

A noter que la numérotation des paragraphes adoptée ici est calquée sur celle du cours oral afin de faciliter le suivi du cours magistral, mais ne répond pas aux normes de présentation usuelles d'un document écrit.

## **COURS DE MECANIQUE - VIBRATIONS**

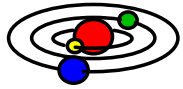
1ère année

Catherine POTEL, Philippe GATIGNOL

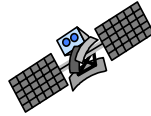
### **Chapitre 4. DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL**

Université du Maine - UFR Sciences et Techniques

Les points importants de ce chapitre sont :



L'énoncé du Principe Fondamental de la Dynamique  
Les méthodes d'étude des mouvements (exemples)



**I PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE POUR LE POINT MATERIEL**

**1. Enoncé du principe**

a) Forces appliquées

L'approximation du point matériel A revient à assimiler le système matériel étudié à un point géométrique A, auquel est affectée la masse totale m du système. Cette approximation fait en général référence à la valeur d'un nombre sans dimension, rapport de la dimension géométrique de l'objet à une longueur de comparaison (rapport de la dimension d'un obus par rapport à sa portée, rapport entre le rayon de la Terre à sa distance au Soleil par exemple).

Toutes les forces extérieures appliquées au système, dans cette approximation, ont alors leurs lignes d'action qui passent par A. Leur moment au point A est nul et leur ensemble est équivalent à un glisseur dont le support passe par A :

$$\{\text{ext} \rightarrow A\} = (A, \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow A}) \tag{4.1}$$

Remarquons en outre que s'il existait à l'origine des forces intérieures à l'objet, celles-ci n'ont plus de signification dans l'approximation du point matériel. C'est pourquoi la précision "extérieures" pour qualifier les forces ci-dessus est superflue. On parle plus couramment des forces appliquées au point A, que l'on notera souvent plus simplement  $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow A}$ .

b) Repères galiléens

Le principe fondamental de la dynamique, dont nous allons énoncer la forme particulière pour le point matériel, stipule l'existence de repères privilégiés dans l'espace physique (univers) appelés *repères galiléens*.

On considère alors un point matériel A en mouvement par rapport à un tel repère que nous désignerons par  $\mathcal{R}_0$ . On définit en particulier l'accélération de A par rapport à  $\mathcal{R}_0$ , encore appelée *accélération galiléenne* :

$$\vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_0) \tag{4.2}$$

c) Enoncé du Principe Fondamental

*Principe Fondamental de la Dynamique du point matériel* : Si un point matériel A, de masse m, est en mouvement par rapport à un repère galiléen  $\mathcal{R}_0$ , la somme des forces (extérieures) appliquées au point A est égale au produit de la masse m du point par l'accélération galiléenne du point :

$$m \vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_0) = \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow A} \quad \text{soit} \quad m \vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_0) = \vec{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow A) \tag{4.3}$$

*Remarque* : En réalité, le principe définit par lui-même le concept de masse. Il peut s'énoncer en disant que  $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow A}$  et  $\vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_0)$  sont colinéaires, le facteur de proportionnalité ne dépendant que du point A et ayant une valeur positive, la masse.

On a vu par ailleurs qu'à chaque force appliquée à A on peut associer un glisseur dont le support passe par A, et à l'ensemble des forces appliquées à A, le glisseur unique équivalent à la somme de tous ces glisseurs :  $(A, \vec{F})$ .

Il est alors logique de considérer également le glisseur  $[A, m \vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_0)]$ , appelé *glisseur dynamique*. Le PFD du point A, lorsque  $\mathcal{R}_0$  est galiléen, peut alors s'exprimer par l'égalité des glisseurs :

$$[A, m \vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_0)] = (A, \vec{F}) \tag{4.4}$$

L'égalité des vecteurs libres redonne l'énoncé classique donné par l'équation (4.3).

L'égalité des moments en un point K ne donne aucune information supplémentaire. En effet, si l'on choisit  $K \equiv A$ , on obtient trivialement :

$$\vec{0} = \vec{0}$$

De la même manière que précédemment, on introduit le *moment dynamique* du point matériel A, pris au point K :

$$\vec{\delta}_K(A / \mathcal{R}_0) = \vec{K}A \wedge m \vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_0) \tag{4.5}$$

Dans le cas où la masse m est variable, ce moment dynamique devient :

$$\vec{\delta}_K(A / \mathcal{R}_0) = \vec{K}A \wedge \left( \frac{d[m \vec{V}(A / \mathcal{R}_0)]}{dt} \right) / \mathcal{B}_0 \tag{4.6}$$

L'exemple du pendule circulaire (§ III) montrera l'importance du moment dynamique.

On peut finalement définir le torseur dynamique du point A par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$ , noté  $\mathcal{D}(A/\mathcal{R}_0)$ , par :

$$\mathcal{D}(A/\mathcal{R}_0) \left\{ \begin{array}{l} \vec{d}(A/\mathcal{R}_0) = m\vec{\Gamma}(A/\mathcal{R}_0), \\ \vec{\delta}_K(A/\mathcal{R}_0) = \overline{KA} \wedge m\vec{\Gamma}(A/\mathcal{R}_0), \end{array} \right. \quad (4.7-a)$$

$$(4.7-b)$$

où  $\vec{d}(A/\mathcal{R}_0)$  et  $\vec{\delta}_K(A/\mathcal{R}_0)$  sont respectivement la résultante et le moment au point K du torseur dynamique  $\mathcal{D}(A/\mathcal{R}_0)$ .

Le Principe Fondamental de la Dynamique s'énonce alors de la manière suivante :

Il existe un repère privilégié, appelé repère galiléen, soit  $\mathcal{R}_0$ , tel que pour tout système matériel  $\Sigma$ , en général en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$ , le torseur dynamique du point A par rapport à  $\mathcal{R}_0$  soit égal au torseur des forces extérieures exercées sur A, soit  $\mathcal{D}(A/\mathcal{R}_0) = \{\text{ext} \rightarrow A\}$ . (4.8)

Cette égalité (ou équivalence) entre torseurs se traduit par l'égalité des résultantes :

$$\vec{d}(A/\mathcal{R}_0) = \overline{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow A), \quad (4.9)$$

et par l'égalité des moments en un point K :

$$\vec{\delta}_K(A/\mathcal{R}_0) = \overline{\mathcal{N}}_K(\text{ext} \rightarrow A). \quad (4.10)$$

## 2. Retour sur les repères galiléens, invariance galiléenne

❖ Le PFD postule l'existence dans l'Univers d'au moins un repère  $\mathcal{R}_0$  dans lequel l'énoncé du principe est valable. Préciser la position d'un tel repère dans l'espace cosmique n'est pas chose facile. Dans la réalité, on considère toujours des repères qui ne sont galiléens que de manière approchée.

La définition du repère galiléen dans lequel on considère le PFD comme valable dépend en réalité de l'échelle du problème considéré :

- Pour un problème de dynamique concernant un système mécanique à l'échelle de l'homme (machine, véhicule, ...) un repère lié à la Terre locale (au sol ou à la pièce) est suffisant. Ce faisant, on néglige des mouvements tels que la rotation de la Terre.

- Pour des problèmes terrestres à plus grande échelle, on ne peut plus négliger cette rotation. On prendra alors un repère dont l'origine est au centre de la Terre et dont les axes ont des directions fixes par rapport aux étoiles. Cependant, on néglige encore dans ce cas le mouvement (elliptique) de la Terre autour du Soleil.

- L'étude du mouvement des planètes dans le système solaire se fait sur la base d'un repère dont l'origine est au centre de masse du système solaire (pratiquement le centre du Soleil) et dont les axes ont des directions fixes par rapport aux étoiles.

