

A noter que la numérotation des paragraphes adoptée ici est calquée sur celle du cours oral afin de faciliter le suivi du cours magistral, mais ne répond pas aux normes de présentation usuelles d'un document écrit.

COURS DE MECANIQUE - VIBRATIONS

1ère année

Catherine POTEL, Philippe GATIGNOL

Chapitre 3. LES FORCES : LOIS PHYSIQUES

Université du Maine - UFR Sciences et Techniques

Les points importants de ce chapitre sont :



La notion d'équation aux dimensions
La modélisation d'une force
Les lois de Coulomb pour le frottement

I ACTIONS SUR UN SYSTEME MECANIQUE

1 Divers types d'actions

Un système mécanique est en général soumis à un certain nombre d'actions tendant à assurer son équilibre ou à modifier son mouvement, par rapport à un repère d'observation.

▪ À notre échelle habituelle, qui est celle de l'étude de la plupart des machines et mécanismes, on peut distinguer *deux types d'actions* :

- les *actions à distance*, telles que l'attraction de la Terre sur un satellite, ou tout simplement l'action de pesanteur à la surface de la Terre, ou encore les actions magnétiques, électrostatiques...

- les *actions par contact* dues à la présence et au mouvement des objets avoisinants, liés à l'objet étudié par des liaisons mécaniques :

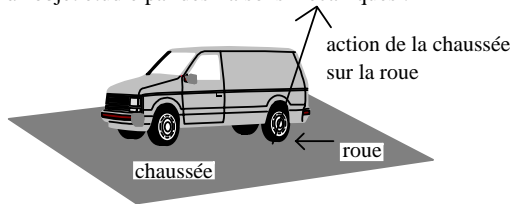


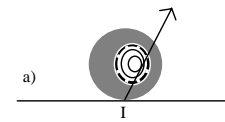
figure 3.1

par exemple, l'action de la chaussée sur les roues d'une voiture (figure 3.1), de la bielle sur le vilebrequin.

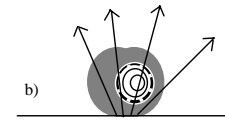
Ces actions de contact peuvent aussi être dues à la présence et au mouvement d'un fluide dans lequel l'objet est situé : poussée d'Archimède pour un poisson, résistance de l'air pour un avion, par exemple.

▪ Par ailleurs, pour un type comme pour l'autre, on peut distinguer les *actions ponctuelles*, qui s'exercent en un point précis du système, et les *actions réparties sur un volume* ou *sur une surface* (éventuellement le long d'une ligne).

Cette dernière distinction dépend en général de la modélisation géométrique du système mécanique :



Si la roue d'une voiture est schématisée par un disque indéformable, l'action de la chaussée s'exerce au point de contact I (voir figure 3.2 a).



Mais si l'on tient compte de l'écrasement du pneu, l'action est répartie sur la surface de contact (voir figure 3.2 b).

figure 3.2

2 Dimension physique d'une force

Les forces ne sont mises en évidence que par l'observation du comportement des objets sur lesquels elles s'exercent. Le Principe Fondamental de la Dynamique, tel que nous l'énoncerons au chapitre 4 dans le cas d'un point matériel de masse constante, exprime que la force totale exercée sur le point est égale au produit de la masse par l'accélération du point :

$$\vec{F} = m\vec{\Gamma}.$$

a) Equations aux dimensions

Dans une relation physique, chaque terme représente une grandeur physique d'une nature déterminée que l'on appelle sa "*dimension*" physique : une longueur, une masse, un temps.

A chaque dimension est associée conventionnellement une unité qui permet de caractériser par un nombre l'importance d'une grandeur physique ayant cette dimension.

△ Il est essentiel que, dans une équation physique, les deux membres soient de la même dimension, et que dans toute somme, les différents termes soient de même dimension entre eux.

Les principes et lois de la physique relient entre elles les diverses grandeurs de telle sorte que toutes soient fonctions de trois d'entre elles lorsque l'on se limite aux lois de la Mécanique, et d'une quatrième dans le cas de l'Electromagnétisme.

A partir des équations qui expriment ces lois, on déduit des relations entre les dimensions physiques des grandeurs qui interviennent. Ces relations sont appelées "Equations aux dimensions". Elles permettent d'exprimer la dimension d'une grandeur en fonction des dimensions de trois grandeurs de base qui, par convention, sont : la *masse*, la *longueur* et le *temps*. Les unités correspondantes sont dites "*unités fondamentales*". Dans le système international MKSA, ce sont : le *mètre* et la *seconde*, dont nous avons déjà donné les définitions, le *kilogramme*, ainsi que l'ampère comme unité de courant électrique.

Grandeur de base	Symbole	Unité
la masse	M ou [M]	kg
la longueur	L ou [L]	m
le temps	T ou [T]	s

figure 3.3

Dans le cas d'une grandeur vectorielle, c'est son module qui a une dimension physique, comme le montrent les exemples ci-après.

