

PARTIE A :

**INSTRUMENTS A ANCHE SIMPLE,
REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.**

Les instruments à vent suscitent, dans le monde de l'acoustique musicale, de nombreux travaux allant de l'acoustique linéaire à l'analyse numérique en passant par la mécanique des fluides. La diversité des sujets traités conduit à une littérature abondante mais assez inhomogène. Afin de faciliter la lecture de tels ouvrages, nous proposons, au cours de cette première partie, une revue bibliographique critique des travaux effectués sur les instruments à vent à anche simple, en citant autant que possible les résultats issus de recherches voisines sur les autres instruments à vent ou sur les mécanismes de production de la parole.

Les premières théories scientifiques sur les instruments à vent datent du XVIII^{ème} siècle : Bernoulli (1763) considère l'anche comme condition aux limites d'un problème d'oscillations libres. On peut voir là les premiers travaux visant à comprendre l'influence de la forme d'un résonateur sur ses fréquences propres. Weber (1829), Helmholtz (1860), Bouasse (1929) puis Das (1931) proposent une première prise en compte de l'anche : elle y est assimilée à un oscillateur harmonique soumis à la différence de pression existant entre la bouche du musicien et le bec. Il reste à comprendre la nature même du fonctionnement des instruments à vent : quelle est la cause de l'existence des régimes d'oscillation périodiques en régime permanent? A partir d'une modélisation globale reposant sur un oscillateur harmonique (l'anche) couplée à un résonateur acoustique par l'écoulement d'air entrant dans l'instrument, Backus (1963) et Nederveen (1969) analysent le système d'équations linéarisées autour de la position d'équilibre de l'anche soumise à une pression statique dans la bouche de l'instrumentiste. Ils mettent en évidence une pression de seuil, surpression particulière dans la cavité buccale au-delà de laquelle la position de l'anche est localement instable et l'instabilité de nature oscillante. L'étude ci-dessus peut être vue comme l'analyse de la stabilité linéaire du système non-linéaire asservi équivalent dont un schéma est proposé par Benade et Gans (1968). Nous utilisons d'ailleurs un tel formalisme pour analyser la nature des solutions d'un modèle physique au seuil linéaire au paragraphe III de cette partie. Worman (1971) est le premier à proposer une analyse faiblement non-linéaire ; il calcule les petites oscillations périodiques au voisinage du seuil dans le domaine fréquentiel par perturbation. Plus récemment de nombreux chercheurs ont développé des simulations dans le domaine temporel discret, permettant en particulier d'accéder à des régimes transitoires. Ce type de simulation, proposée initialement par Schumacher (1981) puis Mc Intyre et coll. (1983) conduit aujourd'hui au développement de nouveaux synthétiseurs basés sur ce formalisme ou sur un formalisme voisin.

Afin de prendre connaissance avec les divers modèles physiques utilisés dans la littérature, nous proposons au premier chapitre une présentation générale du principe de fonctionnement des instruments à vent : celui-ci repose sur un couplage entre deux parties supposées distinctes que sont le résonateur et le système excitateur. Le deuxième chapitre est consacré à la description des diverses parties constituant les instruments à anche simple. Pour chaque "sous-groupe", nous présentons les modèles usuels utilisés dans la littérature et faisons un bilan des

Partie A.

résultats expérimentaux les concernant. Nous dégageons un modèle physique dit "élémentaire". Ce modèle (et sa variante "basses fréquences") est le modèle de référence des études décrites dans les parties suivantes. Les méthodes de résolution et les solutions de ce dernier sont présentées au troisième chapitre où nous insistons sur les développements récents (Grand, 1994). Enfin le quatrième chapitre de cette partie est voué à la présentation des divers résultats expérimentaux concernant les instruments à anche simple en situation de jeu.

I. Physique des instruments de musique à vent à anche simple : généralités.

Les instruments à vent appartiennent à la famille des instruments pour lesquels une surpression statique imposée par l' instrumentiste (ou par une technique mécanique) génère un régime d' oscillations auto-entretenu. Ces instruments sont en général présentés en deux parties couplées : le résonateur et le système excitateur (cf. Figure I-1). Le résonateur, constitué du tuyau sonore (le corps de l' instrument), est un système passif, dont les propriétés acoustiques résultent de sa géométrie et des caractéristiques mécaniques et thermodynamiques du gaz qui l' emplit. L' exciteur est composé, pour les instruments à vent à anche simple, du système bec et anche.

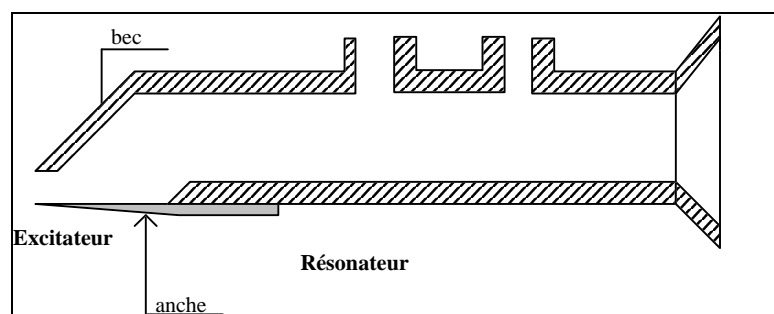


Figure I-1 : représentation schématique d' un instrument à vent à anche simple : système excitateur et résonateur.

Pour tous les instruments à vent sauf les flûtes, le système excitateur se comporte comme une source de débit modulé par un effet valve assuré par l' anche dans le cas des instruments à anche (par les lèvres de l' instrumentiste dans le cas des cuivres). En réponse à ce débit, le résonateur est le siège d' une pression contrôlant l' ouverture de cette valve dont la position peut être instable et l' instabilité de nature oscillante. Dans ce cas le couplage entre résonateur et exciteur peut aboutir à l' établissement d' oscillations périodiques stables (ou autres régimes d' oscillation, quasi-périodiques, par exemple) caractérisées par leur fréquence fondamentale et leur spectre en régime permanent.

La famille des instruments à vent est constituée des instruments à anche au sens large que sont les instruments à anche simple (clarinette, saxophone, bourdon d' orgues, accordéon, ...), à anche double (hautbois, basson), à anche lippale (cuivres) et des instruments à embouchure de flûte (flûte, tuyau d' orgue). Cependant, pour chacune de ces familles, les caractéristiques de

l'excitateur sont différentes et déterminent le mode de fonctionnement de l'instrument. Par exemple, le fonctionnement des tuyaux d'orgue à anche simple (bourdon) n'est pas identique à celui d'instruments tels que la clarinette ou le saxophone. Pour ce type d'instrument, la fréquence fondamentale du signal généré par l'auto-oscillation est proche de la première fréquence de résonance de l'anche (régime "in tempo" selon la terminologie de Bouasse, 1929). Les cuivres possèdent la propriété de produire un signal acoustique dont la fréquence fondamentale est à la fois contrôlée par les caractéristiques du tuyau et par la fréquence de résonance des lèvres de l'instrumentiste. Celles-ci peuvent d'ailleurs auto-osciller sans réaction acoustique du résonateur (technique du "buzz" bien connue des musiciens) à la façon des cordes vocales pour lesquelles l'effet du conduit vocal (résonateur assimilé à un filtre excité en oscillations forcées) est négligeable dans l'entretien de leurs oscillations. Enfin, pour les instruments à anche simple, la fréquence fondamentale des auto-oscillations se "cale" approximativement sur une des fréquences de résonance du tuyau, inférieure à la fréquence de résonance de l'anche (régime "résonateur" selon la terminologie de Bouasse (1929)).

Le système global est souvent représenté, sous forme d'un schéma-bloc, caractéristique d'un système non-linéaire asservi (cf. Figure I-2). La non-linéarité est, dans ce cas, supposée localisée à l'entrée de l'instrument (entrée du bec), ce qui permet cette représentation et facilite l'analyse de l'oscillateur auto-entretenu qui en résulte.

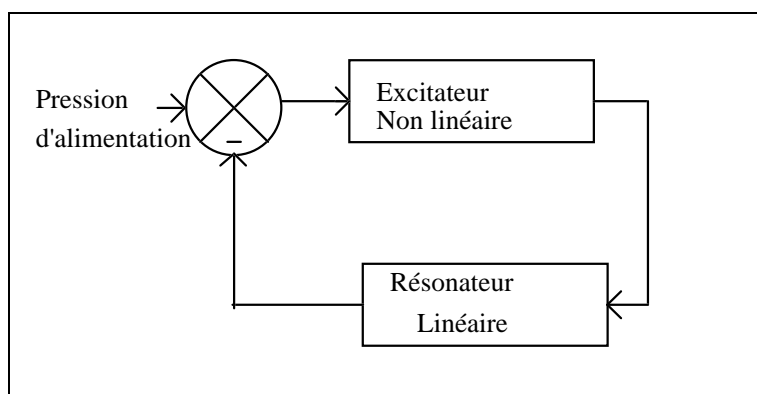


Figure I-2 : représentation d'un instrument à vent à anche simple comme un système non-linéaire asservi.

Les systèmes physiques présentés dans ce paragraphe étant des instruments de musique, il apparaît clairement que la quantité a priori intéressante est celle qui définit ce qu'un auditeur perçoit, c'est-à-dire la pression acoustique externe. Dans le cas des instruments à anche simple, la pression acoustique générée par l'auto-oscillation dans le tuyau sonore est rayonnée par les trous latéraux ouverts et par le pavillon. L'énergie rayonnée représente une petite quantité de l'énergie totale mise en jeu dans l'oscillation, tout au moins pour les basses fréquences du spectre. Le phénomène de rayonnement s'avère être un problème très complexe que nous ne nous attacherons pas à développer au cours de ce mémoire. Nous nous intéressons, dans tous les travaux présentés au cours de ce document, aux auto-oscillations des instruments à vent, décrites à l'aide des variables acoustiques internes. La connaissance de ces

dernières suffit pour une large part à déterminer le champ de pression rayonné à l' aide de la fonction de transfert existant entre l' intérieur et l' extérieur du résonateur. Nous ne nous attacherons pas à détailler cette fonction de transfert mais signalons que dans le cas des instruments à trous latéraux, elle est difficile à évaluer. En effet, le son est rayonné, non seulement par le pavillon, mais aussi par les trous latéraux ouverts, ce qui rend les diagrammes de directivité très complexes. Nous invitons le lecteur intéressé à consulter les travaux de Benade (1985) et de Kergomard (1981).

II. Modélisation physique : d'une description détaillée à un modèle élémentaire.

II.1. Le système excitateur.

II.1.1. L'anche.

Description.

L' anche de clarinette ou de saxophone est un simple oscillateur mécanique, qui en vibrant agit comme une soupape et module le débit d' air entrant dans le bec. Elle est constituée d' une mince lame fixée au bec à l' aide d' une ligature. Les matériaux utilisés pour sa construction sont en général des matériaux composites naturels anisotropes (roseau), ce qui rend son comportement mécanique très complexe (cf. Heinrich, 1986, pour les anches doubles). Marandas et coll. (1994) montrent que le comportement de l' anche peut être assimilé à un comportement de type viscoplastique, intervenant notamment pour des anches mouillées. En effet le comportement mécanique du roseau mouillé diffère notablement de celui du roseau sec. De nouvelles technologies permettent aujourd' hui de fabriquer des anches à l' aide de matériaux de synthèse dont les caractéristiques mécaniques se rapprochent de celles du roseau. En ce qui concerne sa géométrie, l' anche est taillée de telle façon que son épaisseur varie continûment en fonction de sa largeur et de sa longueur. Seule la face inférieure est plane. Afin de caractériser l' anche globalement, les fabricants désignent l' anche par sa "force", exprimée en général à l' aide d' un numéro. Ce numéro correspond grossièrement à la raideur statique du système mécanique constitué par l' anche. En situation de jeu réelle, l' anche est fixée au bec à l' aide de la ligature et les conditions aux limites spatiales permettant de caractériser son comportement mécanique sont les suivantes :

- pour de grandes amplitudes de déplacement, la position de l' anche vers l' intérieur du bec est imposée par la table de ce dernier (phénomène d' enroulement) dont la forme peut être complexe, on parle dans ce cas d' anche fermée. Les fabricants de becs caractérisent en général la géométrie du bec à l' aide de deux paramètres, la longueur de la table et l' ouverture.
- pour une embouchure donnée, la lèvre inférieure du musicien impose une condition aux limites (ce contact s' effectue sur une certaine surface), variant en fonction du jeu de l' instrumentiste. En effet, pour chaque note, le musicien peut modifier légèrement son

embouchure pour corriger les défauts de hauteur ou de timbre qu' il perçoit. La lèvre du musicien est certainement ce qui caractérise l' effet principal d' amortissement appliqué à l' anche, l' amortissement intrinsèque du matériau constituant l' anche (roseau) étant sans doute négligeable vis-à-vis de celui imposé par la lèvre.

Oscillateur mécanique équivalent.

Une première façon d' aborder la modélisation du système anche-bec-musicien est celle proposée par Stewart et Strong (1980). Ceux-ci assimilent l' anche à une poutre isotrope encastrée, de section variable, qui s' enroule sur la table du bec. Le mouvement d' un tel système est décrit par :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E_a I_a(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] + R_a \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \rho_a A_a \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = f_a(x,t) \quad (I-1a),$$

où E_a représente le module d' Young de l' anche supposée homogène, $I_a(x)$ le moment d' inertie de la poutre modélisant l' anche, R_a le coefficient d' amortissement fluide, ρ_a la masse volumique de l' anche et A_a sa section transversale. $f_a(x,t)$ est la force linéique appliquée à la poutre.

Les solutions de l' équation (I-1a) sont connues pour chaque position x et chaque instant t à l' aide d' une résolution numérique utilisant une discrétisation spatiale et temporelle. La lèvre de l' instrumentiste est modélisée par un amortissement localisé spatialement sur une partie de la poutre de longueur vibrante de l' ordre de 5 mm. Lors du mouvement de cette poutre, le phénomène d' enroulement est pris en compte en supposant que le contact poutre-table du bec est un choc inélastique. La caractéristique déplacement force appliquée est alors non-linéaire pour les grands déplacements vers l' intérieur du bec.

