Université Jean Monnet

—

Saint-Étienne

Philtre et Cavernes

Mémoire d'habilitation
à diriger les recherches

Présenté le 8 décembre 2001 par

Bruno Deschamps

Jury

Eva Bayer (Professeur à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne)

Jean-Marc Couveignes (Professeur à l'université Toulouse II)

Pierre Dèbes (Professeur à l'université Lille I)

Jean-Claude Douai (Professeur à l'université Lille I)

Guy Terjanian (Professeur à l'université Toulouse III)

Michel Waldschmidt (Professeur à l'université Paris VI)

Rapporteurs

Jean-Marc Couveignes (Professeur à l'université Toulouse II)

Jean-Claude Douai (Professeur à l'université Lille I)

Florian Pop (Professeur à l'université de Bonn)

Philtre et cavernes

Bruno DESCHAMPS

Introduction

1.— Rêver, peut-être...

Chaque homme est seul et tous se fichent de tous et nos douleurs sont une île déserte...

Albert Cohen

Je venais d'avoir 16 ans, j'étais alors en première scientifique et c'est à cette époque que je fis ma première vraie rencontre avec les mathématiques. Une rencontre qui allait conditionner la suite de ma vie. C'était un après-midi de classe comme un autre, j'avais math., j'aimais bien. Le cours se déroulait comme à son habitude, et puis il y eut cet instant. Il écrivit au tableau ce théorème d'arithmétique, mon premier théorème d'arithmétique, et il le démontra. C'était là, c'était magnifique, limpide, tellement limpide. J'ai ressenti comme un bien-être comme si, soudainement, il s'était créé une intimité entre ces symboles et ce jeune élève que j'étais. J'étais surement victime d'un philtre... Je regardais alors autour de moi, les visages impassibles, les stylos s'affairant sur les cahiers. Je regardais inquiet. Il devait bien y en avoir un qui ressentait ce que je ressentais? Combien étaient-ils? Ce n'était pas possible, étais-je donc le seul? Je scrutais du regard, mais je ne voyais rien. Passée l'émotion, je me suis senti bien seul, si seul... Je sus, longtemps après, que dans ces moments-là, on est toujours tout seul.

J'ai connu plus tard de semblables émotions, de ces émotions qui paraissent dérisoires, incompréhensibles; de ces émotions solitaires. En y repensant, je crois que la plus proche fut cette visite de la grotte de Cougnac. La bouleversante vision des peintures rupestres, l'intimité incroyable que peut, l'espace d'un instant, se créer entre une conscience et une création. Il y a pour moi une analogie entre la recherche mathématique et le monde des cavernes préhistoriques. Elles sont difficiles d'accès, elles ne se laissent pas visiter si facilement. Elles sont énigmatiques et fascinantes. Il y a quelque chose d'envoutant à regarder ces peintures maladroites et géniales. Il y a l'envie, l'envie de peindre à son tour, d'ajouter à la fresque, de se fondre dans le mystère. Vibrer avec la paroi, esquisser une courbe dans la pénombre de la torche et puis repartir. Savoir qu'il n'y a plus personne pour regarder, que le mystère s'est refermé, que la beauté n'existe que par les yeux qui la regardent, que l'émotion est à chaque fois unique et solitaire. Les mathématiques sont un dédale de cavernes ornées magnifiquement. Difficile de les visiter toutes, difficile d'y peindre parfois. Certaines sont gigantesques et presque inhumaines, mais sur les bords de certains grands couloirs existent quelques boyaux obscurs et secrets où j'ai voulu inscrire humblement quelques grafittis qui enivrèrent mon coeur. Comment parler de ça? Comment parler de l'émotion quand la recherche se résume à quelques lignes de symboles, obscures pour les uns, triviales pour les autres. Etais-je confronté perpétuellement à la dureté du petit sourire de celui qui comprend mais qui ne ressent pas la même chose que moi? Je touchais ainsi, en faisant des mathématiques, à cette idée universelle de la condition humaine : nous sommes seuls, tous seuls et la compréhension n'efface jamais cette solitude. Elle la rend surement encore plus médiocre.

Les mathématiques touchent probablement à l'universel, elles sont l'exercice ultime de l'esprit humain, celui qui dénonce et revendique la vanité et l'absurdité du monde. Leur nécessité est évidente.

Paris, jardin des archives
nationales, juillet 2001.

2.— Paradigme et cavernes.

Ce mémoire est composé de l'ensemble des articles de recherche que j'ai publiés depuis l'obtention de mon doctorat. Il correspond donc à mon activité de recherche pour les années 1997-2001. Depuis ma thèse, j'ai élargi ma découverte du paradigme de l'arithmétique et j'ai tenté de décliner l'activité de recherche dans ce domaine en plusieurs thèmes. Je présente ce travail en le subdivisant en trois parties : *théorie inverse de Galois*, *arithmétique des corps* et *théorie additive des nombres.* Bien sûr, les cavernes communiquant entre elles, cette subdivision paraîtra à certains un peu artificielle, en particulier en ce qui concerne les deux premiers thèmes, le troisième étant trés clairement à part du reste de mon travail. Toutefois, elle correspond pour moi à trois sentiments différents. La raison pour laquelle je tiens à séparer ici la théorie inverse de l'arithmétique des corps (alors que visiblement la problématique inverse de Galois est clairement une problématique d'arithmétique des corps), est que les méthodes dégagées ces dernières années pour aborder le problème touchent à d'autres domaines, en particulier à celui des revêtements algébriques, donc à d'autres considérations. La dernière classification AMS fait apparaitre la théorie inverse comme un thème à part entière (12F12). Force est de constater, dans cette branche, la spécificité des méthodes et l'évolution de la problématique vers d'autres choses moins liées aux corps (l'étude des surfaces arithmétiques par exemple). La caverne se ramifie...

Je vais, dans la suite de cette introduction, détailler chacun de ces travaux et tenter de les mettre en perspective. A la fin de ce mémoire, le lecteur trouvera un appendice sur la dimension diophantienne des corps. J'ai un peu travaillé sur ce sujet, mais les résultats de ce travail ne m'ont pas paru justifier une publication. Il y a toutefois quelques résultats susceptibles d'intéresser, j'ai donc tenu à les faire figurer quelque part. Mon mémoire d'habilitation m'a semblé être la place idéale.

2.1.— Théorie inverse de Galois [Des1], [DD1], [Des2], [DD2].

Ma thèse de doctorat concernait la théorie inverse de Galois, les travaux qu'elle présentait correspondent aux articles [Des1] et [DD1]. Je décidé de faire figurer dans ce mémoire ces articles, mais je ne m'étendrai pas dessus dans cette introduction.