Exemples :

- On exprimera la dimension physique de la vitesse, grandeur qui représente un distance parcourue en un temps donné par le symbolisme :

$$[V] = [LT^{-1}],$$

ce qui correspond bien, d'après la figure 3-3 à une unité en $m.s^{-1}$.

- De même pour une accélération :

$$[Γ] = [LT^{-2}],$$

ce qui correspond bien, d'après la figure 3.3 à une unité en $m.s^{-2}$.

On peut ainsi vérifier que le second membre de l'accélération écrite au chapitre 2, est bien homogène à une accélération, les vecteurs unitaires étant sans dimension :

$$\vec{\Gamma}(M / \mathcal{R}_0) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \vec{e}_\rho + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \vec{e}_\phi$$

$$[\ddot{\rho}] = \left[\frac{d^2 \rho}{dt^2} \right] = \left[\frac{L}{T^2} \right] = [LT^{-2}], [\rho \dot{\phi}^2] = \left[\rho \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] = \left[L \left(\frac{rad}{T} \right)^2 \right] = [LT^{-2}], \text{ etc...}$$

Vérifier l'homogénéité d'une équation est essentiel. Cela ne veut pas dire que l'équation écrite est juste (elle pourrait être multipliée par un facteur sans dimension), mais cela permet de vérifier la cohérence des calculs.

Remarque : le radian est un rapport de longueurs et est donc adimensionnel.

b) Paramètres sans dimension

On a déjà rencontré des quantités adimensionnelles : les vecteurs unitaires, les angles, etc...

En général, les physiciens préfèrent écrire des équations faisant intervenir des paramètres sans dimension, ce qui permet d'obtenir ensuite des courbes valables quelle que soit la configuration du système étudié.

- Ainsi, pour étudier les modes de vibration d'un système, au lieu de représenter le déplacement x d'une particule en fonction de la pulsation ω , on préférera représenter $u = \frac{x}{x_0}$

en fonction de $v = \frac{\omega}{\omega_0}$, où x_0 est par exemple la valeur de x à l'instant $t=0$, et ω_0 la pulsation propre du mouvement. u et v sont alors des *paramètres sans dimension*.

- De même, la densité d d'un matériau est aussi un paramètre sans dimension, puisque $d = \frac{\rho}{\rho_0}$, où ρ est la masse volumique du matériau et ρ_0 celle de l'eau.

- Le nombre de Mach est aussi un paramètre sans dimension, beaucoup utilisé en aérodynamique : $\mathcal{M} = \frac{c}{c_0}$ où c est la vitesse de l'avion et c_0 la vitesse du son dans l'air.

c) Dimension d'une force - Unité de force

D'après le Principe Fondamental de la Dynamique, l'équation aux dimensions exprimant la dimension physique d'une force s'écrira :

$$\left[\vec{F} \right] = [m\vec{\Gamma}] = [MLT^{-2}] \tag{3.1}$$

L'unité correspondante en découle. Dans le système MKSA, ce sera le $kg.m.s^{-2}$. Cette unité s'appelle le newton (N) :

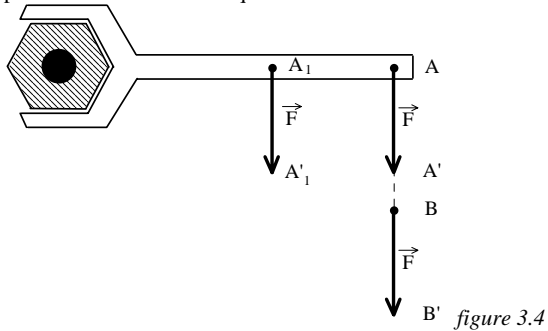
$$1 \text{ Newton} = 1 \text{ kg.m.s}^{-2} \tag{3.2}$$

II MODELISATION DES EFFORTS MECANIQUES

1 Insuffisance des vecteurs libres en mécanique

Lorsque l'on exerce un *effort* sur un objet, on peut *représenter géométriquement* cet effort par *une longueur*, proportionnelle à l'intensité de l'effort et indiquer également, par *une direction de droite orientée*, la direction et le sens dans lesquels cet effort s'exerce. Ces éléments définiraient un *vecteur libre*.

Cependant, ce vecteur libre est *insuffisant* pour représenter l'effort complètement. En effet, il convient de préciser de plus l'endroit où s'exerce cet effort, c'est-à-dire son "*point d'application*". L'exemple de la figure 3.4 du serrage d'un écrou montre bien que les efforts représentés par les deux vecteurs équipollents $\vec{AA'}$ et $\vec{A_1A'_1}$, représentant du même vecteur libre \vec{F} , n'auront pas le même effet mécanique.



On pourrait alors penser que le bon concept est celui de vecteur lié. Cependant, si au lieu d'appliquer l'effort \vec{F} au point A on l'applique au point B, par exemple au moyen d'un câble AB, l'effet de serrage sera le même que pour une application directe en A. Les deux vecteurs liés $\vec{AA'}$ et $\vec{BB'}$ ont donc un effet mécanique équivalent, mais différent de celui de $\vec{A_1A'_1}$.