Afin de dégager les propriétés essentielles à la compréhension de l' instrument à anche en auto-oscillation, l' anche est souvent assimilée à un système mécanique plus classique. Dans le cas des instruments à anche simple, la fréquence fondamentale des auto-oscillations est inférieure à la première fréquence propre de l' anche, on peut considérer cette dernière comme un simple ressort défini par sa raideur ou sa compliance (hypothèse "basses fréquences"). Pour des fréquences plus élevées (registre aigu), la fréquence propre de l' anche peut avoir une influence sur l' oscillation (Thompson, 1979). Dans ce cas, son comportement mécanique est supposé linéaire, elle est assimilée à un oscillateur harmonique à un degré de liberté défini par un ensemble de paramètres équivalents. L' équation décrivant le comportement de l' extrémité de l' anche s' écrit :

Partie A.

$$m_a \frac{d^2 y(L, t)}{dt^2} + \alpha_a \frac{dy(L, t)}{dt} + k_a y(L, t) = F_a, \quad (\text{I-1b})$$

où m_a , α_a , k_a représentent respectivement la masse, l' amortissement, la raideur équivalents à l' anche en situation de jeu. F_a représente l' ensemble des forces appliquées sur l' anche, $y(L, t)$ la position de l' extrémité de l' anche. Il est important de noter que ces paramètres sont des quantités équivalentes mesurées ou calculées à partir d' une description complète de la mécanique de l' anche. Ces derniers sont d' ailleurs calculés dans le cas d' une anche assimilée à une poutre isotrope, encadrée, de section constante, à l' annexe A de ce mémoire.

Débit d' anche.

Lors de son mouvement, l' anche contrôle le débit entrant dans le bec et déplace une quantité d' air, appelée ici débit d' anche (débit déplacé ou "pompe" par l' anche), noté U_a qui est défini, dans un souci de simplicité, par :

$$U_a(t) = S_a \frac{dy(t)}{dt} \quad (\text{I-2}).$$

S_a est la surface efficace de l' anche, définie par Thompson (1979) comme suit par :

$$S_a = \frac{b \int_0^L \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} dx}{\frac{dy(L, t)}{dt}} \quad (\text{I-3}).$$

Cette surface dépend ainsi de l' allure de la déformée de l' anche lors de son mouvement et n' est a priori pas identique à la surface totale de l' anche. Cette notion de débit d' anche permet de définir l' impédance d' anche, notée Z_a , rapport de la pression acoustique dans le bec et du débit d' anche U_a .

Anche plaquée ou enroulée.

Pour des oscillations de grande amplitude, on peut observer expérimentalement (Gilbert, 1991) que l' anche s' enroule jusqu' à être plaquée sur la table du bec sur une durée non négligeable de chaque période. Dans ce cas, l' air ne peut plus pénétrer à l' intérieur du bec et la vitesse de l' anche est nulle sur la partie en contact avec le bec. En première approximation, cet effet est caractérisé en supposant que l' oscillateur harmonique équivalent à l' anche occupe la position $-H$ (H représente l' ouverture du bec en l' absence de pression d' alimentation, cf. Figure A-1, annexe A) pour toute position y inférieure à $-H$ et que le débit U_a est nul. L' anche est modélisée par un oscillateur harmonique dont la position est limitée dans l' espace. Le

phénomène de plaquage est assimilé à un choc inélastique, dans ce cas, on parle d' oscillations "anche battante" pour lesquelles une forte non-linéarité est induite entre la force appliquée et le déplacement de l' extrémité de l' anche (cf. Figure I-3).

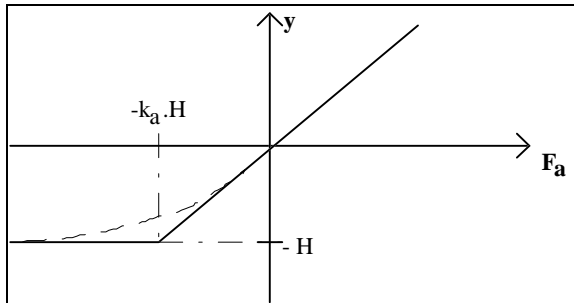


Figure I-3 : allure de la relation déplacement force pour une anche assimilée à un ressort en condition "anche battante" (trait continu) ou en condition d' enroulement (tiret).

Les allures temporelles des signaux de position de l' extrémité de l' anche mesurés (Backus, 1961 ; Meynial, 1988 ; Gilbert, 1991 ; Idogawa, 1993) montrent que l' hypothèse "anche battante" est finalement une assez bonne approximation du phénomène d' enroulement. Néanmoins, en réalité, la discontinuité de la dérivée $\frac{dy(L, t)}{dF_a(t)}$ est atténuée par la forme courbée de la table du bec. Lors de simulations

numériques, cette discontinuité conduit à des problèmes qu' il est possible de supprimer en choisissant une fonction de lissage schématisant le phénomène d' enroulement (cf. Figure I-3). La prise en compte de cet enroulement n' est d' ailleurs pas sans conséquence sur le calcul des régimes d' oscillation de certaines notes : lors de synthèses, Ducasse (1990) montre que ce phénomène est essentiel pour contrôler la bonne émission des notes graves du saxophone. Nous modélisons le phénomène d' enroulement dû à la table du bec de façon théorique en assimilant l' anche à une poutre isotrope encastree, et le profil du bec à un cercle, à l' annexe A de ce mémoire. Ce phénomène est décrit à l' aide d' un oscillateur harmonique équivalent à la poutre dont les paramètres (masse, raideur,...) varient en fonction de la position de l' extrémité de la poutre.

II.1.2. L' hydrodynamique de l' écoulement à l' entrée du bec.

Le comportement du jet entrant dans le bec est ce qui détermine la non-linéarité essentielle du système bouclé équivalent (cf. Figure I-2), tout au moins pour les instruments à anche simple. La modélisation de cet élément est donc importante pour une analyse correcte des régimes d' oscillation. De plus, le contenu spectral et l' enveloppe temporelle de la pression acoustique interne dépendent de cette caractéristique.

N.B. Les résultats présentés dans ce paragraphe sont essentiellement extraits de Hirschberg et coll. (1991 et 1994a).

Écoulement à l' entrée du bec en régime stationnaire.

Partie A.

Les travaux entrepris sur ce sujet s'attachent d'abord à caractériser le comportement du jet en régime stationnaire. En général, l'écoulement peut être supposé non visqueux et incompressible mais la prise en compte des couches limites visqueuses est indispensable pour expliquer la formation d'un jet au niveau de la sortie du canal formé par l'anche et la surface du bec (cf. Figure I-4).

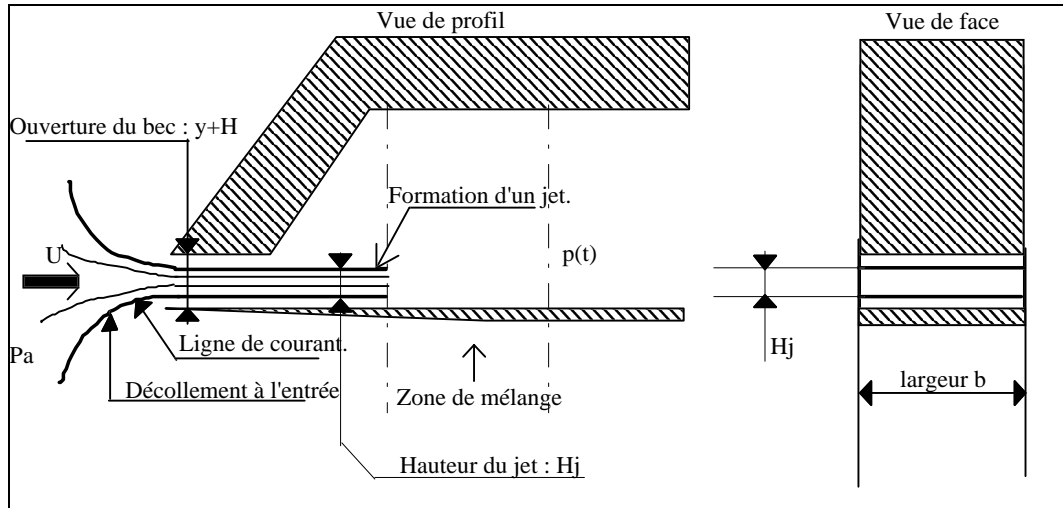


Figure I-4 : formation de jet à la sortie du canal anche-table du bec pour un écoulement stationnaire sans décollement (d'après Hirschberg et coll., 1990).

Le jet formé, de hauteur H_j directement corrélée avec l'ouverture $y+H$, se transforme en sortant du canal, en un écoulement turbulent dans une "zone de mélange" où il y a perte de charge et conservation du débit. Le débit est alors réparti sur la section d'entrée du résonateur. Le débit entrant dans le bec est directement déduit, à chaque instant, de la relation de Bernoulli en régime stationnaire :

$$U(t) = b \cdot H_j \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_a - p(t))} \quad (\text{I-4a})$$

où b est la largeur de l'anche (voire une largeur effective si on prend en compte les ouvertures latérales), et bH_j la section de passage du jet. En résumé, pour ce type d'écoulement, la pression d'alimentation P_a contrôle la vitesse, la hauteur du jet contrôle le débit. En fait, la section de passage offerte au jet est constituée de deux parties distinctes que sont la section frontale définie par la largeur b et par l'ouverture $(y+H)$ et la section latérale existant entre l'anche et le profil du bec. Tout d'abord, la section de passage de l'air est assimilée à la section frontale, la hauteur du canal est supposée constante sur toute sa longueur.

Les résultats expérimentaux découlant de mesures sur des géométries simplifiées à deux dimensions (hauteur du canal et longueur du canal) montrent que la formation de jet existe

aussi à l' entrée du canal et que la hauteur du jet dépend du rapport entre l' ouverture du bec ($y+H$) et la longueur du canal. Pour de grandes ouvertures, un jet de hauteur H_j inférieure à la hauteur du canal ($y+H$) se forme : il y a existence d' une vena-contracta définie par le coefficient α tel que $H_j = \alpha(y+H)$. Ce coefficient dépend fortement de la géométrie de l' entrée, et en particulier des "angles d' attaque". Pour de faibles ouvertures, après un écoulement avec décollement sur une longueur d' environ $(y+H)$, le jet se recolte sur les parois du canal. Sur cette distance, le comportement du jet peut être assimilé à un écoulement de Poiseuille (Hirschberg et coll., 1990) (cf. Figure I-5).

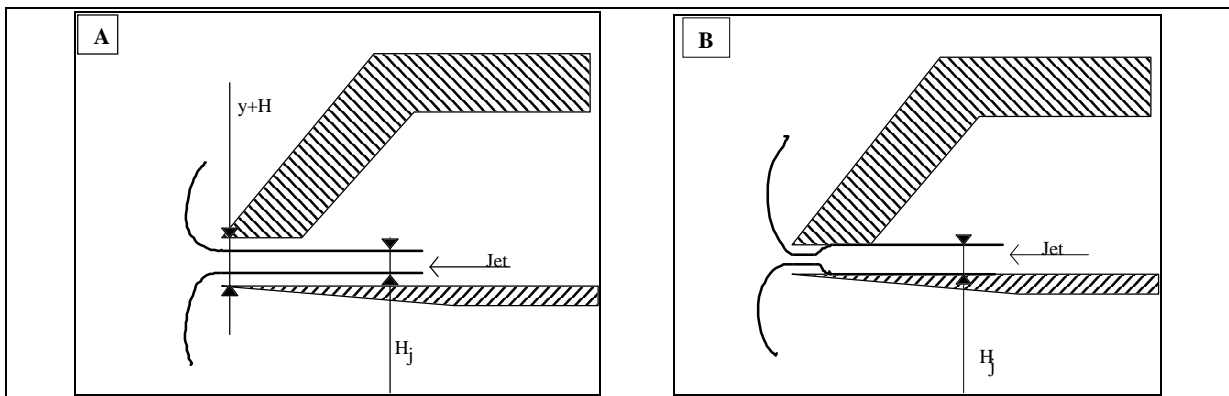


Figure I-5 : comportement du jet en régime stationnaire pour diverses configurations du canal anche-table du bec. Cas A : existence d' une vena-contracta ; formation d' un jet sans recollement. Cas B : recollement du jet après écoulement avec décollement.

La géométrie du canal impose, de plus, la condition de décollement de jet à la sortie du canal (cf. Figure I-6). Dans un cas, le point de décollement du jet est parfaitement déterminé par la géométrie du bec, dans l' autre le point de décollement n' est pas fixé. Des études récentes abordent ce problème pour des applications voisines (cordes vocales et lèvres, Pelorson et coll., 1994).

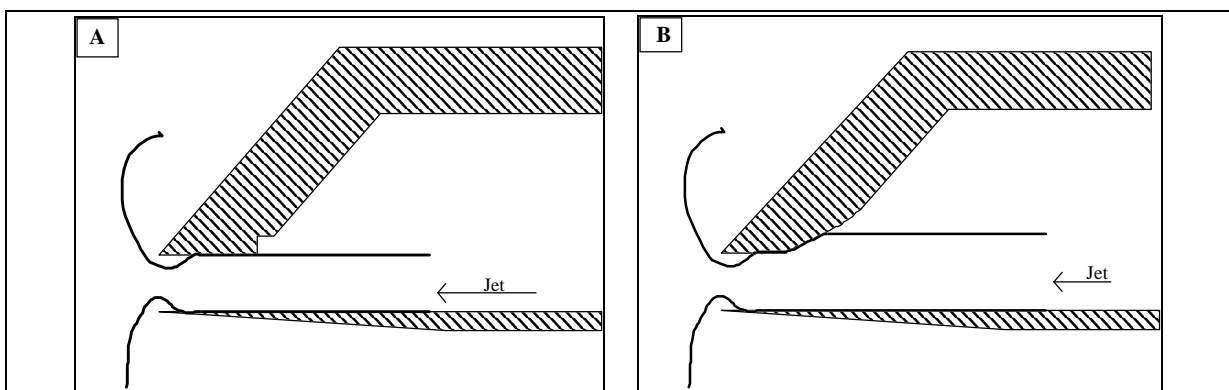


Figure I-6 : influence de la géométrie du bec sur le point de décollement du jet (d' après Hirschberg, 1994b). Cas A : point de décollement fixé par la géométrie interne du bec. Cas B : point de décollement non fixé.