- A des échelles plus grandes (galaxie, cosmos), on sort pratiquement du domaine de la Mécanique classique en raison des très grandes vitesses mises en jeu, et chercher à définir des repères galiléens n'a plus grand intérêt.

### ❖ Invariance galiléenne

**Théorème :** Lorsque, pour un problème donné, un repère  $\mathcal{R}_0$  peut être considéré comme galiléen, il lui correspond une **infinité de repères**, mobiles par rapport à  $\mathcal{R}_0$ , qui peuvent eux aussi être considérés comme galiléens, avec la même approximation. Ce sont tous les repères animés d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}_0$ .

Démonstration :

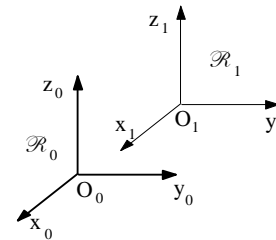


figure 4.1

▪ Soit  $\mathcal{R}_1 = (O_1, \mathcal{B}_1)$ , un repère animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}_0 = (O_0, \mathcal{B}_0)$ . La base  $\mathcal{B}_1$  du repère  $\mathcal{R}_1$  peut être choisie de telle sorte qu'elle coïncide constamment avec la base  $\mathcal{B}_0$  de  $\mathcal{R}_0$  (figure 4.1).

▪ Tous les points liés à  $\mathcal{R}_1$  ont même vitesse, à chaque instant, par exemple celle de  $O_1$ .

La translation étant *rectiligne uniforme*, le vecteur  $\vec{V}(O_1/\mathcal{R}_0)$  est *constant* au cours du temps.

▪ Considérons alors un système matériel quelconque  $\Sigma$ . Soit  $A_i$  l'un de ses points de masse  $m_i$ . Par composition des vitesses, on peut écrire :

$$\vec{V}(A_i/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(A_i/\mathcal{R}_1) + \vec{V}(O_1/\mathcal{R}_0) \quad (4.11)$$

Pour les accélérations, en dérivant par rapport au temps et par rapport à la base  $\mathcal{B}_0 \equiv \mathcal{B}_1$  :

$$\vec{\Gamma}(A_i/\mathcal{R}_0) = \vec{\Gamma}(A_i/\mathcal{R}_1) + \vec{\Gamma}(O_1/\mathcal{R}_0). \quad (4.13)$$

Or le vecteur  $\vec{V}(O_1 / \mathcal{R}_0)$  est *constant* au cours du temps, donc on obtient :

$$\vec{\Gamma}(A_i / \mathcal{R}_0) = \vec{\Gamma}(A_i / \mathcal{R}_1). \quad (4.14)$$

Par suite, pour le système matériel  $\Sigma$ , on a égalité des deux torseurs dynamiques :

$$\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_1). \quad (4.15)$$

▪ Si  $\mathcal{R}_0$  est galiléen, on a par ailleurs, d'après le PFD :

$$\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \overline{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow \Sigma). \quad (4.16)$$

Il en résulte que  $\mathcal{R}_1$  est tel que pour tout système matériel  $\Sigma$  on ait l'égalité :

$$\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_1) = \overline{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow \Sigma), \quad (4.17)$$

et par suite  $\mathcal{R}_1$  est lui-même galiléen.

Nous allons voir à présent un certain nombre de conséquences du PFD qui pourraient chacune s'énoncer comme un théorème, puisque démontrables à partir du PFD, mais auxquelles nous conserverons tout de même le nom (historique) de *Principes*.

### 3. Principe de l'action-réaction

Considérons deux systèmes matériels  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  en mouvement par rapport à un repère galiléen  $\mathcal{R}_0$ , et désignons par  $\Sigma$  le système total :

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \quad (4.18)$$

On a, pour les torseurs dynamiques, l'égalité suivante :

$$\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \mathcal{D}(\Sigma_1 / \mathcal{R}_0) + \mathcal{D}(\Sigma_2 / \mathcal{R}_0). \quad (4.19)$$

❖ Par ailleurs, les actions mises en jeu sont de deux sortes :

- les actions extérieures au système total  $\Sigma$ , qui s'appliquent soit à  $\Sigma_1$ , soit à  $\Sigma_2$ ,
- les actions mutuelles des systèmes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ .

▪ Pour les premières, on a l'égalité suivante entre les torseurs associés :

$$\{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma\} = \{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma_1\} + \{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma_2\} \quad (4.20)$$

où la notation  $\text{ext}_{/\Sigma}$  précise que les actions considérées sont extérieures relativement à  $\Sigma$ .

▪ Les actions exercées sur  $\Sigma_1$ , extérieures à  $\Sigma_1$ , sont quant à elles constituées des actions provenant de l'extérieur de  $\Sigma$  et de l'action de l'autre constituant  $\Sigma_2$ . On a ainsi l'égalité :

$$\{\text{ext}_{/\Sigma_1} \rightarrow \Sigma_1\} = \{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma_1\} + \{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1\}, \quad (4.21)$$

et de même pour  $\Sigma_2$  :

$$\{\text{ext}_{/\Sigma_2} \rightarrow \Sigma_2\} = \{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma_2\} + \{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2\} \quad (4.22)$$

❖ Appliquons à présent le PFD à chacun des systèmes  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  et  $\Sigma$ , le repère  $\mathcal{R}_0$  étant galiléen :

$$\mathcal{D}(\Sigma_1 / \mathcal{R}_0) = \{\text{ext}_{/\Sigma_1} \rightarrow \Sigma_1\} \quad (4.23)$$

$$\mathcal{D}(\Sigma_2 / \mathcal{R}_0) = \{\text{ext}_{/\Sigma_2} \rightarrow \Sigma_2\} \quad (4.24)$$

$$\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma\} \quad (4.25)$$

De l'égalité (4.19) entre les torseurs dynamiques, on déduit alors l'égalité suivante :

$$\{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma\} = \{\text{ext}_{/\Sigma_1} \rightarrow \Sigma_1\} + \{\text{ext}_{/\Sigma_2} \rightarrow \Sigma_2\}. \quad (4.26)$$

A l'aide des équations (4.21) et (4.22), on écrit ensuite :

$$\{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma\} = \{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma_1\} + \{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1\} + \{\text{ext}_{/\Sigma} \rightarrow \Sigma_2\} + \{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2\},$$

ce qui conduit, d'après l'équation (4.20), à :

$$\mathcal{O} = \{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1\} + \{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2\},$$

soit finalement :

$$\{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1\} = -\{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2\}. \quad (4.27)$$

On est ainsi conduit à l'énoncé suivant :

*Principe : Les actions d'un système mécanique  $\Sigma_1$  sur un autre système mécanique  $\Sigma_2$  sont opposées aux actions du système  $\Sigma_2$  sur le système  $\Sigma_1$ , en ce sens que les torseurs correspondants sont opposés.*

### 4. Principe fondamental de la statique

#### a) Repos et équilibre

*Définition 1 : Un système mécanique  $\Sigma$  est dit au repos par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0$  et à un instant donné  $t$ , si les vitesses de tous les points de  $\Sigma$  par rapport à  $\mathcal{R}_0$  sont nulles à cet instant.*

*Définition 2 : Un système mécanique  $\Sigma$  est dit en équilibre par rapport à un repère  $\mathcal{R}_0$  s'il est au repos par rapport à  $\mathcal{R}_0$  à tout instant.*

b) Enoncé du principe

Les notions de repos et d'équilibre d'un système mécanique sont donc relatives à un repère donné. L'objet du Principe Fondamental de la Statique (PFS) est de caractériser les actions exercées sur un système mécanique lorsque celui-ci est en équilibre.

