Université du Maine

Chapitre 3

FORMULATION ANALYTIQUE DE PROBLEMES FONDAMENTAUX DE L'ACOUSTIQUE EN MILIEU FLUIDE : LES LOIS FONDAMENTALES

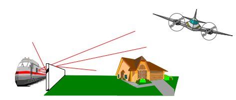
Problème acoustique bien posé

- **Les trois équations fondamentales**
  - Mouvement acoustique
    1) inertie du système ⟹ *PFD : équation d'Euler*
    2) élasticité du système (compressibilité) ⟹ **$\mathrm{div}\,\vec{v} \neq 0$** *: équation de conservation de la masse*
  - Nature du coefficient de compressibilité
    3) loi de "comportement" ⟹ *transformations adiabatiques, relation entre* **p** *et* **ρ** (et **s**)

  Equation de propagation

http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/demos.html

- **Limites du domaine**
  - Domaine spatial
    - ✓ conditions aux frontières
    - ✓ condition de Sommerfeld
  - Domaine temporel
    - ✓ conditions initiales



\+
- Loi de conservation de l'énergie
- Sources

Paramètres et variables thermomécaniques (1/2)

- Les paramètres thermodynamiques d'un fluide
  - Propriétés du fluide
    - ✓ masse volumique ρ_E
    - ✓ pression "statique" P_E
    - ✓ température T_E
  - Nature du fluide
    - ✓ coefficient de viscosité de cisaillement μ
    - ✓ coefficient de viscosité de volume η
    - ✓ coefficient de conduction thermique λ
    - ✓ capacités calorifiques massiques C_p, C_v
    - ✓ coefficient γ du fluide $\gamma = C_p/C_v$
    - ✓ coefficient de dilatation isobare α
    - ✓ coefficient d'augmentation de pression isochore β
    - ✓ coefficients de compressibilité isotherme et adiabatique $\chi_S = \chi_T/\gamma$

Tous ces paramètres dépendent du point $\vec{r}$ et du temps t

Si les paramètres du fluide ne dépendent ni du point ni du temps, indice "E" ⟹ indice "0"

Paramètres et variables thermomécaniques (2/2)

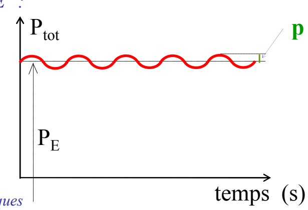
- Les variables fondamentales (écarts instantanés)
  - ✓ pression $p(\vec{r};t)$
  - ✓ masse volumique $\rho(\vec{r};t)$
  - ✓ vitesse particulaire $\vec{v}(\vec{r};t)$ ⟹ déplacement particulaire $\vec{\xi}(\vec{r};t)$
  - ✓ entropie $s(\vec{r};t)$
  - ✓ température $\tau(\vec{r};t)$

Variations autour d'un état de référence "E" :

$$p(\vec{r};t)=P_{tot}(\vec{r};t)-P_E(\vec{r};t)$$
$$\rho(\vec{r};t)=\rho_{tot}(\vec{r};t)-\rho_E(\vec{r};t)$$
$$\vec{v}(\vec{r};t)=\vec{v}_{tot}(\vec{r};t)-\vec{v}_E(\vec{r};t)$$
$$s(\vec{r};t)=S_{tot}(\vec{r};t)-S_E(\vec{r};t)$$
$$\tau(\vec{r};t)=T_{tot}(\vec{r};t)-T_E(\vec{r};t)$$

P_0, ρ_0, $\vec{v}_0$, S_0, T_0

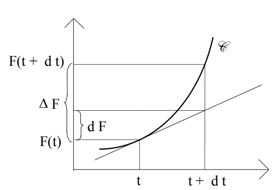
fluide ***homogène*** *dont les caractéristiques ne dépendent pas du temps*



Variation élémentaire - Ecart instantané

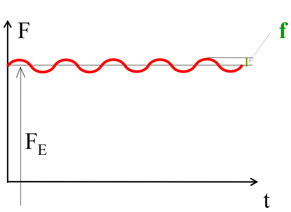
- Variation élémentaire

$$dF = \lim_{dt\to 0}\left[F(t+dt)-F(t)\right]$$



- Ecart instantané par rapport à une origine donnée F_E, à un instant donné

$$f(t)=\int_{F_E}^{F} dF = F(t)-F_E(t)$$



Application :

$$p(\vec{r};t)=\int_{P_E}^{P_{tot}} dP = P_{tot}(\vec{r};t)-P_E(\vec{r};t)$$

Hypothèses dans la suite du cours

- Fluide homogène, dont les caractéristiques ne dépendent pas du temps

$$p(\vec{r};t)=P_{tot}(\vec{r};t)-P_0$$
$$\rho(\vec{r};t)=\rho_{tot}(\vec{r};t)-\rho_0$$
$$\vec{v}(\vec{r};t)=\vec{v}_{tot}(\vec{r};t)-\vec{v}_0$$
$$s(\vec{r};t)=S_{tot}(\vec{r};t)-S_0$$
$$\tau(\vec{r};t)=T_{tot}(\vec{r};t)-T_0$$

fluide au repos

- Viscosité du fluide et conduction thermique négligées
  - ⟹ ✓ coefficient de viscosité de cisaillement μ
  - ✓ coefficient de viscosité de volume η
  - ✓ coefficient de conduction thermique λ

  négligés

  car transformations acoustiques (quasi) ***adiabatiques***

- Acoustique linéaire
  - ✓ petites fluctuations autour d'un état d'origine
  - ⟹ ✓ équations limitées à l'*ordre un des quantités acoustiques*

C. Potel, M. Bruneau, "Acoustique générale (...)", Ed. Ellipse, collection Technosup, ISBN 2-7298-2805-2, 2006

Etat thermodynamique d'un fluide (1/2)

- Loi d'état $\boxed{f(P_{tot}, V_{tot}, T_{tot}) = 0}$

pression — volume massique : $V_{tot}=1/\rho_{tot}$ — température

Exemple : loi des gaz parfaits

$$P_{tot}V_{tot} - \frac{R}{M}T_{tot} = 0$$

constante des GP — masse molaire

- Milieu bivariant : 2 variables thermodynamiques indépendantes

$$\Rightarrow dS_{tot} = \frac{C_v}{T_{tot}P_{tot}\beta}\left[dP_{tot} - \frac{1}{\rho_{tot}\chi_s}d\rho_{tot}\right] \quad \text{ou} \quad dS_{tot} = \frac{C_p}{T_{tot}}dT_{tot} - \frac{C_p - C_v}{T_{tot}P_{tot}\beta}dP_{tot}$$

entropie — pression — masse volumique — température — pression

$\chi_S = \chi_T/\gamma = -(\partial V/\partial P)_S / V$

- Transformations adiabatiques : pas d'échanges de chaleur $\Rightarrow$ $\boxed{\delta Q_{tot} = 0}$

or $\delta Q_{tot} = T_{tot}\, dS_{tot}$ $\Rightarrow$ $\boxed{dS_{tot} = 0}$

$$\Rightarrow dP_{tot} = \frac{1}{\rho_{tot}\chi_s}d\rho_{tot} \quad \text{c.à.d} \quad \boxed{dP_{tot} = c^2 d\rho_{tot}} \quad \text{avec} \quad \boxed{c^2 = \frac{\gamma}{\rho_{tot}\chi_T} = \frac{1}{\rho_{tot}\chi_s}}$$

célérité adiabatique

Etat thermodynamique d'un fluide (2/2)

- Transformations adiabatiques $\boxed{dP_{tot} = c^2 d\rho_{tot}}$ avec $\boxed{c^2 = \frac{\gamma}{\rho_{tot}\chi_T} = \frac{1}{\rho_{tot}\chi_s}}$

célérité adiabatique

✓ **cas de l'acoustique linéaire**

$$\frac{\gamma}{\rho_{tot}\chi_T} \approx \text{constante} = \frac{\gamma}{\rho_E\chi_T} \Rightarrow \int_{P_E}^{P_{tot}} dP_{tot} = \frac{\gamma}{\rho_E\chi_T}\int_{\rho_E}^{\rho_{tot}} d\rho_{tot}$$

c.à.d $\underbrace{P_{tot} - P_E}_{p} = \frac{\gamma}{\rho_E\chi_T}\underbrace{(\rho_{tot} - \rho_E)}_{\rho}$