Partie A.

Des mesures effectuées sur des géométries réelles (Maurin, 1992 ; Valkering, 1993) donnent des résultats proches de ceux obtenus sur géométrie simplifiée. Les effets de la section latérale sont, dans ce cas, difficiles à estimer mais ne semblent pas modifier la nature des comportements. La prise en compte d' une surface équivalente dépendant de la surface frontale et de la surface latérale (Waeffler, 1992 ; Hirschberg et coll., 1994a) permettrait d' interpréter les résultats semi-empiriques obtenus par Backus (1963) et Nederveen (1969) :

$$U = D.(y + H)^{4/3} (P_a - p)^{2/3} \quad (\text{I-4b}).$$

où D est une constante. Cependant, les mesures de petites ouvertures sur des becs réels sont difficiles à réaliser avec une grande fiabilité. Les valeurs des puissances appliquées à (y+H) et (P_a-p) peuvent ainsi être entachées d' une incertitude non négligeable.

Écoulement à l' entrée du bec en régime dynamique.

Les études entreprises en régime stationnaire permettent la compréhension quantitative des phénomènes intervenant au niveau du canal d' entrée du système bec-anche. Cependant, elles ne suffisent pas à connaître le comportement de l' écoulement en régime dynamique, utile pour une modélisation du système exciteur en situation de jeu. Dans ce cas, Backus (1963), Fletcher (1979), Schumacher (1981), Keefe (1992), utilisent un modèle tenant compte du terme d' inertie dû à la masse d' air_{hyd} dans le canal.

$$P_a - p(t) = \frac{1}{2} \rho \left[\frac{U(t)}{(y + H)b} \right]^2 + m_{\text{hyd}} \frac{dU(t)}{dt} \quad (\text{I-4c})$$

On peut noter que m_{hyd} est estimé à partir de mesures (Backus, 1963) ou d' analogie avec un diaphragme (Schumacher, 1981) reposant sur une hypothèse acoustique (faibles amplitudes, pas d' écoulement moyen) entraînant une surestimation de ce terme déjà négligeable (Nederveen, 1969).

Les mesures réalisées en régime dynamique par Meynial (1988), Gilbert (1989), Maurin (1992) à partir d' une bouche artificielle décrite à l' annexe C2 ne permettent pas de confirmer ou d' infirmer quantitativement les conclusions tirées des études en régime stationnaire. La difficulté à mettre en oeuvre des techniques expérimentales fiables ne permet pas de dégager un modèle évolué et satisfaisant en régime dynamique.

Force hydrodynamique ou force de Bernoulli.

L' anche est soumise à une force hydrodynamique répartie, résultant de la différence des champs de pression de part et d' autre de ses deux faces ; la force hydrodynamique est donnée en bonne approximation par :

$$F_{\text{hyd}}(t) = b \int_0^L [p(x, t) - P_a(x, t)] dx, \quad (\text{I-5a})$$

où b est la largeur de l' anche, $p(x, t)$ la pression dans le bec, $P_a(x, t)$ la pression d' alimentation dans la cavité buccale et L la longueur libre de l' anche. En régime dynamique, notons que si le champ de pression et donc F_{hyd} ne dépendent que de l' ouverture, cette force ne travaille pas et ne peut entretenir l' oscillation de l' anche.

Par analogie avec l' étude des cordes vocales, Worman (1971) et Schumacher (1981) proposent une force additionnelle appelée "force de Bernoulli" qui reposerait sur le recouvrement partiel de la pression après la sortie du canal anche-table. Hirschberg (1990) souligne que l' hypothèse employée par Worman (1971) pour calculer la force de Bernoulli (application de la relation de Bernoulli au delà du canal anche-table) n' est pas cohérente avec l' hypothèse de formation de jet à la sortie de ce dernier.

Une modélisation "raisonnable".

La compréhension du comportement de l' écoulement entrant dans le bec s' avérant incomplète à l' heure actuelle en régime dynamique, Hirschberg et coll. (1994a) suggère l' utilisation d' un modèle simple. Un tel modèle, utilisé couramment (Wilson et Beavers, 1974 ; Eliott et Bowsher, 1982 ; Saneyoshi et coll., 1987 ; Fletcher, 1992) suppose un écoulement peu visqueux, incompressible et quasi-stationnaire avec séparation et formation de jet en sortie du canal. De plus le canal est supposé être de hauteur $y+H$ constante sur sa longueur, la hauteur H_j du jet identique à la hauteur du canal. Un tel comportement est décrit par :

$$U = b \cdot (y + H) \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_a - p)}. \quad (\text{I-5b})$$

La conservation du débit en régime dynamique s' écrit comme suit (cf. Figure I-7) :

$$U = U_e + U_a \quad (\text{I-5c})$$

et $U = 0$ si l' anche est plaquée.

Partie A.

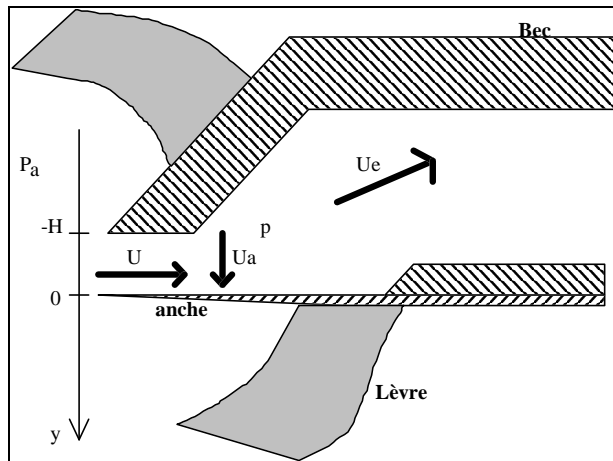


Figure I-7 : conservation des débits. Le débit U entrant dans le bec est égal à la somme du débit "pompé par l' anche" U_a et du débit entrant dans le résonateur U_e .

Dans la suite de ce document, la relation (I-5b) est notée $U = NL[\Delta p, y]$ où $\Delta p = P_a - p$.

En régime stationnaire, la pression étant supposée uniforme dans le bec et la hauteur du canal constante sur sa longueur, la force de Bernoulli décrite ci-dessus est la force hydrodynamique appliquée sur l' anche, donnée par :

$$F_{\text{hyd}} = -S_{\text{hyd}} \cdot (P_a - p) \quad (\text{I-6}).$$

La surface S_{hyd} n' est pas la surface réelle de l' anche, ni a priori la surface efficace de l' anche décrite au paragraphe II.1.1., mais une surface équivalente que nous définissons précisément à l' annexe A de ce mémoire dans l' hypothèse d' une anche modélisée par une poutre isotrope encastree à section constante.

II.2. Le résonateur.

II.2.1. Un guide d' ondes dans le cadre de l' acoustique linéaire.

Impédance d' entrée.

Dans l' hypothèse de pressions acoustiques de faibles amplitudes dans le résonateur, le comportement acoustique de ce dernier est supposé linéaire. Le résonateur, alors vu comme un filtre, est décrit par son impédance d' entrée, c' est-à-dire sa fonction de transfert entre le débit entrant et la pression dans le bec :

$$Z_e(j\omega) = \frac{p(j\omega)}{U_e(j\omega)}. \quad (\text{I-7a}),$$

Dans le domaine temporel, il est caractérisé par sa réponse impulsionnelle $g(t)$, transformée de Fourier inverse de $Z_e(j\omega)$.

$$p(t) = g(t) * U_e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) \cdot U_e(t - \tau) d\tau \quad (I-7b)$$

Pour des résonateurs de forme simple, l'impédance est connue analytiquement. Par contre il est nécessaire de la mesurer ou de la calculer numériquement pour des tuyaux aux formes plus complexes. Les moyens couramment utilisés sont les ponts de mesure d'impédance (Benade, 1973 ; Backus, 1974 ; Caussé et coll., 1984 ; Benade et Ibisi, 1985 ; Gibiat, 1990 ; Dalmont et Bruneau, 1991) ou les programmes de calcul d'impédance d'entrée (Plitnik, 1979 ; Kergomard, 1981 ; Keefe, 1981 ; logiciel Resonans). En outre les caractéristiques du résonateur peuvent être connues à l'aide de mesures dans le domaine temporel (Campbell et coll., 1994 ; Watson et Bowsher, 1988).

Fonction de réflexion en ondes planes

Pour les résonateurs couramment appliqués à la facture instrumentale, l'étude de la propagation des ondes acoustiques dans ces guides d'ondes est généralement réalisée en supposant une propagation du premier mode acoustique, le mode plan. Cette hypothèse est bien sûr valide, dans les guides cylindriques, pour des fréquences inférieures à la première fréquence de coupure f_c , définie par $f_c = \frac{1,84 \cdot c}{2\pi R}$ où R est le rayon du guide et c la célérité du son. Pour les guides non cylindriques, Kergomard (1981) propose un critère de validité du modèle onde plane reposant sur les données géométriques du résonateur. Pour les instruments réels, le résonateur n'est bien sûr pas constitué d'un simple guide cylindrique mais peut comprendre une série de trous latéraux, un pavillon. Ces éléments provoquent une série de discontinuités et sont générateurs de modes évanescents (cf. par exemple Keefe, 1982 ; Khettabi, 1994). L'hypothèse "ondes planes" est alors valide sur une largeur de bande fréquentielle plus faible. Dans le domaine de validité de l'approximation ondes planes, le comportement acoustique du résonateur peut être caractérisé par le coefficient de réflexion en ondes planes, défini par :

$$R_p(j\omega) = \frac{Z_e(j\omega) - Z_c}{Z_e(j\omega) + Z_c}, \quad (I-7c)$$

où Z_c représente l'impédance caractéristique d'un résonateur cylindrique de section S identique à la section d'entrée du résonateur étudié, définie par $Z_c = \frac{\rho c}{S}$. En considérant une onde aller $p_+(t)$ et une onde retour $p_-(t)$ dans le résonateur telles que :

$$p_-(t) = r_p(t) * p_+(t),$$

Partie A.

où $r_p(t)$ est la transformée de Fourier inverse de $R_p(j\omega)$, et définies par :

$$\begin{aligned} p(t) &= p_+(t) + p_-(t) \\ Z_c U(t) &= p_+(t) - p_-(t), \end{aligned}$$

la relation (I-7a) peut s' écrire, dans le domaine temporel, dans le cadre de l' approximation des ondes planes :

$$p(t) = r_p(t) * [p(t) + Z_c U_e(t)] + Z_c U_e(t) \quad (\text{I-7d}).$$

L' expression (I-7d) ci-dessus est alors très utilisée à des fins de simulation (Schumacher, 1981 ; Mc Intyre, 1983 ; Keefe, 1992). Le support temporel de la fonction de réflexion étant plus court que celui de la réponse impulsionnelle, les temps de calcul sont considérablement diminués. Pour une présentation détaillée de la fonction de réflexion, on pourra se reporter à Kergomard (1994).

N.B. Dans l' expression (I-7d) ci-dessus, nous supposons que la célérité du son ne dépend pas de la fréquence (pas de dispersion). Par conséquent, l' impédance caractéristique Z_c est une constante.

Influence de la cavité buccale, du couplage fluide structure, de l' écoulement moyen.

Dans le cadre de l' approximation linéaire, toute l' information décrivant le comportement du résonateur est contenue dans le terme d' impédance $Z(j\omega)$. Cette impédance peut tenir compte de facteurs extérieurs à la colonne d' air tels que la cavité buccale de l' instrumentiste et la vibration mécanique des parois du résonateur. Les effets de la cavité buccale sont discutés par Clinch et coll. (1982), Backus (1985), Johnston et coll., (1986). La cavité buccale apparaît comme un deuxième résonateur, placé en amont de l' instrument, à l' intérieur duquel la pression acoustique n' est pas négligée devant la pression acoustique à l' entrée de l' instrument. Les résultats présentés dans la littérature y sont quelquefois contradictoires et à notre connaissance il n' existe pas encore de confrontation théorie expérience caractérisant ces effets particuliers. Les travaux préliminaires entrepris sur le couplage entre la colonne d' air et la vibration mécanique des parois d' un résonateur de forme simple (Backus, 1965 ; Gautier, 1994) montrent que, dans des cas très particuliers, le couplage fluide structure décale les fréquences de résonances du résonateur. Des résultats expérimentaux convaincants sur le sujet appliqués aux instruments à vent nous sont aujourd' hui inconnus. Enfin l' écoulement moyen de l' air dans le résonateur a une influence sur l' impédance d' entrée. Backus (1964) montre que

cet écoulement agit principalement sur le facteur de qualité et sur la fréquence de résonance des pics de résonance de l'impédance d'entrée.

II.2.3. Non-linéarités dans un guide d'ondes.

