' \in J\}$ eſt donc diſtingué dans $F(J)$ et l'aſtion eſt bien celle mentionnée.

Pour vérifier que ces éléments génèrent $N(J)$, posons $M =< \{|g,g'|, g, g' \in J\} >$ et considérons $U = \bigsqcup_{g \in J} [g]M$. Montrons que $U = F(J)$. On a naturellement $U \subset F(J)$.
Soit $[g_r][g_{r-1}]\ldots[g_1] \in F(J)$ un mot quelconque. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} [g_1 g_2 \cdots g_r]^{-1}[g_r][g_{r-1}]\cdots[g_1] & = & \\ ([g_1 \cdots g_r]^{-1}[g_r][g_1 \cdots g_{r-1}])([g_1 \cdots g_{r-1}]^{-1}[g_{r-1}][g_1 \cdots g_{r-2}]) & & \\ & = & \ldots [g_1 g_2])([g_1 g_2]^{-1}[g_2][g_1]) \end{array}$$

qui appartient à M. Le mot de départ appartient donc à $[g_1 \ldots g_r]M \subset U$.
On admet que les $|g, g'|$ sont des générateurs libres.

Corrolaire 20.— *L'application $l : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$ définie par*

$$\forall (g, g', g'') \in G^3, l(g)(\left|g', g''\right|) = \left|g'', g\right|\left|g', g''g\right|\left|g'g'', g\right|^{-1}$$

induit une injeſtion $\phi : G \longrightarrow \mathrm{Out}(M)$ dès que $G \not\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De plus, pour ce ϕ, on a $F(J) = \mathrm{Aut}(M) \times_{\mathrm{Out}(M)} G$.

Preuve : Tout automorphisme $\alpha : F(J) \longrightarrow F(J)$ envoie nécessairement le sous groupe commutatif sur lui-même et induit donc un automorphisme

$$F(J)/F(J)' \longrightarrow F(J)/F(J)'$$

où $F(J)'$ est la sous groupe commutatif. Or $F(J)/F(J)'$ est le groupe libre abélien de l'ensemble J et tout automorphisme intérieur de $F(J)$ est envoyé sur l'identité dans $F(J)/F(J)'$.

Remarquons que $l(g)(\left|g,g^{-1}\right|) = \left|g^{-1},g\right|$ donc $l(g)$ n'est pas l'identité sur $F(J)/F(J)'$ sauf si $g = g^{-1}$ i.e. $g^2 = 1$. Supposons $g^2 = 1$. Il y a alors un $h \in G$ tel que g, h, gh soient 2 à 2 distincts (car $G \ncong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Alors $l(g)(|h,g|) = |g,g||hg,g|^{-1}$ et, à nouveau, $l(g)$ n'est pas l'identité sur $F(J)/F(J)'$.

Remarque 21.— Si $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a $J = \{g\}$ et $F(J) = \mathbb{Z}$. Dans ce cas l'extension est $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et ϕ est l'application triviale.

Théorème 22.— *Supposons $G \ncong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour une action $\widehat{\phi} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(C)$ et un élément $\{a\} \in H^3_{\widehat{\Phi}}(G,C)$ donnés, il existe un groupe N de centre C et un homomorphisme $\phi : G \longrightarrow \mathrm{Out}(N)$ induisant $\widehat{\phi}$ par restriction sur C tel que l'obstruction d'extension pour ϕ est $\{a\}$.*

Preuve : Soit $N' = F(J)$ où $J = (G\backslash\{1\})^2$ et on définit l'action de G sur N' comme précédemment par

$$(\tilde{l}(g))(\left|g',g''\right|) = \left|g'',g\right|\left|g',g''g\right|\left|g'g'',g\right|^{-1}.$$

Comme $G \ncong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, le groupe libre N' est non commutatif et a donc un centre trivial.
On étend l'action au produit $N = C \times N'$ par

$$\begin{array}{rcl} L(g)[(c,1)] & = & \widehat{\phi}(g^{-1}(c),1) \\ L(g)[(1,|g',g''|)] & = & (a(g,g'',g'),(\tilde{l}(g))^{-1}(|g',g''|)) \end{array}$$

où a est un 3-cocycle représentant $\{a\}$.

Cela définit bien une action car $\tilde{l}(g)$ est une action et le fait que $d_3(a)(h,g,g'',g') = 1$ nous donne

$$(a(g,g'',g'))^h a(h,g,g'')a(h,gg'',g')a(h,g,g''g') = a(hg,g'',g').$$

Comme on l'a vu dans le paragraphe précédent, on peut choisir $f'(g,g') = f(g,g')$ dans $N' = \mathrm{Int}(N)$ comme $|g,g'|$. Alors :

$$L(g_1)[\overline{f'}(g_2,g_3)]\overline{f'}(g_1g_2,g_3)^{-1}\overline{f'}(g_1,g_2g_3)\overline{f'}(g_1,g_2)^{-1} = a(g_1,g_2,g_3)$$

et l'obstruction est alors représentée par $\{a\}$.