Si un système matériel  $\Sigma$  est au repos à tout instant par rapport à un repère galiléen  $\mathcal{R}_0$  (donc en équilibre par rapport à  $\mathcal{R}_0$ ), les vitesses de ses points constitutifs étant constamment nulles, il en est de même de leurs accélérations. On a donc :

$$\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \mathcal{O}. \tag{4.28}$$

$\mathcal{R}_0$  étant galiléen, le PFD s'applique et conduit, dans ce cas à l'égalité :

$$\{\text{ext} \rightarrow \Sigma\} = \mathcal{O}. \tag{4.29}$$

soit

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow \Sigma) = \vec{0}, \\ \overline{\mathcal{M}}_P(\text{ext} \rightarrow \Sigma) = \vec{0}. \end{cases} \tag{4.30-a}$$

$$\tag{4.30-b}$$

**Remarque :** La condition (4.29) est une condition nécessaire d'équilibre. Ce n'est pas une condition suffisante. En effet, l'étude de l'invariance galiléenne a montré que tout repère  $\mathcal{R}_1$  en translation rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}_0$  est lui-même galiléen. Or  $\Sigma$  ne saurait être en équilibre vis-à-vis de chacun d'eux. On verra même qu'un système ne subissant aucune action extérieure peut être animé d'un mouvement plus complexe incluant des rotations.

Le principe s'énonce ainsi :

**Principe Fondamental de la Statique :** *Il existe des repères de l'espace, appelés repères galiléens, tels que si un système mécanique  $\Sigma$  est en équilibre par rapport à un tel repère, alors le torseur associé aux actions extérieures exercées sur le système  $\Sigma$  soit égal au torseur nul.*

II **EXEMPLES DE MOUVEMENTS RECTILIGNES**

1. **Mouvement vertical du point pesant**

a) **Mouvement vertical du point pesant dans le vide**

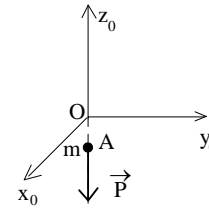


Figure 4.2

A  $t = 0$ , le point A est situé en O et  $\vec{V}(A / \mathcal{R}_0) = v_0 \vec{e}_{z_0}$  (figure 4.2). Le repère  $\mathcal{R}_0 = (O ; x_0, y_0, z_0) = (O ; \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$  est supposé galiléen.

❖ **Système étudié :** {le point A}

❖ **Inventaire des forces :**

Le point A n'est soumis qu'à son poids :  $\vec{P} = -mg \vec{e}_{z_0}$ .

❖ Le PFD pour le mouvement de A s'écrit :

$$m\vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_0) = -mg \vec{e}_{z_0}. \tag{4.31}$$

Or  $\overline{OA} = z(t)\vec{e}_{z_0}$ , donc  $\vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_0) = \ddot{z}(t)\vec{e}_{z_0}$ . Par suite, en projection sur  $\vec{e}_{z_0}$ , l'équation (4.31)

s'écrit :  $m\ddot{z} = -mg$ ,

ce qui implique

$$\ddot{z} = -g. \tag{4.32}$$

❖ Les conditions initiales sont les suivantes :  $z(0) = 0$  ,  $\dot{z}(0) = v_0$ .

L'équation (4.32) s'intègre alors deux fois en t :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -gt + v_0 \\ z &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t \end{aligned} \tag{4.33}$$

❖ Etude du mouvement.

On a déjà étudié le mouvement correspondant au chapitre 2 en cinématique du point (§ II.3).

Par exemple, si  $v_0 > 0$ , le point monte jusqu'à l'instant  $t_r$  :

$$t_r = \frac{v_0}{g} \Rightarrow z_r = \frac{v_0^2}{2g}$$

à partir duquel il rebrousse chemin pour chuter indéfiniment.

**Remarque :** Dans le chapitre de cinématique, le mouvement était défini a priori (mouvement uniformément varié par exemple), et on ne s'occupait pas de la cause du mouvement. Ici, dans ce chapitre, la cause du mouvement est connue, et, par application du PFD, on en déduit que le mouvement est uniformément varié.

b) Mouvement vertical du point pesant dans l'eau

On néglige pour l'instant les effets de la viscosité du fluide. Pour préciser la poussée d'Archimède qui s'exerce sur le point, il faut revenir sur la modélisation géométrique du système dont le point A n'est qu'une approximation, et considérer un corps homogène de volume  $\nu$ , de dimensions quelconques.

❖ Système étudié : {le point A de volume  $\nu$  et de masse volumique  $\rho$ }

❖ Inventaire des forces :

- poids :  $\vec{P} = -m g \vec{e}_{z_0} = -\rho \nu g \vec{e}_{z_0}$ .
- poussée d'Archimède :  $\vec{P}_A = \rho_0 \nu g \vec{e}_{z_0}$  où  $\rho_0$  est la masse volumique de l'eau.

❖ Le PFD pour le mouvement de A s'écrit :

$$m \vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_0) = -\rho \nu g \vec{e}_{z_0} + \rho_0 \nu g \vec{e}_{z_0}. \quad (4.34)$$

avec  $m = \rho \nu$

On obtient donc, en projetant sur  $\vec{e}_{z_0}$  :  $\rho \nu \ddot{z} = \rho \nu \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) g$

soit :  $\ddot{z} = \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) g. \quad (4.35)$

Si  $\rho < \rho_0$  (corps plus léger que l'eau), alors  $\ddot{z} > 0$  : le corps finit par monter, suivant le signe de  $\dot{z}(0) = v_0$ .

Si  $\rho > \rho_0$  (corps plus lourd que l'eau), alors  $\ddot{z} < 0$  : le corps finit par tomber, suivant le signe de  $\dot{z}(0) = v_0$ .

2. Chute d'un corps avec résistance de l'air

Pour étudier la chute d'un corps dans l'air, on peut souvent, si le corps est assez dense, négliger la poussée d'Archimède. Par contre, dans la mesure où les vitesses peuvent devenir assez grandes, il y a lieu de tenir compte de la résistance de l'air, due à la viscosité.

▪ Pour des vitesses pas trop grandes, cette résistance peut être considérée comme proportionnelle, en module, à la vitesse. Vectoriellement, la loi physique à laquelle obéit cette action est représentée par une force appliquée au point matériel et de sens opposé à celui du vecteur vitesse :

$$\vec{F}_r = -K \eta \vec{V}, \quad (4.36)$$

où  $\eta$  est la viscosité du fluide,  $K$  un coefficient dont la valeur dépend de la forme réelle du corps. Ainsi, pour une sphère de rayon  $a$ , la loi de Stokes donne :

$$K = 6 \pi a \quad (4.37)$$

▪ Pour des vitesses plus élevées, les effets de turbulence interviennent et la résistance en est accrue. On admet alors classiquement que son module est proportionnel au carré de la vitesse et l'on écrit la loi sous la forme :

$$|\vec{F}_r| = \frac{1}{2} C_x \rho S \vec{V}^2 \quad (4.38)$$

avec :

$\rho$  : masse volumique du fluide

$S$  : surface du corps projetée sur un plan perpendiculaire à la direction d'avancement.

$C_x$  : coefficient de traînée sans dimension. Il dépend de la forme du corps.

▪ Etudions maintenant la chute d'un corps avec résistance de l'air proportionnelle à la vitesse.

A  $t = 0$ , le point A est situé en O et  $\vec{V}(A / \mathcal{R}_0) = \vec{0}$ .

❖ Système étudié : {le point A }

❖ Inventaire des forces :

- poids :  $\vec{P} = -m g \vec{e}_{z_0}$ .
- résistance de l'air :  $\vec{F}_r = -K \eta v \vec{e}_{z_0}$  où  $v = \dot{z}$ .