Lors du fonctionnement "normal" d'un instrument tel que la clarinette, les niveaux acoustiques dans le bec atteignent des valeurs de l'ordre de 160 dB, laissant penser que l'approximation de l'acoustique linéaire dans le résonateur n'est plus valide. Certaines expériences mettent en évidence des problèmes, pouvant être liés aux phénomènes de propagation non-linéaire et autres non-linéarités localisées telles que celles existant au niveau d'orifices percés dans un tuyau (cf. Ingard et Ising, 1967) : Nederveen (1969) et Keefe (1983) montrent que deux résonateurs d'impédances d'entrée supposées identiques, différents simplement par la hauteur des trous latéraux, ne se comportent absolument pas de façon similaire s'ils sont utilisés en "régime clarinette". Pour l'un des deux, dont la hauteur des trous latéraux est très faible, l'émission d'un son est très difficile. Pour l'autre, le fonctionnement est proche de celui de la clarinette. Hirschberg et coll. (1991) discute des effets de vortex induits au niveau de la terminaison et des trous latéraux d'un résonateur en présence d'un écoulement moyen dans les termes de la théorie aéroacoustique de Howe (1975). Pour les résonateurs de type cuivres, des ondes de choc dues à la non-linéarité de propagation apparaissent (Hirschberg et coll., 1994a). A partir de confrontations entre pressions internes et externes pour les cuivres, Beauchamp (1980) a également évoqué ces phénomènes. Ceci est apparemment moins spectaculaire sur les signaux de pression acoustique de la clarinette. Néanmoins, pour faire évoluer le modèle physique et prendre en compte les effets de phénomènes subtils tels que ceux décrits au paragraphe précédent, il faudra étudier en détail les différentes caractéristiques non linéaires décrites ici. Malgré tout, le choix d'un modèle global reposant sur l'hypothèse d'une non linéarité localisée et d'un résonateur au comportement linéaire est déjà perceptivement intéressant pour des simulations dédiées à l'obtention d'une synthèse sonore réaliste (Ducasse, 1990).

II.3. Un modèle physique élémentaire.

Pour terminer ce chapitre consacré à la description physique des instruments à anche simple, nous retenons un modèle physique dit "modèle élémentaire", utilisé comme référence tout au long de ce mémoire. Les composantes du système excitateur et du résonateur sont modélisées comme suit (cf. Figure I-8).

Partie A.

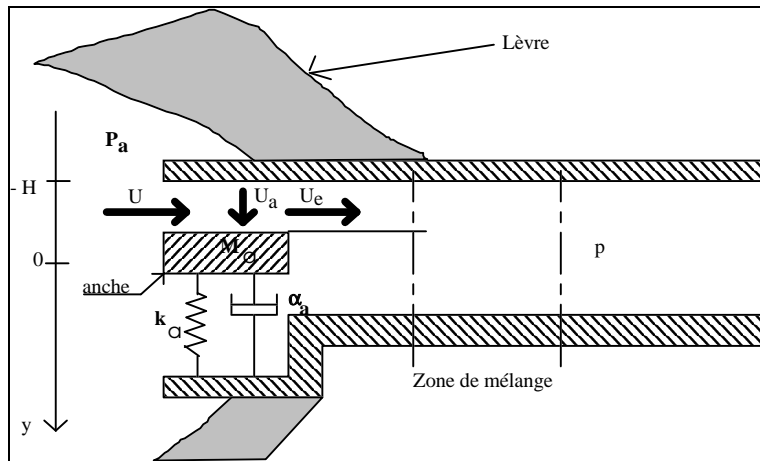


Figure I-8 : représentation schématique de l'entrée d'un instrument à anche simple à partir du modèle élémentaire.

Ce modèle élémentaire est décrit à partir de deux variables acoustiques p et U et d'une variable géométrique y . Les deux variables acoustiques p et U sont définies au niveau de l'entrée du résonateur. Dans la suite de ce document, l'entrée du résonateur est définie comme étant l'entrée du bec. La géométrie de ce dernier étant relativement complexe, il est assimilé à une pièce cylindrique de diamètre égal au diamètre de la partie cylindrique du bec (typiquement 15 mm pour la clarinette et 16 mm pour le saxophone alto) et de volume égal au volume du bec.

Le modèle élémentaire.

Le modèle élémentaire repose sur les hypothèses suivantes :

- L'anche est assimilée à un oscillateur harmonique excité par la force hydrodynamique F_{hyd} définie par l'expression (I-6). La surface S_{hyd} intervenant dans le calcul de la force hydrodynamique permet de définir une masse surfacique, notée μ_a , équivalente à l'anche et définie par $\mu_a = \frac{m_a}{S_{\text{hyd}}}$.

L'équation décrivant le comportement de l'anche s'écrit ainsi (Wilson et Beavers, 1974 ; Thompson, 1979 ; Schumacher, 1981 ; Saneyoshi et coll., 1987 ; Fletcher, 1990 ; Keefe, 1992) :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + g_a \frac{dy(t)}{dt} + \omega_a^2 y(t) = -\frac{\Delta p}{\mu_a}, \text{ où} \quad (\text{I-8a})$$

$g_a = \frac{\alpha_a}{m_a}$, et $\omega_a^2 = \frac{k_a}{m_a}$. On parle alors de régime d'oscillation en "anche battante" lorsque à certains instants $p(t)$ vérifie $p - P_a = -\Delta p \geq P_p$ où $P_p = \mu_a \omega_a^2 H$: l'anche est plaquée sur la table du bec ($y = -H$) et le débit entrant dans le bec est nul.

- L' air entrant dans le bec est assimilé à un écoulement peu visqueux quasi-stationnaire sans décollement à l' entrée. L' expression du débit entrant est donnée par (cf. relation I-5b) :

$$U(t) = b \cdot [y(t) + H] \sqrt{\frac{2}{\rho} [P_a - p(t)]} = NL[\Delta p(t), y(t)] \quad (\text{I-8b})$$

- Les caractéristiques du résonateur sont supposées linéaires. Ce dernier est ainsi représenté à l' aide de son impédance d' entrée $Z_e(j\omega)$ dans le domaine fréquentiel, de sa fonction de réflexion $r_p(t)$ dans le domaine temporel.
- L' influence de la cavité buccale de l' instrumentiste n' est pas prise en compte ; la pression acoustique à l' intérieur de celle-ci est supposée nulle.

Le modèle élémentaire est ainsi décrit par le système d' équations :

$$p(j\omega) = Z_e(j\omega)U_e(j\omega), \quad (\text{I-9a})$$

$$U(t) = NL[\Delta p(t) ; y(t)], \quad (\text{I-9b})$$

$$U(j\omega) = U_e(j\omega) + U_a(j\omega) = \left[\frac{1}{Z_e(j\omega)} + \frac{1}{Z_a(j\omega)} \right] p(j\omega), \quad (\text{I-9c})$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + g_a \frac{dy(t)}{dt} + \omega_a^2 y(t) = -\frac{\Delta p}{\mu_a}. \quad (\text{I-9d})$$

où Z_a est l' impédance d' anche. Si l' anche est assimilée à une simple raideur, son admittance Y est purement capacitive et définie par :

$$Y_a(j\omega) = \frac{1}{Z_a(j\omega)} = j\omega \frac{S_a}{\mu_a \omega_a^2}. \quad (\text{I-10a})$$

Si l' anche est modélisée par un oscillateur linéaire à un degré de liberté, l' admittance d' anche est :

$$Y_a(j\omega) = \frac{j\omega S_a}{\mu_a (\omega_a^2 - \omega^2 + j\omega g_a)} \quad (\text{I-10b})$$

Un tel système d' équations est souvent représenté (cf. Figure I-9) sous la forme d' un système asservi (Benade et Gans, 1968 ; Elliot et Bowsher, 1982), schéma fonctionnel utilisé pour l' étude du comportement de l' instrument au seuil linéaire (seuil d' instabilité local de la position d' équilibre) défini et discuté au paragraphe III.1.

Partie A.

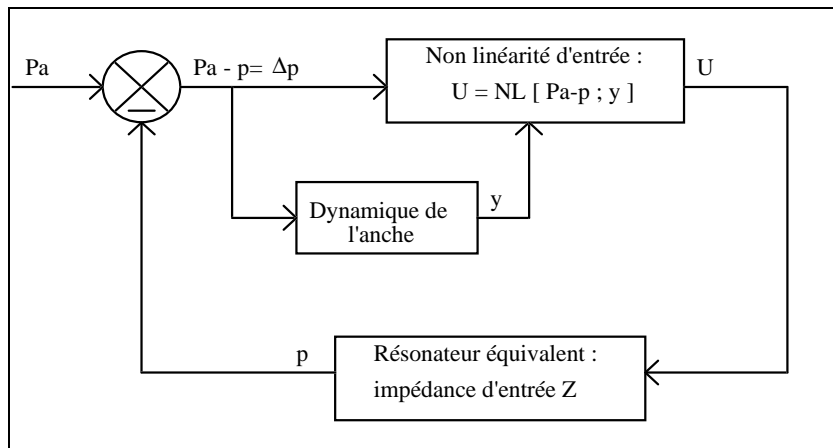


Figure I-9 : le modèle élémentaire vu comme un système asservi non-linéaire. L'impédance équivalente Z est définie par $Z = \frac{Z_e Z_a}{Z_e + Z_a}$.

En posant

$\xi_a(t) = y(t) + \frac{P_a}{\mu_a \omega_a^2}$, le mouvement de l'anche peut être écrit sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi_a(t) \\ U_a(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{S_a} \\ -S_a \omega_a^2 & -g_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_a(t) \\ U_a(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{S_a p(t)}{\mu_a} \end{pmatrix}. \quad (I-10c)$$

De plus, la condition anche battante impose :

$$U(t) = 0 \text{ et } \begin{pmatrix} y(t) \\ U_a(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -H \\ 0 \end{pmatrix} \text{ si } y(t) \leq -H.$$

Cette écriture est utilisée dans la partie B de ce mémoire (simulations numériques dans le domaine temporel des instruments à anche simple) afin d'obtenir un système d'équations discrètes représentant le comportement de l'anche.

Modèle élémentaire "basses fréquences".

Ce modèle élémentaire peut être transformé en un modèle dit modèle "basses fréquences" en assimilant l'anche à un simple ressort (cf. § II.1.1.) dont le débit d'anche U_a est nul. Le système d'équations (I-9) se simplifie en deux équations couplées avec pour inconnues $p(t)$ et $U(t)$:

$$p(j\omega) = Z_e(j\omega) \cdot U(j\omega), \quad (I-11a)$$

$$U(t) = \frac{b}{\mu_a \omega_a^2} [p(t) - P_b] \sqrt{\frac{2}{\rho} [P_a - p(t)]}, \quad (I-11b)$$

où $P_b = P_a - \mu_a \omega_a^2 H$ est la pression "anche battante" : la condition anche battante est remplie pour $p(t) \leq P_b$, le débit entrant dans le bec est nul. (cf. Figure I-10). Dans cette hypothèse, la relation décrivant le comportement du jet entrant dans le bec est une relation instantanée de la pression (le débit et la pression sont toujours en phase). Sinon, le débit entrant dans le bec est une fonction du saut de pression Δp et du déplacement de l'extrémité de l'anche.

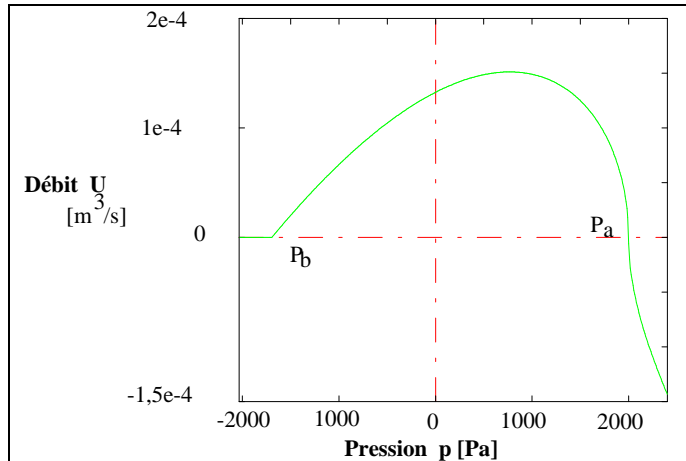


Figure I-10 : allure de la relation instantanée (I-11b) pression-débit dans le bec d'un instrument à anche simple (cas de la modélisation basses fréquences).

III. Méthodes de résolution et régimes d'oscillation.

III.1. Position d'équilibre et "seuil linéaire".

Existence de la position d'équilibre

Le système d'équations (I-9) admet une solution singulière indépendante du temps correspondant à une pression p° acoustique nulle dans le bec, un débit constant entrant dans le bec U° , et une position d'équilibre y° de l'anche :

$$\begin{cases} y^\circ = -\frac{P_a}{\mu_a \omega_a^2} \\ U^\circ = b \left(H - \frac{P_a}{\mu_a \omega_a^2} \right) \sqrt{\frac{2P_a}{\rho}} = \frac{b}{\mu_a \omega_a^2} (P_p - P_a) \sqrt{\frac{2P_a}{\rho}} \\ p^\circ = 0 \end{cases} \quad (I-12)$$

Notons que dans le cadre du modèle élémentaire, pour une pression d'alimentation supérieure à $P_p = \mu_a \omega_a^2 H$, dite "pression de plaquage", l'anche est plaquée ($y = -H$), le débit entrant dans le bec est nul.

Partie A.

Stabilité linéaire de la position d' équilibre.

Il est alors intéressant d' analyser la stabilité linéaire de cette solution singulière (analyse de la stabilité locale de la position d' équilibre). Cette analyse repose sur la linéarisation de l' expression (I-5b) autour de la solution singulière :

$$U = U^{\circ} + \left. \left(\frac{\partial U}{\partial \Delta p} \right) \right|_{p^{\circ}, y^{\circ}} \Delta p + \left. \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \right|_{p^{\circ}, y^{\circ}} y = U^{\circ} + \left[\left. \left(\frac{\partial U}{\partial \Delta p} \right) \right|_{p^{\circ}, y^{\circ}} + \left. \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \right|_{p^{\circ}, y^{\circ}} \frac{dy}{d\Delta p} \right] \Delta p \quad (I-13)$$

Par la suite nous notons Y_g (appelée souvent admittance du générateur) la quantité définie par:

$$Y_g = \left. \left(\frac{dU}{d\Delta p} \right) \right|_{p^{\circ}, y^{\circ}} = \left. \left(\frac{\partial U}{\partial \Delta p} \right) \right|_{p^{\circ}, y^{\circ}} + \left. \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \right|_{p^{\circ}, y^{\circ}} \frac{dy}{d\Delta p} \quad (I-14a)$$

Y_g est la réponse fréquentielle (complexe) du système excitateur linéarisé autour du point singulier, pour le modèle élémentaire :

$$Y_g(j\omega) = \frac{U^{\circ}}{2P_a} - b \sqrt{\frac{2P_a}{\rho}} \frac{1}{\mu_a(\omega_a^2 - \omega^2 + j\omega g_a)} \quad (I-14b)$$

Après linéarisation, l' étude de la stabilité de la solution singulière du système linéaire asservi équivalent (cf. Figure I-11) repose sur le critère de Nyquist, ou sa version simplifiée (la règle du revers) si on a accès directement à la fonction de transfert en boucle ouverte $Y_g Z$ du système dont l' entrée est la pression statique P , la sortie la pression acoustique p .

