DEUST VIBRATIONS ACOUSTIQUE SIGNAL

1ère année

Catherine POTEL

COURS DE MECANIQUE - VIBRATIONS

Chapitre 2.
CINEMATIQUE DU POINT

Université du Maine - UFR Sciences et Techniques

Une grande partie de ce cours a été réalisée en collaboration avec M. Ph. Gatignol, Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne.

A noter que la numérotation des paragraphes adoptée ici est calquée sur celle du cours oral afin de faciliter le suivi du cours magistral, mais ne répond pas aux normes de présentation usuelles d'un document écrit.

I GENERALITES

1 Définition et but de la cinématique

- La cinématique est la partie de la mécanique qui étudie les mouvements des corps dans leurs rapports avec le temps, indépendamment des causes de ces mouvements.
- Un problème de cinématique consiste à déterminer des relations entre les longueurs, les vitesses, les accélérations et le temps, se rapportant aux mouvements des points et des corps supposés ici ***indéformables***.

2 Vecteurs vitesse et accélération d'un point par rapport à un repère

a) Point mobile par rapport à un repère

On a vu au chapitre 1 comment les positions des points de l'espace pouvaient être définies par des coordonnées cartésiennes (x, y, z) par rapport à un repère (orthonormé direct) :

$$\mathscr{R} = \left(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right) \quad .$$

Définition : on dira qu'un ***point*** M *est* ***mobile par rapport au repère*** $\mathscr{R}$ *si ses coordonnées cartésiennes par rapport à ce repère sont fonctions du temps* t *.*

☞ De manière équivalente, le point M est mobile par rapport au repère $(O, \mathscr{B})$ si le vecteur (libre) position $\overrightarrow{OM}$ est fonction du temps par rapport à la base $\mathscr{B} = \left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$.

On peut donc écrire :

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z \quad . \qquad (2.1)$$

b) Vecteur vitesse

Définition : on appelle ***vecteur vitesse*** *(ou simplement* ***la vitesse****) d'un point* M *par rapport à un repère* $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ *le vecteur dérivée par rapport au temps* t*, et par rapport à la base* $\mathscr{B}$*, du vecteur position* $\overrightarrow{OM}$.

Notation :

$$\boxed{\vec{V}(M / \underline{\mathscr{R}}) = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\underline{O}M}}{dt}\right)_{/\underline{\mathscr{B}}}} \quad . \qquad (2.2)$$

On a volontairement souligné ici les éléments concernant le repère $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ afin de montrer comment interviennent ces éléments dans la définition de la vitesse : l'origine O apparaît dans la définition du vecteur position $\overrightarrow{OM}$, tandis que la base $\mathscr{B}$ est la base de dérivation par rapport au temps de la fonction vectorielle ainsi définie.

Si le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est projeté sur la base $\mathscr{B}$, qui est alors également base de projection, le vecteur vitesse $\vec{V}(M/\mathscr{R})$ s'exprime sur la base $\mathscr{B}$ en dérivant les composantes du vecteur position, c'est-à-dire les coordonnées de M :

$$\vec{V}(M / \underline{\mathscr{R}}) = \left(\frac{d\,\overrightarrow{\underline{O}M}}{dt}\right)_{/\underline{\mathscr{B}}} = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z \quad . \qquad (2.3)$$

En revanche, si le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est projeté sur une autre base que la base $\mathscr{B}$, soit $\mathscr{B}' = \left(\vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z\right)$, il faut alors dériver par rapport au temps et par rapport à $\mathscr{B}$ les vecteurs de la nouvelle base de projection $\mathscr{B}'$, comme nous le verrons au § 3.

Dimension : $[V] = L\,T^{-1}$ en m/s

c) Vecteur accélération

Définition : On appelle ***vecteur accélération*** *(ou simplement* ***accélération****) d'un point* M *par rapport à un repère* $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$ *le vecteur dérivée par rapport au temps, et par rapport à la base* $\mathscr{B}$*, du vecteur vitesse* $\vec{V}(M/\mathscr{R})$.

Notation :

$$\boxed{\vec{\Gamma}(M / \underline{\mathscr{R}}) = \left(\frac{d^2\,\overrightarrow{\underline{O}M}}{dt^2}\right)_{/\underline{\mathscr{B}}} = \left(\frac{d\vec{V}_{M/\underline{\mathscr{R}}}}{dt}\right)_{/\underline{\mathscr{B}}}} \quad . \qquad (2.4)$$

On voit ici, également soulignés, comment interviennent les éléments du repère $\mathscr{R} = (O, \mathscr{B})$: la vitesse est évaluée par rapport à ce repère puis dérivée par rapport à t et par rapport à la base de ce même repère.

Si le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est projeté sur la base $\mathscr{B}$, qui est alors également <u>base de projection</u>, le vecteur accélération est le vecteur libre qui s'exprime dans la base $\mathscr{B}$ sous la forme :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathscr{R}) = \left(\frac{d\vec{V}_{M/\mathscr{R}}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}} = \ddot{x}(t)\vec{e}_x + \ddot{y}(t)\vec{e}_y + \ddot{z}(t)\vec{e}_z \quad . \tag{2.5}$$

<u>Dimension</u> : $[\Gamma] = L\,T^{-2}$ en m/s^2

L'accélération $\vec{\Gamma}(M/\mathscr{R})$ peut s'interpréter comme la vitesse du point N, extrémité du représentant d'origine O du vecteur vitesse $\vec{V}(M/\mathscr{R})$. La trajectoire de N s'appelle "*l'hodographe*".

II POINT MOBILE SUR UNE DROITE

1 <u>Etude générale</u>

Soit un point M se déplaçant sur une droite fixe Δ. Un axe Ox est choisi sur cette droite. Soit $\vec{e}_x$ le vecteur unitaire orientant cet axe. Un repère orthonormé direct peut donc être défini tel que $\mathscr{R} = (O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$.

La position de M à chaque instant est donnée par son abscisse $x(t)$: c'est la "*loi horaire*" .

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{e}_x. \tag{2.6}$$

La vitesse de M par rapport à $\mathscr{R}$ à chaque instant est donc donnée par (voir § I/2) :

$$\vec{V}(M/\mathscr{R}) = \left(\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}} = \dot{x}(t)\;\vec{e}_x. \tag{2.7}$$

Dans un *mouvement* sur une *droite*, le *vecteur vitesse* demeure donc *parallèle* à cette *droite*. On a donc une fonction vectorielle de direction constante.

▪ <u>Réciproquement</u> :

Si la vitesse $\vec{V}(M/\mathscr{R})$ d'un point mobile M par rapport au repère $\mathscr{R}$ garde une direction constante, le mouvement de M a lieu sur une droite.

Choisissons $(O;\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z)$ tel que $\vec{e}_x$ soit parallèle à la direction du vecteur vitesse. On a alors : $\vec{V}(M/\mathscr{R}) = v(t)\,\vec{e}_x$, soit $\begin{cases}\dot{x}(t) = v(t)\\ \dot{y}(t) = 0\\ \dot{z}(t) = 0\end{cases}$ ou encore $\begin{cases}x(t) = \int_0^t v(u)du + x_0\\ y(t) = y_0\\ z(t) = z_0\end{cases}$.

Le mouvement se fait donc sur la parallèle à $\vec{e}_x$ qui passe par le point $(0, y_0, z_0)$. La loi horaire $x(t)$ s'obtient en intégrant $v(t)$. La constante d'intégration x_0 s'interprète comme la position initiale (à $t = 0$) de M.

2 <u>Mouvement rectiligne à vitesse constante</u>

On appelle encore un tel mouvement, "*mouvement rectiligne **uniforme***".

La vitesse algébrique v sur Ox est supposée constante :

$$\vec{V}_{M/\mathscr{R}} = \dot{x}(t)\,\vec{e}_x = v\,\vec{e}_x = v_0\,\vec{e}_x. \tag{2.8}$$

L'accélération algébrique γ est donc nulle :

$$\vec{\Gamma}_{M/\mathscr{R}} = \ddot{x}(t)\,\vec{e}_x = \gamma\,\vec{e}_x = \vec{0}. \tag{2.9}$$

▪ ***Loi horaire***

La *loi horaire* s'obtient par intégration de $\dot{x}(t)$ (en prenant comme conditions initiales : à $t = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$ et $x(0) = x_0$) :

$$\dot{x}(t) = v_0 \Rightarrow x = v_0\,t + x_0. \tag{2.10}$$

De même que précédemment, la constante d'intégration x_0 s'interprète comme la position initiale (à $t = 0$) de M.
Si $v_0 > 0$ alors x augmente avec t.
Si $v_0 < 0$ alors x décroît avec t.

▪ ***Diagramme horaire***

On obtient le diagramme horaire (voir figure 2.1) en représentant graphiquement la fonction $x(t)$. La pente de la droite est donnée par $\mathrm{tg}\,\alpha = v_0$.

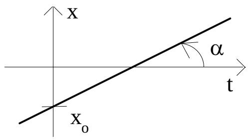


Figure 2.1

3 Mouvement rectiligne à accélération constante

On appelle encore un tel mouvement, "*mouvement* ***uniformément varié***".

L'accélération algébrique γ sur Ox est supposée constante :

$$\vec{\Gamma}_{M/\mathscr{R}} = \ddot{x}(t)\,\vec{e}_x = \gamma\,\vec{e}_x = \gamma_0\,\vec{e}_x. \qquad (2.14)$$

▪ ***Loi horaire***

▪ La vitesse s'obtient par intégration de $\ddot{x}(t)$:

$$\dot{x}(t) = v(t) = \gamma_0\,t + v_0. \qquad (2.15)$$

La constante d'intégration v_0 s'interprète comme la vitesse initiale (à $t = t_i = 0$) de M.

▪ La *loi horaire* s'obtient par intégration de $\dot{x}(t)$:

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\gamma_0 t^2 + v_0 t + x_0. \qquad (2.16)$$

La constante d'intégration x_0 s'interprète comme la position initiale (à $t = t_i = 0$) de M.

▪ ***Discussion du mouvement***

On choisit $\gamma_0 > 0$, ce qui revient à choisir $\vec{e}_x$.

D'après l'équation donnant $\dot{x}$, la vitesse s'annule pour $t = t_r$ tel que :

$$t_r = -\frac{v_0}{\gamma_0}. \qquad (2.17)$$

▪ pour $t < t_r$, $v(t) < 0$. Le point M se déplace donc vers les x décroissants.
▪ pour $t = t_r$, $v(t) = 0$. Le point M s'arrête : c'est un *point de rebroussement cinématique*.
▪ pour $t > t_r$, $v(t) > 0$. Le point M repart vers les x croissants définitivement.

L'abscisse du point de rebroussement est donnée par $x(t_r)$ telle que :

$$x(t_r) = \tfrac{1}{2}\gamma_0\left(\frac{v_0}{\gamma_0}\right)^2 - \frac{v_0^{\,2}}{\gamma_0} + x_0 = x_0 - \frac{v_0^{\,2}}{2\gamma_0}. \qquad (2.18)$$

▪ ***Diagramme horaire parabolique***

Le diagramme horaire de la figure 2.2 correspond au cas où $v_0 < 0$ (ce qui implique $t_r > 0$) et $x_0 > \frac{v_0^{\,2}}{2\gamma_0}$. C'est une parabole.

Si l'instant initial d'observation du mouvement est $t = t_i = 0$, il y a effectivement rebroussement du point M avec une vitesse initiale $v_0 < 0$.

Si l'instant initial t_i est tel que $t_i > t_r$, alors la vitesse initiale $v_i > 0$ et le point M part directement vers les x croissants.

Le diagramme linéaire de la vitesse est également représenté sur la figure 2.2.

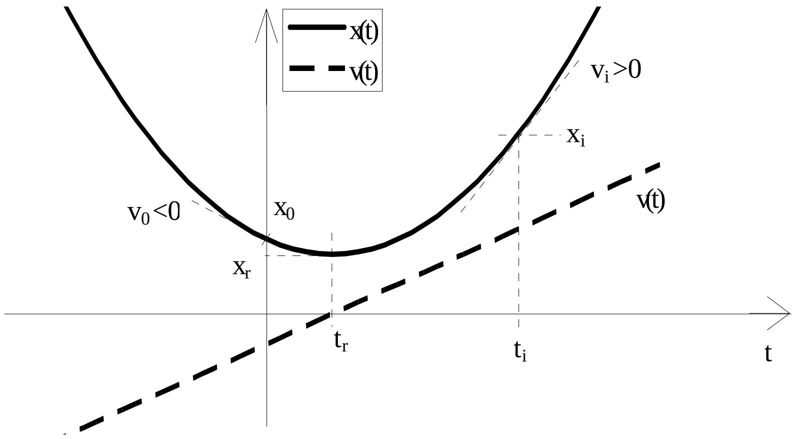


Figure 2.2

III BASE MOBILE

1 Base $\mathscr{B}_2$ mobile par rapport à une base $\mathscr{B}_1$

Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$, deux bases orthonormées définies par : $\mathscr{B}_1 = \left(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1}\right)$ et $\mathscr{B}_2 = \left(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2}\right)$

> *Définition : On dit que la **base** $\mathscr{B}_2$ est **mobile** par rapport à la base $\mathscr{B}_1$ si les composantes des vecteurs de la base $\mathscr{B}_2$, exprimées dans la base $\mathscr{B}_1$, dépendent du temps t.*

Cela revient à dire que si $\begin{cases} \vec{e}_{x_2} = \alpha_{11}\,\vec{e}_{x_1} + \alpha_{21}\,\vec{e}_{y_1} + \alpha_{31}\,\vec{e}_{z_1} \\ \vec{e}_{y_2} = \alpha_{12}\,\vec{e}_{x_1} + \alpha_{22}\,\vec{e}_{y_1} + \alpha_{32}\,\vec{e}_{z_1} \\ \vec{e}_{z_2} = \alpha_{13}\,\vec{e}_{x_1} + \alpha_{23}\,\vec{e}_{y_1} + \alpha_{33}\,\vec{e}_{z_1} \end{cases}$ alors $\alpha_{ij}(t)$ $i, j = 1, 2, 3$.