Ce qui vient d'être dit découle d'une observation de la vie courante, mais il repose en réalité sur le principe même de la dynamique, que nous étudierons plus tard au chapitre 4.

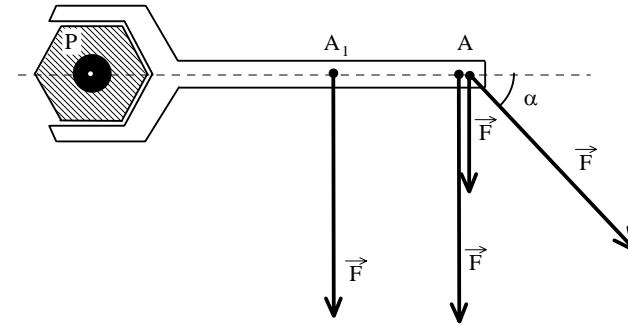
Ainsi, un effort sera représenté géométriquement par une droite orientée (la ligne d'action et le sens de l'action) et par une longueur proportionnelle à l'intensité de l'effort.

Mathématiquement, un effort \vec{F} appliqué au point A sera représenté par le glisseur (A, \vec{F}) .

Si B est un autre point de la ligne d'action, alors $(A, \vec{F}) = (B, \vec{F})$

2 Moment d'un glisseur en un point - notion de couple

Reprenons l'exemple du serrage d'un écrou. On voit bien sur l'exemple de la figure 3.5, que pour une même intensité de la force \vec{F} , le serrage ne sera pas aussi efficace selon que la ligne d'action de la force est perpendiculaire à (PA) ou pas.



Trois paramètres vont donc intervenir :

- l'*intensité* (module) de la force \vec{F} appliquée : $|\vec{F}|$.
- l'*angle* de la ligne d'action (support) de \vec{F} avec l'axe de la clé : $\alpha = (\vec{PA}, \vec{F})$. L'efficacité est maximale pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
- la *longueur de la clé* : $PA = |\vec{PA}|$.

Une mesure de l'efficacité du serrage pourra donc être donnée par le produit de ces trois quantités :

$$|\vec{PA}| |\vec{F}| \sin(\vec{PA}, \vec{F})$$

On remarque que ce produit n'est autre que le module du *produit vectoriel* $\vec{PA} \wedge \vec{F}$. Ainsi, ce produit vectoriel est appelé à jouer un rôle important dans l'appréciation de l'efficacité d'une force \vec{F} dont la ligne d'action passe par A.

Définition : Etant donné un glisseur (A, \vec{F}) et un point P de l'espace, on appelle *moment* du glisseur (A, \vec{F}) au point P le *vecteur libre* défini par le produit vectoriel :

$$\vec{\mathcal{M}}_P(A, \vec{F}) = \vec{PA} \wedge \vec{F} \quad (3.3)$$

Par ailleurs, $\forall Q \in (\Delta), \vec{\mathcal{M}}_Q(A, \vec{F}) = \vec{0}$, où (Δ) est la ligne d'action.

▪ Notion de couple :

Considérons l'action exercée sur un "tourne à gauche" (S) par son utilisateur (U) (figure 3.6).

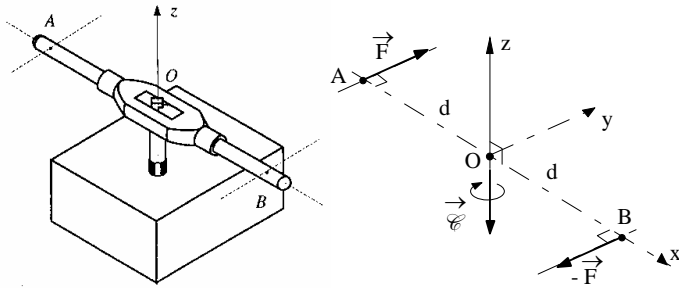


Figure 3.6

L'ensemble des forces exercées sur le système est une force nulle : $+\vec{F} - \vec{F} = \vec{0}$.

$$\circlearrowleft_{\vec{O}}(\vec{F}) + \circlearrowleft_{\vec{O}}(-\vec{F}) = \vec{OA} \wedge \vec{F} + \vec{OB} \wedge (-\vec{F})$$

$$= \begin{vmatrix} -d & 0 & d & 0 \\ 0 & \wedge & F+ & 0 \wedge \\ \mathcal{B} & 0 & \mathcal{B} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & = \\ \mathcal{B} & -dF & \mathcal{B} & -dF \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & 0 & = \\ \mathcal{B} & -dF & \mathcal{B} & -dF \end{vmatrix} = -2dF\vec{e}_z$$

On appelle ce moment un **couple**.

▪ Dimensions physiques d'un moment :

$$[\circlearrowleft] = [F][d] = \text{MLT}^{-2} \text{L}$$

L'unité d'un **moment** ou d'un **couple** est N.m

3 Représentation mathématique d'un action mécanique

Une **action mécanique** est modélisée par un **torseur**, défini par ses **éléments de réduction en un point**.