• **Clôtures totalement réelles des corps de nombres ordonnables** (première partie de [Des2]).

Dans ma thèse figurait un travail préliminaire sur les clôtures totalement réelles. J'ai complété ce travail par la suite, ce qui a donné lieu à cet article. Il étudie certaines propriétés arithmétiques de la clôture totalement réelle d'un corps ordonnable, c'est-à-dire du corps obtenu en prenant l'intersection de toute les clotures réelles (i.e. les extensions algébriques ordonnables maximales) d'un corps ordonnable. Dans le cas de $\mathbb{Q}$, le corps ainsi obtenu est le corps $\mathbb{Q}^{tr}$ des nombres algébriques totalement réels (i.e. les éléments de $\overline{\mathbb{Q}}$ qui n'ont que des conjugués réels). D'importants travaux avaient été réalisés sur le corps $\mathbb{Q}^{tr}$. Le premier, dû à Fried, Haran et Volklein, établissait que le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}^{tr}$ était isomorphe au produit libre profini à une infinité non dénombrable de facteurs $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pop à montré que le corps $\mathbb{Q}^{tr}$ est un corps ample (il retrouve d'ailleurs le résultat précédent), on peut en déduire alors que le corps $\mathbb{Q}^{tr}(\sqrt{-1})$ est un corps PAC. Par ailleurs, un théorème de Weissauer affirmant alors que ce corps est hilbertien, on en déduit, par les travaux de Fried et Volklein, que le groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}^{tr}(\sqrt{-1})$ est prolibre (de rang $\aleph_0$).

Ces propriétés sont *a priori* spécifiques $\mathbb{Q}^{tr}$. J'examine dans [Des2], ce qui se passe dans le cas général, en particulier on regarde l'éventuelle proliberté du corps $K^{tr}(\sqrt{-1})$ où K^{tr} désigne la clôture totalement réelle d'un corps ordonnable K. Cette question peut se voir comme un analogue de la conjecture de Shafarevich pour les clôtures totalement réelles. En effet, la clôture cyclotomique du corps K^{tr} est précisément le corps $K^{tr}(\sqrt{-1})$. Dans le cas des corps de nombres ordonnables le résultat est vrai, le groupe de Galois absolu de $K^{tr}(\sqrt{-1})$ est isomorphe au groupe profini libre $\widehat{F}_\omega$ à une infinité dénombrable de générateurs. Dans le cas général, le résultat n'est pas toujours vrai. Je montre, en effet, que si K désigne un corps tel que $K^{tr} = K$ alors $K((X))^{tr} = K((X))$. Il s'ensuit que le corps $K = \mathbb{R}((X))((Y))$ vérifie $K = K^{tr}$, mais alors $K^{tr}(\sqrt{-1}) = \mathbb{C}((X))((Y))$ et le groupe de Galois absolu de ce corps est alors isomorphe à $\widehat{\mathbb{Z}}\times\widehat{\mathbb{Z}}$. Ce groupe étant de dimension cohomologique 2 ne peut pas être prolibre (les groupes prolibres sont projectifs).

• **Corps ψ-libres et théorie inverse de Galois infinie** ([DD2]).

Cet article représente peut-être la partie la plus ambitieuse de mon travail de recherche. Il s'agit ici d'une collaboration (la deuxième) avec Pierre Dèbes, en théorie inverse de Galois. La problématique inverse classique consiste à étudier l'obstruction à ce qu'un groupe fini se réalise comme groupe de Galois sur un corps (problème inverse), resp. comme groupe de Galois d'une extension régulière d'un corps de fonctions (problème inverse régulier). Il est, semble-t-il, raisonnable de conjecturer que tous les groupes finis se réalisent sur $\mathbb{Q}$, mais clairement pas tous les groupes profinis. Une raison de cardinalité évidente donne déjà une obstruction. En effet, un groupe profini qui est groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ est un quotient de $G_\mathbb{Q} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, donc est de cardinal au plus $2^{\aleph_0}$. Par ailleurs, il existe des groupes profinis de cardinal aussi grand que l'on veut (puisque les produits cartésiens de groupes profinis sont des groupes profinis). Mais, même si l'on pense au cas restreint des groupes profinis de cardinal raisonnable, le problème est beaucoup moins clair. En fait, certains groupes très simples ne peuvent apparaitrent comme groupes de Galois sur $\mathbb{Q}$. Par exemple des puissances de $\mathbb{Z}_p$. En effet, si $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ était groupe de Galois d'une extension sur $L/\mathbb{Q}$, alors L serait un sous-corps de $\mathbb{Q}^{ab}$ et par suite $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ serait un quotient de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q})$. Maintenant, $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{ab}/\mathbb{Q}) \simeq \widehat{\mathbb{Z}}^* \simeq G \times \widehat{\mathbb{Z}}$ où G est le produit cartésien de groupes finis. Soit $\theta : G\times\widehat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p$ un morphisme surjectif et continu. Comme $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ est sans torsion et que G est topologiquement engendré par des éléments de torsion, on en déduit que $\theta_{|G} = 0$ et par suite $\theta(G\times\widehat{\mathbb{Z}})$ est topologiquement monogène. Comme $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ n'est pas monogène, on en déduit que θ ne peut pas être surjective.

Dans le même ordre d'idée, Serre note que $\mathbb{Z}_p$ n'est pas le groupe de Galois d'une extension régulière de $\mathbb{Q}(T)$. Le *branch cycle argument*, donné par Fried, montre qu'en fait $\mathbb{Z}_p$ n'est pas le groupe de Galois d'une extension régulière de $\mathbb{Q}_p(T)$. Ainsi, si la problématique inverse de Galois semble assez naturelle pour les groupes finis, elle semble beaucoup plus chaotique pour les groupes profinis.

L'idée de base de cet article est d'introduire et d'étudier une notion qui aplanit cette problématique : la ψ-liberté. Un corps K est dit ψ-libre, si tous les groupes profinis de rang topologique dénombrable (ce qui correspond à l'ensemble des groupes profinis métrisables) sont groupes de Galois sur K. Cette propriété est en fait équivalente, pour un corps K donné, à l'existence d'une extension galoisienne L/K de groupe de Galois $\widehat{F}_\omega$ (le groupe prolibre de rang $\aleph_0$). En terme de problème de plongement, la ψ-liberté se traduit de la manière suivante (proposition 1.2.) : un corps K est ψ-libre ssi pour tout système complet de groupes finis $(G_n, s_n)_n$ (i.e. système projectif indexé par $\mathbb{N}$ avec des morphismes surjectifs), il existe une tour d'extensions galoisiennes finies $(K_n)_n$ de K telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un isomorphisme $\varepsilon_n : \mathrm{Gal}(K_n/K) \to G_n$ qui rende commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(K_{n+1}/K) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(K_n/K) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \varepsilon_{n+1}} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \varepsilon_n} \\ G_{n+1} & \xrightarrow{s_{n+1}} & G_n \end{array}$$

On définit de même pour un corps de fractions rationnelles $K(T)$ la régulière ψ-liberté de $K(T)$ en rajoutant aux hypothèses que les extensions considérées sont régulières sur K.