Remarque : Si $\mathscr{B}_2$ est mobile par rapport à $\mathscr{B}_1$, alors $\mathscr{B}_1$ l'est aussi par rapport à $\mathscr{B}_2$.

2 Vecteur rotation (instantané) associé au mouvement de $\mathscr{B}_2$ par rapport à $\mathscr{B}_1$

a) Cas particulier important

Soient $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bases orthonormées définies par : $\mathscr{B}_1 = \left(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1}\right)$ et $\mathscr{B}_2 = \left(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2}\right)$ avec $\vec{e}_{z_1} = \vec{e}_{z_2}$.

$\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont déduites l'une de l'autre par rotation d'angle α autour de $\vec{e}_{z_1}$ (figure 2.3).

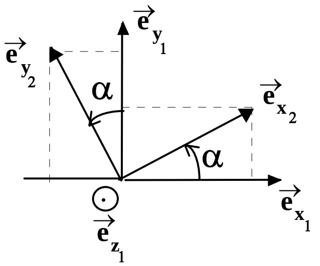


Figure 2.3

$$\begin{cases} \vec{e}_{x_2} = \cos\alpha\ \vec{e}_{x_1} + \sin\alpha\ \vec{e}_{y_1} \\ \vec{e}_{y_2} = -\sin\alpha\ \vec{e}_{x_1} + \cos\alpha\ \vec{e}_{y_1} \\ \vec{e}_{z_1} = \vec{e}_{z_1} \end{cases}$$

	$\vec{e}_{x_2}$	$\vec{e}_{y_2}$	$\vec{e}_{z_2}$
$\vec{e}_{x_1}$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	0
$\vec{e}_{y_1}$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	0
$\vec{e}_{z_1}$	0	0	1

Définition : On appelle ***vecteur rotation instantané (à l'instant t) associé au mouvement de*** *$\mathscr{B}_2$ par rapport à $\mathscr{B}_1$ le vecteur :*

$$\boxed{\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_2 / \mathscr{B}_1\right) = \dot{\alpha}\, \vec{e}_{z_1}} \quad , \qquad (2.19)$$

c'est-à-dire que $\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_2 / \mathscr{B}_1\right)$ est le vecteur autour duquel on tourne, multiplié par la dérivée par rapport au temps de l'angle dont on tourne.

Dimension : $\left\|\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_2 / \mathscr{B}_1\right)\right\|$ est une vitesse angulaire instantanée, donc $\left[\Omega\right] = \text{rad.s}^{-1}$.

⚠ $1\ \text{tr} / \text{min} = \dfrac{2\pi}{60}\ \text{rad.s}^{-1}$

b) Cas général

Le but de ce paragraphe est de trouver un vecteur $\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_2 / \mathscr{B}_1\right)$ ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = \vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_2 / \mathscr{B}_1\right) \wedge \vec{e}_{x_2} \\ \left(\dfrac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = \vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_2 / \mathscr{B}_1\right) \wedge \vec{e}_{y_2} \\ \left(\dfrac{d\vec{e}_{z_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = \vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_2 / \mathscr{B}_1\right) \wedge \vec{e}_{z_2} \end{cases} \qquad (2.20)$$

où $\mathscr{B}_1 = \left(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1}\right)$ et $\mathscr{B}_2 = \left(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2}\right)$ sont des bases orthonormées quelconques.

▪ Principe de la démonstration :

① On se donne les composantes sur la base $\mathscr{B}_2$ des dérivées des vecteurs de la base $\mathscr{B}_2$ par rapport à la base $\mathscr{B}_1$ et par rapport au temps, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = a_{11}\, \vec{e}_{x_2} + a_{21}\, \vec{e}_{y_2} + a_{31}\, \vec{e}_{z_2} \\ \left(\dfrac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = a_{12}\, \vec{e}_{x_2} + a_{22}\, \vec{e}_{y_2} + a_{32}\, \vec{e}_{z_2} \\ \left(\dfrac{d\vec{e}_{z_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = a_{13}\, \vec{e}_{x_2} + a_{23}\, \vec{e}_{y_2} + a_{33}\, \vec{e}_{z_2} \end{cases} \qquad (2.21)$$

Remarque : ces vecteurs ont également des composantes sur la base $\mathscr{B}_1$, mais on choisit de les exprimer sur la base $\mathscr{B}_2$. C'est une pratique que l'on utilisera couramment : même si l'on veut dériver un vecteur par rapport à la base $\mathscr{B}_1$, on peut choisir de l'exprimer sur la base $\mathscr{B}_2$, notamment lorsque ses composantes sont plus simples sur cette base. La connaissance du vecteur $\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_2 / \mathscr{B}_1\right)$ permettra, comme on le verra par la suite, d'obtenir la dérivée par rapport à $\mathscr{B}_1$. On comprend ainsi qu'il est essentiel de distinguer *base de projection* (pour exprimer les composantes) et *base de dérivation*.

② On cherche ensuite l'expression des coefficients a_{ij} $\left(i, j = 1, 2, 3\right)$ en fonction des vecteurs de la base $\mathscr{B}_2$ et de leurs dérivées par rapport à la base $\mathscr{B}_1$ et par rapport au temps.

③ Par ailleurs, ayant les relations (2.20), si l'on connaît les coefficients a_{ij} $(i, j = 1,2,3)$, on connaîtra aussi les composantes de $\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_2 / \mathscr{B}_1\right)$ sur la base $\mathscr{B}_2$, ce que l'on cherche.

④ On fera la démonstration pour $\vec{e}_{x_2}$, le principe restant identique pour les autres vecteurs.

▪ <u>Obtention des coefficients a_{ii} $i = 1,2,3$</u> :

$\vec{e}_{x_2}$ a pour norme $\left\|\vec{e}_{x_2}\right\| = \vec{e}_{x_2}.\vec{e}_{x_2} = 1$, indépendante du temps et de la base $\mathscr{B}_1$. Par conséquent, $\left(\dfrac{d\left(\vec{e}_{x_2}.\vec{e}_{x_2}\right)}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = 0$.

Or $\left(\dfrac{d\left(\vec{e}_{x_2}.\vec{e}_{x_2}\right)}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = \left(\dfrac{d\left(\vec{e}_{x_2}\right)}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1}.\vec{e}_{x_2} + \vec{e}_{x_2}.\left(\dfrac{d\left(\vec{e}_{x_2}\right)}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = 2\left(\dfrac{d\left(\vec{e}_{x_2}\right)}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1}.\vec{e}_{x_2}$,

donc
$$\vec{e}_{x_2}.\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = 0 . \tag{2.22}$$

Par conséquent, $\vec{e}_{x_2}$ est perpendiculaire à $\left(\dfrac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1}$ et on peut donc dire a priori que :

$$\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = a_{21}\,\vec{e}_{y_2} + a_{31}\,\vec{e}_{z_2} ,$$

et donc, en appliquant les équations (2.21), on obtient finalement : $a_{11} = 0$.
On obtient de la même manière, $a_{22} = 0$ et $a_{33} = 0$.

En résumé,
$$a_{ii} = 0,\ (i = 1,2,3) \tag{2.23}$$

▪ <u>Relation entre les coefficients a_{ij}</u> :

Les vecteurs $\vec{e}_{x_2}$ et $\vec{e}_{y_2}$ étant orthogonaux, on a : $\vec{e}_{x_2}.\vec{e}_{y_2} = 0$, et donc,
$$\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1}.\vec{e}_{y_2} + \vec{e}_{x_2}.\left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = 0 . \tag{2.24}$$

En multipliant scalairement les équations (2.21) par $\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}$, on obtient, d'après (2.24),
$$a_{12} + a_{21} = 0$$

Finalement, on obtient de la même manière :
$$\begin{cases} a_{12} + a_{21} = 0 \\ a_{23} + a_{32} = 0 \\ a_{31} + a_{13} = 0 \end{cases} . \tag{2.25}$$

▪ <u>Expression finale de $\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_2 / \mathscr{B}_1\right)$</u> :

D'après ce qui précède, les équations (2.21) s'écrivent alors :
$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = a_{21}\vec{e}_{y_2} - a_{13}\vec{e}_{z_2} \\ \left(\dfrac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = a_{21}\vec{e}_{x_2} + a_{32}\vec{e}_{z_2} \\ \left(\dfrac{d\vec{e}_{z_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = a_{13}\vec{e}_{x_2} - a_{32}\vec{e}_{y_2} \end{cases} . \tag{2.26}$$

On peut vérifier, que cela revient à écrire les équations (2.20), avec
$$\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_2 / \mathscr{B}_1\right) = a_{32}\vec{e}_{x_2} + a_{13}\vec{e}_{y_2} + a_{21}\vec{e}_{z_2} . \tag{2.27}$$

<u>On obtient finalement, connaissant les coefficients a_{ij}</u>

$$\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_2 / \mathscr{B}_1\right) = \left[\vec{e}_{z_2}.\left(\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1}\right]\vec{e}_{x_2} + \left[\vec{e}_{x_2}.\left(\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1}\right]\vec{e}_{y_2} + \left[\vec{e}_{y_2}.\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1}\right]\vec{e}_{z_2} .$$

<u>En résumé</u> : On a donc montré qu'il existe un ***vecteur rotation instantané (à l'instant t) associé au mouvement de*** $\mathscr{B}_2$ ***par rapport à*** $\mathscr{B}_1$, noté $\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_2 / \mathscr{B}_1\right)$, *et ayant comme propriétés :*

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = \vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_2 / \mathscr{B}_1\right) \wedge \vec{e}_{x_2} \\ \left(\dfrac{d\vec{e}_{y_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = \vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_2 / \mathscr{B}_1\right) \wedge \vec{e}_{y_2} \\ \left(\dfrac{d\vec{e}_{z_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = \vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_2 / \mathscr{B}_1\right) \wedge \vec{e}_{z_2} \end{cases} . \tag{2.28}$$

3 Dérivée d'une fonction vectorielle par rapport à des bases mobiles entre elles

N.B. : Pour plus de précisions sur la notion de dérivée d'une fonction vectorielle d'une variable réelle (et donc du temps), on se reportera à l'annexe 2A de ce chapitre.

Soit $\vec{F}$ une fonction vectorielle à dériver par rapport au temps t et par rapport à $\mathscr{B}_1$. Définissons $\vec{F}(t)$ par ses composantes dans $\mathscr{B}_2$, qui est alors base de projection :

$$\vec{F}(t) = u_2(t)\vec{e}_{x_2} + v_2(t)\vec{e}_{y_2} + w_2(t)\vec{e}_{z_2} \quad . \tag{2.29}$$

Le but de ce paragraphe est de dériver $\vec{F}(t)$ par rapport à la base $\mathscr{B}_1$ (qui est alors base de dérivation), donc de calculer $\left(\frac{d\vec{F}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1}$, tout en exprimant $\vec{F}(t)$ par ses composantes sur la base $\mathscr{B}_2$.

- Revenons tout d'abord sur le calcul de $\left(\frac{d\vec{F}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_2}$.

Cette dérivée peut s'effectuer à partir de l'expression de $\vec{F}(t)$ sur la base $\mathscr{B}_2$ et en utilisant les règles de dérivation habituelles :

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\vec{F}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_2} &= \dot{u}_2(t)\vec{e}_{x_2} + \dot{v}_2(t)\vec{e}_{y_2} + \dot{w}_2(t)\vec{e}_{z_2} \\ &+ u_2(t)\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_2} + v_2(t)\left(\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_2} + w_2(t)\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_2}\end{aligned} \quad . \tag{2.30}$$

Or $\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}$ et $\vec{e}_{z_2}$ sont fixes par rapport à $\mathscr{B}_2$ et donc leurs dérivées par rapport à $\mathscr{B}_2$ sont des vecteurs nuls.

$$\left(\frac{d\vec{F}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_2} = \dot{u}_2(t)\vec{e}_{x_2} + \dot{v}_2(t)\vec{e}_{y_2} + \dot{w}_2(t)\vec{e}_{z_2} \quad . \tag{2.31}$$

Par conséquent, lorsque base de dérivation et base de projection sont identiques, la dérivée d'une fonction vectorielle par rapport au temps et par rapport à cette base s'obtient en dérivant par rapport au temps chaque composante de la fonction vectorielle sur la base en question.