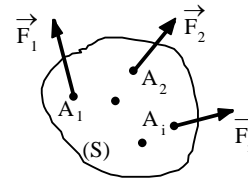


Figure 3.7

Soient n forces \vec{F}_i appliquées aux points A_i d'un solide (S) (figure 3.7). L'ensemble de ces forces est noté \mathcal{F} .

Le **torseur** des actions de \mathcal{F} sur le solide (S) est :

$$\{\mathcal{F} \rightarrow S\} = \{(A_1, \vec{F}_1), \dots, (A_n, \vec{F}_n)\}$$

avec

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{R}}(\mathcal{F} \rightarrow S) = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n, & (3.4-a) \\ \vec{\mathcal{M}}_P(\mathcal{F} \rightarrow S) = \vec{PA}_1 \wedge \vec{F}_1 + \dots + \vec{PA}_n \wedge \vec{F}_n. & (3.4-b) \end{cases}$$

Cherchons maintenant le moment au point Q du torseur des actions de \mathcal{F} sur le solide (S) en fonction du moment au point M.

Par définition, le moment au point Q du torseur des actions de \mathcal{F} sur le solide (S) est

$$\vec{\mathcal{M}}_Q(\mathcal{F} \rightarrow S) = \vec{QA}_1 \wedge \vec{F}_1 + \dots + \vec{QA}_n \wedge \vec{F}_n, \quad (3.5)$$

soit, en utilisant la relation de Chasles,

$$\vec{\mathcal{M}}_Q(\mathcal{F} \rightarrow S) = \left(\vec{QP} + \vec{PA}_1 \right) \wedge \vec{F}_1 + \dots + \left(\vec{QP} + \vec{PA}_n \right) \wedge \vec{F}_n, \quad (3.6)$$

$$\text{soit} \quad \vec{\mathcal{M}}_Q(\mathcal{F} \rightarrow S) = \underbrace{\vec{QP} \wedge (\vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n)}_{\vec{\mathcal{R}}(\mathcal{F} \rightarrow S)} + \underbrace{\vec{PA}_1 \wedge \vec{F}_1 + \dots + \vec{PA}_n \wedge \vec{F}_n}_{\vec{\mathcal{M}}_P(\mathcal{F} \rightarrow S)}. \quad (3.7)$$

Le report des expressions (3.4) du moment au point P et de la résultante du torseur des actions de \mathcal{F} sur le solide (S) dans la relation (3.7) conduit à la **formule de changement de point** :

$$\vec{\mathcal{M}}_Q(\mathcal{F} \rightarrow S) = \vec{\mathcal{M}}_P(\mathcal{F} \rightarrow S) + \vec{QP} \wedge \vec{\mathcal{R}}(\mathcal{F} \rightarrow S). \quad (3.8)$$

Notations : Dans le cas où l'on veut expliciter un torseur par sa résultante et son moment, il faudra alors préciser le **point** en lequel on calcule son moment, et l'on pourra alors noter :

$$\{\mathcal{F} \rightarrow S\} = \underset{P}{\mathcal{P}} \left\{ \vec{\mathcal{R}}(\mathcal{F} \rightarrow S), \vec{\mathcal{M}}_P(\mathcal{F} \rightarrow S) \right\}$$

Il est quelquefois commode d'expliciter les composantes de $\vec{\mathcal{R}}(\mathcal{F} \rightarrow S)$ et du moment $\vec{\mathcal{M}}_P(\mathcal{F} \rightarrow S)$ sur la **même base** \mathcal{B} . Dans ce cas, on peut employer la notation suivante :

$$\text{Si } \begin{array}{c|c} \vec{R}(\mathcal{F} \rightarrow S) & X \\ \hline & Y \text{ et} \\ & Z \end{array} \Big| \begin{array}{c} \vec{M}_P(\mathcal{F} \rightarrow S) \\ \hline M \\ \hline N \end{array} \Big| \begin{array}{c} L \\ \hline P \\ \hline \mathcal{B} \end{array} \text{ alors on peut aussi noter } \{ \mathcal{F} \rightarrow S \} = \begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$$

III EXEMPLES DE LOIS DE FORCES

1. Forces dues à la déformation des corps

Lorsqu'un objet est soumis à des actions (de contact extérieur par exemple) il ne va pas demeurer rigide mais va se déformer, se comprimer ou s'étirer suivant le sens de l'action. Si l'action n'est pas trop intense, cette déformation sera faible. Pour un grand nombre de matériaux, on pourra alors considérer que la déformation est proportionnelle à la force appliquée et que l'objet retrouve sa forme de départ lorsque l'on relâche la contrainte. Telles sont les hypothèses de l'élasticité linéaire.

Exemple : loi du ressort linéaire.

Le ressort R est schématisé sur les figures 3.8. Son extrémité O est fixe. On agit sur son extrémité mobile A. En dehors de toute action, A occupe la position A₀. La longueur du ressort est alors égale à ℓ₀. Sous l'action de la force $\vec{F} = F\vec{e}_x$ appliquée en A, le ressort se déforme : l'abscisse $x = \overline{OA}$ de l'extrémité A varie.

