

A noter que la numérotation des paragraphes adoptée ici est calquée sur celle du cours oral afin de faciliter le suivi du cours magistral, mais ne répond pas aux normes de présentation usuelles d'un document écrit.

COURS DE MECANIQUE - VIBRATIONS

1ère année

Catherine POTEL, Philippe GATIGNOL

Chapitre 1. OUTILS MATHÉMATIQUES : VECTEURS ET REPERES DE L'ESPACE

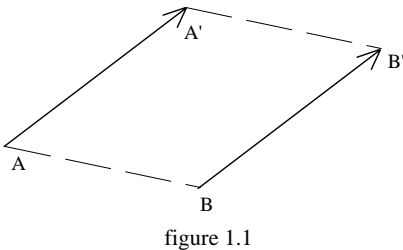
Université du Maine - UFR Sciences et Techniques

I VECTEURS LIBRES, ORIENTATION DE L'ESPACE

L'usage des vecteurs en mécanique est fondamental. Il permet de représenter les vitesses et les accélérations des points, les rotations des solides, les forces exercées ainsi que leurs moments, etc... Plusieurs types de vecteurs sont introduits parmi lesquels les vecteurs liés et les vecteurs libres. Nous introduirons à propos des forces le concept de vecteur glissant. Enfin, certains vecteurs tels que les vecteurs rotation ont une définition qui dépend du choix de l'orientation de l'espace. Il est donc essentiel avant tout de bien distinguer ces diverses notions.

1 Vecteurs liés - Vecteurs libres

Sans rentrer dans des considérations mathématiques, la distinction entre vecteurs liés et vecteurs libres peut se résumer rapidement par : **on peut dire que l'on n'effectue d'opérations que sur des vecteurs libres tandis qu'on ne peut dessiner que des vecteurs liés.**



La représentation géométrique d'un vecteur lié est très simple : on dessine le segment AA' muni d'une flèche indiquant son extrémité (voir figure 1.1). Par contre, il n'est pas possible de représenter directement un vecteur libre. On utilise toujours pour cela l'un de ses représentants, dont on choisit souvent l'origine en un point particulier de l'espace.

2 Eléments caractéristiques d'un vecteur libre

Un vecteur libre \vec{V} , défini à partir d'un vecteur lié (A, A') , peut être caractérisé par la donnée :

- d'une direction de droite orientée qui précise
 - la direction du vecteur, celle de la droite (AA') .
 - le sens du vecteur, celui de A vers A' .
- d'une longueur (nombre arithmétique) qui précise
 - le module du vecteur, égal à la longueur AA' .
 Notation : $|\vec{V}|$ ou $\|\vec{V}\|$.

3 Vecteurs glissants ou glisseurs

La représentation géométrique des forces, telle qu'elle sera décrite au chapitre 3, fait appel au concept de vecteur glissant défini ci-dessous (figure 1.2).

Définition : on appelle **vecteur glissant**, ou **glisseur**, l'ensemble des vecteurs liés équipollents à un vecteur lié (A, A') et situés sur la droite (AA') .

Il s'agit donc d'une notion intermédiaire entre le vecteur lié et le vecteur libre.

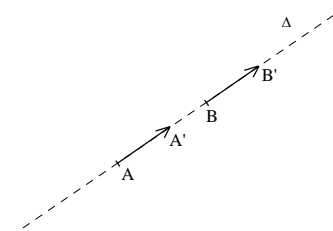


Figure 1.2

4 Orientation de l'espace

Pour repérer la position de points ou d'objets dans l'espace, il est nécessaire d'introduire des grandeurs algébriques, telles que les abscisses ou les angles. De même que le signe de l'abscisse d'un point relativement à un point origine dépend du choix qui est fait pour l'orientation de la droite, un plan donné est susceptible de recevoir deux orientations.

Orientation de l'espace à deux dimensions

En géométrie plane, on travaille sur la "feuille de papier" ou sur le "tableau". Deux sens de rotation sont possibles : le sens "des aiguilles d'une montre" et le sens opposé (sens trigonométrique). Orienter le plan consiste à choisir l'un de ces deux sens afin d'évaluer algébriquement les angles. La convention habituelle consiste à choisir le sens trigonométrique.