- On cherche maintenant une relation entre $\left(\frac{d\vec{F}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_2}$ et $\left(\frac{d\vec{F}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1}$

En effet, en utilisant les propriétés du vecteur $\vec{\Omega}(\mathscr{B}_2/\mathscr{B}_1)$, la dérivée de la fonction $\vec{F}(t)$ par rapport à $\mathscr{B}_1$ va s'exprimer en fonction de la dérivée de la fonction $\vec{F}(t)$ par rapport à $\mathscr{B}_2$, ce qui est une pratique courante. La dérivation de la fonction $\vec{F}(t)$ par rapport à $\mathscr{B}_1$ s'effectue donc à partir de l'expression de $\vec{F}(t)$ sur la base $\mathscr{B}_2 = (\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2})$, mais en tenant compte du fait que ces vecteurs de base sont variables par rapport à $\mathscr{B}_1$, et en utilisant les règles de dérivation habituelles.

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\vec{F}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} &= \dot{u}_2(t)\vec{e}_{x_2} + \dot{v}_2(t)\vec{e}_{y_2} + \dot{w}_2(t)\vec{e}_{z_2} \\ &+ u_2(t)\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} + v_2(t)\left(\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} + w_2(t)\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1}\end{aligned} \quad .$$

On reconnaît dans la première ligne la dérivée $\left(\frac{d\vec{F}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_2}$.

La deuxième ligne est un terme complémentaire qui peut s'exprimer, en utilisant les relations du § III/2-b) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}& u_2(t)\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} + v_2(t)\left(\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} + w_2(t)\left(\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} \\ &= u_2(t)\vec{\Omega}(\mathscr{B}_2/\mathscr{B}_1)\wedge\vec{e}_{x_2} + v_2(t)\vec{\Omega}(\mathscr{B}_2/\mathscr{B}_1)\wedge\vec{e}_{y_2} + w_2(t)\vec{\Omega}(\mathscr{B}_2/\mathscr{B}_1)\wedge\vec{e}_{z_2} \\ &= \vec{\Omega}(\mathscr{B}_2/\mathscr{B}_1)\wedge\left(u_2(t)\vec{e}_{x_2} + v_2(t)\vec{e}_{y_2} + w_2(t)\vec{e}_{z_2}\right) \\ &= \vec{\Omega}(\mathscr{B}_2/\mathscr{B}_1)\wedge\vec{F}\end{aligned}$$

On a donc finalement la relation suivante entre les dérivations :

$$\boxed{\left(\frac{d\vec{F}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = \left(\frac{d\vec{F}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_2} + \vec{\Omega}(\mathscr{B}_2/\mathscr{B}_1)\wedge\vec{F}} \quad . \tag{2.32}$$

Cette égalité apparaît comme la ***formule de changement de base de dérivation*****.**

4 Composition des rotations

Soient trois bases orthonormées $\mathcal{B}_1 = \left(\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1}\right)$, $\mathcal{B}_2 = \left(\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2}\right)$ et $\mathcal{B}_3 = \left(\vec{e}_{x_3}, \vec{e}_{y_3}, \vec{e}_{z_3}\right)$. On cherche une relation entre les vecteurs rotation associés au mouvement de $\mathcal{B}_3$ par rapport à $\mathcal{B}_1$ c'est-à-dire $\vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_3 / \mathcal{B}_1\right)$, au mouvement de $\mathcal{B}_2$ par rapport à $\mathcal{B}_1$ c'est-à-dire $\vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_2 / \mathcal{B}_1\right)$ et au mouvement de $\mathcal{B}_3$ par rapport à $\mathcal{B}_2$ c'est-à-dire $\vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_3 / \mathcal{B}_2\right)$.

Soit $\vec{e}$ un vecteur de la base $\mathcal{B}_3$ c'est-à-dire $\vec{e}_{x_3}, \vec{e}_{y_3}$ ou $\vec{e}_{z_3}$. En appliquant la formule de changement de base de dérivation précédemment trouvée, on obtient :

$$\left(\frac{d\vec{e}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_1} = \left(\frac{d\vec{e}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_2} + \vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_2 / \mathcal{B}_1\right) \wedge \vec{e}.$$

Par définition de $\vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_3 / \mathcal{B}_2\right)$, on obtient :

$$\left(\frac{d\vec{e}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_1} = \underbrace{\vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_3 / \mathcal{B}_2\right) \wedge \vec{e}}_{\left(\frac{d\vec{e}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_2}} + \vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_2 / \mathcal{B}_1\right) \wedge \vec{e} \ . \tag{2.33}$$

donc
$$\left(\frac{d\vec{e}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_1} = \left[\vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_3 / \mathcal{B}_2\right) + \vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_2 / \mathcal{B}_1\right)\right] \wedge \vec{e}. \tag{2.34}$$

Par ailleurs, par définition de $\vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_3 / \mathcal{B}_1\right)$:

$$\left(\frac{d\vec{e}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_1} = \vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_3 / \mathcal{B}_1\right) \wedge \vec{e}. \tag{2.35}$$

L'identification des équations (2.34) et (2.35), vraies pour les trois vecteurs de $\mathcal{B}_3$, donne finalement :

$$\boxed{\vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_3 / \mathcal{B}_1\right) = \vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_3 / \mathcal{B}_2\right) + \vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_2 / \mathcal{B}_1\right)}. \tag{2.36}$$

Ce résultat est tout à fait généralisable à n bases.

▪ Remarque :

L'équation précédente implique aussi : $\vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_2 / \mathcal{B}_2\right) = \vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_2 / \mathcal{B}_1\right) + \vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_1 / \mathcal{B}_2\right)$.

Or $\vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_2 / \mathcal{B}_2\right) = \vec{0}$,

d'où
$$\boxed{\vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_2 / \mathcal{B}_1\right) = -\vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_1 / \mathcal{B}_2\right)}. \tag{2.37}$$

5 Cas particuliers importants : base locale des coordonnées cylindriques et des coordonnées sphériques mobiles par rapport à une base fixe

a) Coordonnées cylindriques

On a vu au chapitre 1 § IV/2-c) le passage des vecteurs de la base des coordonnées cartésiennes $\mathcal{B} = \left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$ aux vecteurs de la base orthonormée locale des coordonnées cylindriques $\mathcal{B}_c = \left(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\right)$. Ces deux bases sont déduites l'une de l'autre par rotation d'angle φ autour de $\vec{e}_z$. Comme on l'a vu au § III/2-a), on obtient donc le vecteur rotation associé au mouvement de $\mathcal{B}_c$ par rapport à $\mathcal{B}$:

$$\boxed{\vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_c / \mathcal{B}\right) = \dot{\varphi}\, \vec{e}_z} \tag{2.38}$$

b) Coordonnées sphériques

On a vu au chapitre 1 § § IV/3 le passage des vecteurs de la base des coordonnées cartésiennes $\mathcal{B} = \left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$ aux vecteurs de la base orthonormée locale des coordonnées sphériques $\mathcal{B}_s = \left(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\right)$, par l'intermédiaire de la base orthonormée locale des coordonnées cylindriques $\mathcal{B}_c = \left(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\right)$.

On passe de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_c$ par rotation d'angle φ autour de $\vec{e}_z$.
On passe de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}_s$ par rotation d'angle θ autour de $\vec{e}_\varphi$

Comme on l'a vu au § III/2-a), on obtient donc le vecteur rotation associé au mouvement de $\mathcal{B}_s$ par rapport à $\mathcal{B}_c$:

$$\vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_s / \mathcal{B}_c\right) = \dot{\theta}\, \vec{e}_\varphi \ . \tag{2.39}$$

Or, par application de la composition des rotations, on a :
$$\vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_s / \mathcal{B}\right) = \vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_s / \mathcal{B}_c\right) + \vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_c / \mathcal{B}\right),$$

d'où
$$\boxed{\vec{\Omega}\left(\mathcal{B}_s / \mathcal{B}\right) = \dot{\varphi}\, \vec{e}_z + \dot{\theta}\, \vec{e}_\varphi} \ . \tag{2.40}$$

IV BASE DE PROJECTION - BASE DE DERIVATION

1 Définitions

- La base de projection est la base sur laquelle on projette un vecteur.
- La base de dérivation est la base par rapport à laquelle on dérive un vecteur.
- La base de dérivation et la base de projection ne sont pas forcément les mêmes et seront souvent différentes.
- Si la base de projection est la même que la base de dérivation, alors la dérivée du vecteur sera obtenue en dérivant uniquement les composantes de ce vecteur par rapport au temps.
- Si les deux bases sont différentes, il faudra alors dériver aussi les vecteurs de la base de projection par rapport à la base de dérivation, ou utiliser la formule de changement de base de dérivation.

2 Méthode à employer

On veut dériver un vecteur $\vec{F}$ par rapport au temps et par rapport à une base $\mathcal{B}_1$ qui est alors la ***base de dérivation***.

① On cherche la ***base de projection*** sur laquelle $\vec{F}$ s'exprime le plus simplement. Soit $\mathcal{B}_2$ cette base.

② On projette $\vec{F}$ sur les vecteurs de la base $\mathcal{B}_2$, puis on dérive ses composantes.

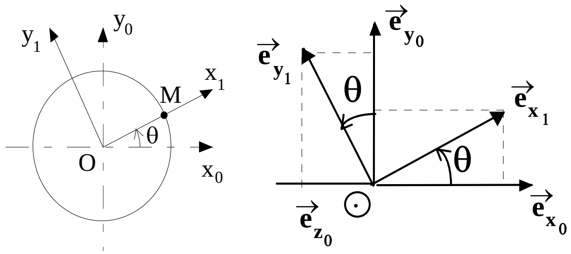
$\Rightarrow$ on a alors $\left(\dfrac{d\vec{F}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_2}$.

③ On calcule $\vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)\wedge\vec{F}$ en exprimant $\vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_1)$ et $\vec{F}$ dans la ***même base.***

④ On additionne les deux vecteurs et l'on obtient $\left(\dfrac{d\vec{F}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_1}$

$\Rightarrow$ il est donc essentiel de distinguer _base de projection_ (pour exprimer les composantes) et _base de dérivation_.

3 Exemple : Point mobile sur un cerceau de rayon R constant



$\mathcal{R}_0=(O,\mathcal{B}_0)$

$\mathcal{R}_1=(O,\mathcal{B}_1)$

$\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)=\dot{\theta}\,\vec{e}_{z_0}$

Figure 2.4

Par définition, $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)=\left(\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_0}$. $\mathcal{B}_0$ est donc la ***base de dérivation***.

◆ _1ère méthode : base de projection de $\overrightarrow{OM}$ et base de dérivation identiques._

Projetons $\overrightarrow{OM}$ sur les vecteurs de la base $\mathcal{B}_0$, qui est donc ***base de projection*** :

$$\overrightarrow{OM}=R\cos\theta\,\vec{e}_{x_0}+R\sin\theta\,\vec{e}_{y_0}$$

Ici, $\mathcal{B}_0$ est à la fois base de projection et base de dérivation. Par conséquent, $\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)$ s'obtient en dérivant directement par rapport au temps chaque composante de $\overrightarrow{OM}$.

Dérivée de $\cos\theta$ par rapport au temps : $\dfrac{d\cos\theta}{dt}=\dfrac{d\cos\theta}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}=-\sin\theta\;\dot{\theta}$

Dérivée de $\sin\theta$ par rapport au temps : $\dfrac{d\sin\theta}{dt}=\dfrac{d\sin\theta}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt}=\cos\theta\;\dot{\theta}$

donc
$$\vec{V}(M/\mathcal{R}_0)=\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_0}=-R\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_{x_0}+R\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_{y_0}\ . \qquad (2.50)$$

◆ _2ème méthode : base de projection de $\overrightarrow{OM}$ et base de dérivation différentes_

Projetons $\overrightarrow{OM}$ sur les vecteurs de la base $\mathcal{B}_1$, qui est donc ***base de projection*** : $\overrightarrow{OM}=R\,\vec{e}_{x_1}$

Or on veut dériver $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps et par rapport à la base $\mathcal{B}_0$ qui est donc ***base de dérivation***. Les deux bases étant différentes, on ne peut pas dériver directement les composantes de $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps. Il faut donc employer la ***formule de changement de base de dérivation***, qui s'écrit ici :

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} + \vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0\right)\wedge\overrightarrow{OM} \quad . \qquad (2.51)$$

① Calcul de $\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1}$

Ici, la base $\mathscr{B}_1$ est base de dérivation. Or c'est aussi la base de projection, donc on peut dériver directement les composantes de $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps : $\left(\dfrac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} = \vec{0}$.

② Calcul de $\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0\right)\wedge\overrightarrow{OM} = \begin{array}{r|l} & 0 \\ & 0 \\ \mathscr{B}_1 & \dot{\theta} \end{array} \wedge \begin{array}{r|l} & R \\ & 0 \\ \mathscr{B}_1 & 0 \end{array} = \begin{array}{r|l} & 0 \\ & R\,\dot{\theta} = R\,\dot{\theta}\;\vec{e}_{y_1} \\ \mathscr{B}_1 & 0 \end{array}$.

③ Calcul de $\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right)$.