❖ Le PFD pour le mouvement de A s'écrit :

$$m \vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_0) = -m g \vec{e}_{z_0} - K \eta v \vec{e}_{z_0}. \quad (4.39)$$

ce qui conduit à l'équation différentielle suivante :

$$m \ddot{z} + K \eta \dot{z} = -m g, \quad (4.40)$$

qui peut s'exprimer comme un équation différentielle pour la fonction inconnue  $v(t) = \dot{z}$  :

$$m \dot{v} + K \eta v = -m g. \quad (4.41)$$

a) Résolution de l'équation du mouvement

La solution générale d'une équation telle que (4.41) est obtenue par la méthode classique suivante. On cherche la solution sous la forme :

$$v(t) = v_p + u(t),$$

soit explicitement :

$$\underbrace{\text{solution générale}}_{v(t)} = \underbrace{\text{solution particulière}}_{v_p} + \underbrace{\text{solution générale de l'équation sans second membre}}_{u(t)}$$

▪ Une solution particulière  $v = \text{constante}$  apparaît ici immédiatement :

$$v_p = -\frac{mg}{K\eta} \quad (4.42)$$

▪ On obtient  $u(t)$  par l'équation suivante :

$$m \dot{u} + K\eta u = 0, \quad (4.43)$$

soit encore :

$$\dot{u} = -\frac{K\eta}{m} u. \quad (4.44)$$

Toute solution de cette équation est proportionnelle à l'une d'entre elles. Or, l'exponentielle  $e^{-\frac{K\eta}{m}t}$  possède la propriété de relation avec sa dérivée exprimée par l'équation 4.44). Cette dernière a donc pour solution générale :

$$u = \lambda e^{-\frac{K\eta}{m}t}, \quad (4.45)$$

et pour l'équation en  $v$  :

$$v(t) = -\frac{mg}{K\eta} + \lambda e^{-\frac{K\eta}{m}t}. \quad (4.46)$$

La constante  $\lambda$ , jusqu'à présent quelconque, est fixée par la condition initiale :  $v(0) = 0$ , ce qui conduit à :

$$\lambda = \frac{mg}{K\eta}.$$

Finalement, l'expression de la vitesse est :

$$v(t) = -\frac{mg}{K\eta} \left( 1 - e^{-\frac{K\eta}{m}t} \right). \quad (4.47)$$

Une deuxième intégration donne la loi horaire  $z(t)$  :

$$z(t) = -\frac{mg}{K\eta} t - \frac{m^2 g}{(K\eta)^2} e^{-\frac{K\eta}{m}t} + \text{constante},$$

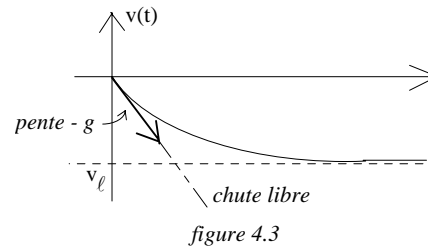
et la constante est déterminée par la condition initiale  $z(0) = 0$  :

$$\text{constante} = \frac{m^2 g}{(K\eta)^2}$$

soit finalement :

$$z(t) = -\frac{mg}{K\eta} t + \frac{m^2 g}{(K\eta)^2} \left( 1 - e^{-\frac{K\eta}{m}t} \right). \quad (4.48)$$

b) Etude de la vitesse



La vitesse  $v(t)$  part de la valeur 0 à  $t = 0$  (conditions initiales fixées ainsi), et prend des valeurs négatives (la parenthèse de l'équation (4.47) étant toujours positive). Lorsque le temps devient suffisamment grand, l'exponentielle devient négligeable.  $v(t)$  tend alors vers une vitesse limite (figure 4.3) donnée par :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v_l = -\frac{mg}{K\eta}. \quad (4.49)$$

Remarque : La pente de la tangente à l'origine est égale à l'accélération  $\ddot{z}(0)$ . A cet instant,  $F_r = 0$  puisque  $v = 0$ , ce qui conduit à :  $\ddot{z}(0) = -g$

c) Lien avec la chute dans le vide

Aux premiers instants du mouvement, on peut remplacer la courbe par sa tangente :  $v = -gt$ , et par suite,  $z = -\frac{1}{2}gt^2$ , ce qui est la loi horaire de la chute libre.

Plus précisément, l'expression  $\frac{m}{K\eta}$  a la dimension d'un temps  $t_0$  (temps caractéristique). Si le rapport (sans dimension)  $t/t_0$  est petit, on peut développer (voir cours de MT21 sur les développements limités) l'exponentielle dans l'expression (4.48) de  $z(t)$  écrite comme suit :

$$z(t) = -gt_0 t + gt_0^2 \left( 1 - e^{-\frac{t}{t_0}} \right), \quad (4.50)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} z(t) &= -gt_0 t + gt_0^2 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{t}{t_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{t}{t_0} \right)^2 + \left( \frac{t}{t_0} \right)^2 \varepsilon \left( \frac{t}{t_0} \right) \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2}gt^2 \left[ 1 + \varepsilon \left( \frac{t}{t_0} \right) \right] \end{aligned}$$

et permet de retrouver la loi horaire de la chute libre dans le vide.

3. Chute d'un point matériel glissant sur un plan incliné

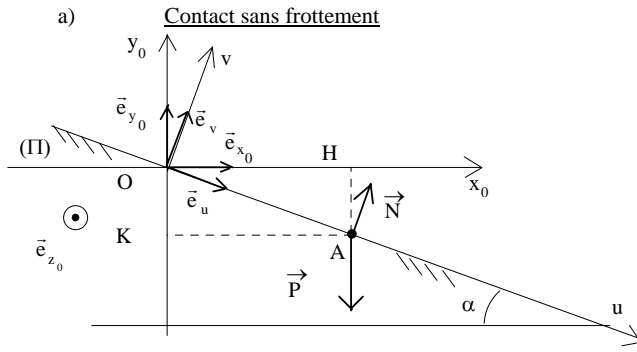


Figure 4.4

Le contact entre le point A et le plan (Pi) se fait sans frottement.

A t = 0, on abandonne A à l'origine O sur le plan (Pi), et sans vitesse initiale.

❖ Système étudié : {le point A }

❖ Inventaire des forces :

- action de la gravité :  $\{\varpi \rightarrow A\} = (A, \vec{P}) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0} = \begin{Bmatrix} mg \sin \alpha & 0 \\ -mg \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$ .
- action du plan (Pi) sur A :  $\{\Pi \rightarrow A\} = (A, \vec{N}) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ N & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$ ,

avec  $N > 0$  (condition de contact).

❖ Le PFD pour le mouvement de A s'écrit vectoriellement :

$$m \vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_0) = \vec{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow A)$$

soit 
$$m \vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_0) = \vec{P} + \vec{R}. \tag{4.51}$$

Or  $\vec{OA} = u \vec{e}_u$  donc  $\vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_0) = \ddot{u} \vec{e}_u$ . L'équation (4.51) s'écrit donc :

- en projection sur  $\vec{e}_u$  :  $m \ddot{u} = mg \sin \alpha$
- en projection sur  $\vec{e}_v$  :  $0 = -mg \cos \alpha + N$

d'où :

$$\ddot{u} = g \sin \alpha \quad \text{et} \quad N = mg \cos \alpha. \tag{4.52}$$

Par ailleurs,  $\vec{OA} = x \vec{e}_{x_0} + y \vec{e}_{y_0} = u \vec{e}_u$  avec  $\vec{e}_u = \cos \alpha \vec{e}_{x_0} - \sin \alpha \vec{e}_{y_0}$ , donc  $y = -u \sin \alpha$ , ce qui conduit, en utilisant l'équation (4.52) à :

$$\ddot{y} = -\ddot{u} \sin \alpha = -g \sin^2 \alpha. \tag{4.53}$$

L'intensité de la pesanteur est donc multipliée par  $\sin^2 \alpha$ .

Avec les conditions initiales indiquées, on obtient :

$$u = \frac{1}{2} g t^2 \sin \alpha \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{2} g t^2 \sin^2 \alpha. \tag{4.54}$$

On vérifie par ailleurs que la condition de contact  $N > 0$  est toujours satisfaite.