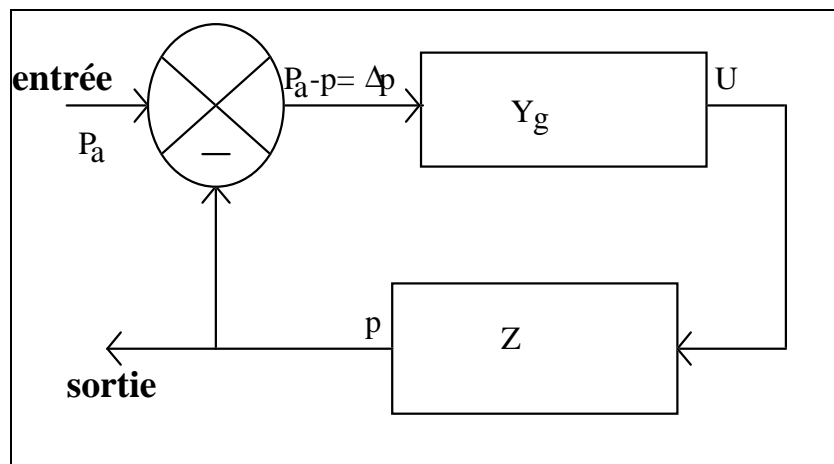


Figure I-11: Modèle élémentaire (après linéarisation) vu comme un système linéaire asservi.

La fonction de transfert H_t du système linéaire asservi en boucle fermée est :

$$H_t = \frac{Y_g Z}{1 + Y_g Z} \quad (\text{I-15})$$

Il est aussi facile d' étudier directement le signe de la partie réelle des pôles de la fonction de transfert H_t en boucle fermée (équation I-15). Ce qui revient à rechercher les zéros du dénominateur de cette dernière. Notons que la plupart des auteurs (Fletcher, 1979 ; Elliot et Bowsher, 1982 ; Saneyoshi et coll., 1987) préfèrent résoudre l' équation équivalente suivante :

$$Y + Y_g = 0 \quad \text{avec} \quad Y = \frac{1}{Z} \quad (\text{I-16})$$

équation complexe, ou encore les deux équations réelles :

$$\text{Re}(Y + Y_g) = 0 \quad (\text{I-17})$$

$$\text{Im}(Y + Y_g) = 0 \quad (\text{I-18})$$

De nombreux auteurs (Das, 1931 ; Backus, 1963 ; Coltman, 1968 ; Nederveen, 1969 ; Worman, 1971 ; Thompson, 1979 ; Fletcher, 1979 ; Saneyoshi et coll., 1987 ;) ont recherché à quelle condition il existe une valeur particulière P_s de la pression d' alimentation P_a en deçà de laquelle la position d' équilibre de l' anche est asymptotiquement stable, et au delà, instable (l' instabilité étant de nature oscillante). Nous appelons cette valeur particulière de la pression d' alimentation la pression de seuil. P_s est directement extraite de l' équation (I-17). De la condition (I-18) est extrait une fréquence f_s que nous appelons fréquence de seuil.

Recherche de la pression de seuil dans le cadre du modèle physique élémentaire dans l' hypothèse basses fréquences :

P_s est solution de l' équation :

$$\frac{b}{2P_a} \left(H - \frac{P_a}{\mu_a \omega_a^2} \right) \sqrt{\frac{2P_a}{\rho}} - \frac{b}{\mu_a \omega_a^2} \sqrt{\frac{2P_a}{\rho}} + Y^\circ = 0,$$

où Y° est l' admittance (réelle) du résonateur équivalent à la résonance.

En fait la pression de seuil existe si de plus elle vérifie $P_s < P_p$ (dans le cas contraire l' anche est plaquée, la position d' équilibre est stable) ; ceci est vérifié si Y° est inférieur à une valeur particulière à calculer. Notons que la pression de seuil est toujours supérieure à $P_p / 3$ (valeur limite correspondant au cas du résonateur sans pertes, où $Y^\circ=0$).

Partie A.

Seuil linéaire ou seuil d' oscillation ?

La relation (I-16) est souvent appelée abusivement "condition d' oscillation" (nous rediscutons ce point au chapitre suivant). Le seuil d' instabilité de la position d' équilibre (appelé seuil linéaire dans ce document) n' est pas automatiquement le seuil d' oscillation. C' est effectivement le seuil d' oscillation s' il existe des petites oscillations stables (le plus souvent quasi-sinusoïdales) qui tendent vers 0 en P_s^+ . Nous vérifions ci-dessous, dans le cas particulier du modèle élémentaire "basses fréquences", que la fréquence de jeu tend alors vers la fréquence de seuil f_s en P_s^+ .

Nous effectuons un bilan d' énergie réactive sur une période d' une oscillation périodique solution du modèle élémentaire "basses fréquences" (méthode appliquée par Boutillon , 1991, aux instruments à corde frottée). Il s' agit de calculer l' intégrale $\int_T Udp$ sur une période pour un signal en régime permanent. Cette intégrale est évaluée en décomposant pression p et débit U en série de Fourier :

$$p(t) = \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} p_n e^{jn\omega t} \right], p_1 \in \mathbb{R}, n > 1 p_n \in \mathbb{C} \quad (\text{I-19})$$

$$U(t) = \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} U_n e^{jn\omega t} \right] = \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} p_n Y(jn\omega) e^{jn\omega t} \right], U_n \text{ et } Y(jn\omega) \in \mathbb{C} \quad (\text{I-20})$$

Dans le cadre du modèle élémentaire basses fréquences, $U(t)$ et $p(t)$ sont reliés par une relation non-linéaire instantanée, l' intégrale à calculer sur une période est donc nulle. Un calcul direct à partir de la relation linéaire de type admittance entre les harmoniques du débit et de la pression implique :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}[Y(jn\omega)] n |p_n|^2 = 0 \quad (\text{I-21})$$

qui peut être réécrite :

$$\operatorname{Im}[Y(j\omega)] + \sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{Im}[Y(jn\omega)] n \left| \frac{p_n}{p_1} \right|^2 = 0 \quad (\text{I-22})$$

Notons que l' équation (I-22) ci-dessus est une condition nécessaire d' existence d' un régime périodique ; elle n' est pas suffisante. S' il existe des petites oscillations quasi-sinusoïdales en P_s^+ , la relation (I-22) s' écrit simplement :

$$\text{Im}[Y]_{\text{po}} \gamma = 0 \quad (\text{I-23})$$

relation identique à la seconde condition de seuil linéaire (I-18) dans le cadre de ce modèle pour lequel $\text{Im}(Y_g)=0$. En définitive, dans ce cas particulier où le seuil linéaire est le seuil d'oscillation, la fréquence de jeu des oscillations périodiques en \mathbb{P}^+ est la fréquence de seuil. L'analyse détaillée (pression et fréquence) du seuil linéaire apporte donc des informations utiles sur les régimes d'oscillations s'il existe des petites oscillations, c'est à dire si la bifurcation est directe.

III.2. Fréquence de seuil et fréquence de résonance.

De nombreux auteurs ont étudié le seuil linéaire théoriquement et expérimentalement à partir d'un modèle physique identique ou proche du modèle élémentaire utilisé dans ce document. Das (1931) et Backus (1963) sont sans doute les premiers à avoir proposé une analyse théorique et expérimentale du seuil linéaire de la clarinette. Wilson et Beavers (1974) vérifient que la fréquence de seuil de la clarinette est toujours inférieure à la fréquence propre de l'anche ; ils montrent théoriquement et vérifient expérimentalement que l'amortissement de l'anche est le paramètre critique qui fixe le type de fonctionnement de l'ensemble excitateur à anche simple et résonateur cylindrique couplés. A un faible amortissement correspond un régime "in tempo" selon la terminologie de Bouasse (1929) : la fréquence de seuil est proche de la première fréquence propre de l'anche (cas des tuyaux d'orgue à anche) ; à un fort amortissement correspond un régime "résonateur", la fréquence de seuil est proche d'une fréquence de résonance du résonateur (cas de la clarinette et du saxophone pour lesquels il faut ajouter à l'amortissement intrinsèque de l'anche, l'amortissement apporté par la lèvre inférieure du musicien). Ajoutons qu'une note de clarinette en régime "in tempo" est un "canard" !

Fletcher (1979), Saneyoshi et coll. (1987) ont analysé en détail le seuil linéaire en fonction de la nature du système excitateur reprenant en cela les travaux de Bouasse (1929) : ils font la distinction entre les instruments à vent avec excitateur dont les anches se déplacent vers l'intérieur pour un saut de pression Δp positif, pour lequel la fréquence de seuil est inférieure à la fréquence propre de l'anche (cas du tuyau d'orgue à anche simple, de la clarinette, du saxophone, du hautbois, du basson) et ceux avec excitateur dont les anches se déplacent vers l'extérieur pour un saut de pression Δp positif, pour lesquels la fréquence de seuil est supérieure à la fréquence propre de l'anche. Ces auteurs rangent les cuivres dans cette dernière catégorie. Plitnick et Yoshikawa (1994) comparent fréquences propres de lèvres et fréquences fondamentales, leurs conclusions ne sont pas tranchées. Plus généralement, à notre avis c'est l'hypothèse même d'un "modèle d'excitateur à une masse" qu'il faudrait remettre en cause ici. Les lèvres d'un instrumentiste constituent vraisemblablement un système mécanique possédant plus d'un degré de liberté. Un modèle d'excitateur à deux masses semblerait à notre avis plus adapté.

Partie A.

Il est intéressant de connaître la relation entre la fréquence de seuil et les divers paramètres du modèle élémentaire, et en particulier entre la fréquence de seuil et la fréquence de résonance. A terme, juger de la qualité de justesse d' un instrument à vent repose en grande partie sur la maîtrise des fréquences fondamentales (appelées aussi fréquences de jeu dans ce document) des régimes d' oscillation périodiques.

Influence du débit d' anche sur l' écart relatif entre la fréquence de seuil et la fréquence de résonance.

Dans le cadre du modèle élémentaire "basses fréquences", nous avons vérifié ci-dessus que la condition (I-18) devient $\text{Im}(Y)=0$. On reconnaît ici la condition de résonance sur le résonateur.

N.B. La condition de résonance du résonateur peut être définie de deux façons : la résonance peut correspondre à un maximum de l' amplitude de l' impédance d' entrée ou à une annulation de la partie imaginaire de cette impédance. Dans le cas des résonateurs étudiés dans ce mémoire, les coefficients de qualité sont relativement élevés (de l' ordre de 40) ; les deux conditions citées ci-dessus correspondent à deux fréquences de résonance de valeurs très proches.

Pour la condition $\text{Im}(Y)=0$, la fréquence de seuil est exactement une fréquence de résonance du résonateur. Si on prend en compte le débit déplacé par l' anche en régime dynamique (terme U_a) tout en conservant une modélisation linéaire basse fréquence de l' anche (caractérisée par sa seule raideur équivalente), l' admittance du générateur Y_g est toujours réelle. La condition (I-18) est toujours aussi simple mais la continuité du débit (relation I-5c) impose qu' il faut considérer l' impédance du résonateur en parallèle avec l' impédance d' anche : la fréquence de seuil f_s est alors inférieure à la fréquence de résonance f_r du résonateur. Nederveen (1969) montre que l' écart entre f_s et f_r est équivalent à l' abaissement fréquentiel que provoque l' ajout d' un volume fictif (appelé volume équivalent par Benade, 1976). Ce volume fictif, noté V_a , est défini par :

$$V_a = \rho C^2 C_a, \quad \text{où} \quad C_a = \frac{S_a}{\mu_a \omega_a^2} \quad (\text{I-24})$$

Il est commode d' associer à Y_g une correction de longueur $\Delta \ell_a$ définie par :

$$\Delta \ell_a = \frac{V_a}{S} \quad (\text{I-25})$$

où S est la section d'entrée du résonateur (en pratique la section de la partie cylindrique intérieure du bec de clarinette ou de saxophone).

Cette analyse peut être effectuée au voisinage de chacune des résonances du résonateur indépendamment les unes des autres, ce qui peut impliquer l'existence de plusieurs seuils linéaires. Si l'on analyse la stabilité linéaire du point singulier par rapport à la résonance i du résonateur, il est intéressant d'estimer l'écart relatif entre fréquence de seuil et fréquence de résonance à partir de la condition $\text{Im}(Y)=0$. Au voisinage de cette résonance i nous supposons l'impédance d'entrée Z_i écrite par la relation suivante de type Lorentzienne :

$$Z_i = Z_c \frac{Z_{mi}}{(1 + 2jQ_i \frac{\Delta f}{f_i})} \quad (\text{I-26})$$

où Z_c représente l'impédance caractéristique, Z_{mi} l'amplitude maximale du pic de résonance i , Q_i le facteur de qualité de la résonance i et f_i la fréquence de résonance.