En additionnant les résultats de ① et ②, on obtient finalement : $\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right) = R\,\dot{\theta}\;\vec{e}_{y_1}$.

<u>Remarque</u> : $\vec{e}_{y_1} = -\sin\theta\,\vec{e}_{x_0} + \cos\theta\,\vec{e}_{y_0}$, donc on retrouve bien l'expression de la vitesse trouvée par la première méthode.

4 <u>Point mobile dans un plan</u>

Le plan est supposé orienté, de vecteur unitaire normal $\vec{e}_{z_0}$, repéré par rapport à un repère $\mathscr{R}_0 = \left(O;\vec{e}_{x_0},\vec{e}_{y_0}\right)$. La base $\left(\vec{e}_{x_0},\vec{e}_{y_0},\vec{e}_{z_0}\right)$ est positive.

Les vecteurs vitesse et accélération du point mobile M par rapport au repère $\mathscr{R}_0$ sont parallèles au plan. Les composantes exprimées dans la base $\mathscr{B}_0 = \left(\vec{e}_{x_0},\vec{e}_{y_0}\right)$ sont les suivantes :

$$\begin{array}{r|l} \overrightarrow{OM}(t) & x(t) \\ \mathscr{B}_0 & y(t) \end{array} \; ; \quad \begin{array}{r|l} \vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right) & \dot{x}(t) \\ \mathscr{B}_0 & \dot{y}(t) \end{array} \; ; \quad \begin{array}{r|l} \vec{\Gamma}\left(M/\mathscr{R}_0\right) & \ddot{x}(t) \\ \mathscr{B}_0 & \ddot{y}(t) \end{array} \qquad (2.52)$$

On cherche maintenant les composantes des vecteurs vitesse et accélération dans la base locale des coordonnées polaires.

a) <u>Composantes du vecteur vitesse en coordonnées polaires</u>

⇨ *<u>Première méthode : utilisation des composantes cartésiennes sur $\mathscr{B}_0$</u>*

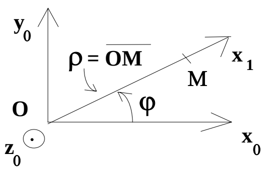


Figure 2.5

Les coordonnées polaires $\rho(t)$ et $\varphi(t)$ sont liées aux coordonnées cartésiennes par (voir ch 1 § IV/2) :

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos\varphi(t) \\ y(t) = \rho(t)\sin\varphi(t) \end{cases} \qquad (2.53)$$

On a donc :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\,\dot{\varphi}\sin\varphi \\ \dot{y}(t) = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\,\dot{\varphi}\cos\varphi \end{cases} . \qquad (2.54)$$

Or , $$\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right) = \dot{x}\,\vec{e}_{x_0} + \dot{y}\,\vec{e}_{y_0} \qquad (2.55)$$

c'est-à-dire $\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right) = \dot{\rho}\left(\vec{e}_{x_0}\cos\varphi + \vec{e}_{y_0}\sin\varphi\right) + \rho\,\dot{\varphi}\left(-\vec{e}_{x_0}\sin\varphi + \vec{e}_{y_0}\cos\varphi\right)$,

d'où $$\boxed{\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right) = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi} \qquad (2.56)$$

en introduisant la base $\mathscr{B}_c = \left(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi\right)$, vue au chapitre 1, dite "*base locale*" car elle dépend de la position du point M.

Les composantes du vecteur vitesse de M par rapport au repère $\mathscr{R}_0$ sont donc, exprimées dans la base $\mathscr{B}_c = \left(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi\right)$:

$$\boxed{\begin{array}{r|ll} \vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right) & \dot{\rho} & \text{composante "}\textit{radiale}\text{ "} \\ \mathscr{B}_c & \rho\,\dot{\varphi} & \text{composante "}\textit{orthoradiale}\text{ "} \end{array}} \qquad (2.57)$$

⇨ *<u>Deuxième méthode : utilisation du vecteur rotation associé au mouvement de $\mathscr{B}_c$ par rapport à $\mathscr{B}_0$</u>*

On a vu au § I/3-e) que le vecteur rotation associé au mouvement de $\mathscr{B}_c$ par rapport à $\mathscr{B}_0$ est : $$\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_c/\mathscr{B}_0\right) = \dot{\varphi}\,\vec{e}_{z_0} \qquad (2.58)$$

Par ailleurs, le vecteur $\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_c/\mathscr{B}_0\right)$ est tel que :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0} = \vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_c/\mathscr{B}_0\right)\wedge\vec{e}_\rho = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \\ \left(\dfrac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0} = \vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_c/\mathscr{B}_0\right)\wedge\vec{e}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho \end{cases} , \qquad (2.59)$$

Or $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{e}_\rho$ donc $\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right) = \left(\dfrac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\left(\dfrac{d\vec{e}_\rho}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0}$, ce qui redonne finalement l'expression de $\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right)$ précédemment trouvée.

☞ <u>Remarque importante</u> : Nous venons donc de calculer les composantes du vecteur vitesse de M par rapport au repère $\mathscr{R}_0$ dans une base $\mathscr{B}_c$ qui n'a rien à voir avec ce repère, puisque $\mathscr{B}_c$ est mobile par rapport à $\mathscr{B}_0$. Ceci est une pratique courante.

b) <u>Composantes du vecteur accélération en coordonnées polaires</u>

Pour calculer le vecteur accélération de M par rapport au repère $\mathscr{R}_0$, utilisons la deuxième méthode, plus simple pour les calculs :

$$\vec{\Gamma}\left(M/\mathscr{R}_0\right) = \left(\frac{d}{dt}\left\{\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right)\right\}\right)_{/\mathscr{B}_0} = \left(\frac{d}{dt}\left\{\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right\}\right)_{/\mathscr{B}_0} \quad (2.60)$$

$$= \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \frac{d}{dt}\left(\rho\,\dot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi - \rho\,\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho \quad (2.61)$$

$$= \underbrace{\left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\varphi}^2\right)}_{\text{radiale}}\vec{e}_\rho + \underbrace{\left(\rho\,\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\,\dot{\varphi}\right)}_{\text{orthoradiale}}\vec{e}_\varphi \quad (2.62)$$

V COMPOSITION DES MOUVEMENTS

1 <u>Repère mobile</u>

On a déjà vu que l'étude du mouvement des sytèmes mécaniques fait souvent appel à plusieurs repères de l'espace, mobiles les uns par rapport aux autres. On attachera alors un repère à un solide, et on dira que le repère est ***lié au solide.*** Lorsque plusieurs solides bougent les uns par rapport aux autres, on est en présence d'autant de repères mobiles. A ce stade, la notion de repère mobile ou de repère fixe est purement conventionnelle : aucun repère de l'espace ne joue de rôle privilégié (ce qui sera différent lorsque nous aborderons la dynamique).

Par conséquent, on comprendra que lorsque l'on étudie le mouvement d'un point M, il soit essentiel de préciser par rapport à quel repère ce mouvement est observé. Un même point M peut, au cours du temps, être fixe par rapport à un certain repère mais mobile par rapport à un autre. On dit par exemple, en usant d'un langage imagé, qu'il s'agit du mouvement du point M "pour un observateur" situé dans un tel repère. Les notations introduites aux §§ I/2-b) et I/2-c) pour les vecteurs vitesse et accélération : $\vec{V}\left(M/\mathscr{R}\right)$ et $\vec{\Gamma}\left(M/\mathscr{R}\right)$, prennent alors toute leur importance. Sur la figure 2.6-a, l'observateur est lié à la route : il voit la voiture avancer. Sur la figure 2.6-b, l'observateur est dans le véhicule : la conductrice voit l'arbre se déplacer !

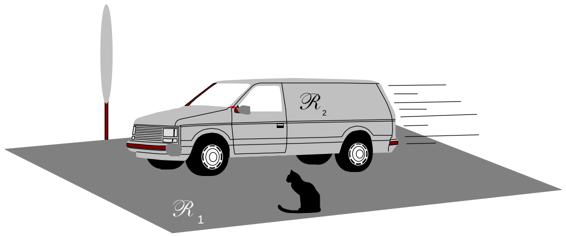


Figure 2.6-a

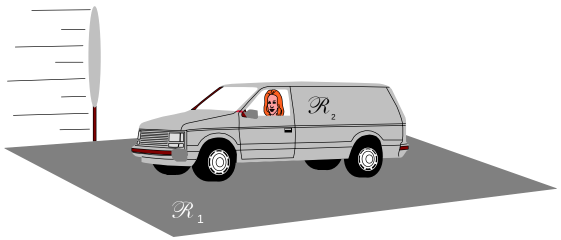


Figure 2.6-b

Dans le cas le plus général, si un repère $\mathcal{R}_1 = (O_1, \mathcal{B}_1)$ est mobile par rapport à un repère $\mathcal{R}_0 = (O_0, \mathcal{B}_0)$ (voir figure 2.7), on observe les faits suivants :

- le point O_1 est mobile par rapport au repère $\mathcal{R}_0$.
- la base $\mathcal{B}_1$ est mobile par rapport à la base $\mathcal{B}_0$.

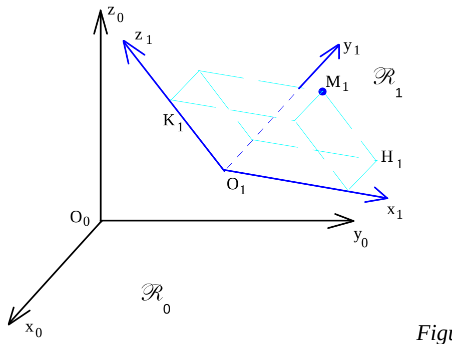


Figure 2.7

Le mouvement de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$ sera alors caractérisé, à un instant donné, par les ***éléments cinématiques*** suivants : la vitesse du point O_1 par rapport à $\mathcal{R}_0$: $\vec{V}(O_1/\mathcal{R}_0)$, et le vecteur rotation de la base $\mathcal{B}_1$ par rapport à la base $\mathcal{B}_0$: $\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)$.

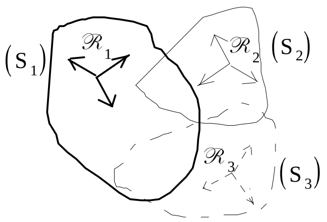


Figure 2.8

$\Rightarrow$ Nécessité de préciser par rapport à quel repère on étudie le mouvement d'un point ou d'un solide.

<u>Notation</u> : $\mathcal{R}_i = (O_i, \mathcal{B}_i)$ lié au solide (S_i).

a) <u>Point lié à un repère donné</u>

<u>Définition</u> : Etant donné un repère $\mathcal{R}_1$, éventuellement mobile par rapport à d'autres repères, on dit qu'un point M est lié au repère $\mathcal{R}_1$ s'il est fixe par rapport à $\mathcal{R}_1$, c'est-à-dire que ses coordonnées dans $\mathcal{R}_1$ ne dépendent pas du temps.

$$\boxed{\forall\, t, \vec{V}(M/\mathcal{R}_1) = \vec{0}} \tag{2.63}$$

<u>Notation</u> : lorsqu'un point M est lié à un repère indicé, comme $\mathcal{R}_1$ ci-dessus, on prendra l'habitude d'affecter le point du même indice, soit ici M_1 (voir figure 2.8). $M \in (S_1) \Leftrightarrow M \in (\mathcal{R}_1) \Leftrightarrow M_1$

Dans le cas où $\mathcal{R}_1$ est mobile par rapport à $\mathcal{R}_0$, le point M_1, fixe dans $\mathcal{R}_1$, est en général mobile par rapport à $\mathcal{R}_0$. On peut alors exprimer sa vitesse par rapport à $\mathcal{R}_0$ en fonction des éléments cinématiques caractérisant le mouvement de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$.