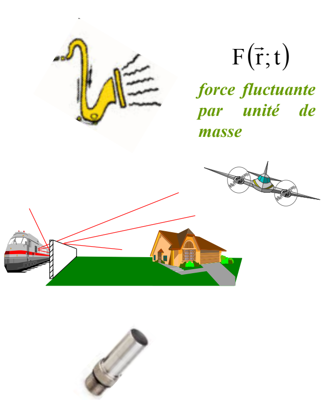
✓ **cas de l'acoustique linéaire + fluide homogène ne dépendant pas du temps**

$$\rho_E = \rho_0 \Rightarrow p = \frac{\gamma}{\rho_0\chi_T}\rho \Rightarrow \boxed{p = c_0^2\rho \qquad c_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_0\chi_T}}}$$

célérité adiabatique du son ≈ 344,8 m/s dans l'air

Types de sources (1/3) : sources volumiques

- sources de forces



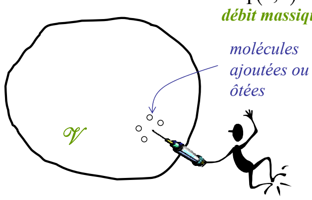
$F(\vec{r};t)$

force fluctuante par unité de masse

- sources de débit

$q(\vec{r};t)$

débit massique

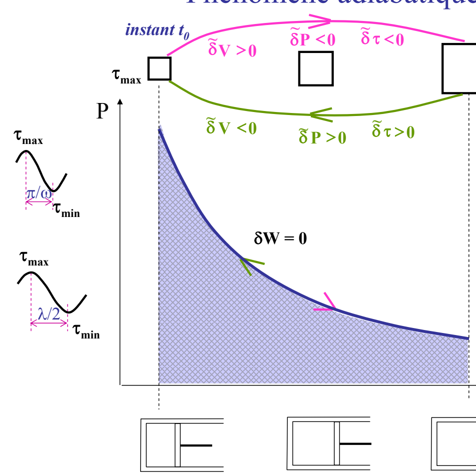


- source de chaleur

$h(\vec{r};t)$

quantité de chaleur par unité de masse et par unité de temps

Phénomène adiabatique



En présence de sources :

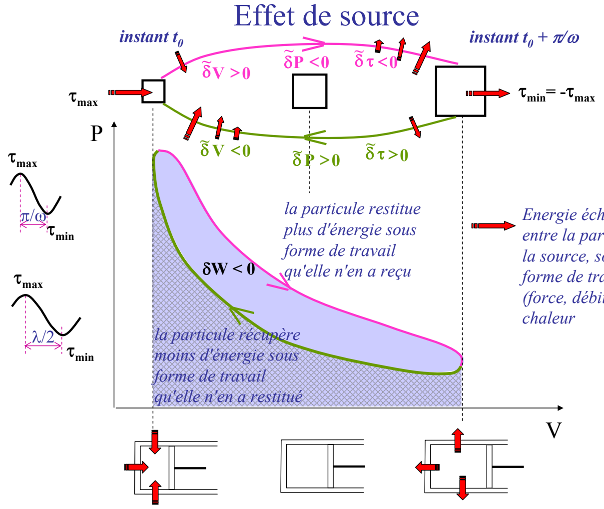
$\boxed{T\,dS = h\,dt}$

source de chaleur

Hors sources :

$$\boxed{T\,dS = 0 \qquad p = c_0^2\rho \qquad \tau = \frac{\gamma - 1}{\gamma\beta}p}$$

Effet de source



Energie échangée entre la particule et la source, sous forme de travail (force, débit) ou de chaleur

Schéma de principe de l'effet d'une source de chaleur

- Particule dans son état de volume minimum, de pression acoustique maximum, de température maximum
- Apport extérieur de chaleur positif (augmentation consécutive de son énergie interne et de sa pression)

- Absorbe moins d'énergie acoustique au cours de sa compression qu'elle n'en restitue au cours de sa détente
- Augmentation de l'énergie acoustique par conversion d'énergie calorifique en énergie acoustique

- Particule dans son état de volume maximum, de pression acoustique minimum, de température minimum
- Cède de la chaleur à l'extérieur $Q_c>0$ (diminution consécutive de son énergie interne et de sa pression)

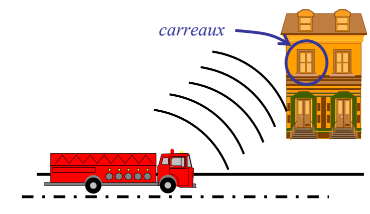
Un moyen de réaliser ce processus est de maintenir un gradient de température statique suffisamment élevé et de prévoir la relation de phase entre la pression acoustique et le déplacement telle que la situation schématique qui précède soit réalisée dans son principe.

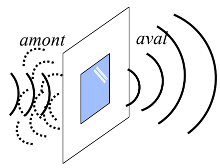
Types de sources (2/3) : sources de surface

- Haut-parleurs sur les parois

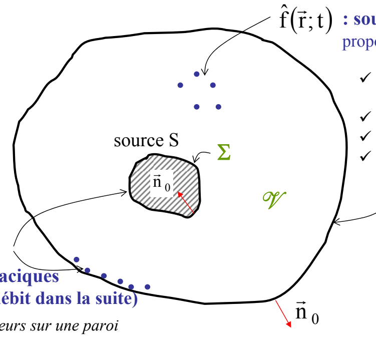

$u(\vec{r};t)$ { - sources de forces
- sources de débit
- sources de chaleur

- Surface vibrante





Types de sources (3/3)



$\hat{f}(\vec{r};t)$ **: sources volumiques**
proportionnel à div $\vec{F}$, $\partial_t q$ ou $\partial_t h$

- ✓ *instruments de musique sur une scène*
- ✓ *sources aérodynamiques*
- ✓ *gyromètre acoustique*
- ✓ *...*

$\hat{u}(\vec{r};t)$:
sources surfaciques
(sources de débit dans la suite)

- ✓ *haut-parleurs sur une paroi*
- ✓ *surface vibrante*
- ✓ *machine dans un atelier*
- ✓ *...*

$\hat{f}(\vec{r};t)$ et $\hat{u}(\vec{r};t)$ sont des sources non locales (non "ponctuelles")

Les trois équations fondamentales

- Mouvement acoustique

http://www.kettering.edu/~drussell/Demos/demos.html

1) inertie du système ➡ *PFD : équation d'Euler*

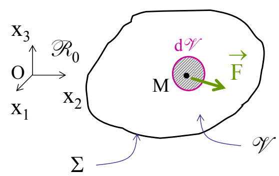
2) élasticité du système (compressibilité) ➡ **div $\vec{v} \neq 0$** *: équation de conservation de la masse*

- Nature du coefficient de compressibilité

3) loi de "comportement" ➡ *transformations adiabatiques, relation entre* **p** *et* **ρ** (et **s**)

Une combinaison de ces trois équations fondamentales permet d'obtenir l'***équation de propagation***

Traduction de l'inertie : équation de propagation (1/4)



- **PFD pour les résultantes**

$$\vec{\mathscr{R}}(\text{ext} \to \mathscr{V}) = \vec{d}(\mathscr{V}/\mathscr{R}_0), \ \forall\ \mathscr{V}$$

- **Résultante dynamique** $\vec{d}(\mathscr{V}/\mathscr{R}_0) = \iiint_{\mathscr{V}} \rho_{tot} \dfrac{d\vec{v}_{tot}}{dt}\, d\mathscr{V}$

- **Résultante des forces extérieures** $\vec{\mathscr{R}}(\text{ext} \to \mathscr{V}) = \vec{F}_{vol} + \vec{F}_s$

force de volume *force de surface*

somme des forces extérieures exercées sur le volume $d\mathscr{V}$. $d\vec{F} = \rho_{tot} \vec{F}\, d\mathscr{V}$

$$\vec{F}_{vol} = \iiint_{\mathscr{V}} \rho_{tot} \vec{F}\, d\mathscr{V}$$

force par unité de masse

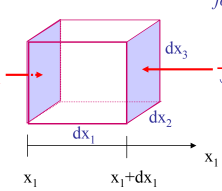
$$\vec{F}_s = \iint_{\Sigma} -P_{tot}(\vec{r};t)\vec{n}\, d\sigma$$

Traduction de l'inertie : équation de propagation (2/4)

- **Forces de surface**

Somme de toutes les forces extérieures $d\vec{f}_s = \vec{f}_s\, ds$ exercées sur les surfaces élémentaires ds du petit élément de volume $d\mathscr{V}$.

force surfacique



$\underbrace{P_{tot}(x_1,x_2,x_3;t)\, dx_2 dx_3\, \vec{e}_{x1}}_{d\vec{f}_s(x_1,x_2,x_3;t)\cdot\vec{e}_{x_1}}$

