

COURS DE MECANIQUE

2^{ème} année

Catherine POTEL, Philippe GATIGNOL

A noter que la numérotation des paragraphes adoptée ici est calquée sur celle du cours oral afin de faciliter le suivi du cours magistral, mais ne répond pas aux normes de présentation usuelles d'un document écrit.

**Chapitre 3.
STATIQUE DES SYSTEMES MECANIQUES**

Université du Maine - UFR Sciences et Techniques

I PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE (PFS)

1 Actions exercées sur un système mécanique

Définition : On appellera **système mécanique** ou encore **système matériel** un ensemble d'objets parfaitement identifiés, pouvant être liés entre eux ou non, rigides ou déformables, massiques ou de masse négligeable.

Dans un problème de statique, la masse du système n'intervient que dans l'expression des forces dues à l'attraction newtonienne (attraction terrestre par exemple).

a) Actions extérieures s'exerçant sur un système

Un système mécanique Σ non isolé est l'objet d'actions exercées sur lui par son environnement. Il peut s'agir d'actions de contact ou d'actions à distance exercées par les objets ne faisant pas partie du système.

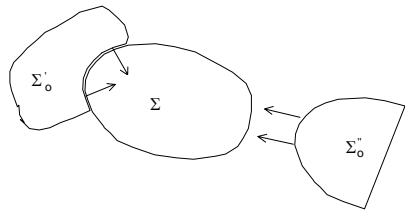


Figure 3.1

Les actions de contact sont dues en général à des actions mécaniques, ponctuelles ou surfaciques (pivot, rotule, glissière) du système Σ avec des objets de son environnement immédiat. Les actions à distance peuvent provenir d'objets plus lointains (soleil, lune). Sur la figure 3.1, les objets d'indices o ne font pas partie du système Σ ; ils lui sont **extérieurs**.

b) Système et sous-systèmes - Actions intérieures

Un système mécanique Σ est en général constitué de plusieurs objets ou ensembles d'objets pouvant être individuellement considérés comme des systèmes mécaniques. Ce sont alors pour Σ des sous-systèmes : $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$. Ceux-ci exercent entre eux des actions de contact (dus aux liaisons mécaniques entre les objets) ou à distance (exemple : les actions entre les astres du système solaire).

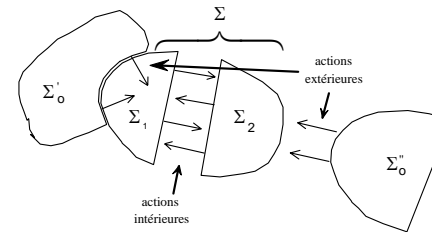


Figure 3.2

On doit donc distinguer, lorsque l'on considère un système Σ bien identifié, deux types d'actions (qu'elles soient de contact ou à distance, ponctuelles ou réparties, selon les définitions du chapitre 2) :

- les actions extérieures à Σ , exercées sur Σ (c'est-à-dire sur l'un ou plusieurs de ses constituants) par des objets n'appartenant pas à Σ .
- les actions intérieures à Σ , exercées sur tel constituant de Σ par tel autre constituant de Σ .

Remarque fondamentale : la qualification d'intérieure ou d'extérieure pour une action est relative à un système mécanique bien déterminé. Sur la figure 3.2, les actions intérieures et extérieures indiquées s'entendent relativement au système Σ . Mais les actions de Σ_2 sur Σ_1 , intérieures à Σ , sont extérieures à Σ_1 .

Exemple :

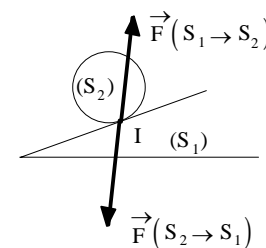


figure 3.3

$$\Sigma = S_1 + S_2$$

Les forces $\vec{F}(S_1 \rightarrow S_2)$ et $\vec{F}(S_2 \rightarrow S_1)$ qui sont opposées, sont des forces **intérieures** à Σ , MAIS $\vec{F}(S_1 \rightarrow S_2)$ est une force **extérieure** à S_2 .

2 Enoncé du principe fondamental de la statique

a) Repos et équilibre

Définition 1 : Un système mécanique Σ est dit au **repos par rapport à un repère** \mathcal{R}_o et à un instant donné t , si les vitesses de tous les points de Σ par rapport à \mathcal{R}_o sont nulles à cet instant.

Définition 2 : Un système mécanique Σ est dit en **équilibre par rapport à un repère** \mathcal{R}_o s'il est au repos par rapport à \mathcal{R}_o à tout instant.

b) Enoncé du principe

Les notions de repos et d'équilibre d'un système mécanique sont donc relatives à un repère donné. L'objet du Principe Fondamental de la Statique (PFS) est de caractériser les actions exercées sur un système mécanique lorsque celui-ci est en équilibre.

Ce principe présente comme le PFD **trois caractéristiques essentielles** :

- Il fait référence exclusivement à des repères d'observation (de l'équilibre dans le cas présent) privilégiés appelés **repères galiléens** dont il postule l'existence.
- Il ne fait intervenir que les **forces extérieures** appliquées au système mécanique considéré.
- Il ne fait intervenir ces forces extérieures que par leur **torseur associé**.