- On part de l'égalité vectorielle (relation de Chasles) :

$$\overrightarrow{O_0M_1} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1M_1} \tag{2.64}$$

que l'on dérive par rapport au temps et par rapport à la base $\mathcal{B}_0$:

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{O_0M_1}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_0} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{O_0O_1}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_0} + \left(\frac{d\,\overrightarrow{O_1M_1}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_0} . \tag{2.65}$$

Conformément à la définition (2.2) du vecteur vitesse, on reconnaît dans le premier membre la vitesse $\vec{V}(M_1/\mathcal{R}_0)$ et dans le premier terme du second membre la vitesse $\vec{V}(O_1/\mathcal{R}_0)$. Le deuxième terme du second membre représente la dérivée temporelle par rapport à la base $\mathcal{B}_0$ de la fonction vectorielle $\overrightarrow{O_1M_1}$, constante par rapport à la base $\mathcal{B}_1$. En introduisant ses composantes sur cette dernière base, c'est-à-dire les coordonnées (constantes) x_1, y_1, z_1 du point M_1 par rapport au repère $\mathcal{R}_1$:

$$\overrightarrow{O_1M_1} = x_1\vec{e}_{x_1} + y_1\vec{e}_{y_1} + z_1\vec{e}_{z_1} \quad ,$$

cette dérivée s'exprime sous la forme :

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{O_1M_1}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_0} = x_1\left(\frac{d\vec{e}_{x_1}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_0} + y_1\left(\frac{d\vec{e}_{y_1}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_0} + z_1\left(\frac{d\vec{e}_{z_1}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_0} .$$

On obtient donc, pour la vitesse du point M_1 par rapport à $\mathcal{R}_0$, l'expression suivante :

$$\vec{V}(M_1/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_1/\mathcal{R}_0) + x_1\left(\frac{d\vec{e}_{x_1}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_0} + y_1\left(\frac{d\vec{e}_{y_1}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_0} + z_1\left(\frac{d\vec{e}_{z_1}}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_0} .$$

- Utilisant les résultats du § I/3-b), on peut donner de cette vitesse une expression équivalente en faisant apparaître le vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)$. On a vu en effet que les dérivées des vecteurs $\vec{e}_1$ de la base $\mathcal{B}_1$ par rapport à la base $\mathcal{B}_0$ peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\left(\frac{d\vec{e}_1}{dt}\right)_{/\mathcal{B}_0} = \vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0) \wedge \vec{e}_1 \quad , \quad \vec{e}_1 = (\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1} \text{ ou } \vec{e}_{z_1}) \quad . \tag{2.67}$$

La vitesse du point M_1 par rapport à $\mathcal{R}_0$ s'écrit alors :

$$\boxed{\vec{V}(M_1/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(O_1/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0) \wedge \overrightarrow{O_1M_1}} \quad , \tag{2.68}$$

expression qui fait clairement apparaître les éléments cinématiques $\vec{V}(O_1/\mathcal{R}_0)$ et $\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1/\mathcal{B}_0)$ du mouvement de $\mathcal{R}_1$ par rapport à $\mathcal{R}_0$.

b) Point coïncident

Soit un point M mobile à la fois par rapport au repère $\mathscr{R}_0$ et par rapport au repère $\mathscr{R}_1$, avec $\mathscr{R}_1$ mobile par rapport à $\mathscr{R}_0$.
A chaque instant, M occupe une position M_0 dans $\mathscr{R}_0$, avec M_0 lié à $\mathscr{R}_0$
et une position M_1 dans $\mathscr{R}_1$, avec M_1 lié à $\mathscr{R}_1$

Définition : On appelle M_0 et M_1 les ***points coïncidents avec M,*** *à l'instant t considéré, dans les repères $\mathscr{R}_0$ et $\mathscr{R}_1$ respectivement.*

Remarque fondamentale : lorsque le temps varie, ces points coïncidents, fixes dans leurs repères respectifs, changent néanmoins. Ainsi, soit un voyageur M qui part de Compiègne à 13 h, se trouve à Paris à 14 h, à Melun à 15 h et à Troyes à 16 h. Le point coïncident de M dans le repère $\mathscr{R}_0 = \text{France}$ à l'instant $t = 14$ est $M_0 = \text{Paris}$, et à l'instant $t = 15$: $M_0 = \text{Melun}$. Le point coïncident varie d'un instant à l'autre, et cependant chacun d'entre eux est fixe par rapport à la France !

Le point coïncident avec M dans un repère donné est donc le lieu (lié à ce repère) où se trouve le point M à l'instant considéré. La succession, au cours du temps, des points coïncidents avec M (donc des lieux occupés par M) dans le repère $\mathscr{R}_0$ (ou dans le repère $\mathscr{R}_1$) constitue la trajectoire $\mathscr{C}_0$ de M par rapport à $\mathscr{R}_0$ (ou $\mathscr{C}_1$ par rapport à $\mathscr{R}_1$).

Exemple :

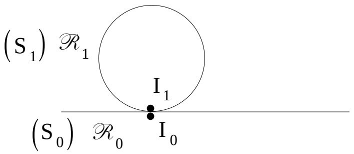


Figure 2.9

Ce n'est pas toujours le même point de (S_1) qui est en contact avec le sol (S_0).

2 Composition des vitesses

Dans la situation qui vient d'être décrite, le point M possède, à un instant donné, un vecteur vitesse par rapport à $\mathscr{R}_0$ et un vecteur vitesse par rapport à $\mathscr{R}_1$. Ces deux vecteurs sont en général différents. Ils sont liés par la formule de composition des vitesses, qui va être établie ci-dessous.

Soit un point M en mouvement par rapport à un train S_1, lui même en mouvement par rapport au rail S_0 (figure 2.10).

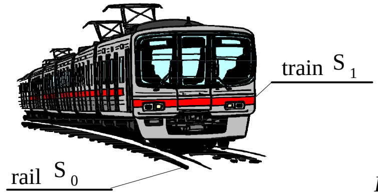


Figure 2.10

a) Première méthode : méthode vectorielle

Rappelons d'abord la définition de chacun de ces vecteurs vitesse. Les notations sont celles du § IV/1 (voir figure 2.8). D'après le § I/2, on a :

$$\vec{V}(M/\mathscr{R}_0) = \left(\frac{d\,\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0} \quad , \quad \vec{V}(M/\mathscr{R}_1) = \left(\frac{d\,\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} \quad . \tag{2.69}$$

Partant alors de la relation de Chasles pour les vecteurs :

$$\overrightarrow{O_0M} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1M} \quad , \tag{2.70}$$

on obtient, par dérivation de l'équation (2.70) par rapport au temps et par rapport à la base $\mathscr{B}_0$:

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{O_0O_1}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0} + \left(\frac{d\,\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0} \quad . \tag{2.71}$$

Utilisant la formule de changement de base de dérivation du § I/3-c), on écrit le second terme du second membre de l'équation précédente sous la forme :

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} + \vec{\Omega}(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} \quad . \tag{2.72}$$

On peut alors s'écrire :

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{O_0M}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1} + \left(\frac{d\,\overrightarrow{O_0O_1}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0} + \vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0\right)\wedge\overrightarrow{O_1M} \;, \qquad (2.73)$$

soit, en termes de vecteurs vitesse :

$$\boxed{\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right) = \vec{V}\left(M/\mathscr{R}_1\right) + \vec{V}\left(O_1/\mathscr{R}_0\right) + \vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0\right)\wedge\overrightarrow{O_1M}} \;. \qquad (2.74)$$

Le produit vectoriel ci-dessus fait apparaître le vecteur $\overrightarrow{O_1M}$. Le calcul de ce produit se fait à l'instant t fixé, de telle sorte que le point M peut être remplacé par son point coïncident M_1 à cet instant. Autrement dit, on ne change pas le résultat du produit vectoriel en remplaçant le vecteur $\overrightarrow{O_1M}$ par le vecteur $\overrightarrow{O_1M_1}$. Comparant alors avec l'expression du §V/1-a), on constate que la somme des deux derniers termes du second membre représente la vitesse, par rapport au repère $\mathscr{R}_0$, de ce point coïncident M_1.

Remarque : la substitution de M par M_1 qui vient d'être effectuée n'est possible que pour des opérations à t fixé. Par contre, une opération dans laquelle les variations de t sont invoquées, telles qu'une dérivation, ne permettent plus cette substitution : les points M et M_1 qui coïncident à l'instant t, sont séparés dès l'instant suivant. C'est pourquoi l'on a :

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{O_1M_1}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0} \neq \left(\frac{d\,\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0} \;. \qquad (2.75)$$

La relation $\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right) = \vec{V}\left(M/\mathscr{R}_1\right) + \vec{V}\left(O_1/\mathscr{R}_0\right) + \vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0\right)\wedge\overrightarrow{O_1M}$ conduit alors à la formule dite de **"composition des vitesses"** :

$$\boxed{\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right) = \vec{V}\left(M/\mathscr{R}_1\right) + \vec{V}\left(M_1/\mathscr{R}_0\right)} \;. \qquad (2.76)$$

Terminologie et interprétation :

- le vecteur $\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right)$ représente la vitesse du point M par rapport au repère "fixe" (par convention) $\mathscr{R}_0$. Un usage ancien désigne ce repère fixe comme "absolu" (ce qui n'a aucune signification physique particulière dans ce contexte) et ce vecteur vitesse s'appelle alors la ***vitesse absolue*** du point M. Par commodité, nous conserverons cette appellation.

- le vecteur $\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_1\right)$ représente la vitesse du point M par rapport au repère "mobile" (par convention également) $\mathscr{R}_1$. L'usage est d'appeler ce vecteur la ***vitesse relative*** du point M.

- la compréhension du terme $\vec{V}\left(M_1/\mathscr{R}_0\right)$ est plus subtile. Comme on l'a vu au § V/1-b), le point coïncident M_1 est le lieu du repère $\mathscr{R}_1$ où se trouve M à l'instant considéré. Ce point M_1, ainsi bien identifié à cet instant précis, en tant que point lié au repère $\mathscr{R}_1$ mobile par rapport à $\mathscr{R}_0$, admet un vecteur vitesse par rapport à ce repère "fixe" : $\vec{V}\left(M_1/\mathscr{R}_0\right)$. On l'appelle ***vitesse d'entraînement*** du point M dans le mouvement de $\mathscr{R}_1$ par rapport à $\mathscr{R}_0$. En d'autres termes, le point M décrit, au cours du temps, une trajectoire $\mathscr{C}_1$ dans le repère $\mathscr{R}_1$. A l'instant t considéré, il se trouve au point M_1 de cette trajectoire. D'une part, le point M possède à cet instant une vitesse par rapport au repère $\mathscr{R}_1$: c'est la vitesse "relative" $\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_1\right)$, tangente à la trajectoire $\mathscr{C}_1$ au point M_1. D'autre part, puisque $\mathscr{R}_1$ est mobile par rapport à $\mathscr{R}_0$, le point M_1 de $\mathscr{C}_1$, lié à $\mathscr{R}_1$, possède à ce même instant une vitesse par rapport à $\mathscr{R}_0$: c'est la vitesse "d'entraînement" $\vec{V}\left(M_1/\mathscr{R}_0\right)$, totalement indépendante de la vitesse relative précédente. Par ailleurs, le point mobile M se déplace lui aussi par rapport à $\mathscr{R}_0$ et il possède donc une vitesse par rapport à ce repère : c'est la vitesse "absolue" $\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right)$. La formule de composition des vitesses nous apprend que ce dernier vecteur est la somme vectorielle de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement.

b) Deuxième méthode : utilisation des coordonnées

Le point M peut être repéré dans $\mathscr{R}_1$ par ses coordonnées $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$, fonctions du temps, soit :

$$\overrightarrow{O_1M} = x_1(t)\vec{e}_{x_1} + y_1(t)\vec{e}_{y_1} + z_1(t)\vec{e}_{z_1} \;. \qquad (2.77)$$

A l'instant t, ces coordonnées prennent des valeurs particulières que nous noterons simplement, par commodité d'écriture, x_1, y_1, z_1. Ces valeurs sont précisément les coordonnées dans le repère $\mathscr{R}_1$ du point coïncident M_1 à ce même instant. De telle sorte que l'on a, comme au § III/1-a) :

$$\overrightarrow{O_1M_1} = x_1\vec{e}_{x_1} + y_1\vec{e}_{y_1} + z_1\vec{e}_{z_1} \;. \qquad (2.78)$$

Exprimons alors la relation de Chasles $\overrightarrow{O_0M} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1M}$ sous la forme

$$\overrightarrow{O_0M} = \overrightarrow{O_0O_1} + x_1(t)\,\vec{e}_{x_1} + y_1(t)\,\vec{e}_{y_1} + z_1(t)\,\vec{e}_{z_1} \qquad (2.79)$$

et dérivons cette expression par rapport au temps et par rapport à la base $\mathscr{B}_0$. On obtient :

$$\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right) = \vec{V}\left(O_1/\mathscr{R}_0\right) + x_1(t)\left(\frac{d\vec{e}_{x_1}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0} + y_1(t)\left(\frac{d\vec{e}_{y_1}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0} + z_1(t)\left(\frac{d\vec{e}_{z_1}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0}$$
$$+ \dot{x}_1(t)\,\vec{e}_{x_1} + \dot{y}_1(t)\,\vec{e}_{y_1} + \dot{z}_1(t)\,\vec{e}_{z_1}$$

La deuxième ligne représente la vitesse de M par rapport à $\mathscr{R}_1$:

$$\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_1\right). \qquad (2.80)$$

Dans la première ligne, les fonctions $x_1(t), y_1(t), z_1(t)$, qui ne subissent pas de dérivations, peuvent être remplacées par leurs valeurs à l'instant t considéré. Ces valeurs sont précisément les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point coïncident M_1. Cette première ligne, qui s'écrit donc

$$\vec{V}(O_1/\mathscr{R}_0)+x_1\left(\frac{d\vec{e}_{x_1}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0}+y_1\left(\frac{d\vec{e}_{y_1}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0}+z_1\left(\frac{d\vec{e}_{z_1}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0} \tag{2.81}$$

représente la vitesse de ce point coïncident par rapport à $\mathscr{R}_0$: $\vec{V}(M_1/\mathscr{R}_0)$. Cette égalité redonne ainsi la formule de composition des vitesses.