$\underbrace{-P_{tot}(x_1+dx_1,x_2,x_3;t)\, dx_2 dx_3\, \vec{e}_{x1}}_{d\vec{f}_s(x_1+dx_1,x_2,x_3;t)\cdot\vec{e}_{x_1}}$

$$\Rightarrow d\vec{\mathscr{R}}_s(x_1,x_2,x_3;t)\cdot\vec{e}_{x_1} = [P_{tot}(x_1,x_2,x_3;t) - P_{tot}(x_1+dx_1,x_2,x_3;t)]\, dx_2\, dx_3$$
$$= -\frac{\partial P_{tot}}{\partial x_1} dx_1\, dx_2\, dx_3\ .$$

et de même pour les autres faces du cube élémentaire

Traduction de l'inertie : équation de propagation (3/4)

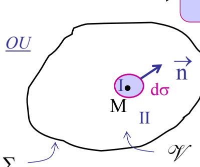
- **Forces de surface, suite**

$$\left\{\begin{aligned} d\vec{\mathscr{R}}_s(x_1,x_2,x_3;t)\cdot\vec{e}_{x_1} &= -\frac{\partial P_{tot}}{\partial x_1} dx_1\, dx_2\, dx_3\ . \\ d\vec{\mathscr{R}}_s(x_1,x_2,x_3;t)\cdot\vec{e}_{x_2} &= -\frac{\partial P_{tot}}{\partial x_2} dx_1\, dx_2\, dx_3 \\ d\vec{\mathscr{R}}_s(x_1,x_2,x_3;t)\cdot\vec{e}_{x_3} &= -\frac{\partial P_{tot}}{\partial x_3} dx_1\, dx_2\, dx_3 \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow d\vec{\mathscr{R}}_s(x_1,x_2,x_3;t) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P_{tot}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P_{tot}\, d\mathscr{V}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_s = \iiint_{\mathscr{V}} -\overrightarrow{\text{grad}}\, P_{tot}\, d\mathscr{V}$$

OU



Théorème d'Ostrogradsky (ou de Gauss)

$$\vec{F}_s = \iint_{\Sigma} -P_{tot}(\vec{r};t)\vec{n}\, d\sigma$$

C. Potel, M. Bruneau, "Acoustique générale (...)", Ed. Ellipse, collection Technosup, ISBN 2-7298-2805-2, 2006

Traduction de l'inertie : équation de propagation (4/4)

- **PFD pour les résultantes** $\vec{\mathcal{R}}(\text{ext} \to \mathcal{V}) = \vec{d}(\mathcal{V}/\mathcal{R}_0), \ \forall\ \mathcal{V}$

$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(\rho_{tot}\vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}}\,P_{tot}\right) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho_{tot}\frac{d\vec{v}_{tot}}{dt}\,d\mathcal{V}$$

c.à.d.
$$\iiint_{\mathcal{V}} \left(\rho_{tot}\vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}}\,P_{tot} - \rho_{tot}\frac{d\vec{v}_{tot}}{dt}\right) d\mathcal{V} = \vec{0},\ \forall\ \mathcal{V}$$

$\Rightarrow$ $\rho_{tot}\dfrac{d\vec{v}_{tot}}{dt} = \rho_{tot}\vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}}\,P_{tot}$ *c.à.d.* $\rho_{tot}\dfrac{\partial\vec{v}_{tot}}{\partial t} + \rho_{tot}\left(\overline{\overline{\text{grad}}}\,\vec{v}_{tot}\right)\cdot\vec{v}_{tot} = \rho_{tot}\vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}}\,P_{tot}$

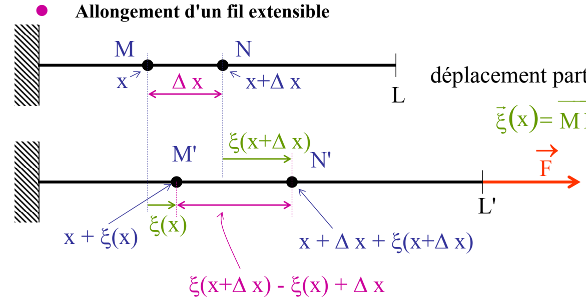
Equation d'Euler <u>avec</u> sources

$\Rightarrow$ $\rho_{tot}\dfrac{d\vec{v}_{tot}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P_{tot}$ *c.à.d.* $\rho_{tot}\dfrac{\partial\vec{v}_{tot}}{\partial t} + \rho_{tot}\left(\overline{\overline{\text{grad}}}\,\vec{v}_{tot}\right)\cdot\vec{v}_{tot} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,P_{tot}$

Equation d'Euler <u>hors des</u> sources

Traduction de la compressibilité : éq. de conservation de la masse (1/6)

- **Allongement d'un fil extensible**



déplacement particulaire : $\vec{\xi}(x) = \overrightarrow{MM'}$

variation relative de longueur du petit élément MN :

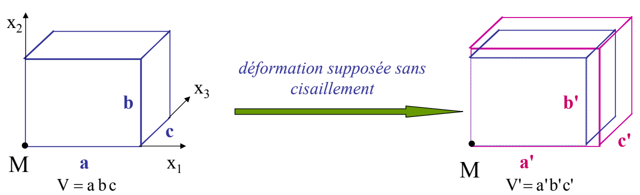
$$\frac{[\xi(x+\Delta x) - \xi(x) + \Delta x] - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta\xi}{\Delta x}$$

déformation (allongement linéique) :

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\xi(x+\Delta x) - \xi(x)}{\Delta x} = \frac{d\xi}{dx}$$

Traduction de la compressibilité : éq. de conservation de la masse (2/6)

- **Interprétation de la divergence du vecteur vitesse particulaire**



$V' \approx V\left(1 + \partial\xi_1/\partial x_1 + \partial\xi_2/\partial x_2 + \partial\xi_3/\partial x_3\right)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{dV}{V} = \dfrac{V'-V}{V} \approx \text{div}\,\vec{\xi}$

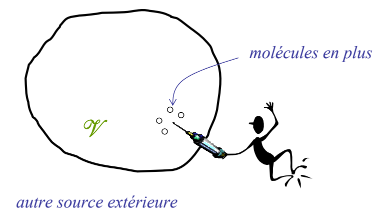
variation relative de volume

or $\vec{\xi} = \vec{v}\,dt$ $\Rightarrow$ $\dfrac{dV}{V} \approx \text{div}\,\vec{v}\,dt$

déplacement élémentaire du point M pendant le temps dt

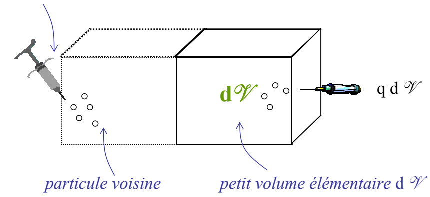
Traduction de la compressibilité : éq. de conservation de la masse (3/6)

- **Source de débit**



$q(\vec{r};t) = \dfrac{q\,d\mathcal{V}}{d\mathcal{V}}$ (en s^{-1})

débit volumique



volume de matière introduit dans le volume élémentaire d$\mathcal{V}$ par unité de temps

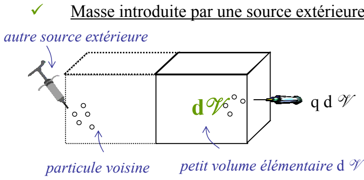
Traduction de la compressibilité : éq. de conservation de la masse (4/6)

- **Loi de conservation de la masse**

Δ de masse contenue dans le volume $\mathcal{V}$ / t = masse entrante dans ce même volume / t

$$\frac{dm_{contenue}}{dt} = \frac{dm_{entrant}}{dt}$$

✓ <u>Masse introduite par une source extérieure dans le volume $\mathcal{V}$ par unité de temps</u>



volume de matière introduit dans le volume élémentaire d$\mathcal{V}$ par unité de temps, par une source extérieure

$\rho_{tot}q$: masse introduite par unité de volume et par unité de temps (en kg.m^{-3}.s^{-1})

$\rho_{tot}q\,d\mathcal{V}$: masse introduite dans le volume d$\mathcal{V}$ par unité de temps (en kg.s^{-1})

$\Rightarrow$ Masse introduite par la source dans le volume $\mathcal{V}$ par unité de temps

$$\frac{dm_i}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho_{tot}\,q\,d\mathcal{V}$$

Traduction de la compressibilité : éq. de conservation de la masse (5/6)

✓ <u>Masse de fluide entrant dans le volume $\mathcal{V}$ par la surface fixe Σ, par unité de temps</u>

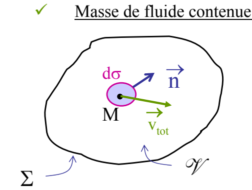
$$\frac{dm_{entrant}}{dt} = \underbrace{-\iint_{\Sigma}\left(\rho_{tot}\vec{v}_{tot}\right)\cdot\vec{n}\,d\sigma}_{} + \underbrace{\iiint_{\mathcal{V}}\rho_{tot}\,q\,d\mathcal{V}}_{}$$

flux entrant = opposé du flux sortant de $\rho_{tot}\vec{v}_{tot}$ à travers Σ

masse de fluide introduite par la source de débit $= \dfrac{dm_i}{dt}$

$\Rightarrow$ $\dfrac{dm_{entrant}}{dt} = -\displaystyle\iiint_{\mathcal{V}} \text{div}\left(\rho_{tot}\vec{v}_{tot}\right)d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}}\rho_{tot}\,q\,d\mathcal{V}$