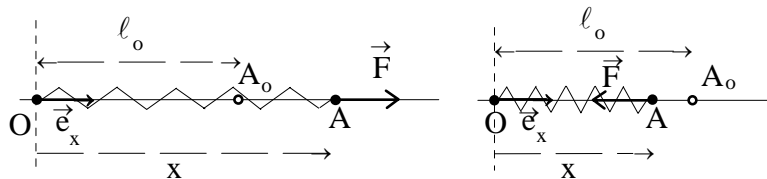


Figure 3.8-a

Figure 3.8-b

Si $F > 0$, on tire sur le ressort qui s'allonge (figure 3.8-a) : $x > \ell_0$. La proportionnalité de la force F à l'allongement $x - \ell_0 > 0$ s'exprime par une loi de la forme $F = K(x - \ell_0)$ avec $K > 0$.

Si $F < 0$, on pousse sur le ressort qui se comprime (figure 3.8-b) : $x < \ell_0$. La proportionnalité de la force $F < 0$ à l'allongement $x - \ell_0 < 0$ s'exprime encore par une loi de la forme $F = K(x - \ell_0)$ avec $K > 0$.

On voit que dans un cas comme dans l'autre, la relation entre la force appliquée au ressort et sa déformation peut s'écrire vectoriellement :

$$\vec{F} = K(x - \ell_0)\vec{e}_x \quad (K > 0) \quad (3.9)$$

La constante $K > 0$ est appelée **constante de rigidité du ressort**. Son équation aux dimensions physiques est la suivante :

$$[K] = [F]L^{-1} = MLT^{-2}L^{-1} = MT^{-2} \quad (3.10)$$

Elle s'évalue donc en kilogramme par seconde au carré.

Remarque : on s'intéresse souvent à l'action du ressort sur le système mécanique Σ qui agit sur lui, c'est-à-dire à la force $-\vec{F}$ ("principe" de l'action - réaction). On a alors la loi suivante :

$$\vec{F}(R \rightarrow \Sigma) = -K(x - \ell_0)\vec{e}_x \quad (3.11)$$

2. Interaction de gravitation

L'interaction de gravitation obéit à la **loi de Newton** dite de "**l'attraction universelle**". Cette loi, pour deux points matériels A₁ et A₂, de masses m₁ et m₂ et distants de r₁₂ s'exprime ainsi :

- la force est toujours attractive.
- son module est proportionnel à chacune des masses.
- son module est proportionnel à l'inverse du carré de la distance.

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \quad (3.12)$$

Le facteur de proportionnalité G est appelé "**constante de gravitation universelle**". Sa dimension est donnée par l'équation :

$$[MLT^{-2}] = [G] \frac{[M^2]}{[L^2]} \Rightarrow [G] = [M^{-1}L^3T^{-2}] \quad (3.13)$$

Elle s'exprime donc, dans le système MKSA, en m³.kg⁻¹.s⁻². Sa valeur est :

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \quad (3.14)$$

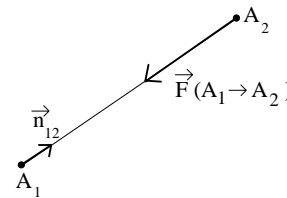


Figure 3.9

Vectoriellement, en introduisant le vecteur unitaire \vec{n}_{12} dirigé de A₁ vers A₂ (figure 3.9), on aura, pour la force d'attraction exercée par A₁ sur A₂ :

$$\begin{aligned} \vec{F}(A_1 \rightarrow A_2) &= -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{n}_{12} \\ &= -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{A}_1 A_2}{r_{12}} \end{aligned} \quad (3.15)$$

▪ Si un point matériel A, de masse m, est soumis à l'attraction de plusieurs points A_i , de masse m_i et distants de r_i de A, on aura pour l'attraction totale subie par A :

$$\vec{F}(\sum A_i \rightarrow A) = \sum_i G \frac{m m_i}{r_i^2} \vec{AA}_i = m \vec{G}_A, \quad (3.16)$$

où le vecteur \vec{G}_A ne dépend que de la position du point A par rapport aux attracteurs A_i de masse m_i . On l'appelle le "champ de gravitation" du système des points matériels A_i, m_i .

Remarque : L'équation aux dimensions physiques du champ de gravitation \vec{G}_A est la suivante :

$$[G_A] = [G][MLL^{-3}] = [M^{-1}L^3T^{-2}][ML^{-2}] = [LT^{-2}]. \quad (3.17)$$

Le champ de gravitation \vec{G}_A est donc homogène à une accélération.

3. Attraction de la Terre. Champ de la pesanteur

a) Champ de gravitation dû à un objet de volume \mathcal{V}

Lorsque l'objet attracteur n'est plus assimilable à un point matériel mais occupe un volume de l'espace, on doit décomposer ce volume en volumes élémentaires et considérer l'attraction élémentaire dont chaque élément est responsable (figure 3.10).