La terminologie m'a été suggérée d'abord par le fait que la ψ-liberté s'énonce sous forme de problèmes de plongements et ensuite par le fait que les corps ω-libres (corps K tels que tout problème de plongement fini sur K admette une solution forte) sont ψ-libres. Il se trouve que la réciproque de cette dernière propriété est fausse en toute généralité. Dans cette perspective, nous donnons aussi des exemples de corps non ψ-libres satisfaisant toutefois au problème inverse de Galois classique. La ψ-liberté est donc une propriété strictement intermédiaire entre la propriété PIG (tout groupe fini est groupe de Galois sur K), qui est insuffisante pour déterminer le groupe de Galois absolu G_K, et celle d'ω-liberté, qui entraîne, d'après Iwasawa, que $G_K \simeq \widehat{F}_\omega$ lorsque K est dénombrable.

La ψ-liberté "passe" aux extensions de type fini (proposition 1.7); on en déduit que le groupe de Galois absolu d'un corps ψ-libre dénombrable est quotient de tous ses sous-groupes ouverts (corollaire 1.8 (b)). Dans cette perspective, nous montrons qu'aucun corps de nombres n'est ψ-libre, ce qui vient conforter une conjecture due à Uchida (remarque 1.9 (b)).

La partie principale de cette article consiste à étudier la régulière ψ-liberté d'un corps $K(T)$ dans certaines situations. Ainsi, nous montrons le

Théorème. — *Soit k un corps d'un des deux types suivants:*
(a) *corps valué hensélien de caractéristique et de caractéristique résiduelle nulles et contenant toutes les racines de l'unité,*
(b) *corps réel clos.*
Alors le groupe prolibre $\widehat{F}_\omega$ à une infinité dénombrable de générateurs, est groupe de Galois d'une extension régulière de $k(T)$ (i.e. $k(T)$ est régulièrement ψ-libre).

Ce résultat s'applique par exemple pour le corps $k = \mathbb{Q}^{ab}((x))$ des séries de Laurent formelles à coefficients dans $\mathbb{Q}^{ab}$ (type (a)) et pour $k = \mathbb{R}$ (type (b)). Dans la situation (a), mais avec caractéristique résiduelle $p > 0$ (*e.g.* $k = \mathbb{Q}_p\mathbb{Q}^{ab}$), notre méthode fournit une conclusion plus faible où $\widehat{F}_\omega$ doit être remplacé par le groupe $\widehat{F}_\omega^{(p')}$, son plus grand quotient d'ordre surnaturel premier à p (on peut remarquer que le groupe $\widehat{F}_\omega^{(p')}$ n'est, en fait, rien d'autre que le pro-$\mathcal{C}$-groupe libre $\widehat{F}_\omega(\mathcal{C})$ de rang $\aleph_0$ où $\mathcal{C}$ désigne la famille pleine des groupes finis d'ordres premiers à p).

L'énoncé avec $k = \mathbb{Q}_p\mathbb{Q}^{ab}$ et $\widehat{F}_\omega$ est plausible mais reste ouvert. Le passage à $k = \mathbb{Q}^{ab}$ paraît même possible mais semble plus difficile; un tel résultat serait une avancée certaine vers la conjecture de Shafarevich (remarque 3.4).

Notre résultat se place dans le prolongement des travaux de Fried, Harbater, Liu, Pop et des deux auteurs sur la réalisation des groupes *finis* comme groupes de Galois sur $\mathbb{Q}_p(T)$. Les résultats connus, sont retrouvés ici, comme cas particulier de notre méthode (§4.3 (d)).

Le cas où k est un corps réel clos est traité en §2 par des méthodes topologiques comme dans [DeFr]. Pour les corps valués complets non archimédiens, ces méthodes sont remplacées par des techniques de recollement d'espaces analytiques (géométrie rigide ou formelle), qui sont, depuis les travaux d'Harbater, un outil classique du domaine. Dans cet article, nous adaptons ces techniques à des questions de réalisation de "tours infinies" d'extensions. Nous donnons au §3.1 une méthode générale pour la construction d'une tour réalisant sur $k(T)$ un système projectif donné $(G_n)_{n\geq 0}$

de groupes finis. La compatibilité des étages de la tour, et notamment la condition qu'elle impose sur le choix des points de ramification, est l'obstacle technique majeur. Le passage à l'infini requiert de plus un argument type "Tychonoff". De cette construction se déduit le théorème ci-dessus (dans une forme plus générale).

Dans la dernière section, on adopte un point de vue modulaire. Combinée à des résultats de Fried, la contruction générale du §3 permet, étant donné un système *complet* $(G_n)_{n\geq 0}$ de groupes finis, de construire une tour d'espaces de modules de G-revêtements $\mathcal{H}_{G_n,r_n}$ $(n \geq 0)$ possédant des systèmes projectifs de points rationnels sur divers corps valués (de type (a) ou (b) comme ci-dessus) (§4.1). On obtient également l'existence de systèmes projectifs de points réels et de points p-adiques sur les *tours modulaires* de Fried (§4.2). Pour ce résultat, la méthode s'applique sur tout corps k hensélien de caractéristique 0, eventuellement de caractéristique résiduelle $p > 0$ (*e.g.* $k = \mathbb{Q}_p$) et sans qu'il soit besoin d'adjoindre de racines de l'unité. Une conséquence est le résultat suivant :

Théorème.— *Soient G un groupe fini et ℓ un nombre premier tel qu'il existe des générateurs de G d'ordre premier à ℓ. Soit k un corps valué hensélien de caractéristique* 0. *Alors le ℓ-revêtement universel de Frattini ${}_\ell\tilde{G}$ de G est groupe de Galois d'une extension galoisienne régulière de $k(T)$.*

2.2.— Arithmétique des corps [Des2], [Des3], [Des4], [Des5].