✓ <u>Masse de fluide contenue dans le volume $\mathcal{V}$, à l'instant t</u>



Volume fixe $\mathcal{V}$ traversé par le fluide

$$m_{contenue} = \iiint_{\mathcal{V}}\rho_{tot}(\vec{r};t)\,d\mathcal{V}$$

$\Rightarrow$ variation par unité de temps

$$\frac{dm_{contenue}}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}}\frac{\partial\rho_{tot}}{\partial t}\,d\mathcal{V}$$

Traduction de la compressibilité : éq. de conservation de la masse (6/6)

- **Loi de conservation de la masse**

Δ de masse contenue dans le volume $\mathscr{V}$ / t = masse entrante dans ce même volume / t

$$\frac{d\,m_{contenue}}{d\,t}=\frac{d\,m_{entrant}}{d\,t}$$

c.à.d. $$\iiint_{\mathscr{V}}\frac{\partial\rho_{tot}}{\partial t}\,d\mathscr{V}=\iiint_{\mathscr{V}}\left[-\operatorname{div}(\rho_{tot}\,\vec{v}_{tot})+\rho_{tot}\,q\right]d\mathscr{V}\ ,\ \forall\mathscr{V}$$

soit $$\iiint_{\mathscr{V}}\left\{\frac{\partial\rho_{tot}}{\partial t}-\left[-\operatorname{div}(\rho_{tot}\,\vec{v}_{tot})+\rho_{tot}\,q\right]\right\}d\mathscr{V}=0\ ,\ \forall\ \mathscr{V}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial\rho_{tot}}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho_{tot}\,\vec{v}_{tot})=\rho_{tot}\,q}$ *c.à.d.* $\boxed{\frac{d\rho_{tot}}{d\,t}+\rho_{tot}\operatorname{div}\vec{v}_{tot}=\rho_{tot}\,q}$

Equation de conservation de la masse avec sources

$\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\partial\rho_{tot}}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho_{tot}\,\vec{v}_{tot})=0}$ *c.à.d.* $\boxed{\frac{d\rho_{tot}}{d\,t}+\rho_{tot}\operatorname{div}\vec{v}_{tot}=0}$

Equation de conservation de la masse hors des sources

avec $\operatorname{div}(\rho_{tot}\,\vec{v}_{tot})=\rho_{tot}\operatorname{div}\vec{v}_{tot}+\vec{v}_{tot}\cdot\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\rho_{tot}$

Loi de comportement d'un fluide : le coefficient de compressibilité

- En dehors des sources de chaleur : transformations adiabatiques $\boxed{d\,S_{tot}=0}$

$$\boxed{d\,P_{tot}=c^2\,d\rho_{tot}}\quad \textit{avec}\quad \boxed{c^2=\frac{\gamma}{\rho_{tot}\,\chi_T}=\frac{1}{\rho_{tot}\,\chi_s}}$$

célérité adiabatique

✓ **cas de l'acoustique linéaire + fluide homogène ne dépendant pas du temps**

$$p=c_0^2\,\rho\qquad \textit{avec}\qquad c_0=\sqrt{\frac{\gamma}{\rho_0\,\chi_T}}$$

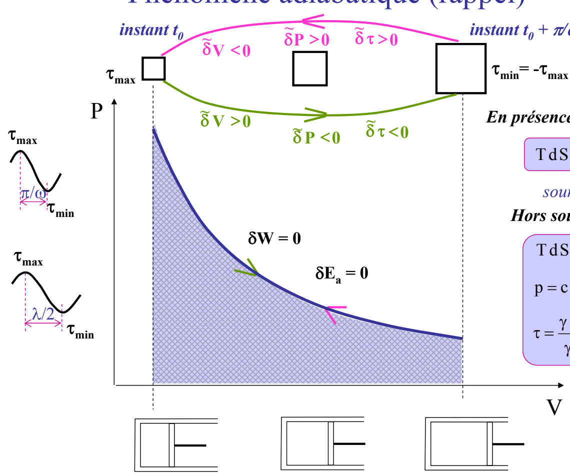
- En présence d'une source de chaleur $\boxed{T_{tot}\,d\,S_{tot}=h\,dt}$

quantité (algébrique) de chaleur introduit par unité de masse de fluide, par unité de temps

or $$\left\{\begin{array}{l} d\,S_{tot}=\dfrac{C_v}{T_{tot}\,P_{tot}\,\beta}\left[d\,P_{tot}-\dfrac{\gamma}{\rho_{tot}\,\chi_T}\,d\rho_{tot}\right]\\ \alpha=\beta\,\chi_T\,P_{tot}\\ C_p=\gamma\,C_v\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ $$\boxed{\frac{1}{\rho_{tot}}\frac{d\rho_{tot}}{d\,t}=\frac{\chi_T}{\gamma}\frac{d\,P_{tot}}{d\,t}-\frac{\alpha}{C_p}h}$$

Phénomène adiabatique (rappel)



En présence de sources :

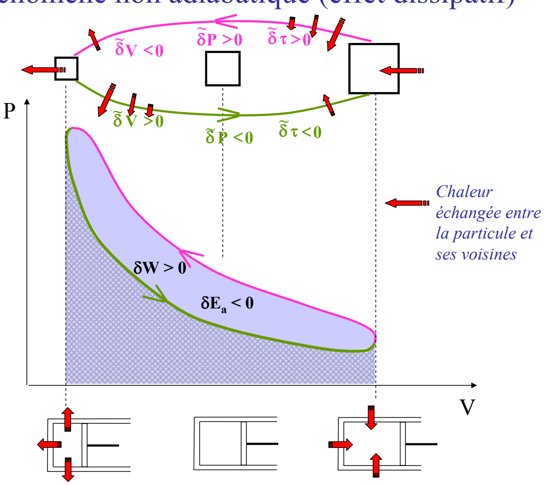
$\boxed{T\,d\,S=h\,dt}$

source de chaleur

Hors sources :

$$\boxed{\begin{array}{l}T\,d\,S=0\\ p=c_0^2\,\rho\\ \tau=\dfrac{\gamma-1}{\gamma\beta}\,p\end{array}}$$

Phénomène non adiabatique (effet dissipatif)



Synthèse des trois lois fondamentales de l'acoustique

fluide homogène, indépendant du temps, au repos, acoustique linéaire

- En présence de sources

✓ $\rho_{tot}\dfrac{d\vec{v}_{tot}}{d\,t}+\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,P_{tot}=\rho_{tot}\,\vec{F}$	*éq. d'Euler*	✓ $\rho_0\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,p=\rho_0\,\vec{F}$
✓ $\dfrac{\partial\rho_{tot}}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho_{tot}\,\vec{v}_{tot})=\rho_{tot}\,q$	*éq. de conservation de la masse*	✓ $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\rho_0\operatorname{div}\vec{v}=\rho_0\,q$
✓ $\dfrac{1}{\rho_{tot}}\dfrac{d\rho_{tot}}{d\,t}=\dfrac{\chi_T}{\gamma}\dfrac{d\,P_{tot}}{d\,t}-\dfrac{\alpha}{C_p}h$	*loi de "comportement"*	✓ $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=\dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{\partial p}{\partial t}-\dfrac{\alpha\rho_0}{C_p}h$ *avec* $c_0^2=\dfrac{\gamma}{\rho_0\,\chi_T}$

- En dehors des sources

✓ $\rho_{tot}\dfrac{d\vec{v}_{tot}}{d\,t}+\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,P_{tot}=\vec{0}$	*éq. d'Euler*	✓ $\rho_0\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,p=\vec{0}$
✓ $\dfrac{\partial\rho_{tot}}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho_{tot}\,\vec{v}_{tot})=0$	*éq. de conservation de la masse*	✓ $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\rho_0\operatorname{div}\vec{v}=0$
✓ $d\,P_{tot}=\underbrace{\dfrac{\gamma}{\rho_{tot}\,\chi_T}}_{c^2}\,d\rho_{tot}$	*loi de "comportement"*	✓ $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=\dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{\partial p}{\partial t}$ *c.à.d.* $p=c_0^2\,\rho$

Dérivée particulaire (1/2)

- **Particule repérée par le point M**

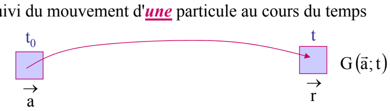
M

✓ volume suffisamment grand pour que l'aspect moléculaire soit ignoré
✓ volume suffisamment petit par rapport à λ pour que les grandeurs physiques puissent être considérées comme (quasi) constantes