3 Composition des accélérations

La relation qui lie les accélérations du point M par rapport à $\mathscr{R}_0$ et par rapport à $\mathscr{R}_1$ est plus compliquée. Nous allons l'établir également en suivant deux méthodes.

a) Première méthode : utilisation des coordonnées

Dérivons une seconde fois l'égalité

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/\mathscr{R}_0)=\vec{V}(O_1/\mathscr{R}_0)&+x_1(t)\left(\frac{d\vec{e}_{x_1}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0}+y_1(t)\left(\frac{d\vec{e}_{y_1}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0}+z_1(t)\left(\frac{d\vec{e}_{z_1}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0}\\&+\dot{x}_1(t)\vec{e}_{x_1}+\dot{y}_1(t)\vec{e}_{y_1}+\dot{z}_1(t)\vec{e}_{z_1}\end{aligned}$$

par rapport à t et par rapport à la base $\mathscr{B}_0$. Le premier membre donne, ainsi dérivé, l'accélération de M par rapport à $\mathscr{R}_0$. On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}(M/\mathscr{R}_0)= \;&\vec{\Gamma}(O_1/\mathscr{R}_0)+x_1(t)\left(\frac{d^2\vec{e}_{x_1}}{dt^2}\right)_{/\mathscr{B}_0}+y_1(t)\left(\frac{d^2\vec{e}_{y_1}}{dt^2}\right)_{/\mathscr{B}_0}+z_1(t)\left(\frac{d^2\vec{e}_{z_1}}{dt^2}\right)_{/\mathscr{B}_0}\\&+2\left[\dot{x}_1(t)\left(\frac{d\vec{e}_{x_1}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0}+\dot{y}_1(t)\left(\frac{d\vec{e}_{y_1}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0}+\dot{z}_1(t)\left(\frac{d\vec{e}_{z_1}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0}\right]\\&+\ddot{x}_1(t)\vec{e}_{x_1}+\ddot{y}_1(t)\vec{e}_{y_1}+\ddot{z}_1(t)\vec{e}_{z_1}\end{aligned}$$

Les fonctions coordonnées $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$ n'apparaissent par leurs dérivées que dans les deuxième et troisième lignes. Si ces fonctions étaient constantes, l'égalité précédente se limiterait alors à sa première ligne. Celle-ci représente donc l'accélération par rapport au repère $\mathscr{R}_0$ du point lié à $\mathscr{R}_1$ de coordonnées égales aux valeurs à l'instant t des fonctions $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$, c'est-à-dire du point coïncident M_1 :

$$\vec{\Gamma}(M_1/\mathscr{R}_0)=\vec{\Gamma}(O_1/\mathscr{R}_0)+x_1\left(\frac{d^2\vec{e}_{x_1}}{dt^2}\right)_{/\mathscr{B}_0}+y_1\left(\frac{d^2\vec{e}_{y_1}}{dt^2}\right)_{/\mathscr{B}_0}+z_1\left(\frac{d^2\vec{e}_{z_1}}{dt^2}\right)_{/\mathscr{B}_0} \tag{2.82}$$

On note que cette première ligne ne fait intervenir que le mouvement du repère $\mathscr{R}_1$ par rapport au repère $\mathscr{R}_0$.

La troisième ligne, d'après le § I/2-c), représente l'accélération du point mobile M par rapport au repère $\mathscr{R}_1$: $\vec{\Gamma}(M/\mathscr{R}_1)$. Cette troisième ligne ne fait intervenir que le mouvement de M par rapport à $\mathscr{R}_1$.

Avec ces deux accélérations, on a les termes analogues à ceux qui apparaissent dans la formule de composition des vitesses.

La terminologie est identique :
- ***accélération relative*** : $\vec{\Gamma}(M/\mathscr{R}_1)$
- ***accélération d'entraînement*** : $\vec{\Gamma}(M_1/\mathscr{R}_0)$.

On voit cependant que, contrairement au cas de la composition des vitesses, il ne suffit pas d'ajouter ces accélérations, puisque la deuxième ligne représente un terme complémentaire qui couple les effets du mouvement du repère $\mathscr{R}_1$ par rapport au repère $\mathscr{R}_0$ à ceux du mouvement relatif de M par rapport à $\mathscr{R}_1$. Cette accélération, appelée ***accélération complémentaire***, sera notée : $\vec{\Gamma}_c(M/\mathscr{R}_1/\mathscr{R}_0)$.

Avec ces notations, la formule de composition des accélérations s'écrit :

$$\boxed{\vec{\Gamma}(M/\mathscr{R}_0)=\vec{\Gamma}(M/\mathscr{R}_1)+\vec{\Gamma}(M_1/\mathscr{R}_0)+\vec{\Gamma}_c(M/\mathscr{R}_1/\mathscr{R}_0)} \;. \tag{2.83}$$

La méthode suivante va donner une expression plus parlante de l'accélération complémentaire.

b) Deuxième méthode : méthode vectorielle

Reprenons l'égalité vectorielle $\vec{V}(M/\mathscr{R}_0)=\vec{V}(M/\mathscr{R}_1)+\vec{V}(O_1/\mathscr{R}_0)+\vec{\Omega}(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0)\wedge\overrightarrow{O_1M}$ écrite au § V/2-a) et dérivons-la par rapport à t et par rapport à la base $\mathscr{B}_0$. On obtient l'accélération "absolue" du point M :

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}(M/\mathscr{R}_0)=\left(\frac{d\vec{V}(M/\mathscr{R}_0)}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0}&=\left(\frac{d\vec{V}(M/\mathscr{R}_1)}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0}+\left(\frac{d\vec{V}(O_1/\mathscr{R}_0)}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0}\\&+\left(\frac{d\vec{\Omega}(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0)}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0}\wedge\overrightarrow{O_1M}+\vec{\Omega}(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0)\wedge\left(\frac{d\,\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0}\end{aligned} \tag{2.84}$$

On peut écrire autrement le premier et le quatrième termes du second membre de l'équation (2.84) en utilisant la formule de changement de base de dérivation :

$$\left(\frac{d\vec{V}(M/\mathscr{R}_1)}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_0}=\left(\frac{d\vec{V}(M/\mathscr{R}_1)}{dt}\right)_{/\mathscr{B}_1}+\vec{\Omega}(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0)\wedge\vec{V}(M/\mathscr{R}_1)$$

$$=\vec{\Gamma}\left(M/\mathscr{R}_1\right)+\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0\right)\wedge\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_1\right)$$

et
$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{O_1M}}{d\,t}\right)_{/\mathscr{B}_0}=\left(\frac{d\,\overrightarrow{O_1M}}{d\,t}\right)_{/\mathscr{B}_1}+\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0\right)\wedge\overrightarrow{O_1M}$$
$$=\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_1\right)+\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0\right)\wedge\overrightarrow{O_1M}$$

$\vec{\Gamma}\left(M/\mathscr{R}_0\right)$ peut alors être réécrit de la manière suivante :

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\Gamma}\left(M/\mathscr{R}_0\right)=&\;\vec{\Gamma}\left(M/\mathscr{R}_1\right)\\&+\vec{\Gamma}\left(O_1/\mathscr{R}_0\right)+\left(\frac{d\,\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0\right)}{d\,t}\right)_{/\mathscr{B}_0}\wedge\overrightarrow{O_1M}+\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0\right)\wedge\left[\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0\right)\wedge\overrightarrow{O_1M}\right]\\&+2\,\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0\right)\wedge\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_1\right)\end{aligned}}\quad(2.85)$$

Le premier terme du second membre de l'équation (2.85) est l'accélération relative. Elle ne fait intervenir que le mouvement de M par rapport au repère $\mathscr{R}_1$.

La deuxième ligne regroupe les termes qui ne font intervenir que le mouvement de $\mathscr{R}_1$ par rapport à $\mathscr{R}_0$. Ils correspondent donc à l'accélération d'entraînement.

Le dernier terme donne une expression de l'accélération complémentaire :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_c\left(M/\mathscr{R}_1/\mathscr{R}_0\right)=2\,\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0\right)\wedge\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_1\right)}\;. \quad (2.86)$$

Dans cette expression, le mouvement de $\mathscr{R}_1$ par rapport à $\mathscr{R}_0$ apparaît par le vecteur rotation $\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0\right)$, tandis que le mouvement relatif de M par rapport à $\mathscr{R}_1$ intervient par la vitesse relative $\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_1\right)$. Ce terme complémentaire porte parfois le nom d'accélération de Coriolis.

4 Exemple de calculs

On considère un anneau $\mathscr{S}_1$, de rayon a, qui tourne autour de l'un de ses diamètres par rapport à un repère $\mathscr{R}_0$ désigné comme "fixe" (voir figure 2.11). Le point M se déplace sur cet anneau. L'axe de coordonnées Ox_1 coïncide avec l'axe géométrique de l'anneau. La position de ce dernier est définie par l'angle ψ que fait cet axe avec l'axe "fixe" Ox_0. La position de M sur l'anneau est définie par la donnée de l'angle θ que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe Oy_1, angle évalué algébriquement dans le plan Oy_1z_0 orienté par l'axe perpendiculaire Ox_1.

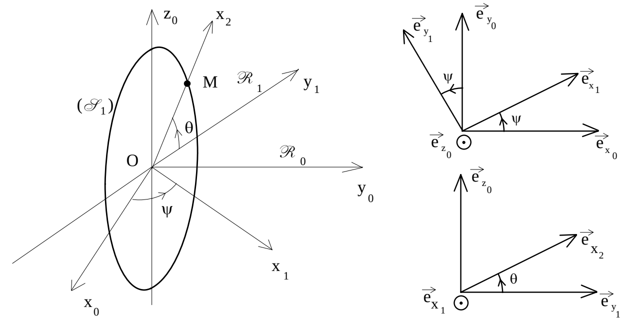


Figure 2.11

Le vecteur rotation de la base $\mathscr{B}_1$ par rapport à la base $\mathscr{B}_0$ est donné par :

$$\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0\right)=\dot{\psi}\,\vec{e}_{z_0}\quad. \qquad (2.87)$$

Les coordonnées du point M dans le repère mobile $\mathscr{R}_1$ ont pour expressions :

$$x_1=0\;,\;y_1=a\cos\theta\;,\;z_1=a\sin\theta\quad. \qquad (2.88)$$

Ce sont des fonctions du temps par l'intermédiaire de la fonction $\theta(t)$.

▪ Nous exprimerons ci-dessous toutes les fonctions vectorielles par leurs composantes sur la base mobile $\mathscr{B}_1$. On obtient successivement les vecteurs suivants :

- vitesse relative de M par rapport à $\mathscr{R}_1$:

$$\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_1\right)\left|\begin{array}{l}\dot{x}_1=0\\\dot{y}_1=-a\,\dot{\theta}\sin\theta\\\dot{z}_1=a\,\dot{\theta}\cos\theta\end{array}\right._{\mathscr{B}_1} \qquad (2.89)$$

- vitesse d'entraînement, avec ici $\vec{V}\left(O_1/\mathscr{R}_0\right)=\vec{0}$:

$$\vec{V}\left(M_1/\mathscr{R}_0\right)=\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0\right)\wedge\overrightarrow{OM_1}=\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0\right)\wedge\overrightarrow{OM} \qquad (2.90)$$

soit pour les composantes

$$\vec{\Omega}\left(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0\right)\left|\begin{array}{l}0\\0\\\dot{\psi}\end{array}\right._{\mathscr{B}_1}\wedge\;\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l}0\\a\cos\theta\\a\sin\theta\end{array}\right._{\mathscr{B}_1}=\;\vec{V}\left(M_1/\mathscr{R}_0\right)\left|\begin{array}{c}-a\,\dot{\psi}\cos\theta\\0\\0\end{array}\right._{\mathscr{B}_1} \qquad (2.91)$$

- vitesse absolue :

$$\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right)\left|\begin{array}{l}-a\,\dot{\psi}\cos\theta\\-a\,\dot{\theta}\sin\theta\\\;\;a\,\dot{\theta}\cos\theta\end{array}\right._{\mathscr{B}_1} \qquad (2.92)$$

- accélération relative, d'après :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathscr{R}_1)\underset{\mathscr{B}_1}{\left|\begin{array}{l}\ddot{x}_1 = 0\\ \ddot{y}_1 = -a\,\ddot{\theta}\sin\theta - a\,\dot{\theta}^2\cos\theta\\ \ddot{z}_1 = a\,\ddot{\theta}\cos\theta - a\,\dot{\theta}^2\sin\theta\end{array}\right.} \tag{2.93}$$

- accélération d'entraînement : on pourrait utiliser l'expression (2.85) dont la deuxième ligne du second membre représente l'accélération d'entraînement. On préférera ici utiliser la définition de l'accélération du point M_1 par rapport à $\mathscr{R}_0$:

$$\vec{\Gamma}(M_1/\mathscr{R}_0) = \left(\frac{d\,\vec{V}(M_1/\mathscr{R}_0)}{d\,t}\right)_{/\mathscr{B}_0} \quad , \tag{2.94}$$

et, puisque le vecteur $\vec{V}(M_1/\mathscr{R}_0)$ est connu par ses composantes sur la base $\mathscr{B}_1$, d'apres l'équation (2.91) et d'après la formule de changement de base de dérivation :

$$\left(\frac{d\,\vec{V}(M_1/\mathscr{R}_0)}{d\,t}\right)_{/\mathscr{B}_0} = \left(\frac{d\,\vec{V}(M_1/\mathscr{R}_0)}{d\,t}\right)_{/\mathscr{B}_1} + \vec{\Omega}(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0)\wedge\vec{V}(M_1/\mathscr{R}_0) \tag{2.95}$$