L'écart relatif entre f_s et f_i résultant de la condition $\text{Im}(Y)=0$ est au premier ordre en $\frac{\Delta f_i}{f_i} = \frac{f_s - f_i}{f_i}$:

$$\frac{\Delta f_i}{f_i} = -2\pi f_i C_a \frac{Z_c}{(2 \frac{Q_i}{Z_{mi}})} \quad (\text{I-27})$$

L'écart relatif entre la fréquence de seuil et la fréquence de résonance f_s est proportionnel à la fréquence de résonance. Pour une série de résonateurs (ou de doigtés) caractérisés par des résonances "similaires", le coefficient de proportionnalité est caractéristique de l'impédance d'anche (par sa capacité C_a ou sa correction de longueur $\Delta \ell_a$) et est indépendant du résonateur. Nous entendons par "résonances similaires" le fait que le paramètre $2Q_i/Z_{mi}$ est une constante (cas d'une série de résonateurs cylindriques de longueur L variable par exemple comme, en première approximation, les différents doigtés de la clarinette). Réciproquement, mesurer les écarts fréquentiels entre fréquence de jeu et fréquence de résonance est un premier moyen de caractériser une "embouchure" donnée dans le cadre du modèle physique utilisé (on accède ainsi directement à l'impédance d'anche, la mesure de chacun des paramètres mécaniques équivalents de l'anche en situation de jeu n'étant pas triviale).

Partie A.

Influence de l' amortissement de l' anche sur l' écart relatif entre la fréquence de seuil et la fréquence de résonance.

Wilson et Beavers (1974) ont mis en évidence le rôle essentiel de la valeur du paramètre d' amortissement de l' anche pour un fonctionnement normal ("régime résonateur") des instruments à anche simple. Quelle est l' influence de ce paramètre sur l' écart relatif entre la fréquence de seuil et la fréquence de résonance?

La prise en compte du terme d' amortissement de l' anche dans le modèle élémentaire provoque un retard entre la position de l' anche et la différence de pression qui lui est appliquée. La relation non-linéaire n' est plus instantanée (relation I-9b). L' admittance du générateur, Y_g n' est plus une quantité réelle mais complexe (relation I-14b). Ceci implique (à partir de la relation I-18) un nouvel écart fréquentiel entre f_g et f_r . Nederveen (1969) montre que cet effet est encore un abaissement fréquentiel que l' on peut caractériser par une nouvelle correction de longueur Δl_g due à la non-linéarité d' entrée :

$$\Delta l_g = \frac{\rho c^2}{S} b \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{P_a} \frac{g_a}{\mu_a \omega_a^4} \quad (\text{I-28})$$

où ρ représente la densité de l' air, c la célérité du son, S la section d' entrée du résonateur, b la largeur de l' anche, P_a la pression d' alimentation. g_a , μ_a et ω_a sont les paramètres de l' anche définis au paragraphe II.3.

Nederveen (1969) estime la correction de longueur due à l' amortissement à environ 5 mm dans le cas de la clarinette et la correction de longueur due au débit d' anche à 10 mm.

Pour des fréquences élevées (fréquence proche de la fréquence propre de l' anche), les admittances Y_g et Y_a ne sont plus purement capacitives, l' écart fréquentiel entre fréquence de seuil et fréquence de résonance ne correspond plus à une correction de longueur équivalente indépendante de la fréquence (relations I-29 et I-30), les facteurs de correction sont des fonctions croissantes puis décroissantes de ω pour ω variant de 0 à ω_a .

$$\Delta l'_a(j\omega) = \Delta l_a \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega g_a}{\omega_a^2}\right)^2} \quad (\text{I-29})$$

$$\Delta l'_g(j\omega) = \Delta l_g \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega g_a}{\omega_a^2}\right)^2} \quad (\text{I-30})$$

Remarque : cette notion de correction de longueur, due à l'admittance d'anche et à l'admittance du générateur, s'avère très importante pour définir l'écart existant entre fréquence de seuil et fréquence de résonance du résonateur de l'instrument, connue par le calcul ou la mesure. Elle permet donc de caractériser globalement l'effet de l'embouchure du musicien, indépendamment de la fréquence au seuil linéaire. Il est cependant difficile d'estimer la part relative des deux causes ci-dessus sur la correction de longueur globale.

III.3. Petites oscillations.

L'analyse de la stabilité linéaire (stabilité locale) de la position d'équilibre ne permet pas de montrer l'existence ni de caractériser des régimes auto-oscillants périodiques. Une première approche pour aborder ce point est d'analyser le comportement du système non-linéaire au voisinage du seuil linéaire par un calcul de "petites oscillations".

Hypothèses et principe du calcul "petites oscillations".

On analyse les régimes permanents périodiques au voisinage du seuil linéaire dans le cadre d'un modèle élémentaire basses fréquences. Ces régimes sont caractérisés par une pression acoustique $p(t)$ (équation I-19) et un débit $U(t)$ (équation I-20). La non-linéarité est supposée développable en série de Taylor autour de la pression de seuil (équation I-31) :

$$U(t) = NL[p(t)] = \sum_{i=1}^{\infty} a_i p^i(t) \quad \text{où} \quad a_i = \left(\frac{\partial^i NL}{\partial p^i} \right)_{P_a = P_s} \quad (\text{I-31})$$

La conjonction des relations (I-19), (I-20) et (I-31) aboutit après identification terme à terme de chacun des harmoniques de la pression, à une série infinie d'équations reliant la pression $p(t)$ au débit $U(t)$. Divers auteurs (Benade et Gans, 1968 ; Worman 1971 ; Fletcher, 1979 ; Elliot et Bowsher, 1982) ont exposé cette série infinie d'équations. Sous cette forme, elles ne sont en général pas solubles analytiquement. Cependant pour de faibles amplitudes, il est possible de supposer que la série de Fourier de $p(t)$ converge rapidement (série dominée par ses premiers termes). Worman (1971) a développé de tels calculs à l'ordre 3 et a calculé les petites oscillations quasi-harmoniques correspondantes.

Grand (1994) a repris récemment ce calcul et a vérifié que l'existence même de ces oscillations quasi-sinusoïdales au voisinage du seuil, n'est pas systématique. Nous résumons ci-dessous, certains résultats essentiels de ce calcul en les appliquant au modèle élémentaire basses fréquences. Les résultats extraits de Grand (1994) sont transposés à nos notations.

Partie A.

Condition d' existence de petites oscillations quasi-sinusoïdales au voisinage du seuil linéaire.

Les calculs sont développés à partir du modèle élémentaire basses fréquences avec une non-linéarité instantanée caractérisée par un polynôme à l' ordre 3 de la pression (relation I-32). L' état du système physique est décrit par les deux variables physiques $p(t)$ et $U(t)$.

$$U = U^0 + Ap + Bp^2 + Cp^3 + o(p^3) \quad (\text{I-32}).$$

Dans le cadre de ce calcul petites oscillations au voisinage du seuil linéaire, la pression $p(t)$ de fréquence fondamentale ω , est caractérisée par la donnée des trois premiers termes de sa série de Fourier.

Application au modèle élémentaire "basses fréquences" :

Les constantes A, B et C sont les trois premiers termes du développement en série de Taylor de la fonction non-linéaire définie par la relation (I-11b) :

$$A = U^0 \left[\frac{-1}{2P_a} + \frac{1}{P_p - P_a} \right] \quad (\text{I-33})$$

$$B = U^0 \left(\frac{-1}{2P_a} \right) \left(\frac{1}{P_p - P_a} + \frac{1}{4P_a} \right) \quad (\text{I-34})$$

$$C = U^0 \left(\frac{-1}{8P_a^2} \right) \left(\frac{1}{P_p - P_a} + \frac{1}{2P_a} \right) \quad (\text{I-35})$$

Remarque : au voisinage du seuil linéaire le paramètre A (réel positif) est l' admittance de générateur Y_g au signe près (réel négatif). La relation (I-16) permettant de définir le seuil linéaire (pression et fréquence) est réécrite ci-dessous (relation I-36) :

$$Y(j\omega) - A = 0 \quad \text{où} \quad A = -Y_g \quad (\text{I-36})$$

Tout calcul fait, Grand (1994) exprime l' amplitude de l' harmonique 1 de la pression, p

$$p_1^2 = \frac{Y(j\omega) - A}{\left(\frac{4B^2}{Y(0) - A} \right) + \left(\frac{2B^2}{Y(j2\omega) - A} \right) + 3C}, \quad (\text{I-37})$$

où p_1 est un réel positif.

L' impédance du résonateur étant supposée nulle à fréquence nulle, la relation (I-37) peut être réécrite plus simplement :

$$p_1^2 = \frac{(Y(j2\omega) - A)(Y(j\omega) - A)}{2B^2 + 3C(Y(j2\omega) - A)} \quad (I-38)$$

Dans la suite de l' exposé, nous supposons que les deux premières résonances du résonateur aux fréquences ω_1 et ω_2 , considérées quasi-harmoniques, sont définies par deux pics de Lorentz :

$$Y_i(j\omega) = Y_i^\circ \left[1 + 2jQ_i \frac{\delta\omega}{\omega_i} \right], \quad i=1,2 \quad (I-39)$$

où Y_i° représente l' admittance à la résonance, ω_i la fréquence de résonance du pic et Q_i le coefficient de qualité du pic, ces trois paramètres étant réels positifs.

Les petites oscillations quasi-sinusoidales existent si p_1^2 est réel positif :

$$\text{Im}(p_1^2) = 0 \quad (I-40)$$

$$\text{Re}(p_1^2) > 0 \quad (I-41)$$

Domaine d' existence de petites oscillations quasi-sinusoidales au voisinage du seuil linéaire dans le cas de résonances harmoniques.

Les domaines d' existence des petites oscillations résultent directement de l' inéquation (I-41) appliquée à la relation (I-38). Ils sont regroupés sur la Figure (I-12) ci-dessous dans le cas particulier d' un résonateur ayant ses deux premières résonances harmoniques. Dans ce cas particulier la fréquence fondamentale des petites oscillations est égale à la première fréquence de résonance du résonateur (conséquence directe de la relation I-40).

Au voisinage du seuil linéaire, A est une fonction croissante de la pression d' alimentation P_a (relation I-33), Pour des pressions d' alimentation P_a proches de la pression de seuil P_s , on peut écrire :

$$A(P_a) = A(P_s) + \delta A = Y_1^\circ + \delta A, \quad (I-42)$$

où $\frac{\delta A}{Y_1^\circ}$ est un infiniment petit.

La combinaison des relations (I-38) et (I-40) donne au premier ordre :

$$\delta A \left(Y_1^\circ - Y_2^\circ \right) \left[2B^2 + 3C(Y_2^\circ - Y_1^\circ) \right] > 0 \quad (I-43)$$

Partie A.

L' analyse de la relation (I-41) permet de déterminer les zones d' existence de petites oscillations quasi-sinusoidales dans le plan $(Y_2^\circ - Y_1^\circ)$ en fonction de C (cf. figure I-12).

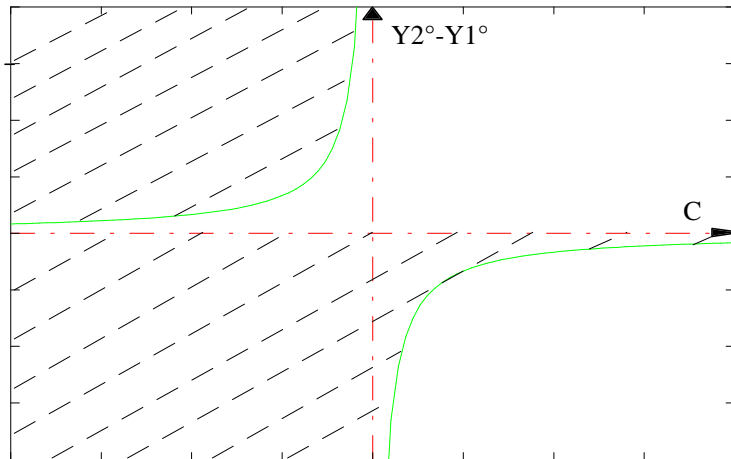


Figure I-12 : domaine d' existence des petites oscillations (zones hachurées) dans le plan $(C, Y_2^\circ - Y_1^\circ)$.

Une des frontières entre les zones d' existence et de non-existence est une hyperbole définie par l' admittance particulière Y_2^{o*} :

$$Y_2^{o*} = Y_1^\circ - \frac{2B^2}{3C} \quad (\text{I-44})$$

Remarques :

- si l' existence de petites oscillations quasi-sinusoidales est synonyme d' une bifurcation directe au seuil linéaire, l' équivalence entre non-existence et bifurcation inverse n' est pas évidente (nous en voyons un exemple dans le chapitre III-4-1 suivant dans le cas particulier d' un signal à 2 harmoniques seulement) ; néanmoins, nous nous permettons cet abus dans la suite du document.

- tout résonateur cylindrique admet une anti-résonance à fréquence double de la première résonance, la quantité $(Y_2^\circ - Y_1^\circ)$ est infinie, l' existence des petites oscillations est uniquement lié au signe de C . Notons que dans le cadre du modèle élémentaire "basses fréquences" (cf. la relation I-35), C est toujours négatif, la bifurcation au seuil linéaire est directe. On peut voir là une confirmation a posteriori des études sur les instruments à vent à résonateur cylindrique reposant sur l' hypothèse de petites oscillations quasi-sinusoidales au seuil linéaire (cf. le début du paragraphe "Seuil linéaire ou seuil d' oscillation ?" du chapitre III-1).

Influence de l' inharmonicité des deux premières résonances sur le domaine d' existence de petites oscillations quasi-sinusoidales au voisinage du seuil linéaire.