- **Représentation de Lagrange**

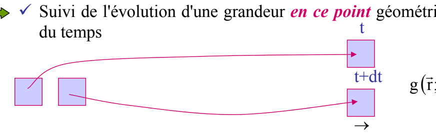
✓ Variables liées à la particule considérée : position initiale $\vec{a}$, et temps t
$\Rightarrow$ ✓ Suivi du mouvement d'***une*** particule au cours du temps

grandeur g



- **Représentation d'Euler (en usage en acoustique classique)**

✓ Les variables sont liées au point géométrique $\vec{r}$ (à $d\vec{r}$ près au besoin)
$\Rightarrow$ ✓ Suivi de l'évolution d'une grandeur ***en ce point*** géométrique, au cours du temps



Dérivée particulaire (2/2)

dérivée particulaire : dérivée par rapport au temps de la grandeur g, attachée à une particule suivie dans son mouvement pendant le temps dt

- quantité scalaire $g(\vec r;t)$

$$dg=\frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial g}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial g}{\partial x_3}dx_3+\frac{\partial g}{\partial t}dt$$

c.à.d.

$$\frac{dg}{dt}=\underbrace{\frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial g}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\frac{\partial g}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt}}+\frac{\partial g}{\partial t}\;\Rightarrow\;\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{dg}{dt}=\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g\right)\cdot\vec v_{tot}+\dfrac{\partial g}{\partial t}\\ \textit{ou}\quad \dfrac{d}{dt}=\vec v_{tot}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}+\dfrac{\partial}{\partial t}\end{array}}$$

terme de convection → $\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g\right)\cdot\vec v_{tot}$

dérivée locale, en un point fixe $\vec r$

- quantité vectorielle $\vec A(\vec r;t)$

$$\frac{d\vec A}{dt}=\frac{\partial\vec A}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial\vec A}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\frac{\partial\vec A}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt}+\frac{\partial\vec A}{\partial t}$$

$$\Rightarrow\;\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{d\vec A}{dt}=\left(\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\vec A\right)\cdot\vec v_{tot}+\dfrac{\partial\vec A}{\partial t}\\ \textit{ou}\quad\dfrac{d}{dt}=\vec v_{tot}\cdot\overline{\overline{\mathrm{grad}}}+\dfrac{\partial}{\partial t}\end{array}}\quad\textit{avec}\quad\left(\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\vec A\right)=\begin{bmatrix}\frac{\partial A_1}{\partial x_1}&\frac{\partial A_1}{\partial x_2}&\frac{\partial A_1}{\partial x_3}\\ \frac{\partial A_2}{\partial x_1}&\frac{\partial A_2}{\partial x_2}&\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\\ \frac{\partial A_3}{\partial x_1}&\frac{\partial A_3}{\partial x_2}&\frac{\partial A_3}{\partial x_3}\end{bmatrix}$$

Equation de propagation

- En présence de sources

$$\mathrm{div}\left(\rho_0\frac{\partial\vec v}{\partial t}+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p=\rho_0\vec F\right)$$

$$\ominus$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho_0\,\mathrm{div}\,\vec v=\rho_0 q\right)$$

$$\underbrace{\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p\right)}_{\Delta p}-\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=\rho_0\left(\mathrm{div}\,\vec F-\frac{\partial q}{\partial t}\right)$$

Loi de "comportement"

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\alpha\rho_0}{C_p}h\right)\;\Rightarrow\;\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}=\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\frac{\alpha\rho_0}{C_p}\frac{\partial h}{\partial t}$$

$$\Rightarrow\;\Delta p-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=\rho_0\left(\mathrm{div}\,\vec F-\frac{\partial q}{\partial t}-\frac{\alpha}{C_p}\frac{\partial h}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow\;\boxed{\left(\Delta-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)p=-f}\quad\textit{avec}\quad\boxed{-f=\rho_0\left(\mathrm{div}\,\vec F-\frac{\partial q}{\partial t}-\frac{\alpha}{C_p}\frac{\partial h}{\partial t}\right)}$$

- En dehors des sources $\boxed{\left(\Delta-\dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)p=0}$

opérateur d'Alembertien noté □

Equation de Helmholtz

- Représentation complexe $\boxed{p(\vec r;t)=\mathcal{R}e\left[\hat p(\vec r;t)\right]}$

partie réelle *forme complexe*

- Champ monochromatique de pulsation ω

équation de Helmholtz

$$\left.\begin{array}{l}\hat p(\vec r;t)=\hat P(\vec r;\omega)e^{i\omega t}\\ \hat f(\vec r;t)=\hat F(\vec r;\omega)e^{i\omega t}\\ \left(\Delta-\dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\hat p=-\hat f\end{array}\right\}\Rightarrow\;\boxed{\begin{array}{l}\left(\Delta+\dfrac{\omega^2}{c_0^2}\right)\hat P(\vec r;\omega)=-\hat F(\vec r;\omega)\\ \left(\Delta+\dfrac{\omega^2}{c_0^2}\right)\hat P(\vec r;\omega)=0\end{array}}$$

en présence de sources

en dehors des sources

- Décomposition d'un signal en somme de signaux monochromatiques

$$\hat p(\vec r;t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat P(\vec r;\omega)e^{i\omega t}d\omega\quad\textit{et}\quad\hat P(\vec r;\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat p(\vec r;t)e^{-i\omega t}dt$$

Transformée de Fourier / ω *Transformée de Fourier / t*

$\hat P(\vec r;\omega)=TF_{/t}\left[\hat p(\vec r;t)\right]$ *et* $\hat F(\vec r;\omega)=TF_{/t}\left[\hat f(\vec r;t)\right]$ *vérifient l'équation de Helmholtz*

Potentiel des vitesses

- Définition $\boxed{\vec v(\vec r;t)=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi(\vec r;t)}$ *défini à une constante près* $K_1(t)$
- Equation de propagation

$$\rho_0\frac{\partial\vec v}{\partial t}+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p=\vec 0\;\Rightarrow\;\rho_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi\right)+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p=\vec 0\;\Rightarrow\;\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}+p\right)=\vec 0,\;\forall\;(\vec r,t)$$

$$\Rightarrow\;\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}+p=K_2(t)\quad\textit{avec}\quad\rho_0\frac{dK_1}{dt}=K_2(t)$$

$$\Rightarrow\;\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}+p=0\;\Rightarrow\;\boxed{p=-\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}}$$

or $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=\dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{\partial p}{\partial t}\;\Rightarrow\;\boxed{\rho=-\dfrac{\rho_0}{c_0^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}}$

or $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\rho_0\,\mathrm{div}\,\vec v=0\;\Rightarrow\;\boxed{\Delta\varphi-\dfrac{1}{c_0^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0}$

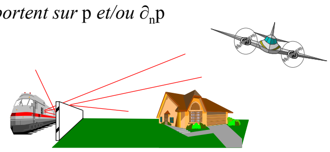
- Equation de Helmholtz

Champ monochromatique : $\hat\varphi(\vec r;t)=\hat\Phi(\vec r;\omega)e^{i\omega t}\;\Rightarrow\;\boxed{\begin{array}{c}\left(\Delta+k_0^2\right)\hat\Phi(\vec r;\omega)=0\\ k_0=\dfrac{\omega}{c_0}\end{array}}$

⚠ *Notation*

Problèmes aux limites de l'acoustique

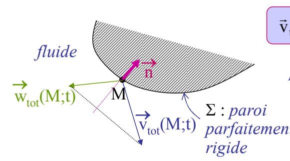
- Domaine spatial limité ou infini
  - ✓ conditions aux frontières :
    - frontière matérialisée par une surface de séparation entre deux milieux,
    - frontière décrite par les propriétés vibratoires à l'interface entre le milieu considéré et la paroi constituant la frontière.
  - ✓ condition de Sommerfeld : condition de décroissance annulant le champ à l'infini (loin des sources)
  - ✓ *NB : les conditions portent sur* p *et/ou* $\partial_n p$



- Domaine temporel
  - ✓ conditions initiales
  - ✓ *NB : les conditions initiales portent sur* p *et* $\partial_t p$

Conditions aux frontières non linéarisées

- Interface parfaitement rigide



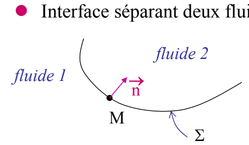
paroi Σ mobile :

$$\boxed{\vec v_{tot}(M\in\Sigma;t)\cdot\vec n=\vec w_{tot}(M\in\Sigma;t)\cdot\vec n,\;\forall\;M\in\Sigma,\;\forall\;t}$$

paroi Σ fixe :

$$\boxed{\vec v_{tot}(\vec x\in\Sigma;t)\cdot\vec n=0,\;\forall\;M\in\Sigma,\;\forall\;t}$$