Orientation d'un plan dans l'espace à trois dimensions

La convention précédente n'a cependant plus de sens lorsque le plan considéré est situé dans l'espace. Il peut alors être regardé d'un côté ou de l'autre, et ce qui correspond au sens des aiguilles d'une montre pour un observateur sera le sens opposé pour un observateur situé de l'autre côté.

On orientera donc un plan de l'espace en précisant d'abord quel est le demi-espace d'où il faut regarder ce plan. Pour ce faire, on choisit sur une droite normale au plan une orientation. Le demi-espace d'observation est alors celui vers lequel "pointe" la droite orientée (figure 1.3) telle que Oz. L'orientation du plan, vu de ce demi-espace, est alors définie usuellement par la convention du sens trigonométrique. On marque ce choix par la considération des deux axes ordonnés Ox et Oy tels que l'angle algébrique (Ox,Oy) soit égal à $+\frac{\pi}{2}$ pour l'orientation ainsi choisie.

Avec ces conventions, on dira le triplet ordonné des directions orientées (Ox,Oy,Oz) est **positif** au sens de l'orientation de l'espace.

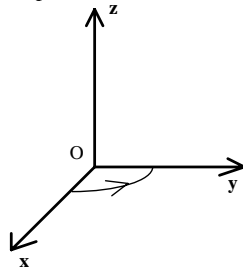


Figure 1.3

II BASES ET COMPOSANTES D'UN VECTEUR

1 Base orthonormée directe

$\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est une **base orthonormée** si et seulement si :

$$\begin{cases} \vec{e}_x \perp \vec{e}_y \perp \vec{e}_z & \text{(vecteurs orthogonaux deux à deux)} \\ \|\vec{e}_x\| = \|\vec{e}_y\| = \|\vec{e}_z\| = 1 & \text{(vecteurs unitaires)} \end{cases}$$

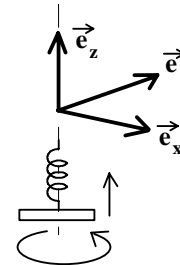


Figure 1.4-a

Si, de plus, deux des vecteurs de la base définissent le sens positif du troisième selon la "règle du tire-bouchon" ou selon la "règle des trois doigts", $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est une base orthonormée **directe**. Sinon, elle est indirecte.

Règle du tire bouchon :

rotation de \vec{e}_x vers \vec{e}_y : progression selon \vec{e}_z (figure 1.4-a)

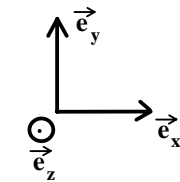


Figure 1.4-b

Représentation plane :

où \otimes désigne un vecteur "rentrant" dans le plan de la feuille
 \odot désigne un vecteur "pointant" vers le lecteur (figure 1.4-b).

2 Repère orthonormé direct

Un **repère** \mathcal{R} de l'espace est défini par la donnée

- d'un point de l'espace appelé **origine**, soit O.
- soit de **trois directions orientées** x, y, z perpendiculaires deux à deux
- soit de trois vecteurs libres unitaires, orthogonaux deux à deux, soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$,

la **base orthonormée associée** au repère \mathcal{R} .

Terminologie et notations : on parle alors du repère (O, x y z) ou du repère d'origine

O et de base $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, noté selon les cas :

\mathcal{R} , (O, x y z), (O; $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$) ou (O, \mathcal{B}).

3 Coordonnées d'un point - composantes d'un vecteur

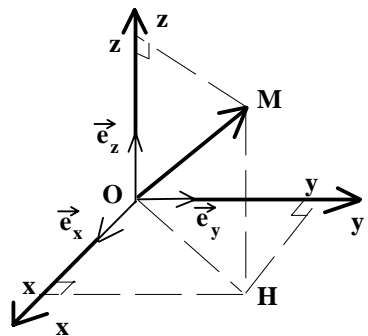


Figure 1.5

❖ Un **vecteur** a des **composantes sur une base** $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Ainsi,

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z,$$

également noté :

$$\vec{OM} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}_{\mathcal{B}} \quad (1.1)$$

Remarque fondamentale. Un même vecteur a des composantes différentes suivant la base sur laquelle il est projeté. Il faut donc toujours signaler dans quelle base on a projeté le vecteur.