Supposons les deux premières fréquences de résonance ω_1 et ω_2 inharmoniques, nous définissons leur inharmonicité relative I par la relation suivante :

$$I = \frac{\omega_2}{2\omega_1} - 1 \quad (I-45).$$

Contrairement au cas des résonances harmoniques, il existe un décalage entre la fréquence fondamentale des petites oscillations et la première fréquence de résonance, ce décalage fréquentiel , conséquence de la relation (I-41), est exprimé ci-dessous par la relation (I-46) :

$$\frac{\delta\omega}{\omega_1} = \left\{ \frac{2B^2 [Y_2^\circ 2Q_2 (-I/(I+1))]}{3C [Y_2^\circ 2Q_2 (-I/(I+1))]^2 + (Y_2^\circ - Y_1^\circ) [2B^2 + 3C(Y_2^\circ - Y_1^\circ)]} \right\} \left(\frac{\delta A}{Y_1^\circ 2Q_1} \right) \quad (I-46)$$

De plus la condition d' existence des petites oscillations quasi-sinusoidales se traduit par l' inégalité suivante (I-47) :

$$\delta A (Y_1^\circ - Y_2^\circ) [2B^2 + 3C(Y_2^\circ - Y_1^\circ)] - \delta A \left\{ 3C [Y_2^\circ 2Q_2 (-I/(I+1))]^2 + \frac{2B^2 [Y_2^\circ 2Q_2 (-I/(I+1))]}{3C [Y_2^\circ 2Q_2 (-I/(I+1))]^2 + (Y_2^\circ - Y_1^\circ) [2B^2 + 3C(Y_2^\circ - Y_1^\circ)]} \right\} > 0 \quad (I-47)$$

On peut vérifier que le signe de la quantité ci-dessus est contrôlé par la quantité suivante :

$$\left[2B^2 + 3C(Y_2^\circ - Y_1^\circ) \right] (Y_2^\circ - Y_1^\circ) + 3C [Y_2^\circ 2Q_2 (-I/(I+1))]^2 \quad (I-48)$$

De par le grand nombre de paramètres, l' analyse du signe de la quantité ci-dessus n' est pas triviale, les domaines d' existence des petites oscillations quasi-sinusoidales ne peuvent pas être regroupées sur une figure du même type que la figure (I-12). Néanmoins il est intéressant de faire varier certains paramètres indépendamment les uns des autres (l' inharmonicité par exemple), à partir d' une situation simple, par exemple une situation où les résonances sont harmoniques.

Nous envisageons un système défini par C, Y_1° et Y_2° vérifiant : $C < 0$, $Y_2^\circ > Y_1^\circ$, $Y_2^\circ < Y_2^{\circ*}$, ($Y_2^{\circ*}$ est défini par la relation I-44), nous supposons de plus les deux premières résonances harmoniques, la bifurcation est alors inverse (figure I-12). En faisant croître

Partie A.

l' inharmonicité I à partir de 0, on peut montrer qu' il existe une inharmonicité limite notée I' au delà de laquelle la bifurcation redevient directe ; I' est solution de l' équation (I-49) ci-après :

$$\left[2B^2 + 3C(Y_2^0 - Y_1^0) \right] (Y_2^0 - Y_1^0) + 3C \left[Y_2^0 Q_2(-I'/(I'+1)) \right]^2 = 0 \quad (I-49)$$

On peut voir ici le rôle particulier important de l' inharmonicité dans la nature même des oscillations au voisinage du seuil et le relier, au moins qualitativement, avec le lien entre facilité d' émission et inharmonicité évoquée par les résultats expérimentaux cités au chapitre IV de cette partie et au chapitre trois de la troisième partie ; l' étude théorique succincte du résonateur à 2 pics du chapitre III.4.2 de cette partie en est aussi un bon exemple.

III.4. Oscillations finies.

Si le "calcul petites oscillations" tel qu' il est présenté précédemment est très général, tout au moins dans le cadre de l' hypothèse d' un modèle "basses fréquences" (relation instantanée entre débit et pression), il est intéressant de connaître les solutions périodiques du modèle élémentaire présenté au chapitre II-3 sans restreindre la non-linéarité aux premiers termes de son développement en série de Taylor. On peut partager les méthodes approchées utilisées en deux grandes catégories : les méthodes de recherche des solutions périodiques en régime permanent (méthodes essentiellement fréquentielles, chapitre III-3-1) et les méthodes de discrétisation qui conduisent aux solutions dans le domaine temporel (chapitre III-3-2), ces dernières étant souvent développées pour la synthèse.

III.4.1. Recherche de solutions en régime permanent.

Méthodes numériques

Schumacher (1978) puis Gilbert et coll. (1989) ont adapté aux instruments à vent une méthode de recherche des régimes permanents périodiques par convergence sur la fréquence fondamentale et les harmoniques du signal de pression. Cette méthode est couramment utilisée pour le calcul des régimes périodiques de systèmes non-linéaires en oscillations forcées (applications en électronique, en mécanique). Les solutions recherchées sont supposées avoir un nombre fini N d' harmoniques. La méthode sera d' autant moins efficace et rapide à converger que N est grand et que la non-linéarité est "dure" (pour notre application, des oscillations en anches battantes nécessitent la prise en compte d' une infinité d' harmoniques). En pratique, cette méthode est souvent utilisée par continuation : une solution périodique est recherchée à partir d' une solution connue d' un problème voisin (continuation sur la pression d' alimentation à partir de la pression de seuil par exemple). Cette méthode est connue sous le nom d' équilibrage harmonique ou balance harmonique. C' est une généralisation de la méthode de l' équivalent harmonique ($N=1$) souvent utilisée en

automatique non-linéaire (la présence d' un filtre passe-bas à fréquence de coupure comprise entre les deux premières harmoniques du signal y est la justification de l' hypothèse sinusoïdale du signal de sortie).

Notons que Fletcher (1978) a utilisé une autre méthode asymptotique de recherche des solutions de systèmes non-linéaires : la méthode à variation lente de la phase (dite de Krylov Bogoliubov).

Un cas particulier : le résonateur à deux résonances

Si les méthodes numériques permettent a priori de calculer les régimes périodiques d' un système quelconque, le résultat final obtenu après convergence va dépendre de l' état initial du processus. Pour maîtriser ce genre de méthode il est bon d' avoir une connaissance même qualitative des solutions recherchées par une approche analytique. Ceci n' est possible que dans des cas particuliers. Nous traitons un exemple ci-dessous, à savoir le cas du modèle élémentaire basse fréquence avec un résonateur linéaire à deux fréquences de résonance quasi-harmoniques ; nous supposons de plus le signal de pression (relation I-50) exactement égal à la somme de ses deux premiers harmoniques (Grand et coll., 1994b).

$$p(t) = \text{Re} \left[p_1 e^{j\omega t} + p_2 e^{j2\omega t} \right] \text{ avec } p_2 = |p_2| e^{j\varphi}, \quad p_1 = |p_1|. \quad (\text{I-50})$$

La combinaison des deux relations du modèle basse fréquence (équations I-11) et de la définition de la pression acoustique (relation I-50) aboutit à un système de 4 équations à 4 inconnues réelles (ω , $|p_1|$, module et argument de p_2). Après élimination de la solution singulière ($p_1=p_2=0$), il vient :

$$A + |p_2| B \cos \varphi + \frac{3}{4} C \left[|p_1|^2 + 2|p_2|^2 \right] = Y_1^\circ \quad (\text{I-51a})$$

$$|p_2| B \sin \varphi = Y_1^\circ 2Q_1 \left(\frac{\omega}{\omega_1} - 1 \right) \quad (\text{I-51b})$$

$$A + \frac{|p_1|^2}{2|p_2|} B \cos \varphi + \frac{3}{4} C \left[2|p_1|^2 + |p_2|^2 \right] = Y_2^\circ \quad (\text{I-51c})$$

$$\frac{|p_1|^2}{2|p_2|} B \sin \varphi = -Y_2^\circ 2Q_2 \left(\frac{2\omega}{\omega_2} - 1 \right) \quad (\text{I-51d})$$

Dans le cas des résonances harmoniques ($\omega_2=2\omega_1$), on vérifie que la fréquence de jeu de l' oscillation est $\omega=\omega_1$. Après simplification du système d' équations (I-51), la recherche explicite des couples $\{p_1, p_2\}$ solutions se résume à la résolution d' une équation du troisième degré en p_2 . Pour une pression d' alimentation P donnée, le nombre de solutions de cette équation dépend des caractéristiques de la non-linéarité et des résonances, vérifiant en cela les conclusions du "calcul petites oscillations" (figure I-12). S' il existe des petites oscillations au

Partie A.

voisinage du seuil linéaire P_s , l' équation du troisième degré admet une solution explicite au delà de P_s , aucune en deçà (figure I-13, cas A), la bifurcation au seuil linéaire P_s^+ est directe. S' il n' existe pas de petites oscillations en P , l' équation du troisième degré admet une solution explicite au delà de P_s (solution qui ne tend pas vers 0 en P_s^+), deux solutions puis aucune en deçà (figure I-13, cas B), la bifurcation au seuil linéaire P_s^+ est inverse. Dans ce cas on peut définir une nouvelle pression de seuil inférieure à la pression de seuil linéaire P_s , nous l' appelons pression de seuil sous-critique et la notons P_{sc} . Il existe des oscillations d' amplitude finie pour des pressions d' alimentation comprises entre P_{sc} et P_s . P_{sc} est directement calculée en recherchant la pression d' alimentation particulière qui annule le discriminant de l' équation du troisième degré.

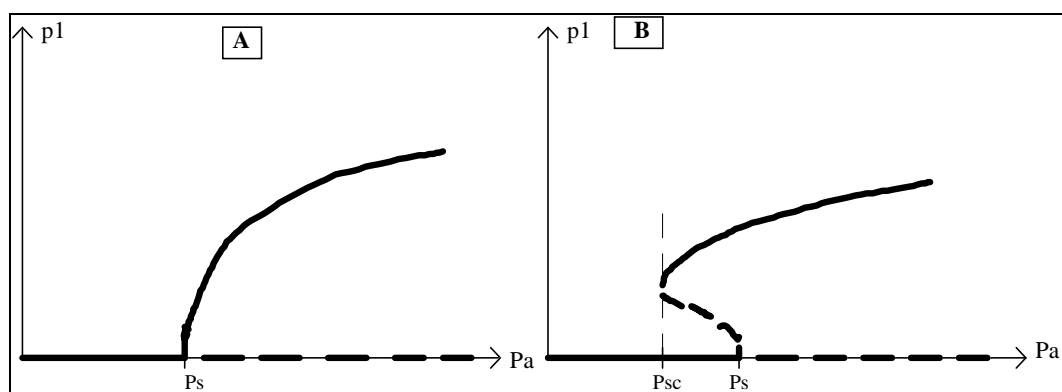


Figure I-13. Cas A : allure des solutions p_1 du système d' équations I-51 lorsque qu' il existe des petites oscillations en P_s^+ (cas des résonances harmoniques), la bifurcation au seuil linéaire P_s^+ est directe. Cas B : allure des solutions p_1 du système d' équations I-51 lorsque qu' il n' existe pas de petites oscillations en P (cas des résonances harmoniques), la bifurcation au seuil linéaire P_s^+ est inverse. Il existe un nouveau seuil d' oscillation noté P_{sc} que nous appelons seuil sous-critique.

On vérifie que la pression de seuil sous-critique P_{sc} est une fonction croissante de Y_2^0 (tant que $Y_2^0 > Y_1^0$) et ne dépend pas des facteurs de qualité dans le cas des résonances harmoniques.

Dans le cas des résonances inharmoniques, le système d' équations (I-51) n' est pas directement soluble. Néanmoins pour le cas d' une faible inharmonicité, on peut déterminer les solutions par itérations successives à partir des solutions du cas harmonique correspondant.

On vérifie que P_{sc} est une fonction croissante de l' inharmonicité et tend vers P car il existe une inharmonicité limite I' pour laquelle la bifurcation redevient directe (relation I-49).

En guise de conclusion :

Si Grand (1994) et Valeau (1994) ont validé expérimentalement certains des résultats théoriques ci-dessus (nature de la bifurcation, décalage fréquentiel) à partir d' un montage expérimental "à la manière d' un instrument à anche simple" (l' anche simple est supprimée, l' effet valve y est piloté par un piston conique commandé par une contre-réaction électronique), si ces résultats théoriques ne sont sans doute pas applicables stricto sensu à des instruments à anche simple, ils éclairent néanmoins sous un jour nouveau l' idée admise depuis Bouasse (Bouasse, 1929, et reprise par Benade et Gans, 1968) qu' une bonne harmonicité des fréquences de résonance est importante pour la facilité d' émission. Un certain nombre de résultats expérimentaux relatifs à l' étude des instruments quart-de-ton (Kergomard et Meynial, 1988 ; Gilbert, 1991) et le rôle critique que joue l' inharmonicité dans la nature des régimes d' oscillations au seuil, sont interprétables dans ce sens au moins qualitativement (si on prend le parti de relier facilité d' émission et pression de seuil).

III.4.2. Méthodes de discrétisation par différences finies.

Méthodes numériques

Afin de connaître les solutions du modèle élémentaire décrit par le système d' équations (I-9) pour des oscillations finies, les méthodes numériques s' avèrent nécessaires, étant donné l' inexistence des solutions exactes. Ces méthodes sont en général basées sur l' utilisation de la fonction de réflexion du résonateur, mesurée ou calculée à partir de l' impédance d' entrée du résonateur. Son usage permet de diminuer notablement le temps de calcul par rapport à celui de la réponse impulsionnelle du résonateur, cette dernière possédant un support temporel plus long. Ducasse, quant à lui, (1990) considère le résonateur comme un ensemble de cellules juxtaposées, pour lesquelles il résout numériquement l' équation d' ondes en réalisant une discrétisation temporelle et spatiale.

Schumacher (1981) initie l' utilisation de la fonction de réflexion pour la clarinette à partir d' impédances calculées et montre la faisabilité de tels calculs numériques. Mc Intyre et coll. (1983), Park et Keefe (1988), Barjau et Agullo (1989), Keefe (1992) utilisent la méthode proposée par Schumacher (1981) pour divers résonateurs et en utilisant des modèles plus ou moins complexes. Cependant l' utilisation de techniques numériques consiste en une approximation des opérateurs continus par opérateurs discrets, la distance existant entre les systèmes discrets et continus dépendant du degré d' approximation choisi (Gérardin et Rixen, 1992). Dans le cas des modèles décrivant le comportement des instruments à anche simple, le passage du domaine continu au domaine discret est réalisable (et réalisé) à l' aide de diverses méthodes produisant divers modèles discrets. L' analyse des méthodes numériques permettant de transformer le modèle élémentaire continu en modèle élémentaire discret équivalent s' avère nécessaire. Ce point fait l' objet de la partie B de ce mémoire dans le cas du modèle élémentaire décrit au paragraphe I.3.