☞ **Attention !!** Dans ce calcul, le point M_1 est fixe dans $\mathscr{R}_1$. Seul le mouvement du repère $\mathscr{R}_1$ par rapport à $\mathscr{R}_0$ est pris en compte. Donc l'angle ψ est bien fonction du temps, mais l'angle θ est fixé à sa valeur à l'instant t. Cette remarque est fondamentale pour le calcul correct du premier terme du second membre :

$$\left(\frac{d\,\vec{V}(M_1/\mathscr{R}_0)}{d\,t}\right)_{/\mathscr{B}_1} = \underset{\mathscr{B}_1}{\left|\begin{array}{c}-a\,\ddot{\psi}\cos\theta\\ 0\\ 0\end{array}\right.} \tag{2.96}$$

Pour le second terme :

$$\vec{\Omega}(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0)\underset{\mathscr{B}_1}{\left|\begin{array}{l}0\\ 0\\ \dot{\psi}\end{array}\right.} \wedge \vec{V}(M_1/\mathscr{R}_0)\underset{\mathscr{B}_1}{\left|\begin{array}{c}-a\,\dot{\psi}\cos\theta\\ 0\\ 0\end{array}\right.} = \underset{\mathscr{B}_1}{\left|\begin{array}{c}0\\ -a\,\dot{\psi}^2\cos\theta\\ 0\end{array}\right.} \tag{2.97}$$

D'où les composantes de l'accélération d'entraînement :

$$\vec{\Gamma}(M_1/\mathscr{R}_0)\underset{\mathscr{B}_1}{\left|\begin{array}{c}-a\,\ddot{\psi}\cos\theta\\ -a\,\dot{\psi}^2\cos\theta\\ 0\end{array}\right.} \tag{2.98}$$

- accélération complémentaire, d'après (2-86) :

$$2\;\vec{\Omega}(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0)\underset{\mathscr{B}_1}{\left|\begin{array}{l}0\\ 0\\ \dot{\psi}\end{array}\right.} \wedge \vec{V}(M/\mathscr{R}_1)\underset{\mathscr{B}_1}{\left|\begin{array}{c}0\\ -a\,\dot{\theta}\sin\theta\\ a\,\dot{\theta}\cos\theta\end{array}\right.} = \vec{\Gamma}_c(M/\mathscr{R}_1/\mathscr{R}_0)\underset{\mathscr{B}_1}{\left|\begin{array}{c}2\,a\,\dot{\psi}\,\dot{\theta}\sin\theta\\ 0\\ 0\end{array}\right.}$$

- accélération absolue, d'après (2.83) :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathscr{R}_0)\underset{\mathscr{B}_1}{\left|\begin{array}{l}-a\,\ddot{\psi}\cos\theta + 2\,a\,\dot{\psi}\,\dot{\theta}\sin\theta\\ -a\,\ddot{\theta}\sin\theta - a\,\dot{\theta}^2\cos\theta - a\,\dot{\psi}^2\cos\theta\\ a\,\ddot{\theta}\cos\theta - a\,\dot{\theta}^2\sin\theta\end{array}\right.} \tag{2.99}$$

▪ On peut obtenir les résultats précédent par un calcul direct, en utilisant systématiquement la <u>base de projection</u> $\mathscr{B}_1$ et la <u>base de dérivation</u> $\mathscr{B}_0$, et en appliquant la formule de changement de base de dérivation. On utilisera la disposition suivante :

$$\vec{\Omega}(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0)\underset{\mathscr{B}_1}{\left|\begin{array}{l}0\\ 0\\ \dot{\psi}\end{array}\right.} \quad , \quad \overrightarrow{OM}\underset{\mathscr{B}_1}{\left|\begin{array}{c}0\\ a\cos\theta\\ a\sin\theta\end{array}\right.} \tag{2.100}$$

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{d\,t}\right)_{/\mathscr{B}_0} = \left(\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{d\,t}\right)_{/\mathscr{B}_1} + \vec{\Omega}(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0)\wedge\overrightarrow{OM} \tag{2.101}$$

soit en composantes sur $\mathscr{B}_1$:

$$\left(\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{d\,t}\right)_{/\mathscr{B}_0} = \underset{\mathscr{B}_1}{\left|\begin{array}{c}0\\ -a\,\dot{\theta}\sin\theta +\\ a\,\dot{\theta}\cos\theta\end{array}\right.} \underset{\mathscr{B}_1}{\left|\begin{array}{c}-a\,\dot{\psi}\cos\theta\\ 0\\ 0\end{array}\right.} \tag{2.102}$$

D'où :

$$\vec{V}(M/\mathscr{R}_0) = \underset{\mathscr{B}_1}{\left|\begin{array}{l}-a\,\dot{\psi}\cos\theta\\ -a\,\dot{\theta}\sin\theta\\ a\,\dot{\theta}\cos\theta\end{array}\right.} \tag{2.103}$$

D'après la formule de changement de base de dérivation à nouveau :

$$\left(\frac{d\,\vec{V}(M/\mathscr{R}_0)}{d\,t}\right)_{/\mathscr{B}_0} = \left(\frac{d\,\vec{V}(M/\mathscr{R}_0)}{d\,t}\right)_{/\mathscr{B}_1} + \vec{\Omega}(\mathscr{B}_1/\mathscr{B}_0)\wedge\vec{V}(M/\mathscr{R}_0) \tag{2.104}$$

soit en composantes sur $\mathscr{B}_1$:

$$\left(\frac{d\,\vec{V}(M/\mathscr{R}_0)}{d\,t}\right)_{/\mathscr{B}_0} = \underset{\mathscr{B}_1}{\left|\begin{array}{l}-a\,\ddot{\psi}\cos\theta + a\,\dot{\psi}\,\dot{\theta}\sin\theta\\ -a\,\ddot{\theta}\sin\theta - a\,\dot{\theta}^2\cos\theta\\ a\,\ddot{\theta}\cos\theta - a\,\dot{\theta}^2\sin\theta\end{array}\right.} + \underset{\mathscr{B}_1}{\left|\begin{array}{l}a\,\dot{\psi}\,\dot{\theta}\sin\theta\\ -a\,\dot{\psi}^2\cos\theta\\ 0\end{array}\right.} \tag{2.105}$$

D'où :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathscr{R}_0) = \underset{\mathscr{B}_1}{\left|\begin{array}{l}-a\,\ddot{\psi}\cos\theta + 2\,a\,\dot{\psi}\,\dot{\theta}\sin\theta\\ -a\,\ddot{\theta}\sin\theta - a\,\dot{\theta}^2\cos\theta - a\,\dot{\psi}^2\cos\theta\\ a\,\ddot{\theta}\cos\theta - a\,\dot{\theta}^2\sin\theta\end{array}\right.} \tag{2.106}$$

ANNEXE 2A

DERIVEE D'UNE FONCTION VECTORIELLE D'UNE VARIABLE REELLE.

DERIVEE D'UNE FONCTION VECTORIELLE DU TEMPS

Ce paragraphe est destiné à faciliter la compréhension de la notion de dérivée d'une fonction vectorielle d'une variable réelle, en vue de l'appliquer à la mécanique. Il ne remplace nullement le cours de Mathématiques sur le sujet.

2A.1 DERIVEE D'UNE FONCTION VECTORIELLE D'UNE VARIABLE REELLE

2A.1.1 Fonction vectorielle d'une variable réelle

Soient λ une variable prenant ses valeurs (algébriques) dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{B}_0 = \left(\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0}\right)$ une base orthonormée directe **ne dépendant pas** de λ.

*Définition : On appelle **fonction vectorielle d'une variable réelle** la fontion $\vec{F}(\lambda)$ qui, à toute valeur de λ (sur un ensemble de définition de $\mathbb{R}$), associe le **vecteur libre** $\vec{F}(\lambda)$ tel que :*

$$\vec{F}(\lambda)\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \\ \lambda \mapsto \vec{F}(\lambda) = u(\lambda)\vec{e}_{x_0} + v(\lambda)\vec{e}_{y_0} + w(\lambda)\vec{e}_{z_0}\ .\end{cases} \tag{2A.1}$$

Les composantes de $\vec{F}(\lambda)$ dans $\mathscr{B}_0$ sont donc : $\vec{F}(\lambda)\begin{vmatrix} u(\lambda) \\ v(\lambda) \\ w(\lambda)\end{vmatrix}_{\mathscr{B}_0}$.

2A.1.2 Dérivée d'une fonction vectorielle

Les notions de limite et de continuité des fonctions à valeurs réelles s'étendent au cas des fonctions à valeurs vectorielles. Pour leur étude détaillée, on se reportera au cours de Mathématiques correspondant.

*Définition : On appelle **vecteur dérivée** de $\vec{F}(\lambda)$ par rapport à λ en $\lambda = \lambda_0$, le vecteur limite(s'il existe) de $\dfrac{\vec{F}(\lambda) - \vec{F}(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}$ lorsque $\lambda \to \lambda_0$.*

On notera :

$$\vec{F}'(\lambda_0) = \frac{d\vec{F}}{d\lambda}(\lambda_0) = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{\vec{F}(\lambda) - \vec{F}(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}. \quad (2A.2)$$

<u>Remarque</u> : Si le vecteur $\vec{F}(\lambda)$ est constant, on a $\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \vec{F}'(\lambda) = \vec{0}$.

2A.1.2.1 <u>Composantes cartésiennes de la dérivée</u>

En se reportant au § 2A.1.1, on peut écrire $\vec{F}(\lambda) = u(\lambda)\vec{e}_{x_0} + v(\lambda)\vec{e}_{y_0} + w(\lambda)\vec{e}_{z_0}$ où $\mathscr{B}_0 = (\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$ est supposée **ne pas dépendre** de λ. On peut alors écrire l'équation-définition (2-2) sous la forme :

$$\vec{F}'(\lambda_0) = \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{u(\lambda)\vec{e}_{x_0} - u(\lambda_0)\vec{e}_{x_0}}{\lambda - \lambda_0} + \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{v(\lambda)\vec{e}_{y_0} - v(\lambda_0)\vec{e}_{y_0}}{\lambda - \lambda_0} + \lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{w(\lambda)\vec{e}_{z_0} - w(\lambda_0)\vec{e}_{z_0}}{\lambda - \lambda_0}.$$

Or les vecteurs $\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0}$ ne dépendent pas de λ, donc

$$\vec{F}'(\lambda_0) = \left(\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{u(\lambda) - u(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right)\vec{e}_{x_0} + \left(\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{v(\lambda) - v(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right)\vec{e}_{y_0} + \left(\lim_{\lambda\to\lambda_0} \frac{w(\lambda) - w(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}\right)\vec{e}_{z_0}.$$

d'où

$$\vec{F}'(\lambda_0) = u'(\lambda_0)\vec{e}_{x_0} + v'(\lambda_0)\vec{e}_{y_0} + w'(\lambda_0)\vec{e}_{z_0}. \quad (2A.3)$$

2A.1.2.2 <u>Règles opératoires de la dérivation</u>

On pourra démontrer ces règles en utilisant les composantes des fonctions sur $\mathscr{B}_0$.

- <u>Multiplication par un scalaire</u> :

Soit $\alpha(\lambda) \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\alpha(\lambda)\vec{F}(\lambda)\right] = \alpha'(\lambda)\vec{F}(\lambda) + \alpha(\lambda)\vec{F}'(\lambda). \quad (2A.4)$$

En particulier, si α_0 est une constante,

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\alpha_0\vec{F}(\lambda)\right] = \alpha_0\vec{F}'(\lambda). \quad (2A.5)$$

- <u>Addition des vecteurs</u> :

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\vec{F}_1(\lambda) + \vec{F}_2(\lambda)\right] = \vec{F}'_1(\lambda) + \vec{F}'_2(\lambda). \quad (2A.6)$$

- <u>Produit scalaire</u> :

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\vec{F}_1(\lambda).\vec{F}_2(\lambda)\right] = \vec{F}'_1(\lambda).\vec{F}_2(\lambda) + \vec{F}_1(\lambda).\vec{F}'_2(\lambda). \quad (2A.7)$$

- <u>Produit vectoriel</u> :

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\vec{F}_1(\lambda)\wedge\vec{F}_2(\lambda)\right] = \vec{F}'_1(\lambda)\wedge\vec{F}_2(\lambda) + \vec{F}_1(\lambda)\wedge\vec{F}'_2(\lambda). \quad (2A.8)$$

2A.1.3 <u>Dérivée de fonctions vectorielles particulières</u>

2A.1.3.1 <u>Fonction vectorielle de direction constante</u>

Soit $\vec{e}$ l'un des deux vecteurs unitaires possibles de cette direction (cela revient à orienter la direction de droite). La direction étant **constante**, $\vec{e}$ ne **dépend pas** de λ.

On peut donc écrire : $\vec{F}(\lambda) = a(\lambda)\vec{e}$ où $a(\lambda)$ est algébrique.