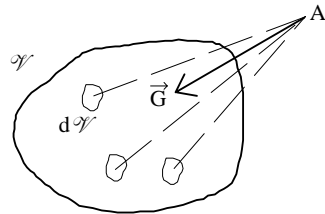


Figure 3.10

On obtient ainsi la force d'attraction totale sur un point matériel A de masse m, ou simplement le **champ de gravitation** \vec{G} dû à l'objet attracteur, en faisant la somme (intégrale triple) de ces attractions élémentaires.

Dans le cas particulier où l'attracteur est une *boule homogène*, on montre que son champ de gravitation est égal à celui d'un point matériel placé en son centre et doté de la masse totale M de la boule.

La Terre est loin d'être une boule homogène. Par contre, on peut la représenter assez fidèlement comme un emboîtement de couches sphériques homogènes. On montre que, pour un tel objet, le résultat précédent, pour la boule homogène, demeure valable.

Il convient de noter que ce résultat est valable pour un point A extérieur à la boule.

b) Champ de la pesanteur

▪ La gravitation terrestre peut donc être ramenée au champ de gravitation de sa masse totale concentrée en son centre (ce résultat n'est toutefois valable que pour les points situés à l'extérieur, ou sur la surface de la Terre).

Avec $M_T = 0,6 \times 10^{25} \text{ kg},$

on a une constante d'attraction terrestre :

$$K = GM_T = 4 \times 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \quad (3.18)$$

L'attraction ressentie par un point matériel de masse m situé à la distance r du centre de la Terre est alors égale en module à :

$$F = \frac{K m}{r^2}. \quad (3.19)$$

▪ A la surface de la Terre, dont le rayon est égal à :

$$r_T = 6,38 \times 10^6 \text{ m},$$

cette force d'attraction est égale à mg, avec :

$$g = \frac{K}{r_T^2} = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad (3.20)$$

g est appelé **accélération de la pesanteur**. En réalité, l'attraction de la Terre est légèrement compensée par la force centrifuge due à la rotation de la Terre sur elle-même, si bien que g varie des pôles à l'équateur de 9,83 à 9,78 $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

▪ A l'échelle de l'homme, et des machines qu'il utilise, la distance au centre de la Terre peut sensiblement être considérée comme constante ainsi que la direction du centre de la Terre (la verticale locale). A cette échelle, le champ vectoriel de gravitation terrestre peut donc être considéré comme constant : c'est le "champ uniforme de la pesanteur" :

$$\vec{G} = -g \vec{e}_{z_0}, \quad (3.21)$$

si \vec{e}_{z_0} est un vecteur unitaire vertical ascendant.

Dans ce champ uniforme, la force de pesanteur (le "poids") appliquée à un point matériel de masse m est donnée vectoriellement par :

$$\vec{F} = -m g \vec{e}_{z_0} . \tag{3.22}$$

Remarques : Il faut bien noter ici la différence entre "masse" et "poids".

- la masse est une grandeur intrinsèque d'un objet. Quel que soit l'endroit où se trouve l'objet, sur Terre, Mars ou Vénus, sa masse ne change pas.
- en revanche, le poids d'un objet dépend du champ de gravitation de l'objet attracteur. Ce champ n'étant pas le même partout, le poids d'un objet peut donc varier.
- de plus, la masse et le poids n'ont pas la même dimension : la première est en kilogramme, le second en newton.

▪ Poids d'un système matériel

Considérons un système matériel constitué de deux points A_1, m_1 et A_2, m_2 , soumis au champ uniforme de la pesanteur. Le système $\Sigma = \{A_1, A_2\}$ est soumis à l'ensemble de deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 , appliquées respectivement en A_1 et en A_2 et telles que :

$$\begin{cases} \vec{F}_1 = -m_1 g \vec{e}_{z_0} \\ \vec{F}_2 = -m_2 g \vec{e}_{z_0} \end{cases}$$

Ces deux forces ayant des lignes d'action parallèles, sont équivalentes à une force unique \vec{F} , verticale elle aussi. Son vecteur libre vaut :

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -(m_1 + m_2) g \vec{e}_{z_0} \tag{3.23}$$

▪ Si G est le centre de masse des deux points matériels (donc de Σ), calculons le moment résultant de ces deux forces en G :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_G \left[\left(A_1, \vec{F}_1 \right), \left(A_2, \vec{F}_2 \right) \right] &= \vec{GA}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{GA}_2 \wedge \vec{F}_2 \\ &= - \left(m_1 \vec{GA}_1 + m_2 \vec{GA}_2 \right) \wedge g \vec{e}_{z_0} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

d'après la définition de G. La ligne d'action de la force équivalente \vec{F} passe donc par G. On a donc le résultat suivant, par généralisation immédiate à un système de n points matériels, puis à un système matériel quelconque :

Les actions de pesanteur agissant sur un système matériel Σ , placé dans le champ uniforme de la pesanteur, sont réductibles à une force unique égale au poids de la masse totale du système Σ situé en son centre de masse.

4. Action de contact

a) Point mobile sur une surface

Le point M se déplace sur une surface \mathcal{S} , considérée comme un solide rigide avec lequel M est en contact.