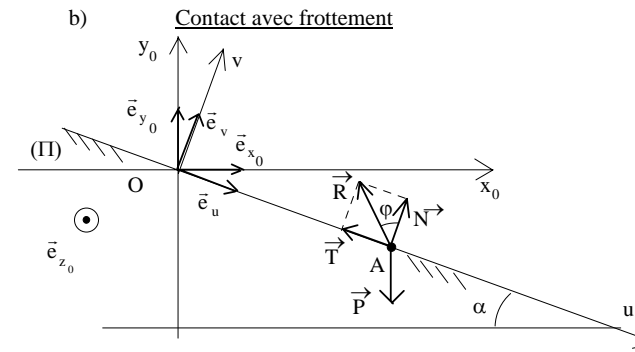


Figure 4.5

Le contact entre A et le plan (Pi) se fait avec frottement de coefficient :

$$f = \tan \varphi. \tag{4.55}$$

A t = 0, on abandonne A à l'origine O sur le plan (Pi), avec une vitesse initiale  $v_0$ .

❖ Système étudié : {le point A }

❖ Inventaire des forces :

- action de la gravité :  $\{\varpi \rightarrow A\} = (A, \vec{P}) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0} = \begin{Bmatrix} mg \sin \alpha & 0 \\ -mg \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$ .



▪ action du plan (Π) sur A :  $\{\Pi \rightarrow A\} = (A, \vec{R}) = \begin{Bmatrix} -T & 0 \\ N & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}}$ ,

avec  $N > 0$  (condition de contact).

Dans l'hypothèse où le point descend effectivement le long du plan incliné, sa vitesse algébrique sur l'axe Ou est positive. D'après la première loi de Coulomb, la composante tangentielle  $\vec{T}$  de l'action du plan sur A doit avoir une mesure algébrique négative sur Ou (sens opposé à la vitesse) et par suite on doit avoir :  $(-T < 0)$  soit  $T > 0$ . De plus, d'après la deuxième loi de Coulomb, on doit avoir (puisque'il y a glissement) :

$$T = f N .$$

❖ Le PFD pour le mouvement de A s'écrit :

$$m\vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_0) = \vec{P} + \vec{R},$$

ce qui conduit, en projection, aux équations :

soit 
$$\begin{cases} m\ddot{u} = mg \sin \alpha - T & (4.56-a) \\ 0 = -mg \cos \alpha + N & (4.56-b) \end{cases}$$

On en déduit : 
$$N = mg \cos \alpha, \quad (> 0, \text{ contact assuré})$$

❖ Premier cas :  $\ddot{u}(t) > 0$

Dans ce cas,  $\dot{u}(t)$  est une fonction croissante du temps à partir de la vitesse initiale  $v_0$  et l'équation (4.56-a) est donc telle que

$$mg \sin \alpha - T > 0 . \quad (4.57)$$

Le mouvement ayant lieu, la deuxième loi de Coulomb s'écrit :

$$T = f N , \quad (4.58)$$

soit, en faisant usage de l'équation (4.56-b)

$$T = m g f \cos \alpha . \quad (4.59)$$

En remplaçant T par son expression (4.59) dans l'inéquation (4.57) il vient :

$$m g (\sin \alpha - f \cos \alpha) > 0 ,$$

soit 
$$\text{tg } \alpha > f . \quad (4.60)$$

Le coefficient de frottement pouvant être mis sous la forme

$$f = \text{tg } \varphi , \quad (4.61)$$

où  $\varphi$  est le demi angle au sommet du cône de frottement (chapitre 3, § III.4), l'équation (4.60)

s'écrit 
$$\text{tg } \alpha > \text{tg } \varphi ,$$

soit 
$$\boxed{\alpha > \varphi} . \quad (4.62)$$

Enfin, en remplaçant T par son expression (4.59) dans l'équation (4.56-a) il vient :

$$\begin{aligned} m \ddot{u} &= m g \sin \alpha - f m g \cos \alpha , \\ \text{soit : } \ddot{u} &= g (\sin \alpha - f \cos \alpha) . \end{aligned} \quad (4.63)$$

En faisant usage de la condition initiale  $\dot{u}(0) = v_0$ , une première intégration par rapport au temps donne la vitesse :

$$\dot{u}(t) = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t + v_0 . \quad (4.64)$$

En faisant usage de la condition initiale  $u(0) = 0$ , une deuxième intégration par rapport au temps donne la position :

$$u(t) = \frac{1}{2} g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t^2 + v_0 t . \quad (4.65)$$

❖ Deuxième cas :  $\ddot{u}(t) < 0$

Dans ce cas,  $\dot{u}(t)$  est une fonction décroissante du temps à partir de la vitesse initiale  $v_0$ . Il existe donc un temps  $t_1$  à partir duquel le point s'arrête,

soit 
$$\dot{u}(t_1) = 0 . \quad (4.66)$$

L'accélération  $\ddot{u}(t)$  étant négative, l'équation (4.56-a) est donc telle que

$$mg \sin \alpha - T < 0 . \quad (4.67)$$

Tant que la vitesse  $\dot{u}(t)$  décroît, il y a mouvement, et donc l'équation (4.59) est valable.

En remplaçant T par son expression (4.59) dans l'inéquation (4.67) il vient :

$$m g (\sin \alpha - f \cos \alpha) < 0 ,$$

soit 
$$\text{tg } \alpha < f , \quad (4.68)$$

soit 
$$\text{tg } \alpha < \text{tg } \varphi ,$$

d'où 
$$\boxed{\alpha < \varphi} . \quad (4.69)$$

A partir du temps  $t = t_1$ , le point s'arrête définitivement, et ne peut pas repartir puisque  $\dot{u}(t)$  est une fonction décroissante. Le temps  $t_1$  s'obtient à partir de l'équation (4.64) :

$$t_1 = -v_0 / [g (\sin \alpha - f \cos \alpha)] > 0 . \quad (4.70)$$

❖ Troisième cas :  $\ddot{u}(t) = 0$

Dans ce cas, la vitesse  $\dot{u}(t)$  est une constante, égale à la vitesse initiale  $v_0$ . L'équation (4.56-a) s'écrit donc

$$m g \sin \alpha - T = 0 . \quad (4.71)$$

En remplaçant T par son expression (4.59) dans l'équation (4.71) il vient :

$$m g (\sin \alpha - f \cos \alpha) = 0 ,$$

soit 
$$\text{tg } \alpha = f \text{ d'où } \boxed{\alpha = \varphi} . \quad (4.72)$$

Cependant, si  $v_0 = 0$ , il faut vérifier que le point démarre...

Si le point reste au repos, alors  $\ddot{u}(t) = 0$  mais

$$T < f N \quad (4.73)$$

Dans ce cas, le report de T (à partir de l'équation (4.71)) dans l'inéquation (4.73) conduit à  $mg \sin \alpha < mg f \cos \alpha$ ,

soit  $\text{tg } \alpha < f$ ,  
d'où  $\alpha < \varphi$ .

III LE PENDULE CIRCULAIRE

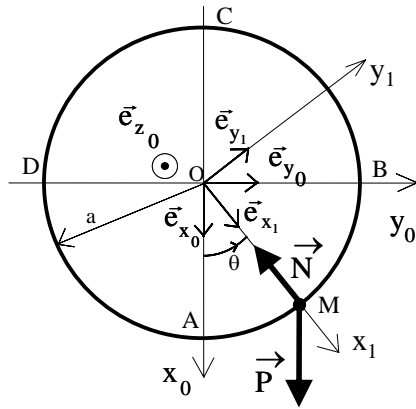


Figure 4.6

Un point matériel M pesant est astreint à se déplacer sans frottement sur un cercle vertical fixe (figure 4.6). La liaison peut être bilatérale ou unilatérale (dans le cas par exemple du pendule à fil).

Le repère  $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$  est supposé galiléen. Afin de caractériser la position basse A par l'angle  $\theta = 0$ , on a choisi ici un axe vertical descendant  $Ox_0$  (figure 4.6).