D'où : $\vec{F}'(\lambda) = a'(\lambda)\vec{e}$

La dérivée d'une fonction vectorielle de direction constante a donc la même direction.

2A.1.3.2 <u>Fonction vectorielle de module constant</u>

Soit une fonction vectorielle $\vec{F}(\lambda)$ telle que :

$$\left|\vec{F}(\lambda)\right|^2 = \vec{F}(\lambda).\vec{F}(\lambda) = \ell^2 \qquad \text{où } \ell \text{ est indépendant de } \lambda.$$

D'après le § 2A.1.2.2, on a donc

$$\frac{d\vec{F}}{d\lambda}.\vec{F} = 0. \quad (2A.9)$$

$\vec{F}'(\lambda)$ est donc perpendiculaire à $\vec{F}(\lambda)$.

2A.1.3.3 <u>Vecteur unitaire dans un plan orienté</u>

Soit $\vec{e}$ un vecteur unitaire contenu dans le plan $\left(O;\vec{e}_{x_0},\vec{e}_{y_0}\right)$, orienté par le vecteur unitaire normal $\vec{e}_{z_0}$. Le vecteur $\vec{e}$ dépend de son angle polaire algébrique $\theta=\left(\vec{e}_{x_0},\vec{e}\right)$ (voir figure 2A.1) : $\vec{e}=\cos\theta\ \vec{e}_{x_0}+\sin\theta\ \vec{e}_{y_0}$.

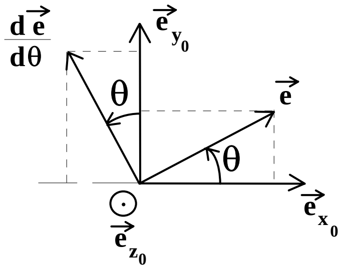


Figure 2A.1

Donc

$$\frac{d\vec{e}}{d\theta}=-\sin\theta\ \vec{e}_{x_0}+\cos\theta\ \vec{e}_{y_0}$$
$$=\cos\left(\theta+\tfrac{\pi}{2}\right)\vec{e}_{x_0}+\sin\left(\theta+\tfrac{\pi}{2}\right)\vec{e}_{y_0}. \qquad (2A.10)$$

On voit que $\frac{d\vec{e}}{d\theta}$ est le vecteur unitaire déduit de $\vec{e}$ par rotation de $+\frac{\pi}{2}$.

<u>Remarque</u> : on peut aussi écrire

$$\frac{d\vec{e}}{d\theta}=\vec{e}_{z_0}\wedge\vec{e}. \qquad (2A.11)$$

2A.2 DERIVEE D'UNE FONCTION VECTORIELLE DU TEMPS

2A.2.1 <u>Fonction vectorielle du temps</u>

2A.2.1.1 <u>Définition</u>

La définition d'une fonction vectorielle d'une variable réelle énoncée au § 2A.1.1 s'applique en particulier lorsque la fonction vectorielle dépend du temps : la variable réelle est alors le temps t.

Les composantes de $\vec{F}(t)$ dans $\mathscr{B}_0$ sont donc : $\vec{F}(t)\begin{vmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t)\end{vmatrix}_{\mathscr{B}_0}$.

<u>Remarque</u> :

- **soit** la fonction vectorielle dépend **explicitement de t** et alors $\lambda=t$.
- **soit** la fonction vectorielle **dépend d'un paramètre** $\lambda(t)$ **qui** lui-même **dépend de t**.

2A.2.1.2 <u>Unité de temps</u>

Le temps est une grandeur physique.
Sa valeur s'exprime en fonction d'une unité : la seconde (s).

> *<u>Définition</u> : "La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de Césium 133" (définition datant de 1967).*
>
> L'état actuel des horloges à Césium ne permet pas une précision supérieure à 10^{-13} (1 s en 3 millions d'années !).

2A.2.2 <u>Dérivée d'une fonction vectorielle du temps</u>

2A.2.2.1 <u>Dérivation directe</u>

En appliquant les définitions du § 2A.1.2 au cas particulier où $\lambda=t$, on obtient :

$$\frac{d\vec{F}}{dt}=\dot{u}(t)\vec{e}_{x_0}+\dot{v}(t)\vec{e}_{y_0}+\dot{w}(t)\vec{e}_{z_0}, \qquad (2A.12)$$

avec la notation que nous adopterons dorénavant : $\dot{u}=\frac{du}{dt}$. (2A.13)

2A.2.2.2 <u>Dérivation composée</u>

Si $\vec{F}(t)$ dépend du temps par l'intermédiaire d'un paramètre $\lambda=\lambda(t)$, on a alors :

$$\vec{F}(t)=u\left[\lambda(t)\right]\vec{e}_{x_0}+v\left[\lambda(t)\right]\vec{e}_{y_0}+w\left[\lambda(t)\right]\vec{e}_{z_0}.$$

Pour dériver $\vec{F}(t)$, il faut donc dériver une fonction composée.
Sachant que : $(f\circ g)'=(f'\circ g)\,g'$, on a alors $\frac{du}{dt}=\frac{du}{d\lambda}\left[\lambda(t)\right]\frac{d\lambda}{dt}$,
ce qui revient à écrire avec la notation (2-13) : $\dot{u}=\frac{du}{d\lambda}\dot{\lambda}$. (2A.14)

On peut donc écrire :

$$\frac{d\vec{F}}{dt}=\frac{d\vec{F}}{d\lambda}\dot{\lambda}=\left(\frac{du}{d\lambda}\vec{e}_{x_0}+\frac{dv}{d\lambda}\vec{e}_{y_0}+\frac{dw}{d\lambda}\vec{e}_{z_0}\right)\dot{\lambda}. \qquad (2A.15)$$

Remarque : Les notations du calcul différentiel permettent d'écrire :

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt}, \tag{2A.16}$$

laissant apparaître une simplification formelle par $d\lambda$. Cependant, cette facilité ne s'étend pas aux dérivées secondes. On a en effet :

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{d^2u}{d\lambda^2}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2+\frac{du}{d\lambda}\frac{d^2\lambda}{dt^2}, \tag{2A.17}$$

que l'on écrira encore :

$$\ddot{u}=\frac{d^2u}{d\lambda^2}\dot{\lambda}^2+\frac{du}{d\lambda}\ddot{\lambda} \tag{2A.18}$$

N.B. : Pour plus de précisions sur la notion de différentielle, on se reportera à l'annexe 2B de ce chapitre.

2A.2.3 Exemple important : vecteur de norme constante

Reprenons l'exemple du § 2A.1.3.3 d'un vecteur unitaire $\vec{e}$ contenu dans le plan $\left(O;\vec{e}_{x_0},\vec{e}_{y_0}\right)$, orienté par le vecteur unitaire normal $\vec{e}_{z_0}$. Le vecteur $\vec{e}$ dépend de son angle polaire algébrique $\theta=\left(\vec{e}_{x_0},\vec{e}\right)$ qui dépend lui-même du temps (voir figure 2A.1). On a donc $\theta(t)$.

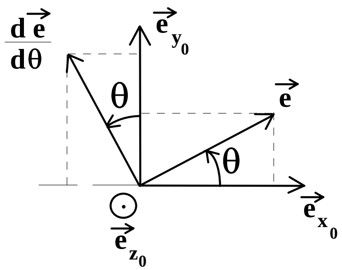


figure 2A.1

On a vu que $\vec{e}=\cos\theta\ \vec{e}_{x_0}+\sin\theta\ \vec{e}_{y_0}$

et que $\frac{d\vec{e}}{d\theta}$ est le vecteur unitaire déduit de $\vec{e}$ par rotation de $+\frac{\pi}{2}$ tel que $\frac{d\vec{e}}{d\theta}=-\sin\theta\ \vec{e}_{x_0}+\cos\theta\ \vec{e}_{y_0}$.

En appliquant l'équation (2-15), on obtient alors :

$$\frac{d\vec{e}}{dt}=\frac{d\vec{e}}{d\theta}\dot{\theta}=\dot{\theta}\left(-\sin\theta\ \vec{e}_{x_0}+\cos\theta\ \vec{e}_{y_0}\right). \tag{2A.19}$$

En remarquant que l'on peut aussi écrire $\frac{d\vec{e}}{d\theta}=\vec{e}_{z_0}\wedge\vec{e}$, on obtient finalement :

$$\frac{d\vec{e}}{dt}=\dot{\theta}\vec{e}_{z_0}\wedge\vec{e}. \tag{2A.20}$$

ANNEXE 2B

NOTION DE DIFFERENTIELLE

ET D'ACCROISSEMENT DE FONCTION

⚠ *Ce paragraphe est destiné à faciliter la compréhension de la notion de différentielle, en vue de l'appliquer à la mécanique. Il ne remplace nullement le cours de Mathématiques sur le sujet.*

Fonction réelle d'une variable réelle

Soit f une fonction réelle d'une variable réelle, dont la courbe représentative $\mathscr{C}$ est donnée sur la figure 2B.1.

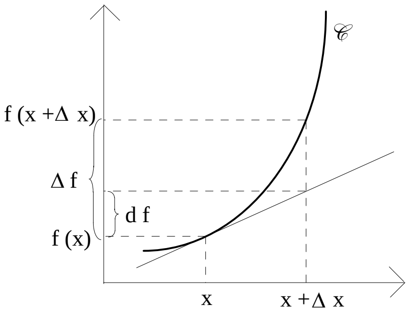


figure 2B.1

▪ On appelle *différentielle* de la fonction f en x, notée d f, la valeur de l'application linéaire tangente en x à $\mathscr{C}$ telle que :

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\Delta x \qquad (2B.1)$$

▪ On appelle *accroissement* de la fonction f, noté Δf, consécutif à un accroissement Δx de en x, la quantité telle que :

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) \qquad (2B.2)$$

▪ En faisant l'hypothèse de dérivabilité de f, on remarquera que l'on peut écrire, d'après la définition de la dérivée :

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x + \Delta x\,\varepsilon(\Delta x) \qquad (2B.3)$$

où $\varepsilon(\Delta x)$ est une fonction qui tend vers 0 quand Δx tend vers 0.

On peut donc écrire, en utilisant (2B-1) que :

$$\Delta f = \mathrm{d}f + \Delta x\,\varepsilon(\Delta x) \qquad (2B.4)$$

☞ Si $\Delta x \to 0$ alors $\boxed{\Delta f \cong \mathrm{d}f}$ (si $f'(x) \neq 0$) (2B.5)

> $\mathrm{d}f$ *est donc la partie principale de l'accroissement* Δf *de la fonction* f. *On voit donc bien sur la figure 2B.1 que lorsque* $\Delta x \to 0$, *on peut faire une approximation de l'accroissement* Δf *de la fonction par la différentielle* $\mathrm{d}f$ *de cette fonction.*

▪ Dans le cas particulier où la fonction f est telle que $f(x) = x$, alors, par notation, $\mathrm{d}f = \mathrm{d}x$.
Or, d'après l'équation (2B.1), $\mathrm{d}f = 1\,\Delta x$.

On notera donc par la suite $\Delta x = \mathrm{d}x$.

D'où le résultat fondamental à retenir pour ce cours :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x \\ \Delta f \cong \mathrm{d}f \quad \text{quand} \quad \Delta x \to 0 \\ \qquad\qquad \text{et} \quad f'(x) \neq 0 \end{array}} \qquad (2B.6)$$

Ce calcul sert en particulier au calcul d'erreurs.

Fonction vectorielle d'une variable réelle

Soit $\vec{F}$ une fonction vectorielle de la variable réelle λ.
De la même manière, on écrira par analogie que :

$$\mathrm{d}\vec{F} = \vec{F}'(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda, \qquad (2B.7)$$

et

$$\Delta\vec{F} = \vec{F}(\lambda + \mathrm{d}\lambda) - \vec{F}(\lambda) \cong \mathrm{d}\vec{F}. \qquad (2B.8)$$

Dans le cas particulier où la fonction $\vec{F}$ est le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dépendant du temps, alors :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right)_{/\mathscr{R}_0} = \vec{V}(M/\mathscr{R}_0)$$ donc on peut écrire :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \vec{V}(M/\mathscr{R}_0)\,\mathrm{d}t \qquad (2B.9)$$

et alors :

$$\overrightarrow{OM}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{OM}(t) \cong \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \qquad (2B.10)$$

Fonction réelle de 2 variables

Soit une fonction f de deux variables réelles x et y.

> *En faisant l'hypothèse de dérivabilité de* f, *on appelle* ***dérivée partielle de*** f ***par rapport à*** x, *notée* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, *la dérivée de* f *par rapport à* x, *en supposant* y *constante.*

<u>Exemple</u> : Soit $f(x, y) = 3x^2 + 5y^4 - 2x^3 y + 1$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x - 6x^2 y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 20y^3 - 2x^3$$

On définit de même la différentielle de f par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{2B.11}$$

On admettra que l'on peut écrire :

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \cong df. \tag{2B.12}$$
$$\text{quand} \quad (\Delta x \to 0, \Delta y \to 0)$$

On dit dans ces conditions que la fonction $f(x, y)$ est différentiable.

<u>Remarque</u> : Ces résultats sont généralisables à une fonction réelle de n variables réelles.