Définitions : la **liaison** entre M et \mathcal{S} est dite **bilatérale** si M ne peut quitter la surface ; elle est dite **unilatérale** si M se trouve d'un côté de la surface et s'il peut éventuellement quitter cette surface de ce côté.

Une liaison bilatérale peut-être imaginée comme étant assurée par deux surfaces \mathcal{S} identiques parallèles et très proches qui emprisonnent le point M entre elles (exemple de deux plans sur la figure 3.11-a). Par définition d'une telle liaison, le contact entre M et \mathcal{S} est toujours assuré.

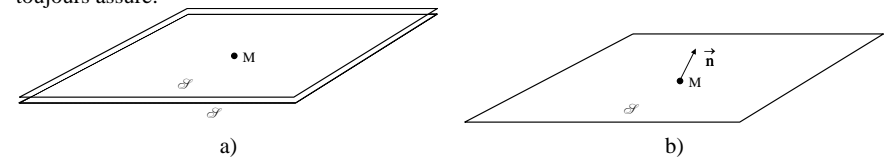


Figure 3.11 : Point M en liaison avec la surface \mathcal{S} a) liaison bilatérale, b) liaison unilatérale.

✓ Dans le cas d'une liaison unilatérale (Figure 3.11-b), si \vec{n} désigne le vecteur unitaire normal à la surface \mathcal{S} en M, dirigé vers la région de l'espace où est situé le point M, la condition assurant que le contact soit maintenu (**loi de contact**) s'écrit :

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = N > 0 , \tag{3.24}$$

où $\vec{F}(\mathcal{S} \rightarrow M) = \vec{N}(\mathcal{S} \rightarrow M) + \vec{T}(\mathcal{S} \rightarrow M)$ (3.25)

représente l'action de \mathcal{S} sur le point M.

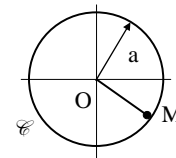


Figure 3.12 : Point M relié au point O par un fil ; liaison unilatérale

Dans le cas de la figure 3.12, le point M est astreint à se déplacer dans un plan (liaison bilatérale) dans lequel se trouve la courbe \mathcal{C} , et l'on peut envisager le cas où la liaison entre M et \mathcal{C} est unilatérale (le point M est relié au point O par un fil souple). Si la distance OM est notée r, la **loi de liaison unilatérale** se traduit par l'**inéquation**

$$r \leq a , \tag{3.26}$$

tandis que la **condition de contact** se traduit par

$$r = a . \tag{3.27}$$

✓ Dans le cas d'une liaison bilatérale, l'action de la surface peut toujours s'écrire sous la forme (3.25) mais rien ne peut être dit a priori sur le sens du vecteur force normal $\vec{N}(\mathcal{S} \rightarrow M)$.

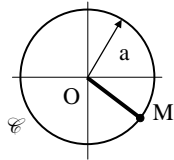


Figure 3.13 : Point M relié au point O par une tige rigide ; liaison bilatérale

Dans le cas de la figure 3.13, le point M est astreint par ailleurs à se déplacer dans un plan (liaison bilatérale) dans lequel se trouve la courbe \mathcal{C} , et le point M est relié au point O par une tige rigide. La liaison entre la courbe \mathcal{C} et le point M est donc bilatérale. Si la distance OM est notée r, la loi de liaison bilatérale se traduit par l'équation

$$r = a \quad (3.28)$$

tandis que la condition de contact se traduit, comme dans le cas de la liaison unilatérale, par

$$r = a \quad (3.29)$$

▪ Lois du frottement.

Ces lois vont s'énoncer différemment selon que le point M est mobile sur \mathcal{S} ou au repos par rapport à \mathcal{S} .

Point mobile sur \mathcal{S} : $\vec{V}(M/\mathcal{S}) \neq 0$

- première loi :

$$\vec{T}(\mathcal{S} \rightarrow M) \wedge \vec{V}(M/\mathcal{S}) = \vec{0} \quad , \quad \vec{T}(\mathcal{S} \rightarrow M) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{S}) < 0 \quad (3.30)$$

- deuxième loi :
$$\left| \vec{T}(\mathcal{S} \rightarrow M) \right| = f_d \left| \vec{N}(\mathcal{S} \rightarrow M) \right| \quad (3.31)$$

où f_d est le coefficient de frottement dynamique.

Point fixe sur \mathcal{S} : $\vec{V}(M/\mathcal{S}) = \vec{0}$

- loi unique :

$$\left| \vec{T}(\mathcal{S} \rightarrow M) \right| \leq f_s \left| \vec{N}(\mathcal{S} \rightarrow M) \right| \quad (3.32)$$

où f_s est le coefficient de frottement statique ($f_s \geq f_d$).

Remarques :

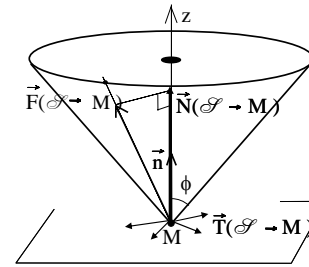


Figure 3.14

Dans les deux cas (point mobile ou point fixe sur la surface), il y a une seule composante normale $\vec{N}(\mathcal{S} \rightarrow M)$, mais une infinité de composantes tangentielles $\vec{T}(\mathcal{S} \rightarrow M)$ possibles (figure 3.14).