❖ Un **point** M a pour **coordonnées** dans le **repère** $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}) : M(x, y, z)$.

III CALCUL VECTORIEL

Soient \vec{V}_1 et \vec{V}_2 deux vecteurs libres de l'espace, de modules ℓ_1 et ℓ_2 respectivement.

1 Produit scalaire de deux vecteurs

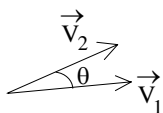


Figure 1.6

Soit θ l'angle arithmétique (compris entre 0 et π) de \vec{V}_1 et \vec{V}_2 .

Le **produit scalaire** des vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est le nombre algébrique défini comme le produit $\ell_1 \ell_2 \cos \theta$.

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1 = \ell_1 \ell_2 \cos \theta = \|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\| \cos \theta. \quad (1.2)$$

a) Propriétés du produit scalaire

- $\vec{V} \cdot \vec{V} = \|\vec{V}\|^2 \quad (1.3)$

- $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0 \Rightarrow$ l'un (au moins) des deux vecteurs est nul $(1.4-a)$

ou bien les deux vecteurs sont orthogonaux entre eux. $(1.4-b)$

▪ Relation avec les opérations algébriques :

- $\alpha (\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = (\alpha \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2 \quad (1.5)$

- $\vec{V} \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{V} \cdot \vec{V}_1 + \vec{V} \cdot \vec{V}_2 \quad (1.6)$

b) Utilisation des composantes

Si $\vec{V}_1 \begin{vmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{V}_2 \begin{vmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{vmatrix}_{\mathcal{B}}$ alors $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = u_1 \cdot u_2 + v_1 \cdot v_2 + w_1 \cdot w_2 \quad (1.7)$

et donc : $\|\vec{V}\| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \quad (1.8)$

2 Produit vectoriel de deux vecteurs

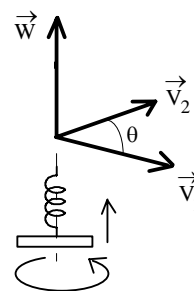


Figure 1.7

Le **produit vectoriel** des deux vecteurs libres \vec{V}_1 et \vec{V}_2 est le vecteur libre \vec{W} ayant pour module le produit suivant (toujours positif) :

$$\|\vec{W}\| = \|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\| \sin \theta. \quad (1.9)$$

Notation : $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

a) Propriétés du produit vectoriel

- $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est **perpendiculaire** à \vec{V}_1 et à \vec{V}_2 . (1.10)

- La **direction** de $\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est donnée par la "**règle du tire-bouchon**" ou par la "règle des trois doigts". (1.11)

- $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{V}_1\| = 0$ ou (et) $\|\vec{V}_2\| = 0$ ou $\theta = 0$ ou π (1.12)

Si le produit vectoriel de deux vecteurs est nul, ou bien l'un (au moins) de ces vecteurs est nul, ou bien les vecteurs ont même direction.

- $\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1 = -\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \quad (1.13)$

$$\alpha \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \alpha (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \tag{1.14}$$

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3 \tag{1.15}$$

b) Utilisation des composantes

$$\text{Si } \begin{matrix} \vec{V}_1 \\ \mathcal{B} \end{matrix} \Big|_{w_1} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \end{matrix} \text{ et } \begin{matrix} \vec{V}_2 \\ \mathcal{B} \end{matrix} \Big|_{w_2} \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \end{matrix} \text{ alors } \begin{matrix} \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \\ \mathcal{B} \end{matrix} \Big|_{w_1} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \end{matrix} \wedge \begin{matrix} \vec{V}_2 \\ \mathcal{B} \end{matrix} \Big|_{w_2} \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \end{matrix} = \begin{matrix} \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \\ \mathcal{B} \end{matrix} \Big|_{u_1 v_2 - v_1 u_2} \begin{matrix} v_1 w_2 - w_1 v_2 \\ w_1 u_2 - u_1 w_2 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{matrix} \tag{1.16}$$

IV **REPERES DANS L'ESPACE PHYSIQUE**

1 Repère cartésien. Coordonnées cartésiennes

Soit $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ un repère orthonormé positif donné.

A tout point M de l'espace, on associe le vecteur libre \vec{OM} .