Le principe s'énonce ainsi :

Principe Fondamental de la Statique : Il existe des repères de l'espace, appelés repères galiléens, tels que si un système mécanique Σ est en équilibre par rapport à un tel repère, alors le torseur associé aux actions extérieures exercées sur le système Σ soit égal au torseur nul.

c'est-à-dire :

$$\{\text{ext} \rightarrow \Sigma\} = \mathcal{O} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \vec{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow \Sigma) = \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_p(\text{ext} \rightarrow \Sigma) = \vec{0} \end{cases} \quad (3.1)$$

II RESOLUTION D'UN PROBLEME DE STATIQUE

Un problème de statique consiste en la détermination des actions qui s'exercent sur un système mécanique supposé en équilibre galiléen. On en déduit alors, éventuellement, des conditions nécessaires pour que l'équilibre soit possible. Pour résoudre un problème de statique, on doit suivre la démarche ci-dessous :

- Afin de ne pas oublier d'équations, il faut s'efforcer de respecter un plan d'étude systématique :

- Identifier le système mécanique qui fait l'objet de l'étude.
- Identifier les objets extérieurs à ce système qui exercent une action mécanique (de contact ou à distance) sur lui. Par exemple, l'action de la Terre (pesanteur ou attraction) est-elle prise en compte ?
- En déduire l'inventaire des actions extérieures exercées sur le système et analyser les propriétés a priori de ces actions (lois physiques des forces mises en jeu telles qu'elles ont été énoncées au chapitre 2). Par exemple, écrire les propriétés des actions résultant d'une liaison sans frottement. Une bonne habitude à prendre est d'écrire à la fois la force et son point d'application, ce qui revient par exemple à noter (A, \vec{F}) .
- Identifier, le cas échéant, les divers constituants du système étudié et faire alors l'inventaire des interactions entre ces constituants (liaisons mécaniques, actions à distance). Analyser les propriétés a priori de ces actions.
- Appliquer le PFS et en profiter pour comparer le nombre d'équations dont on dispose avec le nombre d'inconnues du problème.

- Pour un problème dans l'espace,

- 1 force inconnue \Leftrightarrow 3 inconnues : composantes sur une base de l'espace.
- PFS \Leftrightarrow 6 équations : 3 pour la résultante et 3 pour les moments.

- Pour un problème plan,

- 1 force inconnue \Leftrightarrow 2 inconnues : composantes sur une base de l'espace.
- PFS \Leftrightarrow 3 équations : 2 pour la résultante et 1 pour les moments.

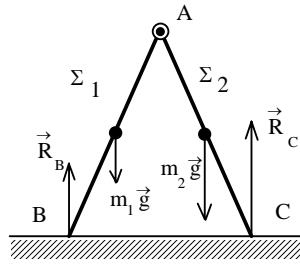


Figure 3.4

Remarque : Il peut paraître superflu d'analyser ainsi des actions qui sont intérieures au système Σ , dans le but d'étudier son équilibre, puisque le PFS ne fait intervenir que les actions extérieures à Σ . Mais il suffit de considérer un exemple très simple pour se convaincre du fait que la nature des forces de liaison intérieures au système est déterminante pour ce qui est de son équilibre. Ainsi, sur la figure 3.4, une échelle double, pesante, repose sur un plancher

horizontal où ses contacts sont supposés sans frottement. Selon la nature de la liaison pivot de centre A, sommet de l'échelle, l'équilibre sera possible ou non. Par exemple, si cette liaison est elle aussi sans frottement, l'équilibre ne sera possible que si l'échelle est totalement en position horizontale. Au contraire, si la liaison en A est bloquée, l'équilibre sera toujours possible.

Il faudra, par exemple, appliquer le PFS au système total Σ , puis rendre la liaison en A extérieure en ne considérant que la partie Σ_1 de l'échelle. On appliquera ainsi, dans cet exemple, deux fois le PFS.

▪ La règle générale est la suivante :

Règle : *appliquer le PFS autant de fois qu'il y a de constituants solides (indéformables) dans le système, en veillant à ce que chacune des liaisons intérieures au système total Σ soit rendue au moins une fois extérieure dans l'application du PFS aux systèmes partiels.*

Dans l'exemple ci-dessus, on a le choix entre trois stratégies :

- PFS pour Σ et Σ_1
- PFS pour Σ et Σ_2
- PFS pour Σ_1 et Σ_2 .

Lorsqu'un système est constitué d'une chaîne de solides liés entre eux, la stratégie la plus simple est souvent la suivante (par exemple pour quatre constituants dont le premier Σ_1 serait relié à un bâti extérieur) :

- PFS pour Σ_4 , pour (Σ_3, Σ_4) , pour $(\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4)$ et pour $(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4)$.

On vérifie ici que toutes les liaisons entre constituants sont rendues chacune au moins une fois extérieure au système partiel.