Le plan de figure est alors orienté dans le sens habituel par l'axe perpendiculaire  $Oz_0$ .

On choisit les conditions initiales suivantes : à  $t = 0$ , le point M est lancé au point A ( $\theta = 0$ ) avec une certaine vitesse  $v_0 = a\dot{\theta}_0$  ( $\dot{\theta}_0 > 0$  par exemple).

1. Equation du mouvement

❖ Système étudié : {le point M}.

❖ Inventaire des forces :

- Action de la gravité :  $\{\varpi \rightarrow M\} = (M, \vec{P})$ , avec

$$\vec{P} = m \vec{g} \vec{e}_{x_0} = \begin{matrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \\ 0 \end{matrix} \quad \mathcal{B}_1$$

- Action du cercle sur M : {cercle  $\rightarrow$  M} = (M,  $\vec{N}$ ), avec

$$\vec{N} = -N \vec{e}_{x_1}, \quad N > 0$$

La résultante des actions mécaniques est donc

$$\vec{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow M) = \vec{P} + \vec{N}$$

soit

$$\vec{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow M) = \begin{matrix} mg \cos \theta - N \\ -mg \sin \theta \\ 0 \end{matrix} \quad \mathcal{B}_1$$

❖ Résultante dynamique :

Rappelons que, puisque  $Ox_1$  et  $Oy_1$  sont les axes locaux du point M, en coordonnées polaires, on a :

$$\vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) = -a\dot{\theta}^2 \vec{e}_{x_1} + a\ddot{\theta} \vec{e}_{y_1}$$

• La résultante dynamique du point M par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$  s'écrit donc :

$$\vec{d}(M/\mathcal{R}_0) = -ma\dot{\theta}^2 \vec{e}_{x_1} + ma\ddot{\theta} \vec{e}_{y_1}$$

❖ PFD pour le point matériel :  $\vec{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow M) = \vec{d}(M/\mathcal{R}_0)$

La projection sur  $\vec{e}_{x_1}$  élimine la force inconnue  $\vec{N}$  et fournit l'équation du mouvement (équation différentielle pour la fonction inconnue  $\theta(t)$ ) :

$$ma\ddot{\theta} = -mg \sin \theta,$$

soit

$$a\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \quad (4.74)$$

Cette équation différentielle ne peut pas s'intégrer à l'aide des fonctions usuelles. Il faut faire appel à des fonctions spéciales appelées fonctions de Jacobi. Cet exemple sera revu dans le cours de vibrations.

Lorsque les angles sont petits, l'équation (4.74) peut être linéarisée. Dans ce cas,  $\sin \theta \approx \theta$ , et l'équation (4.74) s'écrit

$$a\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

soit

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (4.75-a)$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{g/a} \quad (4.75-b)$$

La résolution de cette équation sera détaillée dans le cours de vibrations.

2. Utilisation des moments

L'équation (4.74) peut également s'obtenir en utilisant le PFD pour les moments au point O, plutôt que le PFD pour les résultantes.

• D'après l'équation (4.5), le moment dynamique au point O, du point M par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$  s'écrit

$$\vec{\delta}_O(M/\mathcal{R}_0) = \vec{OM} \wedge m \vec{\Gamma}(M/\mathcal{R}_0) \quad (4.76)$$

soit 
$$\bar{\delta}_O(\mathbf{M}/\mathcal{R}_0) = \begin{vmatrix} a & -ma\dot{\theta}^2 & 0 \\ 0 \wedge & ma\ddot{\theta} & 0 \\ \mathcal{B}_1 & 0 & \mathcal{B}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & ma^2\ddot{\theta} \end{vmatrix},$$

d'où 
$$\bar{\delta}_O(\mathbf{M}/\mathcal{R}_0) = ma^2\ddot{\theta}\bar{e}_{z_0}. \tag{4.77}$$

• Le moment au point O du moment des actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le point M s'écrit

$$\overline{\mathcal{M}}_O(\text{ext} \rightarrow \mathbf{M}) = \overline{\mathbf{OM}} \wedge \overline{\mathbf{P}} + \underbrace{\overline{\mathbf{OM}} \wedge \overline{\mathbf{N}}}_0 = \begin{vmatrix} a & mg \cos \theta & 0 \\ 0 \wedge & -mg \sin \theta & 0 \\ \mathcal{B}_1 & 0 & \mathcal{B}_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -mga \sin \theta \end{vmatrix},$$

d'où 
$$\overline{\mathcal{M}}_O(\text{ext} \rightarrow \mathbf{M}) = -mga \sin \theta \bar{e}_{z_0}. \tag{4.78}$$

Le PFD pour les moments au point O s'écrit

$$\bar{\delta}_O(\mathbf{M}/\mathcal{R}_0) = \overline{\mathcal{M}}_O(\text{ext} \rightarrow \mathbf{M}),$$

soit 
$$ma^2\ddot{\theta}\bar{e}_{z_0} = -mga \sin \theta \bar{e}_{z_0},$$

soit 
$$a\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0. \tag{4.79}$$

L'équation (4.79) est identique à l'équation (4.74) trouvée précédemment en appliquant le PFD pour les résultantes.

Dans l'expression (4.77) du moment dynamique du point M, calculé au point O,  $\bar{\delta}_O(\mathbf{M}/\mathcal{R}_0) = ma^2\ddot{\theta}\bar{e}_{z_0}$ , fait apparaître la quantité  $(ma^2)$ , caractéristique de la répartition de masse du système, appelé moment d'inertie du point M par rapport à l'axe  $(O, \bar{e}_{z_0})$  :

$$I_{Oy_0}(\mathbf{M}) = ma^2. \tag{4.80}$$

IV MOUVEMENT DU PROJECTILE TERRESTRE

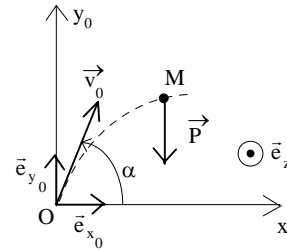


Figure 4.7

Le projectile est assimilé à un point matériel M, de masse m. Il est soumis uniquement à son poids, dans le champ uniforme de la pesanteur..

Le repère  $\mathcal{R}_0 = (O, \bar{e}_{x_0}, \bar{e}_{y_0}, \bar{e}_{z_0})$  lié à la Terre est supposé galiléen. L'axe  $Oy_0$  est vertical ascendant (figure 4.7).

A  $t = 0$ , le point M est en O et sa vitesse est supposée connue :  $\vec{V}(\mathbf{M}/\mathcal{R}_0) = \vec{v}_0$ .

1. Equations du mouvement

❖ Système étudié : {le projectile M }.