Les composantes de \vec{OM} sur la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont appelées "coordonnées cartésiennes du point M dans le repère \mathcal{R} ". Nous les noterons x, y, z.

Cela revient à dire que
$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \tag{1.17}$$

2 Coordonnées cylindriques

On considère un plan Π orienté conformément au sens de sa normale, soit Oz, et un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le repère $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ est donc un repère positif du plan.

a) Coordonnées polaires dans le plan

H étant un point quelconque de $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, on considère la droite (OH) sur laquelle on choisit une orientation qui n'est pas nécessairement celle du vecteur \vec{OH} . On définit ainsi un axe Ox_1 . On désigne par :

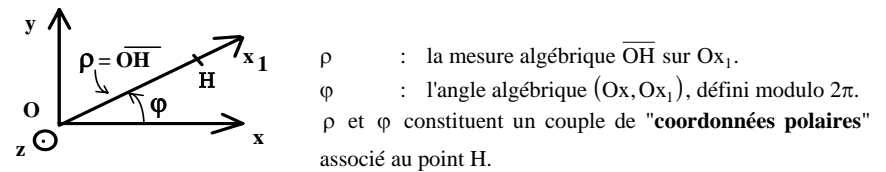


Figure 1.8

Remarques : A un point H correspond une infinité de couples de coordonnées polaires :

- il y a déjà l'infinité $\rho, \varphi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)
- si l'on change le choix de l'orientation de la droite (OH), l'axe Ox_1 est changé en son opposé, donc ρ en $-\rho$ et φ en $\varphi + \pi$ (modulo 2π).
- on a donc la double infinité de points :
$$\left\{ \begin{matrix} \rho, \varphi + 2k\pi \\ -\rho, \varphi + \pi + 2k\pi \end{matrix} \right. \quad (k \in \mathbb{Z}) \tag{1.18}$$

b) Coordonnées cylindriques

Le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ étant donné, on peut repérer un point M quelconque de l'espace de la manière suivante : on considère les projections H sur le plan $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et K sur l'axe Oz. La position de H est repérée dans le plan par ses coordonnées polaires $H(\rho, \varphi)$ et celles de K sur Oz par la mesure algébrique $\vec{OK} = z$.

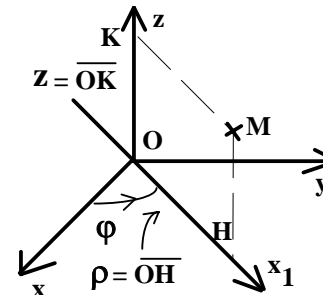


Figure 1.9

- Le point M est donc repéré par le triplet (ρ, φ, z) appelé "coordonnées cylindriques" de M dans $\mathcal{R} = (O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, avec l'indétermination sur ρ et φ déjà signalée.
- On définit la **base orthonormée locale des coordonnées cylindriques** $\mathcal{B}_c = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ où $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ sont définis dans le sens des ρ, φ, z croissants.

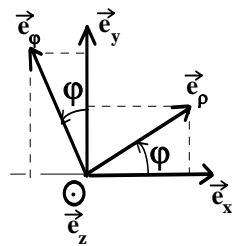
c) Relations avec les coordonnées cartésiennes

▪ Marche à suivre :

① Il faut d'abord déterminer les relations entre les vecteurs de la base des coordonnées cartésiennes $\mathcal{B} = (\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ et les vecteurs de la base orthonormée locale des coordonnées cylindriques $\mathcal{B}_c = (\bar{e}_\rho, \bar{e}_\varphi, \bar{e}_z)$.

② Sachant ensuite que $\vec{OM} = x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z$ et aussi que $\vec{OM} = \rho\bar{e}_\rho + z\bar{e}_z$, on en déduira alors les relations entre (x, y, z) et (ρ, φ, z)

▪ Obtention des relations cherchées :



La projection des vecteurs de la base $\mathcal{B}_c = (\bar{e}_\rho, \bar{e}_\varphi, \bar{e}_z)$ sur ceux de la base $\mathcal{B} = (\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ donne (figure 1.10) :

$$\begin{cases} \bar{e}_\rho = \cos \varphi \bar{e}_x + \sin \varphi \bar{e}_y \\ \bar{e}_\varphi = -\sin \varphi \bar{e}_x + \cos \varphi \bar{e}_y \\ \bar{e}_z = \bar{e}_z \end{cases} \quad (1.19)$$