Qu'est-ce que l'arithmétique des corps? Du point de vue étymologique, le mot grec $\alpha\rho\iota\theta\mu\eta\tau\iota\kappa\acute{o}\sigma$ signifie "qui concerne les nombres". Si l'on voit un nombre comme élément d'un corps, l'arithmétique des corps est donc la discipline qui concerne les éléments d'un corps. En résumé, c'est la discipline qui étudie la façon d'additionner et de multiplier dans un corps. Ainsi, toute propriété algébrique qui concerne la structure d'un corps (structure attachée à ses lois de compositions) a visiblement à voir avec l'arithmétique des corps. Un des meilleurs moyens de mesurer la complexité arithmétique d'un corps est probablement de regarder ses extensions et les objets naturels qui leurs sont attachés, bref, faire de la théorie de Galois. Affirmer que la théorie de Galois est centrale en arithmétique des corps ne représente pas une très grande prise de risques, mais résumer cette discipline à cette théorie serait dangereux. Une idée à la mode en ce moment est de tenter de caractériser une propriété arithmétique de manière galoisienne, plus précisément de chercher à caractériser un corps K par son groupe de Galois absolu G_K (par exemple, un corps K est séparablement clos ssi G_K est trivial, un corps K est réel clos ssi $G_K \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ etc.). S'il y a un courant de pensée, un courant à la mode, qui pousse à ne s'intéresser à une propriété arithmétique que dans la perspective galoisienne; il me paraîtrait franchement dommage de réduire l'arithmétique des corps à cela, tant les idées dans ce domaine sont riches et variées. Bref, je suis dans l'embarras pour définir de manière à la fois précise et efficace ce qu'est l'arithmétique des corps, aussi resterai-je sur cette idée que l'arithmétique des corps est la discipline qui tend à décrire comment, dans un corps, on additionne et on multiplie.

• **Clôtures totalement réelles des corps de nombres ordonnables** (deuxième et troisième parties de [Des2]).

La deuxième partie de cet article s'intéresse au groupe de Brauer de K^{tr}. Pour $K = \mathbb{R}$, on a bien sûr $\mathrm{Br}(K^{tr}) = \mathbb{Z}/2$. Dans le cas $K = \mathbb{Q}$, en tenant compte du fait que $\mathbb{Q}^{tr}(\sqrt{-1})$ est projectif, on a $\mathrm{Br}(\mathbb{Q}^{tr}) \simeq \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{Z}/2$. En utilisant des résultats de Scheiderer, je montre qu'en toute généralité :

Théorème 3.— *Si K désigne un corps ordonnable, le groupe de Brauer de K^{tr} est un* 2*-groupe abélien élémentaire (i.e. une somme directe de groupes isomorphes à $\mathbb{Z}/2$).*

Je montre aussi ce résultat (qui figurait déjà dans ma thèse) :

Proposition 3.— *Si K désigne une extension algébrique ordonnable de $\mathbb{Q}$ alors le groupe de Brauer* $\mathrm{Br}(K^{tr})$ *est réduit à $\mathbb{Z}/2$ ssi le groupe de Klein $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ n'est pas groupe de Galois sur K^{tr}.*

La fin de cette partie est consacrée au calcul, pour un corps réel clos R donné, du groupe de Brauer du corps de séries de Laurent en "cascade" à coefficients dans R. Ainsi, on a :

Proposition 4.— *Soit R un corps réel clos (e.g. $R = \mathbb{R}$) et n un entier naturel. On a*

$$\mathrm{Br}(R((X_1))\cdots((X_n))) \simeq (\mathbb{Z}/2)^{\alpha_n}$$

avec $\alpha_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$.

Il est à noter que cette proposition est bien une conséquence de l'étude du groupe de Brauer de K^{tr} faite précédement, puisque d'après la partie 1 de cet article, on a pour $K = R((X_1))\cdots((X_n))$, $K^{tr} = K$ (i.e. $R((X_1))\cdots((X_n))$ est "totalement réellement clos").

La fin de cet article est consacrée à l'adaptation d'un idée de Glass et Ribenboim sur les automorphismes préservant l'ordre du groupe multiplicatif d'un corps ordonnable (i.e. les éléments $\sigma \in \mathrm{Aut}$ tels que $x \leq y \Rightarrow \sigma(x) \leq \sigma(y)$).

Glass et Ribenboim ont montré le résultat suivant :

Théorème.— *Soit G un sous-groupe multiplicatif de $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}^{+*}$ ordonné par l'ordre induit par $\mathbb{R}$. Le groupe des automorphismes de G préservant l'ordre,* $\mathrm{Aut}(G, \leq, .)$ *est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbb{Q}^{+*}, .)$.*

De manière plus précise, si σ désigne un automorphisme de G qui respecte l'ordre (i.e. $x < y \Rightarrow \sigma(x) < \sigma(y)$), alors il existe $r \in (\mathbb{Q}^{+*}, .)$ tel que pour tout $x \in G$,

$$\sigma(x) = x^r$$

Une conséquence (en utilisant un peu de transcendance) de ce résultat est que si $G = \mathbb{Q}^{+*}$ alors $\mathrm{Aut}(G, \leq, .) = \{Id\}$, le but de l'étude de Glass et Ribenboim était précisément ce résultat.

Dans la dernière partie de cet article j'étends un peu ce résultat pour l'appliquer au cas des clôtures totalement réelles. Ainsi, je montre le résultat suivant :

Proposition 5.— *Soit K un sous-corps réel de $\overline{\mathbb{Q}}$ ordonné par l'ordre réel. Il existe une partie $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers) tel que*

$$\mathrm{Aut}(K^{+*}, \leq, .) =< \mathcal{P}_0 >$$

Réciproquement, pour tout $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$, il existe un sous-corps réel de $\overline{\mathbb{Q}}$, K, tel que

$$\mathrm{Aut}(K^{+*}, \leq, .) =< \mathcal{P}_0 >$$

qui vient compléter l'étude de Glass et Ribenboim et ensuite je montre le

Lemme.— *Soit L/K une extension galoisienne telle que $L \subset \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$, si le groupe* $\mathrm{Aut}(K^{+*}, \leq, .)$ *est trivial alors le groupe* $\mathrm{Aut}(L^{+*}, \leq, .)$ *l'est aussi.*

qui permet alors de montrer le résultat central de cette partie:

Proposition 6.— *Soit K un corps de nombres ordonnable et $\leq_1$ un ordre sur K^{tr}. On a*

$$\mathrm{Aut}({K^{tr}}^{+*}, \leq_1, .) = 1$$

• **Le corps des séries de Puiseux généralisées** ([Des3]).