❖ Inventaire des forces : poids :  $\vec{P} = -mg \bar{e}_{y_0}$

❖ PFD pour le point matériel :  $m\vec{\Gamma}(\mathbf{M}/\mathcal{R}_0) = \vec{P} = -mg \bar{e}_{y_0}$

L'accélération de M est donc un vecteur constant :  $\vec{\Gamma}(\mathbf{M}/\mathcal{R}_0) = -g \bar{e}_{y_0}$ , accélération de la pesanteur.

$$\overrightarrow{\mathbf{OM}} = x \bar{e}_{x_0} + y \bar{e}_{y_0} \quad \text{donc} \quad \vec{\Gamma}(\mathbf{M}/\mathcal{R}_0) = \ddot{x} \bar{e}_{x_0} + \ddot{y} \bar{e}_{y_0}.$$

En projection sur  $\bar{e}_{x_0}$  et sur  $\bar{e}_{y_0}$ , le PFD conduit aux deux équations du mouvement :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \tag{4.81}$$

2. Intégration des équations du mouvement

Une première intégration des équations du mouvement conduit aux vitesses :

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_0 \\ \dot{y} = -gt + \dot{y}_0 \end{cases} \tag{4.82}$$

Or, à  $t = 0$ ,  $\vec{V}(\mathbf{M}/\mathcal{R}_0) = \vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \bar{e}_{x_0} + v_0 \sin \alpha \bar{e}_{y_0}$ ,

donc 
$$\begin{cases} \dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha \end{cases} \tag{4.83}$$

Une deuxième intégration donne la position du point en fonction du temps :

$$\begin{cases} x = \dot{x}_0 t + x_0 \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + \dot{y}_0 t + y_0 \end{cases}$$

Or, à  $t = 0$ , M est en O donc  $x_0 = y_0 = 0$ ,

d'où 
$$\begin{cases} x = \dot{x}_0 t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + \dot{y}_0 t \end{cases} \quad (4.84)$$

**3. Etude de la trajectoire**

Les fonctions précédentes (4.84) fournissent une représentation paramétrique en fonction du temps, de la trajectoire. On peut obtenir l'équation cartésienne en éliminant le temps :

$$t = \frac{x}{\dot{x}_0} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{\dot{x}_0^2} + \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} x \quad (4.85)$$

C'est l'équation d'une parabole d'axe vertical, concave vers le bas, et passant par O où elle est tangente à  $\vec{v}_0$ .

▪ **Apogée :**

La trajectoire culmine au point A, sommet de la parabole, pour lequel  $\dot{y} = 0$  (voir figure 4.8).

Or  $\dot{y} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 0$ ,

donc  $\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow -g \frac{x}{\dot{x}_0^2} + \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\dot{x}_0 \dot{y}_0}{g}$ .

Le point A a donc pour coordonnées : 
$$\left( x_a = \frac{\dot{x}_0 \dot{y}_0}{g}, y_a = \frac{\dot{y}_0^2}{2g} \right) \quad (4.86)$$

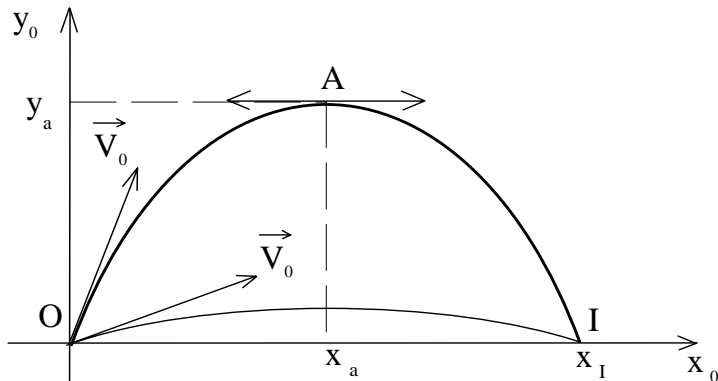


Figure 4.8

▪ **Point d'impact horizontal :**

Si l'on suppose que le mouvement se termine lorsque le projectile retombe sur le sol (axe  $Ox_0$ ), on atteint alors le point d'impact I (voir figure 4.8) de coordonnées :

$$x_I = 2 x_a, y_I = 0. \quad (4.87)$$

La tangente en I est symétrique de la tangente en O, ce qui donne la direction de la vitesse au point I. On peut voir directement que le module de cette vitesse est égal au module  $v_0$  de la vitesse initiale. L'application du théorème de l'énergie cinétique (chapitre 5) permet de retrouver ce résultat.

▪ **Temps de vol :**

Ce temps est donné par l'instant  $t_I$  de l'impact :

D'après (4.85),  $t_I = \frac{x_I}{\dot{x}_0}$  donc  $t_I = \frac{2 x_a}{\dot{x}_0} = \frac{2 \dot{y}_0}{g} = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$ . (4.88)

Pour  $v_0$  donné,  $t_I$  est maximal pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , ce qui correspond à un lancé vertical.

▪ **Portée :**

C'est la distance  $x_I$ , donnée par :  $x_I = 2 x_a = 2 \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2 \alpha$ . (4.89)

Pour  $v_0$  donné, elle est maximale pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  et vaut alors :

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (4.90)$$

▪ **Balistique :**

C'est l'étude des trajectoires possibles pour atteindre un objectif donné avec un module de vitesse initiale  $v_0$  imposé. Supposant toujours cet objectif I sur l'horizontale  $Ox_0$  du point de lancement, on doit avoir, d'après ce que l'on a vu plus haut :

$$x_I \leq x_{\max}$$

L'angle de tir est donné par l'équation (4.89), combinée avec l'équation (4.90) :

$$\sin 2 \alpha = \frac{x_I}{x_{\max}}, \quad (4.91)$$

d'où deux solutions :

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2} \text{Arc sin} \left( \frac{x_I}{x_{\max}} \right) \\ \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 \end{cases} \quad (4.92)$$

On voit ainsi que pour un objectif situé à une distance inférieure à la distance de sûreté  $x_{\max}$ , il existe deux trajectoires pour l'atteindre (figure 4.8). L'une correspond à un angle de tir  $\alpha_1 \in [0, \frac{\pi}{4}]$  (c'est le tir tendu) et l'autre à un angle de tir  $\alpha_2 \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$  (c'est le tir courbe).

## V LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE DANS LES REPERES NON GALILEENS

Le principe d'invariance galiléenne a montré que si un repère  $\mathcal{R}_1$  est en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à un repère galiléen  $\mathcal{R}_0$ , le PFD s'applique sans modification de mouvement d'un système  $\Sigma$  par rapport à  $\mathcal{R}_1$ .

Si le mouvement de  $\mathcal{R}_1$  n'est pas une simple translation rectiligne uniforme, il n'en est plus de même. Le PFD peut encore être appliqué dans  $\mathcal{R}_1$ , mais au prix de l'introduction de forces fictives.

### 1. Retour sur la composition des mouvements

Soit  $\Sigma = \{A_i, m_i\}$  un système matériel en mouvement par rapport à un repère galiléen  $\mathcal{R}_0$ .

Le torseur dynamique intervenant dans le PFD est :

$$\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \left\{ \left[ A_i, m_i \vec{\Gamma}(A_i / \mathcal{R}_0) \right] \right\} \quad (4.93)$$

Soit à présent un autre repère  $\mathcal{R}_1$  en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}_0$ . D'après la formule de composition des accélérations, on a :

$$\vec{\Gamma}(A_i / \mathcal{R}_0) = \vec{\Gamma}(A_i / \mathcal{R}_1) + \vec{\Gamma}(A_i \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) + 2\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1 / \mathcal{B}_0) \wedge \vec{V}(A_i / \mathcal{R}_1) \quad (4.94)$$

Le torseur dynamique galiléen peut donc s'écrire comme la somme de trois torseurs :

$$\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_1) + \mathcal{D}(\Sigma \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) + \mathcal{D}_C(\Sigma / \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) \quad (4.95)$$

où :

- $\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_1) = \left\{ \left[ A_i, m_i \vec{\Gamma}(A_i / \mathcal{R}_1) \right] \right\}$   
torseur dynamique de  $\Sigma$  par rapport à  $\mathcal{R}_1$

- $\mathcal{D}(\Sigma \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) = \left\{ \left[ A_i, m_i \vec{\Gamma}(A_i \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) \right] \right\}$   
torseur dynamique d'entraînement qui est le torseur des quantités d'accélération dans  $\mathcal{R}_0$  du système matériel  $\Sigma$  "figé" dans  $\mathcal{R}_1$ , "système coïncident".