- En cas de mouvement, la 2ème loi (3.31) exprime que le vecteur $\vec{F}(\mathcal{S} \rightarrow M)$ est situé sur le cône de révolution (appelé **cône de frottement dynamique**) dont le sommet est le point M, dont l'axe est la normale en M à la surface et dont le demi-angle au sommet ϕ est lié au coefficient f par :

$$\text{tg } \phi_d = f_d \quad (3.33)$$

- Si le point est fixe, la loi du frottement (3.32) exprime que le vecteur $\vec{F}(\mathcal{S} \rightarrow M)$ est situé à l'intérieur d'un cône de révolution (appelé **cône de frottement statique**) dont le sommet est le point M, dont l'axe est la normale en M à la surface et dont le demi-angle au sommet ϕ est lié au coefficient f par :

$$\text{tg } \phi_s = f_s \quad (3.34)$$

Du fait que $f_s \geq f_d$, le cône de frottement statique est situé à l'extérieur du cône de frottement dynamique.

b) Point mobile sur une courbe

Le point M se déplace sur une courbe \mathcal{C} matérialisée (figure 3.15-a). En général, la notion de liaison unilatérale n'a pas de sens ici et il convient de considérer que le point ne peut quitter la courbe (anneau sur un fil rigide ou petite bille dans un tube).

Toutefois, dans le cas où le point M est astreint par ailleurs à se déplacer dans un plan (liaison bilatérale) dans lequel se trouve la courbe \mathcal{C} (figure 3.15-b), on peut envisager le cas où la liaison entre M et \mathcal{C} est unilatérale.

▪ Action de \mathcal{C} sur M.

Cette action se traduit par une force $\vec{F}(\mathcal{C} \rightarrow M)$ dont la ligne d'action passe par M. On désignera par $\vec{T}(\mathcal{C} \rightarrow M)$ et $\vec{N}(\mathcal{C} \rightarrow M)$ ses projections sur la tangente et sur le plan normal à la courbe \mathcal{C} au point M. Pour une liaison bilatérale, aucune condition n'est requise a priori sur ces vecteurs.

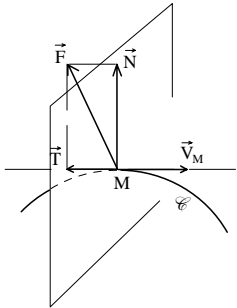


Figure 3.15-a

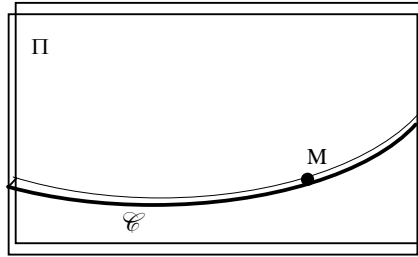


Figure 3.15-b

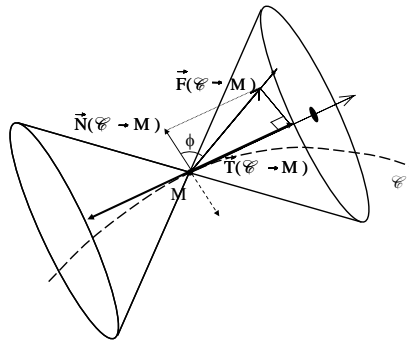


Figure 3.16

Contrairement au cas du point sur une surface, où la direction de $\vec{N}(\mathcal{S} \rightarrow M)$ est bien définie, ici, c'est la direction de $\vec{T}(\mathcal{C} \rightarrow M)$ qui est bien définie : c'est la tangente à la courbe \mathcal{C} au point M. En revanche, la normale $\vec{N}(\mathcal{C} \rightarrow M)$ n'est pas unique, et il y en a une infinité possible, ce qui conduit à un "anti-cône" de frottement (figure 3.16).

▪ Lois du frottement.

Elles s'écrivent dans ce cas de la manière suivante :

- si le point M est mobile sur \mathcal{C} : $\vec{V}(M/\mathcal{C}) \neq \vec{0}$

$$\vec{T}(\mathcal{C} \rightarrow M) \cdot \vec{V}(M/\mathcal{C}) < 0 \quad , \quad \left| \vec{T}(\mathcal{C} \rightarrow M) \right| = f \left| \vec{N}(\mathcal{C} \rightarrow M) \right| \quad (3.35)$$

- si le point M est fixe sur \mathcal{C} : $\vec{V}(M/\mathcal{C}) = \vec{0}$

$$\left| \vec{T}(\mathcal{C} \rightarrow M) \right| \leq f \left| \vec{N}(\mathcal{C} \rightarrow M) \right| \quad (3.36)$$

Remarque : en mécanique du solide, les lois de Coulomb font intervenir la vitesse de glissement d'un solide sur un autre. Cette vitesse s'identifie, en mécanique du point, à la vitesse du point.