Si K désigne un corps muni d'une valeur absolue il existe un plus petit corps complet et algébriquement clos contenant K que je noterai $\widetilde{K}$ et que j'appellerai *fermeture* de K. Par exemple, pour $K = \mathbb{Q}$ muni de la valeur absolue usuelle, le corps $\widetilde{K}$ n'est rien d'autre que le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, si l'on munit $\mathbb{Q}$ de la valeur absolue p-adique, alors le corps $\widetilde{K}$ est traditionnelement noté $\mathbb{C}_p$. Le corps $\widetilde{K}$ s'obtient en prenant la complétion $\widehat{K}$ de K, puis la clôture algébrique de $\widehat{K}$ puis à nouveau la complétion de ce corps. Ainsi $\widetilde{K} = \widehat{\overline{\widehat{K}}}$. En effet, le lemme de Krasner assure que la complétion d'un corps algébriquement clos est lui-même algébriquement clos. Dans le cas du passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{C}$ deux opérations sont seulement nécessaires, dans le cas de $\mathbb{C}_p$ il faut les trois, le corps $\overline{\mathbb{Q}_p}$ étant réputé pour ne pas être complet[1]. L'intéret du corps $\widetilde{K}$ réside dans le fait que dans un tel corps on peut faire de l'analyse (i.e. de la théorie holomorphe).

Dans cet article, j'essaye de donner une description de $\widetilde{K}$ lorsque $K = k(T)$ est un corps de fractions rationnelles à coefficients dans un corps k de caractéristique 0. Cette description se fait au moyen de séries. J'ai appelé ce corps, *corps des séries de Puiseux généralisées*. Rappelons, pour commencer, que le corps des séries de Puiseux à coefficients dans un corps K est "moralement" l'ensemble des séries de la forme

$$\sum_{k \geq k_0} a_k X^{k/n}$$

avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_k \in K$. On le note $\mathrm{Puis}(K)$, c'est un corps valué par le prolongement naturel de la valuation des polynômes. L'intéret principal de ce corps réside dans le fait que si K est algébriquement clos de caractéristique nulle, alors la clôture algébrique de $K((X))$ est précisément le corps $\mathrm{Puis}(K)$. Ainsi, dans cette situation, le corps $\widehat{\overline{K(T)}}$ est précisément le corps $\mathrm{Puis}(K)$. Pour trouver $\widetilde{K(T)}$ il faut donc regarder la complétion du corps $\mathrm{Puis}(K)$. En effet, je remarque dans ce papier que quelque soit le corps K, $\mathrm{Puis}(K)$ n'est jamais complet.

Si K désigne un corps quelconque, je montre que le complété de $\mathrm{Puis}(K)$ est le corps $\widetilde{\mathrm{Puis}}(K)$ des séries de puiseux généralisées. Une description précise et rigoureuse de ce corps est donnée dans ce papier. Disons ici pour simplifier, qu'une série de Puiseux généralisée est une série de la forme

$$\sum_{n \geq 0} a_n X^{\gamma_n}$$

où $a_n \in K$ et $(\gamma_n)_n$ désigne une suite strictement croissante de rationnels tendant vers $+\infty$. L'addition de deux séries se faisant terme à terme et la multiplication comme celle au sens de Cauchy dans $K((X))$. La valuation ν d'une telle série est

[1] Il est à noter une bizarrerie toutefois. Il est bien connu que le degré de transcendance de l'extension $\mathbb{C}_p/\overline{\mathbb{Q}_p}$ est infini (même non dénombrable) et pourtant les deux corps $\overline{\mathbb{Q}_p}$ et $\mathbb{C}_p$ sont isomorphes! (pire ils sont tous deux isomorphes à $\mathbb{C}$!). En fait on a la propriété suivante :

Proposition.— *A cardinal non dénombrable et caractéristique donnés, il n'y a qu'un seul corps algébriquement clos (à isomorphisme près).*

La preuve en est simple : si K et L sont deux corps algébriquement clos de même cardinal et de même caractéristique, alors si K_0 et L_0 désignent des extensions transcendantes pures maximales dans K et L de leur sous-corps premier F, le degré de transcendance sur F de K et L étant égal à leur cardinal, on en déduit alors que K_0 et L_0 sont isomorphes. Mais, le théorème de Steiniz assurant que $\overline{K_0} \simeq \overline{L_0}$, on en déduit le résultat en remarquant que par maximalité, $\overline{K_0} = K$ et $\overline{L_0} = L$.

alors, comme il se doit, le plus petit exposant γ_n tel que $a_n \neq 0$. Les résultats principaux de ce papier sont :

Théorème 1.— *Le corps* $\widetilde{\mathrm{Puis}}(K)$ *est une extension du corps* $\mathrm{Puis}(K)$. *L'application* ν *est une valuation réelle qui étend la valuation naturelle de* $\mathrm{Puis}(K)$.

L'anneau de la valuation ν *est l'anneau des "séries entières de Puiseux généralisées", constitué des séries de Puiseux généralisées admettant un représentant de la forme* $\sum_{n\geq 0} u_{\gamma_n} X^{\gamma_n}$, *où* $(\gamma_n)_n$ *vérifie* $\gamma_0 \geq 0$.

Le corps résiduel de $\widetilde{\mathrm{Puis}}(K)$ *pour* ν *est le corps* K.

Théorème 2.— *Le corps valué* $(\widetilde{\mathrm{Puis}}(K), \nu)$ *est complet; c'est le complété de* $\mathrm{Puis}(K)$ *pour la valuation usuelle.*

Théorème 3.— *Si* K *désigne un corps de caractéristique nulle, la fermeture de* $\overline{K((X))}$ *(et donc de* $\overline{K(X)}$*) est égale à* $\widetilde{\mathrm{Puis}}(\overline{K})$.

Le cas de la caractéristique non nulle reste ouverte. Rappelons qu'un des problèmes fondamentaux en arithmétique reste la description de $\overline{K((X))}$ pour un corps K de caractéristique $\neq 0$. Même dans le cas $K = \overline{K}$, le corps $\mathrm{Puis}(K)$ n'est pas algébriquement clos (il manque au moins les extensions dites d'Artin-Schreier).

Il est à noter que Ribenboim s'est déjà intéressé à des corps de séries formelles beaucoup plus généraux que ceux de Laurent ou de Puiseux. Il construit des corps de séries dont les exposants sont à valeur dans un groupe additif ordonné.

• **Corps pythagoriciens, fermatiens et P-réduisants** ([Des4]).

Les corps pythagoriciens sont les corps où toute somme de carrés est encore un carré. Ainsi les corps algébriquement clos, les corps de caractéristique 2, sont des corps pythagoriciens, au contraire des corps de nombres qui ne le sont visiblement jamais. Les corps pythagoriciens jouent un rôle trés important en arithmétique des corps. Leur étude a été entreprise il y a déjà un certain temps. Signalons deux résultats les concernants :

Théorème.— (Diller et Dress) *Soit* K *un corps tel que* $-1 \notin K^2$. *Les propositions suivantes sont équivalentes:*

i) K *est pythagoricien;*

ii) K *ne possède pas d'extension cyclique de degré* 4.