- Interface séparant deux fluides non visqueux



égalité des composantes normales de la vitesse :

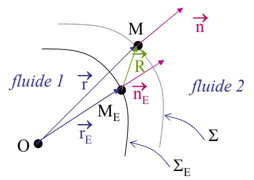
$$\boxed{\vec v_{tot_1}(\vec x\in\Sigma;t)\cdot\vec n=\vec v_{tot_2}(\vec x\in\Sigma;t)\cdot\vec n,\;\forall\;M\in\Sigma,\;\forall\;t}$$

égalité des pressions acoustiques :

$$\boxed{P_{tot_1}(\vec r\in\Sigma;t)=P_{tot_2}(\vec r\in\Sigma;t),\;\forall\;M\in\Sigma,\;\forall\;t}$$

C. Potel, M. Bruneau, "Acoustique générale (...)", Ed. Ellipse, collection Technosup, ISBN 2-7298-2805-2, 2006

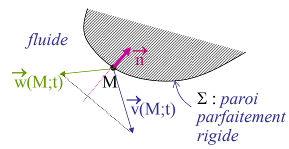
Linéarisation des conditions aux frontières



Conserver uniquement les grandeurs acoustiques du premier ordre conduit à ***écrire les conditions aux frontières pour les grandeurs fluctuantes sur la surface dans sa position de référence***.

Conditions aux frontières usuelles en acoustique linéaire, fluide homogène, indépendant du temps, au repos (1/3)

- Interface parfaitement rigide



paroi Σ mobile :

$$\boxed{\vec v(M\in\Sigma;t)\cdot\vec n=\vec w(M\in\Sigma;t)\cdot\vec n,\ \forall\ M\in\Sigma\ ,\ \forall\ t}$$

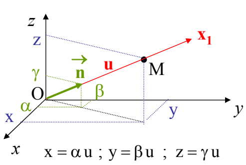
paroi Σ fixe :

$$\boxed{\vec v(\vec r\in\Sigma;t)\cdot\vec n=0,\ \forall\ M\in\Sigma\ ,\ \forall\ t}$$

or $\vec n\cdot\left(\rho_0\dfrac{\partial\vec v}{\partial t}+\overrightarrow{\text{grad}}\,p=\vec 0\right)\Rightarrow\ \rho_0\dfrac{\partial(\vec v\cdot\vec n)}{\partial t}+\dfrac{\partial p}{\partial n}=0$

$$\Rightarrow\ \boxed{\frac{\partial p(\vec r\in\Sigma;t)}{\partial n}=0\ ,\ \forall\ M\in\Sigma\ ,\ \forall\ t}$$ ***Condition de Neumann***

Rappel mathématique



$x=\alpha u\ ;\ y=\beta u\ ;\ z=\gamma u$

$\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{l}x\\ y=\\ z\end{array}\right._{\mathscr{B}}\quad\left|\begin{array}{l}u\\ 0\\ 0\end{array}\right._{\mathscr{B}_1}$

Soient f(x,y,z) et $\vec n$ un vecteur unitaire $\vec n\left|\begin{array}{l}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{array}\right._{\mathscr{B}}\quad\overrightarrow{\text{grad}}\,f\left|\begin{array}{l}\partial_x f\\ \partial_y f\\ \partial_z f\end{array}\right._{\mathscr{B}}$

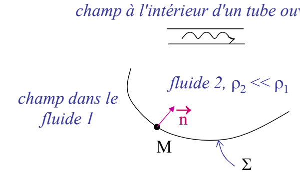
$$\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\frac{\partial x}{\partial u}}_{\alpha}+\frac{\partial f}{\partial y}\underbrace{\frac{\partial y}{\partial u}}_{\beta}+\frac{\partial f}{\partial z}\underbrace{\frac{\partial z}{\partial u}}_{\gamma}$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\frac{\partial f}{\partial n}=\overrightarrow{\text{grad}}\,f\cdot\vec n}$$

Conditions aux frontières usuelles en acoustique linéaire, fluide homogène, indépendant du temps, au repos (2/3)

- Paroi parfaitement souple

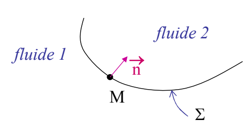
champ à l'intérieur d'un tube ouvert sur l'espace infini



$$\boxed{p(\vec r\in\Sigma;t)=0\ ,\ \forall\ M\in\Sigma\ ,\ \forall\ t}$$

Condition de Dirichlet

- Interface séparant deux fluides non visqueux



égalité des composantes normales de la vitesse :

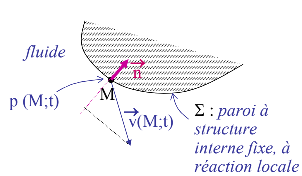
$$\boxed{\vec v_1(\vec r\in\Sigma;t)\cdot\vec n=\vec v_2(\vec r\in\Sigma;t)\cdot\vec n\ ,\ \forall\ M\in\Sigma\ ,\ \forall\ t}$$

égalité des pressions acoustiques :

$$\boxed{p_1(\vec r\in\Sigma;t)=p_2(\vec r\in\Sigma;t)\ ,\ \forall\ M\in\Sigma\ ,\ \forall\ t}$$

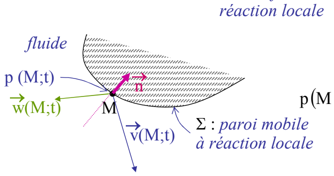
Conditions aux frontières usuelles en acoustique linéaire, fluide homogène, indépendant du temps, au repos (2/3)

- Paroi à réaction locale - Notion d'impédance de paroi



$$p(M\in\Sigma;t)=\mathscr{T}_Z\left[\vec v(M\in\Sigma;t)\cdot\vec n\right],\ \forall\ M\in\Sigma\ ,\ \forall\ t$$

opérateur linéaire (fonction de réflexion). MAIS, paramètre de proportionnalité entre pression acoustique et vitesse particulaire ***(impédance de la paroi), n'est défini que pour une fréquence, dans le domaine complexe***

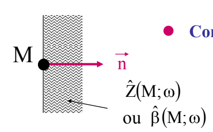


$$p(M\in\Sigma;t)=\mathscr{T}_Z\left\{\left[\vec v(M\in\Sigma;t)-\vec w(M\in\Sigma;t)\right]\cdot\vec n\right\},\ \forall\ M\in\Sigma\ ,\ \forall\ t$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\hat P(M\in\Sigma;\omega)=\hat Z(M;\omega)\left[\hat{\vec V}(M\in\Sigma;\omega)-\hat{\vec W}(M\in\Sigma;\omega)\right]\cdot\vec n\ ,\ \forall\ M\in\Sigma\ ,\ \omega\ \text{fixé}}$$

impédance de paroi

Paroi à structure interne fixe, à réaction locale



- **Condition aux frontières** $\boxed{\hat P(M;\omega)=\hat Z(M;\omega)\hat{\vec V}(M;\omega)\cdot\vec n}$ **(1)**

$\vec n$: normale sortante du milieu considéré ≡ normale pénétrante dans le matériau

avec $\hat p(M;t)=\hat P(M;\omega)e^{i\omega t}$ *et* $\hat{\vec v}(M;t)=\hat{\vec V}(M;\omega)e^{i\omega t}$

- **Projection sur $\vec n$ de l'équation d'Euler** $\left[\rho_0\partial_t\hat{\vec v}(M;t)\right]\cdot\vec n=-\left[\overrightarrow{\text{grad}}\,\hat p(M;t)\right]\cdot\vec n$

c.à.d. $\rho_0 i\omega\hat{\vec V}(M;\omega)\cdot\vec n=-\partial_n\hat P(M;\omega)\ \Leftrightarrow\ \hat{\vec V}(M;\omega)\cdot\vec n=\dfrac{-1}{i\rho_0\omega}\partial_n\hat P(M;\omega)$ **(2)**

$\left.\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}\right\}\Rightarrow\ \partial_n\hat P(M;\omega)+i\dfrac{\rho_0\omega}{\hat Z(M;\omega)}\hat P(M;\omega)=0$ *d'où* $\boxed{\partial_n\hat P(M;\omega)+ik_0\hat\beta(M;\omega)\hat P(M;\omega)=0}$

$k_0=\omega/c_0$

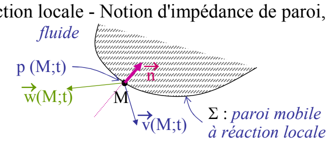
avec $\boxed{\hat\beta(M;\omega)=\dfrac{\rho_0c_0}{\hat Z(M;\omega)}}$ *admittance de surface du matériau, normalisée par l'impédance caractéristique du fluide* ρ_0c_0