- $\mathcal{D}_C(\Sigma / \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) = \left\{ \left[ A_i, 2m_i \vec{\Omega}(\mathcal{B}_1 / \mathcal{B}_0) \wedge \vec{V}(A_i / \mathcal{R}_1) \right] \right\}$   
torseur dynamique complémentaire

## 2. Forces fictives ou forces d'inertie

Le PFD appliqué à  $\Sigma$  par rapport à un repère galiléen  $\mathcal{R}_0$  s'écrit, d'après l'équation (4.8) :

$$\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_0) = \overline{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow \Sigma) . \quad (4.8)$$

D'après la décomposition précédente du torseur dynamique, on peut écrire cette égalité entre torseurs sous la forme :

$$\mathcal{D}(\Sigma / \mathcal{R}_1) = \{\text{ext} \rightarrow \Sigma\} - \mathcal{D}(\Sigma \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) - \mathcal{D}_C(\Sigma / \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) . \quad (4.96)$$

Au premier membre figure le torseur dynamique (relatif) de  $\Sigma$  dans son mouvement par rapport au repère (non galiléen)  $\mathcal{R}_1$ .

L'égalité (4.96) traduit encore le PFD, exprimé à présent par rapport à un repère non galiléen, à condition d'adjoindre (au second membre) aux forces extérieures qui s'exercent réellement sur  $\Sigma$  deux ensembles de forces fictives, appelées "forces d'inertie".

- les "forces d'inertie" d'entraînement, représentées par le torseur :

$$- \mathcal{D}(\Sigma \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0)$$

- les "forces d'inertie" complémentaires ou de Coriolis, représentées par le torseur :

$$- \mathcal{D}_C(\Sigma / \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0)$$

Ces forces fictives s'appliquent en tout point de  $\Sigma$  doté d'une masse. Elles ont la nature d'actions à distance, comme la pesanteur.

- Pour le point matériel  $A$ , la relation (4.96) s'écrit, pour les résultantes :

$$m\vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_1) = \overline{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow A) - m\vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_0) - m\vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) ,$$

ce qui revient à écrire le PFD dans le repère  $\mathcal{R}_0$  :

$$\underbrace{m\vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_1) + m\vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) + m\vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0)}_{m\vec{\Gamma}(A / \mathcal{R}_0)} = \overline{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow A) . \quad (4.97)$$

Le PFD dans les repères non galiléens n'apporte donc pas grand chose...

Remarque : - les forces fictives de Coriolis ont un effet lorsque le mouvement relatif n'est pas le repos et lorsque le repère d'entraînement possède une rotation instantanée par rapport au repère galiléen. Ces forces sont alors responsables de l'effet gyroscopique.

- lorsque le solide est en rotation uniforme par rapport au repère  $\mathcal{R}_0$  galiléen, la "force d'inertie" d'entraînement est appelée *force centrifuge*.

3. **Exemple : équilibre relatif**

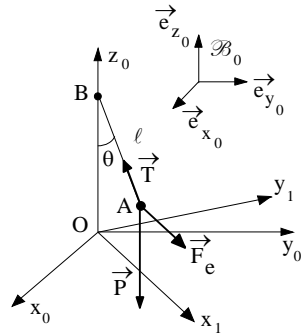


figure 4.9-a

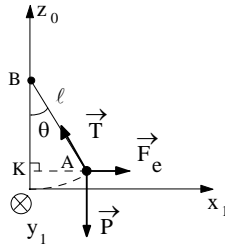


figure 4.9-b

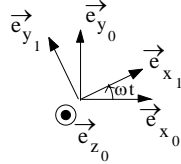


figure 4.9-c

Une masse  $m$ , placée en  $A$ , est attachée en un point  $B$  fixe par une ficelle de longueur  $\ell$  (figure 4.9).  $BA$  tourne autour de l'axe  $Oz_0$  avec une vitesse de rotation constante  $\omega$ . La masse est supposée soumise à la pesanteur et se trouver en équilibre relativement au repère  $\mathcal{R}_1 = (O, \mathcal{B}_1)$  où  $\mathcal{B}_1 = (\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1})$ . Le repère  $\mathcal{R}_0 = (O, \mathcal{B}_0)$  avec  $\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0})$  est supposé galiléen. Le but est de déterminer l'angle  $\theta$  de la ficelle avec la verticale.

On écrit le Principe Fondamental de la Statique dans le repère  $\mathcal{R}_1$  en ajoutant aux forces réelles les forces fictives d'inertie.

▪ **Système étudié** : {le point  $A$  de masse  $m$ }

▪ **Inventaire des forces réelles appliquées** :

- action de la pesanteur :  $\vec{P} = -m g \vec{e}_{z_0}$

- action de la ficelle sur la masse :  $\vec{T} = T \frac{\vec{AB}}{\ell}$

▪ **Inventaire des forces fictives appliquées** :

- force d'inertie complémentaire :  $\vec{F}_C = -2 m \vec{\Omega}(\mathcal{B}_1 / \mathcal{B}_0) \wedge \vec{v}(A / \mathcal{R}_1)$

or  $A$  est au repos relatif donc  $\vec{v}(A / \mathcal{R}_1) = \vec{0}$  et donc  $\vec{F}_C = \vec{0}$ .

- force d'inertie d'entraînement :  $\vec{F}_e = -m \vec{\Gamma}(A_1 / \mathcal{R}_0)$

▪ **PFS** :  $\vec{\mathcal{R}}(\text{ext} \rightarrow A) = \vec{0}$  c'est-à-dire :  $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_e = \vec{0}$  . (4.98)

▪ **Calcul des composantes sur la base  $\mathcal{B}_1$  des différentes forces en présence** :

\*  $\vec{P} = -m g \vec{e}_{z_0}$

\*  $\vec{T} = T \frac{\vec{AB}}{\ell} = \begin{cases} -T \sin \theta \\ 0 \\ T \cos \theta \end{cases}_{\mathcal{B}_1}$

\*  $\vec{F}_e = -m \vec{\Gamma}(A_1 / \mathcal{R}_0)$  avec  $\vec{\Gamma}(A_1 / \mathcal{R}_0) = \left( \frac{d \vec{v}(A_1 / \mathcal{R}_0)}{dt} \right)_{/\mathcal{B}_0}$

Or  $\vec{OA}_1 = \vec{OK} + \vec{KA}_1 = \begin{cases} \ell \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{\mathcal{B}_1}$ . En utilisant la formule de changement de base de dérivation, avec  $\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1 / \mathcal{B}_0) = \omega \vec{e}_{z_0}$ , on obtient :

$$\vec{v}(A_1 / \mathcal{R}_0) = \left( \frac{d \vec{OA}_1}{dt} \right)_{/\mathcal{B}_0} = \vec{0} + \begin{cases} 0 \\ \omega \wedge \begin{cases} \ell \sin \theta \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{\mathcal{B}_1} \\ 0 \end{cases}_{\mathcal{B}_1} = \begin{cases} 0 \\ \ell \omega \sin \theta \\ 0 \end{cases}_{\mathcal{B}_1}$$

et donc  $\vec{\Gamma}(A_1 / \mathcal{R}_0) = \vec{0} + \begin{cases} 0 \\ \omega \wedge \begin{cases} 0 \\ \ell \omega \sin \theta \\ 0 \end{cases}_{\mathcal{B}_1} \\ 0 \end{cases}_{\mathcal{B}_1} = -\ell \omega^2 \sin \theta \vec{e}_{x_1}$ , ce qui est le vecteur

accélération dans un mouvement circulaire uniforme.

Finalement,  $\vec{F}_e = m \ell \omega^2 \sin \theta \vec{e}_{x_1}$ . (4.99)

Sous cette forme,  $\vec{F}_e$  est couramment appelée la "force centrifuge".

Il ne reste plus qu'à appliquer l'équation (4.98) en projetant sur la base  $\mathcal{B}_1$

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_e = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_{x_1} : -T \sin \theta + m \ell \omega^2 \sin \theta = 0 \\ \vec{e}_{z_0} : T \cos \theta - m g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = m \ell \omega^2 \\ T = \frac{m g}{\cos \theta} \end{cases}$$

ce qui permet d'obtenir  $\cos \theta = \frac{g}{\omega^2 \ell}$ . (4.100)