Théorème.— *Si* L/K *est une extension telle que* L *soit pythagoricien et telle que* $[L : K] < +\infty$, *alors* K *est aussi pythagoricien.*

Si K désigne un corps, parmi toutes ses extensions algébriques pythagoriciennes, il en existe une plus petite (l'intersection de toutes) que l'on appelle la *clôture pythagoricienne* de K et que l'on note K^{pyth}. L'extension K^{pyth}/K est alors toujours galoisienne, et une conséquence du deuxième théorème que nous venons de rappeler est alors que le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K^{pyth}/K)$ est toujours un pro-2-groupe *sans torsion.*

Ribenboim a introduit une extension naturelle de la notion de corps pythagoricien : les corps fermatiens. Comme on peut s'y attendre, pour un entier n donné, un corps K est dit (n-)fermatien si toute somme de puissance n-ième d'éléments de K est encore une puissance n-ième de K. Pour garder une notion de *clôture* (fermatienne) naturelle, on est en fait obligé de se placer dans un cadre un peu plus restrictif : les corps ultra-n-fermatiens : ce sont les corps n-fermatiens qui contiennent les racines n-ièmes de l'unité. Dans ce cas, pour un corps K donné on peut parler de *clôture ultra-n-fermatienne* de K, corps que l'on note K_n^{u-ferm}, c'est donc la plus petite extension algébrique ultra-n-fermatienne de K. L'extension K_n^{u-ferm}/K est alors galoisienne elle aussi. Dans cet article, je montre une série d'analogues des deux théorèmes ci-dessus dans le cas fermatien :

Théorème 3.— *Soient K un corps et $n > 1$ un entier naturel. Il y a équivalence entre les propositions suivantes:*

i) K est ultra-n-fermatien et $-1 \in K^n$;

ii) Pour tout nombre premier p divisant n, K contient les racines p-ièmes de l'unité et, pour tout entier $\alpha \in \mathbb{N}/\{0\}$, K ne possède pas d'extension cyclique de degré p^α.

Corollaire 2.— *Soient $n \in \mathbb{N}/\{0\}$, L un corps ultra-n-fermatien et K un sous-corps de L. On suppose que*

- $-1 \in K^{n^2}$,
- *K contient les racines n^2-ièmes de l'unité.*

Alors, si $[L : K] < +\infty$, le corps K est ultra-n-fermatien.

Théorème 5.— *Soient p un nombre premier impair et K un corps contenant une racine primitive p^2-ième de l'unité. Le groupe de Galois de l'extension K_p^{u-ferm}/K est un pro-p-groupe sans torsion.*

Je montre aussi le théorème suivant :

Théorème 4.— *Soient $n \in \mathbb{N}/\{0\}$ et K un corps hilbertien. Alors $[K_n^{u-ferm} : K] = +\infty$ et aucune extension finie stricte de K_n^{u-ferm} n'est ultra-n-fermatienne.*

qui, déjà dans le cas $n = 2$, n'était pas connu (notons toutefois que pour $n = 2$ et $K = \mathbb{Q}$ le théorème 4 était, lui, connu). Pour montrer ce théorème j'introduis dans la première partie de l'article une subtantielle extension de la notion de corps fermatien : les corps P-réduisants.

Si n désigne un entier positif et $P \in \mathbb{Q}[T_1, \cdots, T_n, X]$, un corps K de caractéristique 0 est dit P-réduisant, si pour tout n-uplet $(t_1, \cdots, t_n) \in K^n$, les racines du polynôme $P(t_1, \cdots, t_n, X)$ sont dans K. Ainsi, par exemple, les corps ultra-n-fermatiens sont les corps $X^n - T_1^n - T_2^n$-réduisants. Etant donné un polynôme P et un corps K, on peut parler, au sens précédent, de clôture P-réduisante du corps K, on la note K_P. Le résultat principal de cette partie (qui implique alors le théorème 4 ci-dessus) est le suivant :

Théorème 1.— *Soit $P \in \mathbb{Q}[T_1, \cdots, T_n, X]$ un polynôme absolument irréductible de degré en X plus grand que 1. Si K est un corps hilbertien, alors $[K_P : K] = +\infty$ et aucune extension finie et stricte de K_P n'est P-réduisante. En particulier, si L est un corps P-réduisant et si $L \neq \mathbb{Q}_P$ alors $[L : \mathbb{Q}_P] = +\infty$.*

Une question assez naturelle consiste à s'interroger sur la véracité de la réciproque du théorème 1 : *une extension algébrique de $\mathbb{Q}$ qui n'est pas hilbertienne est-elle nécessairement P-réduisante pour un polynôme P absolument irréductible et de degré en X plus grand que 1?*

Dèbes et Haran ont apporté, dans un de leurs articles, une réponse négative à cette question. Ils donnent un exemple de corps non hilbertien qui n'est P-réduisant pour aucun P. Il est à noter que dans cet article, ils donnent aussi une caractérisation arithmétique des corps P-réduisants pour un P donné.

- **A propos d'un théorème de Frobenius** ([Des5]).

Ce travail fait suite à une question que je me suis posé lors de la rédaction de mon livre "Problème d'arithmétique des corps et de théorie de Galois" [D] publié chez Hermann. Dans ce livre, je donne une preuve élémentaire (i.e. ne faisant pas intervenir d'arguments cohomologiques) du théorème suivant, dû à Frobenius :

Théorème.— *Soit K un corps de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et contenant $\mathbb{R}$ dans son centre (une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension finie). Le corps K est isomorphe à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ où $\mathbb{H}$ (corps des quaternions d'Hamilton).*

Que devient ce théorème si l'on retire l'hypothèse de centralité *"K contient $\mathbb{R}$ dans son centre"*? Existe-t-il des corps K non commutatifs de dimension finie sur $\mathbb{R}$ (en tant que $\mathbb{R}$-e.v. gauche ou droite) autre que $\mathbb{H}$? Peut-on décrire pour un corps $\overline{K}$ algébriquement clos l'ensemble des surcorps de dimension finie sur $\overline{K}$? Peut-on décrire pour un corps R réel clos l'ensemble des surcorps de dimension finie sur R? En particulier, ces derniers contiennent-ils nécessairement $\overline{R}$? Par exemple existe-t-il un corps K tel que $[K : \mathbb{R}] = 3$?