- **Paroi rigide (condition de Neuman)** $\left.\begin{array}{l}\hat Z(M;\omega)\to\infty\\ \hat\beta(M;\omega)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\ \boxed{\partial_n\hat P(M;\omega)=0}$

- **Paroi sans réaction et non dissipative (condition de Dirichlet)** $\left.\begin{array}{l}\hat Z(M;\omega)=0\\ \hat\beta(M;\omega)\to\infty\end{array}\right\}\Rightarrow\ \boxed{\hat P(M;\omega)=0}$

Conditions aux frontières usuelles en acoustique linéaire, fluide homogène, indépendant du temps, au repos (2/3)

- Paroi à réaction locale - Notion d'impédance de paroi, suite



$$\left[\frac{\partial}{\partial n}+i k_0 \hat{\beta}(M;\omega)\right]\hat{P}(M;\omega)=\hat{U}(M;\omega)\,,\ \forall M\in\Sigma\,,\ \omega \text{ fixé}$$

$$\hat{\beta}(M;\omega)=\frac{\rho_0 c_0}{\hat{Z}(M;\omega)}$$ *admittance de surface du matériau*

$$\hat{U}(M;\omega)=-\rho_0 i\omega \hat{\hat{W}}(M;\omega)\cdot\vec{n}$$

$$k_0=\omega/c_0$$

dans le domaine temporel $\left[\partial_n + \widetilde{i k_0 \hat{\beta}(M;t)} *\right] \hat{p}(M;t)=\hat{u}(M;t)\ ;\ \forall M\in\Sigma\ ;\ \forall t>t_i$

avec $\widetilde{i k_0 \beta(\vec{r};t)}=TF_{/\omega}\left[i k_0 \beta(\vec{r};\omega)\right]$

Problème acoustique bien posé

- Domaine fréquentiel

Equation de Helmholtz $\left(\Delta+k_0^2\right)\hat{P}(M;\omega)=-\hat{F}(M;\omega)\,,\ \forall M\in\mathscr{V}$

Conditions aux frontières $\left[\frac{\partial}{\partial n}+i k_0\hat{\beta}(M;\omega)\right]\hat{P}(M;\omega)=\hat{U}(M;\omega)\,,\ \forall M\in\Sigma\,,\ \omega\ \text{fixé}$

Conditions de rayonnement à l'infini (éventuellement)

- Domaine temporel

Equation de propagation $\left(\Delta-\frac{1}{c_0^2}\partial_{tt}^2\right)\hat{p}(M;t)=-\hat{f}(M;t)\,,\ \forall M\in\mathscr{V}\,,\ \forall t>t_i$

Conditions aux frontières $\left[\partial_n+\widetilde{i k_0\hat{\beta}(M;t)}*\right]\hat{p}(M;t)=\hat{u}(M;t)\ ;\ \forall M\in\Sigma\ ;\ \forall t>t_i$

Conditions initiales $\partial_t\hat{p}(M;t_i)=\hat{A}(M;t_i)\ ;\ \hat{p}(M;t_i)=\hat{B}(M;t_i)\ ;\ \forall M\in\mathscr{V}\ ;\ t=t_i$

fonctions connues dans tout le domaine $\mathscr{V}$, à l'époque initiales $t=t_i$

Densité totale d'énergie acoustique instantanée (1/2)

- Densité d'énergie = énergie emmagasinée par unité de volume ($E_{\text{volume } d\mathscr{V}}/\, d\mathscr{V}$)

- Densité d'énergie acoustique totale

$$\boxed{E_a=E_c+E_p}$$

*densité d'énergie acoustique **totale*** — *densité d'énergie **cinétique*** — *densité d'énergie **potentielle***

- Densité d'énergie cinétique instantanée

$$E_c=\frac{1}{2}\rho_{tot}\,\vec{v}^{\,2}\ \xrightarrow{\text{acoustique linéaire}}\ \boxed{E_c=\frac{1}{2}\rho_0\,\vec{v}^{\,2}}$$

Densité totale d'énergie acoustique instantanée (2/2)

- Densité d'énergie potentielle instantanée

état au repos $P_0,\ \rho_0$ — *état "courant"* $\tilde{P}_{tot}=P_0+\tilde{p}\ ;\ \tilde{\rho}_{tot}=\rho_0+\tilde{\rho}$ — *état "actuel"* $P_{tot}=P_0+p\ ;\ \rho_{tot}=\rho_0+\rho$

✓ volume élémentaire : $V_{él}=m_{él}/\tilde{\rho}_{tot}$

✓ travail élémentaire reçu par la particule (énergie emmagasinée) :

$$\delta W_{él}=-\tilde{p}\,dV_{él}=-\tilde{p}\,d\left(m_{él}/\tilde{\rho}_{tot}\right)$$

énergie potentielle car transformations adiabatiques : $dU=\delta W_{él}+\delta Q_{él}=\delta W_{él}$ *variation d'énergie interne*

✓ densité d'énergie potentielle :

$$\delta W=\delta W_{él}/V_{él}=-\frac{\tilde{p}\tilde{\rho}_{tot}}{m_{él}}d\left(\frac{m_{él}}{\tilde{\rho}_{tot}}\right)=-\tilde{\rho}_{tot}\,\tilde{p}\,d\left(1/\tilde{\rho}_{tot}\right)=\frac{1}{\tilde{\rho}_{tot}}\tilde{p}\,d\tilde{\rho}_{tot}=\frac{1}{\rho_0+\tilde{\rho}}\tilde{p}\,d\left(\rho_0+\tilde{\rho}\right)=\frac{1}{\rho_0+\tilde{\rho}}\tilde{p}\,d\tilde{\rho}$$

acoustique linéaire ➡ $\delta W\approx\frac{1}{\rho_0}\tilde{p}\,d\tilde{p}$

\+ *loi de "comportement" :* $\tilde{p}=c_0^2\tilde{\rho}$

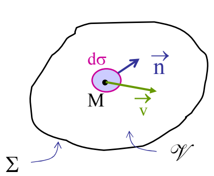
➡ $\delta W\approx\frac{1}{\rho_0}c_0^2\,\tilde{\rho}\,d\tilde{\rho}$

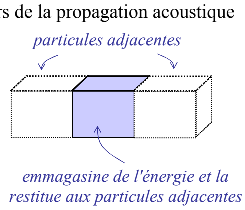
✓ densité d'énergie potentielle instantanée : $E_p=\frac{c_0^2}{\rho_0}\int_0^{\rho}\tilde{\rho}\,d\tilde{\rho}=\frac{c_0^2\rho^2}{2\rho_0}$ ➡ $\boxed{E_p=\frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2}}$

- Densité totale d'énergie acoustique instantanée $\boxed{E_a=E_c+E_p=\frac{1}{2}\left(\rho_0\,\vec{v}^{\,2}+\frac{p^2}{\rho_0 c_0^2}\right)}$

Equation de conservation de l'énergie acoustique (1/4)

Lors de la propagation acoustique





L'énergie acoustique E_a présente localement dans la particule (E_c+E_p) résulte donc d'un ***apport et*** d'une ***perte d'énergie***.

⟷ $\boxed{\text{flux d'énergie apporté et retiré au volume en permanence.}}$

$\boxed{\vec{\mathscr{P}}=p\,\vec{v}}$: flux d'énergie acoustique instantané, ramené à l'unité de surface et à l'unité de temps (puissance instantanée traversant l'unité de surface dσ, transportée par l'onde acoustique)

$p\,\vec{v}\cdot\overrightarrow{d\sigma}\,dt$: travail élémentaire fourni par une particule à son environnement pendant le temps dt.