Partie A.

Méthodes graphiques

Si les méthodes temporelles nécessitent l'usage de l'outil numérique, il existe cependant un cas particulier pour lequel Maganza (1986) évalue simplement les solutions oscillantes du problème à partir d'une méthode graphique. L'instrument est supposé, dans ce cas, constitué d'un résonateur fait d'un simple tuyau sans pertes visco-thermiques et d'une non-linéarité localisée à l'entrée, définie par une relation instantanée de la pression qui peut être différente de celle que nous présentons au paragraphe II.3. Le résonateur est ainsi caractérisé par sa fonction de réflexion $r_p(t)$ définie par :

$$r_p(t) = -\delta(t - \tau), \quad (\text{I-52})$$

où δ représente l'impulsion de Dirac et le temps de propagation défini par $\tau = \frac{2L_t}{c}$, où L_t est

la longueur du résonateur, c la célérité du son. La non-linéarité est définie par une relation du type $U = NL[p]$. L'utilisation d'un formalisme basé sur la fonction de réflexion permet à Maganza (1986) d'exprimer le problème, initialement étudié dans le plan p, U dans un nouveau plan défini par $-p_-$ et p_+ , représentant respectivement l'onde aller et l'onde retour existant dans le résonateur. Connaissant la relation simple entre ces deux variables :

$$p_-(t) = -p_+(t - \tau), \quad (\text{I-53})$$

Maganza (1986) développe une méthode graphique (cf. Figure I-14) qui se ramène à la méthode itérative du premier retour (Bergé et coll., 1988). Il met ainsi en évidence l'existence d'oscillations périodiques dans des cas de bifurcations directes et inverses. Il va jusqu'à montrer un scénario de route vers le chaos par succession de doublements de périodes pour d'autres types de non-linéarités obtenues à l'aide d'une clarinette dont le système excitateur est un haut parleur (source de débit) asservi à la pression interne via une contre réaction non-linéaire modifiable à souhait.

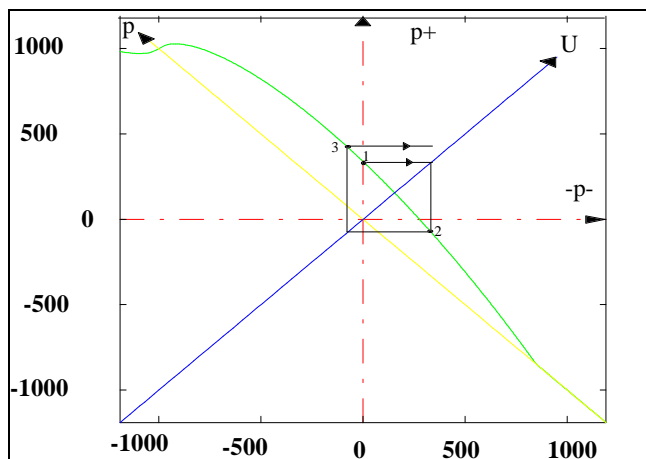


Figure I-14: Méthode graphique itérative utilisée par Maganza et coll. (1986). Le modèle est basé, dans ce cas, sur l'hypothèse d'un résonateur cylindrique sans pertes visco-thermiques et d'une non-linéarité du type $U = NL[p]$ localisée à l'entrée de l'instrument.

IV. Instruments à anche simple en situation de jeu : résultats expérimentaux.

La complexité des phénomènes physiques mis en jeu lors du fonctionnement des instruments à anche simple conduit à développer des comparaisons entre les modèles et l'expérience pour des systèmes "simplifiés". Les mesures d'impédances, l'étude du comportement de l'écoulement à l'entrée du bec en régime stationnaire, la mise au point de systèmes auto-oscillants tels que la "pseudo-clarinette" développée par Maganza (1986) en sont des exemples typiques. Cependant, il est intéressant de comparer les résultats d'un modèle élémentaire avec ceux obtenus pour des instruments réels en situation de jeu. Cette comparaison est réalisable dans la mesure où l'instrumentiste n'apporte pas de modifications à l'embouchure. C'est pourquoi il est nécessaire d'utiliser un système mécanique reproduisant l'embouchure du musicien avec une bonne reproductibilité. Ce dispositif est la bouche artificielle que nous décrivons à l'annexe C2 et dont il est fait emploi pour la partie C de ce document ; l'utilisation d'un tel système conduit à mettre l'instrument en situation de jeu artificielle, par opposition à la situation de jeu naturelle (le musicien). L'étude du comportement de l'instrument en situation de jeu artificielle permet ainsi de dégager des critères objectifs tels que la fréquence fondamentale, appelée fréquence de jeu et le spectre du signal de pression interne en régime permanent. Dans la partie C de ce mémoire, nous abordons de façon plus détaillée les choix que nous effectuons afin de corrélérer ces grandeurs physiques aux critères subjectifs, utiles au musicien, que sont la hauteur, le timbre et la facilité d'émission.

Relation fréquence de résonance, fréquence de jeu.

L'intérêt porté par les chercheurs à la relation existant entre la fréquence fondamentale d'une note et la fréquence de résonance du résonateur pour le même doigté est certainement celui qui a provoqué le plus grand nombre de travaux. D'ailleurs, par l'expérience, Bouasse (1929) met en évidence la différence qui existe entre la "fréquence de résonance" du bourdon (qui n'est en fait que la fréquence fondamentale du signal résultant de l'excitation du tuyau en mode flûte) et la fréquence de jeu du même bourdon muni d'un bec et d'une anche :

"Montons une embouchure de clarinette sur un tube de laiton assez long et dont le diamètre n'est ni trop supérieur ni trop inférieur au diamètre du bec. Fermons l'anche en la pressant avec le doigt; soufflons sur le bout ouvert du tube comme sur une clef forée ; nous obtenons le son du bourdon. soufflons dans l'anche : nous obtenons le même son, à la petite variation près réalisable en pressant plus ou moins l'anche avec les lèvres".

Bouasse, Instrument à vent, tome II, page 59.

Partie A.

Il constate que l' embouchure de l' instrumentiste a une influence non négligeable sur la hauteur de la note jouée mais que celle ci est proche de la "fréquence fondamentale" du bourdon. Afin de vérifier la corrélation prévue entre fréquence de jeu et fréquence de résonance, Nederveen (1969) présente une série de comparaisons entre ces deux grandeurs pour la clarinette et le saxophone entre autres. Ces expériences sont réalisées en calculant les fréquences de résonance des résonateurs et en jouant (naturellement) les instruments. Les résultats obtenus par Nederveen sont intéressants mais la précision des fréquences de jeu est limitée par la non reproductibilité de l' instrumentiste. En effet, l' instrumentiste modifie inconsciemment son embouchure à chaque note, l' embouchure n' est pas parfaitement contrôlée. Afin de minimiser les effets dus à l' instrumentiste, Backus (1963) construit une bouche artificielle, dans laquelle il place un bec et une anche montés sur une clarinette. L' emploi d' une lèvre suffisamment amortissante s' avère nécessaire afin d' éviter les régimes "in tempo" décrits par Bouasse (1929). Les résultats de l' analyse linéaire au seuil qu' il entreprend sans considérer l' effet du débit d' anche, sont comparés aux résultats expérimentaux obtenus à l' aide de la bouche artificielle pour de petites oscillations. L' écart fréquentiel relatif entre fréquence de résonance du tuyau et fréquence de jeu est analysé pour diverses amplitudes de l' oscillation et divers amortissements appliqués à l' anche. Wilson et Beavers (1974) présentent des travaux similaires basés sur une manipulation plus simple : une bouche artificielle qui produit des auto-oscillations pour un simple tuyau monté à l' extrémité d' un bec et d' une anche simplifiés. Ce type d' expérience est réalisé aussi pour la flûte (Coltman, 1968) afin de corrélérer fréquence fondamentale du signal et fréquence de résonance du résonateur.

Très souvent, il est possible de contrôler la justesse d' un instrument en contrôlant la valeur des premières fréquences de résonance du résonateur. Pour les instruments à anche, cette idée, à la base des premières théories des instruments à vent (Bernoulli, 1763) est exploitée entre autres, par Meynial et Kergomard (1988) dans le but de créer un système de clé micro intervalle (conception d' un système quart-de-ton) permettant de décaler la fréquence de jeu de Δf en décalant la fréquence de résonance de la même quantité Δf . Cette technique est facilement applicable à la clarinette et à la flûte, instruments pour lesquels la fréquence de jeu est essentiellement contrôlée par la première fréquence de résonance du résonateur, moyennant la correction de longueur due à l' effet d' embouchure.

Influence de l' inharmonicité.

Néanmoins le contrôle de la fréquence de jeu par un seule fréquence de résonance n' est pas systématique : par exemple, des difficultés ont été rencontrées lors de la mise au point des clés micro-intervalles pour les instruments à perce conique (Kergomard et Meynial, 1988). Ceci est traduit qualitativement en affirmant que les résonances d' ordre supérieur peuvent intervenir dans le processus d' auto-entretien de l' oscillation. Il est admis (Bouasse, 1929 ; Benade, 1976 ;

Fletcher, 1978) qu' une bonne harmonicité des fréquences de résonance d' ordre supérieur est favorable à l' entretien des oscillations mettant en jeu plusieurs résonances d' un même doigté. Gilbert (1989) et Dalmont et coll. (1994) vérifient qu' un contrôle conjugué des premières fréquences de résonances et de leur bonne harmonicité relative est importante pour l' émission et l' auto-entretien d' une note : cette propriété est utilisée pour l' étude de faisabilité d' une clé micro-intervalle appliquée au saxophone alto.

N.B. la note "pédale" du trombone en est un cas extrême (Bouasse, 1929) : le régime le plus grave du trombone à coulisse ne correspond à aucune fréquence de résonance. Sa stabilité est assurée par les résonances d' ordre supérieur multiples de la fréquence fondamentale de l' oscillation.

Une bonne harmonicité des fréquences de résonance est importante aussi pour la qualité de timbre et de justesse des instruments à anche. En effet, la fréquence fondamentale des notes du second registre est intimement corrélée à la seconde fréquence de résonance du résonateur (octaviation dans le cas des instruments à perce conique, douzoisement pour les instruments à perce cylindrique) ; la bonne harmonicité des deux premières fréquences de résonances est donc déterminante quant à la justesse des notes du second registre. De plus, nous vérifions dans la troisième partie de ce mémoire que le spectre de pression interne, pour un doigté donné, est en relation étroite avec l' inharmonicité des fréquences de résonance de ce même doigté.

Influence de la pression d' alimentation sur la fréquence de jeu.

Bak et Domler (1987), Gilbert (1989), Boutillon et Gibiat (1994) s' intéressent à l' évolution de la fréquence de jeu en fonction de la pression d' alimentation respectivement pour une clarinette, un monochromateur (résonateur possédant une seule résonance) et un saxophone joués à l' aide d' une bouche artificielle. Les résultats obtenus par Bak et Domler (1987) semblent mettre en évidence l' influence de l' enroulement de l' anche. Cependant l' existence de résonances d' ordre supérieur peut avoir une influence non négligeable sur l' évolution de la fréquence de jeu (cf. la relation (I-46) exprimant le décalage fréquentiel provoqué par une seconde résonance inharmonique dans le cas où les petites oscillations quasi-sinusoidales existent au seuil). L' utilisation d' un résonateur à résonance unique (Meynial, 1987) peut permettre une étude permettant de s' affranchir des résonances d' ordre supérieur et mériterait des analyses complémentaires afin d' estimer l' influence de la non-linéarité d' enroulement par exemple.

Influence de la courbe enveloppe de l' impédance d' entrée sur les spectres interne et externe

Benade et coll. (1988) s' intéressent au spectre de pression rayonnée caractérisant les instruments à anche simple en situation de jeu. La modélisation de la fonction de transfert

Partie A.

entre la pression interne au niveau du bec et de la pression rayonnée, notamment au niveau du premier trou ouvert, lui permet de corrélérer des mesures de spectre moyennées dans une salle et des enveloppes spectrales calculées à partir d' un modèle simple. Il met ainsi en évidence la différence existant entre les enveloppes spectrales résultant d' oscillations en anche battante ou non battante.

Analyse du signal résultant des régimes d' oscillations.

L' analyse du signal musical (dans le plan temps-fréquence, par exemple) est un domaine très important de l' acoustique (application à la perception, à la synthèse). Les systèmes dynamiques non-linéaires en général et les instrument à anche simple en particulier peuvent être le siège de régimes d' oscillation auto-entretenus complexes. Backus (1978) et Castellengo (1992) ont énuméré et analysé de nombreux doigtés multiphoniques. Gibiat (1988), Keefe et Laden (1991) analysent de tels régimes d' oscillation par l' utilisation des sections de Poincaré. Signalons aussi une étude similaire récente de Idogawa et coll. (1993) sur des régimes d' oscillations d' une clarinette adaptée sur une bouche artificielle, régimes d' oscillations périodiques et non-périodiques obtenus pour divers réglages de l' embouchure avec un doigté donné.

Maganza (1986) et Grand (1994) ont simulé des successions de doublement de période conduisant au chaos. S' ils ont obtenu ce résultat à partir d' une non-linéarité différente de celle décrite au paragraphe II.2.2., rien n' empêche, a priori d' obtenir ce résultat à partir du modèle élémentaire. Signalons que Schumacher (1981) simule un régime multiphonique à partir d' une impédance calculée basée sur un doigté connu des clarinettistes. Nous présentons dans la seconde partie de ce mémoire des simulations de "notes qui roulent" (régimes bipériodiques) obtenues à partir d' impédances mesurées de saxophone alto caractérisées par une forte inharmonicité entre les deux premières fréquences de résonance, impédances correspondant à des doigtés qui provoquent ces "roulements" dans la réalité (Dalmont et Gilbert, 1993).