Cet article apporte une réponse complète à ces questions d'arithmétique. Ainsi, je montre :

Théorème.— *Soit K un corps commutatif et algébriquement clos ou un corps réel clos. Soit F un surcorps de K non commutatif tel que la dimension (droite ou gauche) de F sur K soit finie. Il existe un sous-corps réel clos r de $\overline{K}$ tel que F soit isomorphe au corps $\mathbb{H}_r$ des quaternions à coefficients dans r.*

Corollaire.— *Si K est un corps commutatif de caractéristique $p > 0$, alors $\overline{K}$ ne possède aucun surcorps de dimension finie non trivial.*

Corollaire.— *Si K est un corps de caractéristique 0 alors il y a une bijection entre les classes d'isomorphismes de surcorps de dimension finie non triviaux de $\overline{K}$ et les classes d'isomorphismes de sous-corps réels clos de $\overline{K}$. En particulier, il n'y a (à isomorphisme près) qu'un seul surcorps gauche de dimension finie non trivial de $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Corollaire.— *Il existe des surcorps de $\mathbb{R}$ de dimension finie sur $\mathbb{R}$ autre que $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, mais ces derniers, s'ils sont non commutatifs sont tous des corps de quaternions sur un sous-corps réel clos de $\mathbb{C}$. Ils contiennent donc $\mathbb{C}$ et sont de dimension 4 sur $\mathbb{R}$.*

Je donne, dans ce papier, un exemple explicite de corps gauche de dimension finie sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas isomorphe à $\mathbb{H}$. Ce corps est le corps de quaternions H de centre un sous-corps R réel clos non archimédien de $\mathbb{C}$ (je montre en fait comment construire un tel corps réel clos); ce qui justifie alors que $H \not\simeq \mathbb{H}$.

2.3.— Théorie additive des nombres [DG1], [DG2].

La *théorie additive des nombres* a, moralement, pour sujet d'étude les liens qui existent dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, entre l'addition et la multiplication. Le "prince" de cette théorie a bien sûr été Paul Erdös qui a alimenté la problématique de cette théorie avec de nombreuses idées et conjectures (comme à son habitude). Un des problèmes de la théorie est l'étude des ensembles de base (appelés aussi bases ou bases additives). J'ai travaillé avec Georges Grekos sur ce sujet, ce qui a donné lieu aux deux publications que je présente ici.

Un ensemble de base est une partie $A \subset \mathbb{N}$ telle qu'il existe un entier $h > 0$ tel que l'ensemble

$$hA = \left\{ \sum_{i=0}^{h} a_i,\ a_i \in A \right\}$$

soit égal à presque tout $\mathbb{N}$ (i.e. la différence $\mathbb{N} - A$ est un ensemble fini). L'entier h minimal pour cette propriété est alors appelé *ordre de la base A*. Ainsi l'ensemble $\mathbb{N}$ est de base d'ordre 1, l'ensemble $2\mathbb{N} \cup \{1\}$ est lui d'ordre 2. Cette définition est pratique pour reformuler certains résultats et conjectures. Par exemple, le problème (qui est maintenant pour partie un théorème) de Waring : l'ensemble des puissances k-ièmes d'entiers, P_k, est-il un ensemble de base et quel est son ordre? Il est bien connu, par exemple, que P_2 est un ensemble de base d'ordre 4, c'est le théorème des quatre carrés. De nombreux travaux ont été entrepris sur la basicité. En particulier, essayer de comprendre ce que devient un ensemble de base quand on lui enlève un élément. C'est sur ce sujet que nous avons travaillé Grekos et moi.

• **Nombre d'exceptions à ce qu'un ensemble de base privé d'un point reste un ensemble de base** ([DG1]).

Si l'on reprend l'exemple de la base $A = 2\mathbb{N} \cup \{1\}$, on conçoit bien que tous les éléments de cet ensemble n'ont pas le même intérêt en terme de basicité. En effet, si l'on retire n'importe quel élément de $2\mathbb{N}$ de A l'ensemble obtenu continue d'être de base (de même ordre). Par contre si l'on retire 1 de A, alors l'ensemble n'est plus de base. Grekos avait remarqué dans sa thèse que de manière générale, si A désigne un ensemble de base et si l'on note A^* l'ensemble des éléments $a \in A$ tel que $A - \{a\}$ soit de base, alors l'ensemble $A - A^*$ est toujours fini. Ainsi, le *nombre d'exceptions à ce qu'un ensemble de base privé d'un point reste un ensemble de base* est fini. Il avait réussi à trouver un majorant de ce nombre d'exceptions en fonction de l'ordre h de la base. Il montrait, en effet, que $\sharp(A - A^*) \leq h - 1$. Cette estimation n'était pas la meilleure possible. L'objet de cet article est de donner la meilleure estimation asymptotique du cardinal de $A - A^*$ en fonction de l'ordre de A. Ainsi, nous montrons que :

Théorème 1.— *Si A est un ensemble de base d'ordre $h \geq 2$, alors*

$$\sharp(A - A^*) \leq C\sqrt{\frac{h}{\log h}}, \ \textit{avec } C = \sqrt{4e^{2.0769} + e^{-1}} \simeq 5.6822$$

Le cardinal de $(A - A^*)$ est donc un $O\left(\sqrt{\frac{h}{\log h}}\right)$. Il se trouve que cette estimation en O est en fait la meilleure possible comme le montre le deuxième théorème de ce papier :

Théorème 2.— *Il existe une constante $K > 0$ et une suite d'ensembles de base $(A_n)_n$ d'ordre $h_n \geq 2$ telle que:*

• $\lim_n h_n = +\infty$,

• $\sharp(A_n - A_n^*) \geq K\sqrt{\frac{h_n}{\log h_n}}$.

L'apparition du $\log h$ dans l'estimation s'explique de manière *ad hoc* par l'utilisation du théorème de répartition des nombres premiers. Bien sûr, l'estimation ne peut-être qu'en O, puisque des exemples simples montrent qu'il existe des ensembles de base d'ordre aussi grand que l'on veut et tels que $A - A^* = \emptyset$. Par exemple, si n désigne un entier naturel non nul et si a et b sont deux entiers premiers à n tous les deux et non congrus l'un à l'autre modulo n, alors l'ensemble $A_n = n\mathbb{N} \cup \{a, b\}$ est visiblement de base d'ordre n et $A_n - A_n^* = \emptyset$. En fait, pratiquement "dans la nature", le cardinal de $A - A^*$ est "peu élevé".