Figure 1.10

Inversement, la projection des vecteurs de la base $\mathcal{B} = (\bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$ sur ceux de la base $\mathcal{B}_c = (\bar{e}_\rho, \bar{e}_\varphi, \bar{e}_z)$ donne :

$$\begin{cases} \bar{e}_x = \cos \varphi \bar{e}_\rho - \sin \varphi \bar{e}_\varphi \\ \bar{e}_y = \sin \varphi \bar{e}_\rho + \cos \varphi \bar{e}_\varphi \\ \bar{e}_z = \bar{e}_z \end{cases} \quad (1.20)$$

ce qui peut être résumé dans le tableau suivant :

	\bar{e}_x	\bar{e}_y	\bar{e}_z
\bar{e}_ρ	$\cos \varphi$	$\sin \varphi$	0
\bar{e}_φ	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$	0
\bar{e}_z	0	0	1

De plus,

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \rho\bar{e}_\rho + z\bar{e}_z \\ &= \rho(\cos \varphi \bar{e}_x + \sin \varphi \bar{e}_y) + z\bar{e}_z \\ &= x\bar{e}_x + y\bar{e}_y + z\bar{e}_z \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (1.22)$$

3 Coordonnées sphériques

Le repère $(O, x y z)$ étant donné, ce qui revient à définir $\mathcal{R} = (O; \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z)$, et M désignant un point quelconque non situé sur Oz, on considère le plan défini par Oz et ce point M. Ce plan coupe le plan $(O; \bar{e}_x, \bar{e}_y)$ selon une droite que l'on oriente de telle sorte que l'axe Ox_1 ainsi défini "pointe" dans le demi plan contenant M. Comme précédemment, on appelle \bar{e}_ρ le vecteur unitaire porté par cette droite orientée.

On désigne par :

- φ : l'angle algébrique (Ox, Ox_1) , défini modulo 2π ,
- Oy_1 : l'axe perpendiculaire, dans le plan $(O; \bar{e}_x, \bar{e}_y)$ tel que $(Oy, Oy_1) = \varphi$,
- \bar{e}_φ : le vecteur unitaire porté par l'axe Oy_1 ,
- Oz_2 : la droite (OM) orientée dans le sens du vecteur \vec{OM} ,
- r : la mesure algébrique \overline{OM} , toujours positive,
- \bar{e}_r : le vecteur unitaire porté par l'axe Oz_2 ,
- θ : l'angle orienté (Oz, Oz_2) , compté positivement dans le plan $(O, z x_1)$, c'est-à-dire le plan $(O; \bar{e}_z, \bar{e}_\rho)$, conformément à l'orientation de sa normale Oy_1 et compris entre 0 et π ,
- Ox_2 : l'axe perpendiculaire, dans le plan $(O; \bar{e}_z, \bar{e}_\rho)$ tel que $(Ox_1, Ox_2) = \theta$,
- \bar{e}_θ : le vecteur unitaire porté par l'axe Ox_2 .

$(O, x_1 y_1 z)$ ou $\mathcal{R}_c = (O; \bar{e}_\rho, \bar{e}_\varphi, \bar{e}_z)$ est donc un nouveau repère orthonormé positif, déduit de $(O, x y z)$ par rotation de φ autour de Oz, commun aux deux repères.

$(O, z_2 x_2 y_1)$ ou $\mathcal{R}_s = (O; \bar{e}_r, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\varphi)$ est donc un nouveau repère orthonormé positif, déduit de $(O, x_1 y_1 z)$ par rotation de θ autour de Oy_1 , commun aux deux repères.