Equation de conservation de l'énergie acoustique (2/4)

- En dehors des sources

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\mathscr{V}}\left(E_c+E_p\right)d\mathscr{V}}_{}=\underbrace{-\iint_{\Sigma}p\,\vec{v}\cdot\vec{n}\,d\sigma}_{}$$

variation par unité de temps de l'énergie acoustique contenue dans un volume $\mathscr{V}$ — *opposé de l'énergie sortante par unité de temps*

$$-\iiint_{\mathscr{V}}\operatorname{div}\left(p\,\vec{v}\right)d\mathscr{V}$$ *(Th. d'Ostrogradsky)*

➡ $$\iiint_{\mathscr{V}}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(E_c+E_p\right)+\operatorname{div}\left(p\,\vec{v}\right)\right]d\mathscr{V}=0$$

➡ $$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(E_c+E_p\right)}_{E_a}+\operatorname{div}\underbrace{\left(p\,\vec{v}\right)}_{\vec{\mathscr{P}}}=0}$$

Equation de conservation de l'énergie <u>en dehors des sources</u>

Equation de conservation de l'énergie acoustique (3/4)

- En présence de sources

✓ $\mathrm{div}\,\vec v = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho}{\partial t}+q \;\Rightarrow\; \vec v\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p = \mathrm{div}(p\vec v) - p\,\mathrm{div}\,\vec v = \mathrm{div}(p\vec v)+\frac{p}{\rho_0}\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}} - pq$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\alpha\rho_0}{C_p}h$$

$\Rightarrow$ $\vec v\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p = \boxed{\mathrm{div}(p\vec v)+\frac{p}{\rho_0c_0^2}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\alpha}{C_p}ph-pq}$

✓ $\vec v\cdot\left(\rho_0\frac{\partial\vec v}{\partial t}+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p=\rho_0\vec F\right) \Leftrightarrow \rho_0\vec v\cdot\frac{\partial \vec v}{\partial t}+\boxed{\vec v\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p}=\rho_0\vec v\cdot\vec F$

$\Rightarrow$ $\rho_0\vec v\cdot\frac{\partial\vec v}{\partial t}+\mathrm{div}(p\vec v)+\frac{p}{\rho_0c_0^2}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\alpha}{C_p}ph-pq=\rho_0\vec v\cdot\vec F$

$\Rightarrow$ $\frac12\rho_0\frac{\partial\vec v^2}{\partial t}+\frac{1}{2\rho_0c_0^2}\frac{\partial p^2}{\partial t}+\mathrm{div}(p\vec v)=\rho_0\vec v\cdot\vec F+\frac{\alpha}{C_p}ph+pq$

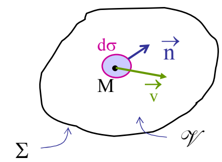
$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\underbrace{\frac12\rho_0\vec v^2}_{E_c}+\underbrace{\frac{p^2}{\rho_0c_0^2}}_{E_p}\Big)+\mathrm{div}(\underbrace{p\vec v}_{\vec{\mathscr P}})=\rho_0\vec v\cdot\vec F+\frac{\alpha}{C_p}ph+pq$$

$$\boxed{\frac{\partial E_a}{\partial t}+\mathrm{div}(\vec{\mathscr P})=\rho_0\vec v\cdot\vec F+\frac{\alpha}{C_p}ph+pq}$$

Equation de conservation de l'énergie <u>en présence de sources</u>

Equation de conservation de l'énergie acoustique (4/4)

- Bilan intégral



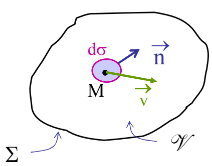
volume supposé ***fixe***

$$\boxed{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\mathscr V}E_a\,d\mathscr V}_{\substack{\text{variation par unité de temps de l'énergie}\\ \text{contenue dans le domaine } \mathscr V}} = \underbrace{-\iint_\Sigma p\vec v\cdot\vec n\,d\sigma}_{\substack{\text{flux total d'énergie entrant dans le volume}\\ \mathscr V \text{ par unité de temps}}}+\underbrace{\iiint_{\mathscr V}\left(\rho_0\vec v\cdot\vec F+\frac{\alpha}{C_p}ph+pq\right)d\mathscr V}_{\substack{\text{énergie apportée par les sources}\\ \text{par unité de temps}}}}$$

Vecteur intensité acoustique (1/2)

$$\boxed{\vec I=\overline{\vec{\mathscr P}}=\overline{p\vec v}}$$

grandeurs REELLES



$\vec I\cdot\vec n\,d\sigma$: quantité moyenne d'énergie acoustique qui traverse l'élément de surface $d\sigma$ par unité de temps

$\Rightarrow$ $\vec I$: vecteur densité surfacique de flux de puissance acoustique moyenne, en $\mathrm{W.m^{-2}}$

or $p=\mathscr{Re}(\hat p)=\frac12(\hat p+\hat p^*)$ *et* $\vec v=\mathscr{Re}(\hat{\vec v})=\frac12(\hat{\vec v}+\hat{\vec v}^*)$

$\Rightarrow$ $\vec I=\frac14\overline{(\hat p+\hat p^*)(\hat{\vec v}+\hat{\vec v}^*)}$

- Champ monochromatique : $\hat p=\hat P e^{i\omega t}$ *et* $\hat{\vec v}=\hat{\vec V}e^{i\omega t}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec I=\frac14\left(\hat P^*\hat{\vec V}+\hat P\hat{\vec V}^*\right)=\frac14\left(\hat p^*\hat{\vec v}+\hat p\hat{\vec v}^*\right)=\frac12\mathscr{Re}\left(\hat p^*\hat{\vec v}\right)=\frac12\mathscr{Re}\left(\hat p\hat{\vec v}^*\right)}$

Vecteur intensité acoustique (2/2)

- En dehors des sources :

✓ $\overline{\frac{\partial E_a}{\partial t}+\mathrm{div}\,\vec{\mathscr P}}=0$ *c.à.d.* $\overline{\frac{\partial E_a}{\partial t}}+\overline{\mathrm{div}\,\vec{\mathscr P}}=0$ *c.à.d.* $\overline{\frac{\partial E_a}{\partial t}}+\mathrm{div}\,\underbrace{\overline{\vec{\mathscr P}}}_{\vec I}=0$

$\Rightarrow$ $\overline{\frac{\partial E_a}{\partial t}}+\mathrm{div}\,\vec I=0$

or $\overline{\frac{\partial E_a}{\partial t}}=\lim_{T\to\infty}\frac1T\int_{-\frac T2}^{+\frac T2}\frac{\partial E_a}{\partial t}dt=\lim_{T\to\infty}\frac1T\left[E_a\left(\frac T2\right)-E_a\left(-\frac T2\right)\right]=0$

$\Rightarrow$ $\overline{\frac{\partial E_a}{\partial t}}=0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathrm{div}\,\vec I=0}$ ***En dehors des sources, le vecteur intensité acoustique est à divergence nulle***

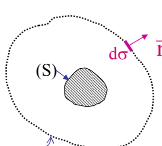
✓ $\rho_0\frac{\partial\vec v}{\partial t}+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p=\vec 0$ $\Rightarrow$ amplitude de p proportionnelle à amplitude de $\vec v$

$\Rightarrow$ amplitude de $\vec{\mathscr P}=p\vec v$ proportionnelle au carré de l'amplitude de p

$\Rightarrow$ amplitude I de $\vec I$ proportionnelle à p^2_{rms}

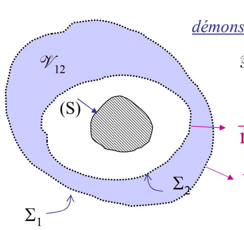
$\Rightarrow$ niveau sonore : $L=10\log_{10}(I/I_s)=20\log_{10}(p_{rms}/p_s)$

Puissance moyenne d'une source (1/2)



$$\boxed{\mathscr P_m(S)=\iint_\Sigma \vec I\cdot\vec n\,d\sigma}$$

La puissance moyenne d'une source est ***indépendante de la surface Σ choisie qui l'entoure.***



<u>*démonstration*</u> *:*

$\mathscr P_m(S/\Sigma_1)=\iint_{\Sigma_1}\vec I\cdot\vec n_1\,d\sigma$ *et* $\mathscr P_m(S/\Sigma_2)=\iint_{\Sigma_2}\vec I\cdot\vec n_2\,d\sigma$

flux de puissance au travers de $(\Sigma_1+\Sigma_2)$ limitant le volume clos $\mathscr V_{12}$:

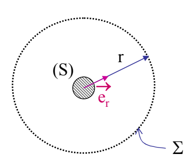
$$\Phi_{12}=\iint_{\Sigma_1}\vec I\cdot\vec n_1\,d\sigma+\iint_{\Sigma_2}\vec I\cdot(-\vec n_2)\,d\sigma=0$$

intensité acoustique à divergence nulle en dehors des sources

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathscr P_m(S/\Sigma_1)=\mathscr P_m(S/\Sigma_2)}$

Puissance moyenne d'une source (2/2)

- Cas particulier d'une source omnidirectionnelle (champ acoustique identique dans toutes les directions)



$$\boxed{\vec I=I(r)\vec e_r}$$

$$\mathscr P_m(S)=\iint_\Sigma I(r)\,r\,d\theta\,r\sin\theta\,d\psi=I(r)r^2\iint_\Sigma d\theta\sin\theta\,d\psi$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathscr P_m(S)=4\pi r^2I(r)}$

$\Rightarrow$ $I(r)\propto\frac1{r^2}$ *et* $p(r)\propto\frac1r$ (*caractère sphérique*)

Transparents basés sur

C. POTEL, M. BRUNEAU, *Acoustique Générale - équations différentielles et intégrales, solutions en milieux fluide et solide, applications*, Ed. Ellipse collection Technosup, 352 pages, ISBN 2-7298-2805-2, 2006