Ce travail présente donc l'estimation optimale en terme de O, mais présente encore une zone non optimale sur la majoration effective : La constante ~ 5.7 du théorème 1. La constante K du théorème 2 pourrait être, elle aussi, effective, mais une observation de la preuve de ce théorème (qui utilise elle aussi un théorème effectif de répartition des nombres premiers) montre que le meilleur K que l'on pourrait obtenir serait différent de 5.7. Une question ouverte à ce problème reste donc de trouver la meilleure constante. C'est à dire trouver le réel C tel que, pour tout ensemble de base A,

$$\sharp(A - A^*) \leq C\sqrt{\frac{h}{\log h}}$$

et telle que pour tout $c > C$ il existe un ensemble de base A_c vérifiant

$$\sharp(A_c - A_c^*) > c\sqrt{\frac{h}{\log h}}$$

Il est à noter, pour conclure, qu'une problématique connexe à celle-ci est d'évaluer l'ordre de $A - \{a\}$ lorsque $a \in A^*$. Plusieurs travaux ont été accomplis, sur ce sujet.

• **En enlevant une infinité d'éléments à une base additive** ([DG2]).

Une des conséquences de la finitude de l'ensemble $A - A^*$ est qu'étant donné un ensemble de base A, on peut enlever un nombre fini d'éléments de A et garder ainsi une base additive. Ainsi, les bases présentent toujours trop d'éléments en terme de quantité finie. Une question légitime est de savoir si l'on peut toujours retirer un nombre infini d'élements à une base et garder néanmoins une base. L'objet de cet article est d'apporter une réponse positive à cette question. On y montre en effet de manière plus précise :

Théorème.— *Si A est une base d'ordre $G(A) \leq h$, alors il existe une partie infinie A_∞ de A telle que $A \setminus A_\infty$ soit base d'ordre inférieur ou égal à $h^2 + h$.*

Les bases additives sont donc grandement trop riches. Un problème serait de définir une notion de minimalité de base additive dans le sens suivant : trouver un moyen d'évaluation pour savoir si l'on peut retirer ou non "beaucoup" d'éléments d'une base tout en gardant une base. Dans cette perspective, on peut tenter de mesurer la densité des ensembles que l'on peut retirer. On pose pour une base A donnée :

$$\Omega(A) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \{\exists A_\alpha \subset A/\ A - A_\alpha \text{ est une base et } d_A(A_\alpha) = \alpha\}$$

($d_A(A_\alpha) = \lim_n \frac{\sharp A_\alpha \cap [1,n]}{\sharp A \cap [1,n]}$ désigne la densité relative de A_α dans A). Le réel $\Omega(A)$ est en quelque sorte un indicateur de minimalité ensembliste de la base A : plus $\Omega(A)$ est proche de 0, plus A est "minimale". Sur des exemples assez simples (A progression arithmétique, ensemble des carrés), on constate que $\Omega(A) = 1$.

Problème.— *A-t-on $\Omega(A) = 1$ pour toute base A?*

Si ce problème admet une réponse positive, cela suggérerait qu'il n'y a pas de notion simple en matière de minimalité ensembliste de base additive et que le problème de la minimalité doit plutôt se regarder en gardant un contrôle sur l'ordre.

3.— Remerciements.

J'adresse mes plus vifs remerciements aux rapporteurs de ce mémoire ainsi qu'aux membres du jury devant lequel je le présente. Mais puisqu'un mémoire d'habilitation représente le dernier travail du genre auquel il appartient, je voudrais ne pas ménager mes remerciements. Je pense à tous les gens que j'ai rencontrés dans ce milieu, tous les mathématiciens avec lesquels j'ai eu des rapports. Rapports de travail, de complicité intellectuelle, rapports d'amitiés bien sur, mais je pense à ces moments où certains, sans le savoir souvent, m'ont soutenus. A ces personnes grâce auxquelles je me suis senti moins seul, l'espace d'un instant, le temps d'un regard. Alors sans préférence, sans importance d'ordre, je remercie mes amis, mes connaissances, mes collaborateurs, toutes ces personnes avec qui j'ai fait de près ou de loin des mathématiques :

— de l'équipe d'algèbre de théorie des nombres de Saint-Etienne, Roland Berger, Nicolas Brisebarre, Guy Diaz, Alain Faisant, Eric Gaudron, George Grekos, François Foucault, Florence Millet, Alain Bretto, George Philibert et Laurent Rigal.

— de mathématiques appliquées de Saint-Etienne, Mario Ahues et Alain Largillier.

— de Lille, Mohamed Ably, Gautami Bhowmik, Paula Cohen, Pierre Dèbes, Sandra Delaunay, Laurent Denis, Jean-Claude de Paris, Geoffroy Derome, Sophie Dion, Jean-Claude Douai, Michel Emsalem, Stéphane Flon, Marc Huttner, Mohamed Miladi, Mohamed M'zari, François Recher et Olivier Ramaré.

— de l'ENS Lyon, Marc Perret, Etienne Ghys, Jean-Claude Sikorav, Cedric Villany, Claude Danthony, Bruno Sevennec et Abdelghani Zeghib.

— de Lyon, Xavier Roblot.

— de Limoges, Chazad Movaheddi et Alain Salinier.

— de l'institut mathématique de Juisseu, Michel Waldschmidt, Daniel Bertrand, Joseph Oesterlé, Sinnou David, Patrice Phillipon, Stéphane Fischler, Jean-Christophe Masseron, Marusia Rebolledo, Antoine Chambert-Loir, Alain Kraus, Marie-José Bertin, Marc Chardin, Odile Lecacheux, Loic Merel et Pierre Lochak.

— de Besançon, Eva Bayer et Grégory Berhuy.

— de Marseille, Paul-Jean Cahen et Mireille Car.

— de Bordeaux, Qing Liu, Michel Matignon, Philippe Cassou-Noguès, David Lubicz, Niels Borne, Michel Langevin et Jean Fresnel.

— de l'institut Fourier de Grenoble, Roland Gillard, José Bertin et Mathieu Romagny.

— d'Orsay, Ariane Mézard, Hedi Daboussi et Jean-Louis Colliot-Thélène.

— de Caen, Philippe Satgé et Federico Pellarin.

— de Valenciennes, Sylvie Monier, Richard Massy et Bouchaib Sodaïguï.

— de Rennes, Laurent Morêt-Bailly.

— de Toulouse, Jean-Marc Couveignes, Nicolas Ros, Emmanuel Hallouin, Emmanuel Riboulet et Marc Reversat.

— des USA, Mike Fried, David Harbater, Irene Bouw, Romyar Sharifi, Kate Stevenson, stephan Wewers et Rachel Pries.

— d'Israël, Moshe Jarden, Dan Haran et Ido Efrat.

— du Canada, Paulo Ribenboim.

— d'Allemagne, Florian Pop, Helmut Volklein, Gerahrd Frey, Jochen Koenigsmann et Heinrich Matzat.

— d'Italie, Umberto Zannier et Pietro Corvaja.

— du Japon, Akio Tamagawa.

— de Suisse, Christine Libendörfer et Vincent Bosser.