Le point M est donc repéré par le triplet (r, θ, φ) appelé "coordonnées sphériques" de M dans

$$\mathcal{R} = (O; \bar{e}_x, \bar{e}_y, \bar{e}_z), \text{ avec } \begin{cases} r > 0 \\ \theta \in]0, \pi[\\ \varphi \in [0, 2\pi[\end{cases} \quad (2\pi) \quad (1.23)$$

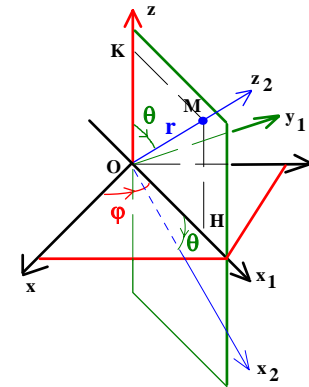


Figure 1.11

Remarque :

Ces coordonnées ne sont pas définies lorsque M est sur Oz.
 φ s'appelle l'azimut et θ la colatitude.

Cherchons maintenant les relations avec les coordonnées cartésiennes.

▪ Marche à suivre :

* Il faut d'abord déterminer les relations entre les vecteurs de la base des coordonnées cartésiennes $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ avec les vecteurs de la **base locale** des coordonnées cylindriques $\mathcal{B}_c = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$, ce qui a fait l'objet du § IV/2-c).

* Il faut ensuite déterminer les relations entre les vecteurs de la base locale des coordonnées cylindriques $\mathcal{B}_c = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ avec les vecteurs de la **base locale** des coordonnées sphériques $\mathcal{B}_s = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

* Sachant ensuite que $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ et aussi que $\vec{OM} = r\vec{e}_r$, on en déduira alors les relations entre (x, y, z) et (r, θ, φ) .

▪ Obtention des relations recherchées :

Les deux figures suivantes 1.12 a) et 1.12 b) sont tout à fait équivalentes. La première se rapproche plus du dessin en perspective de la figure 1.11, alors que la deuxième permet de se ramener à une configuration classique pour projeter les vecteurs de base.

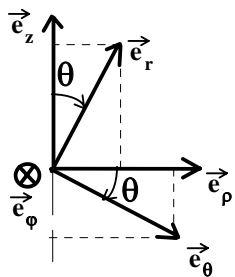


figure 1.12 a)

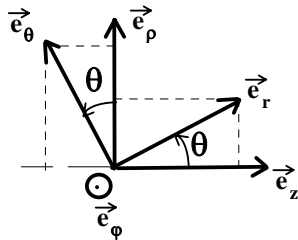


figure 1.12 b)

où \otimes désigne un vecteur "rentrant" dans le plan de la feuille
 \odot désigne un vecteur "pointant" vers le lecteur.

La projection des vecteurs de la base $\mathcal{B}_s = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ sur ceux de la base $\mathcal{B}_c = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ donne :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_z + \cos \theta \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \end{cases} \quad (1.24)$$

Inversement, la projection des vecteurs de la base $\mathcal{B}_c = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ sur ceux de la base $\mathcal{B}_s = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ donne :

$$\begin{cases} \vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\rho = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \end{cases} \quad (1.25)$$

Il reste ensuite à remplacer les vecteurs de la base $\mathcal{B}_c = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ par leur expression en fonction des vecteurs de la base $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ dans l'équation précédente, ce qui peut être résumé dans le tableau suivant :

	\vec{e}_x	\vec{e}_y	\vec{e}_z	
\vec{e}_r	$\sin \theta \cos \varphi$	$\sin \theta \sin \varphi$	$\cos \theta$	(1.26)
\vec{e}_θ	$\cos \theta \cos \varphi$	$\cos \theta \sin \varphi$	$-\sin \theta$	
\vec{e}_φ	$-\sin \varphi$	$\cos \varphi$	0	

De plus,

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= r\vec{e}_r \\ &= r(\sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z) \\ &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \end{aligned}$$

d'où
$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad (1.27)$$

4 En résumé

-	Coordonnées cartésiennes : x, y, z ; $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$	$\vec{OM} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$	$\vec{OM} \begin{vmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{vmatrix}$	$\vec{OM} \begin{vmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$
-	Coordonnées cylindriques : (ρ, φ, z) ; $\vec{OM} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z$	$\vec{OM} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$	$\vec{OM} \begin{vmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{vmatrix}$	$\vec{OM} \begin{vmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$
-	Coordonnées sphériques : (r, θ, φ) ; $\vec{OM} = r\vec{e}_r$	$\vec{OM} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$	$\vec{OM} \begin{vmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{vmatrix}$	$\vec{OM} \begin{vmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$