

## Chapitre 4

FORMULATION ANALYTIQUE DE PROBLEMES  
**LINEAIRES FONDAMENTAUX DE**  
**L'ACOUSTIQUE EN MILIEU FLUIDE**  
**HOMOGENE, INDEPENDANT DU TEMPS ET AU**  
**REPOS : LES SOLUTIONS FONDAMENTALES EN**  
**COORDONNEES CARTESIENNES**

## Solutions de l'équation de propagation

- Equation de propagation
- Equation de Helmholtz

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \hat{p}(\vec{r}; t) = -\hat{f}(\vec{r}; t)$$

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_0^2}\right) \hat{p}(\vec{r}; \omega) = -\hat{F}(\vec{r}; \omega)$$

- ✓ Pas de solution générale connue en dehors du cas de propagation unidimensionnel
- ✓ Si les frontières du domaine coïncident avec des surfaces de coordonnées curvilignes séparables

- solutions à variables séparées
- "base" sur laquelle toute solution peut être développée
- famille complète

## Choix de système de coordonnées

- Coordonnées cartésiennes
  - piston plan
  - plan d'air
  - $A \cos(\omega t)$
  - $A \cos(\omega t - kx)$
  - fonctions circulaires
- Coordonnées cylindriques
  - source S
  - fonctions de Bessel
- Coordonnées sphériques
  - polynômes de Legendre

## AMPLITUDE DES ONDES EN COORDONNEES CARTESIENNES, CYLINDRIQUES ET SPHERIQUES (1/3)

- Flux d'énergie  $\Phi \propto |\hat{A}|^2 S$  proportionnel à la surface traversée et à l'amplitude de l'onde au carré
  - $\Phi = \text{constante} \iff |\hat{A}_1|^2 S_1 = |\hat{A}_2|^2 S_2$
- Onde plane
  - $S_1 = S_2 \iff |\hat{A}_1| = |\hat{A}_2|$

Toute onde dont l'amplitude est indépendante du point, dans un espace donné, a un caractère **plan** dans cet espace.

## AMPLITUDE DES ONDES EN COORDONNEES CARTESIENNES, CYLINDRIQUES ET SPHERIQUES (2/3)

- Onde cylindrique
  - $\Phi \propto |\hat{A}|^2 S$  avec  $S \propto 2\pi r$
  - $\Phi \propto |\hat{A}|^2 r$  et  $\Phi = \text{constante}$
  - $|\hat{A}|^2 r = \text{constante} \iff |\hat{A}| \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$

Toute onde dont l'amplitude décroît en  $1/\sqrt{r}$  dans un certain espace, a un caractère **cylindrique** dans cet espace.

### Application : départ en vacances sur l'autoroute

En première approche, le bruit émis par l'autoroute peut être modélisé par un champ à caractère cylindrique



## AMPLITUDE DES ONDES EN COORDONNEES CARTESIENNES, CYLINDRIQUES ET SPHERIQUES (3/3)

- Onde sphérique
  - source ponctuelle
  - $\Phi \propto |\hat{A}|^2 S$  avec  $S = 4\pi r^2$
  - $\Phi \propto |\hat{A}|^2 r^2$  et  $\Phi = \text{constante}$
  - $|\hat{A}|^2 r^2 = \text{constante} \iff |\hat{A}| \propto \frac{1}{r}$
  - OU conservation du flux d'énergie dans un secteur d'angle solide  $\Omega$ 
    - ✓ si  $r \nearrow$  alors  $S \nearrow$  et amplitude  $\searrow$  : onde **divergente**
    - ✓ si  $r \searrow$  alors  $S \searrow$  et amplitude  $\nearrow$  : onde **convergente**

Toute onde dont l'amplitude décroît en  $1/r$  dans un certain espace, a un caractère **sphérique** dans cet espace.

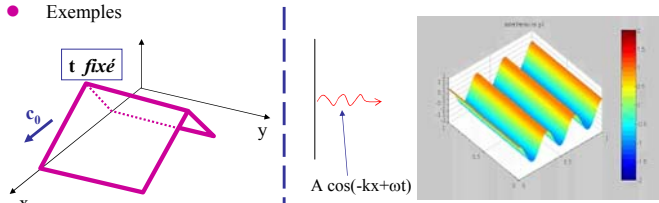
### Application : voiture seule en rase campagne

En première approche, la voiture est une source ponctuelle vis à vis de l'habitation (champ à caractère sphérique)



### Problèmes à 1 dimension

- Toutes les variables du problème dépendent d'une seule coordonnée
  - $\hat{p}(x;t), \vec{v}(x;t), \hat{\phi}(x;t)$
  - champs uniformes dans un plan perpendiculaire à la coordonnée
  - champs d'ondes planes



- Bon choix de repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  → coordonnée x

### Direction du vecteur vitesse (1D)

- Bon choix de repère  $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  → coordonnée x
 
$$\vec{v}(x;t) = \hat{v}_x(x;t)\vec{e}_x + \hat{v}_y(x;t)\vec{e}_y + \hat{v}_z(x;t)\vec{e}_z$$
- Equation d'Euler
 
$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad } \hat{p} = \vec{0} \rightarrow \rho_0 \frac{\partial \hat{v}(x;t)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{p}(x;t)}{\partial x} \vec{e}_x = \vec{0}$$

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \hat{v}_x(x;t)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{p}(x;t)}{\partial x} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \hat{v}_y(x;t)}{\partial t} = 0 \rightarrow \hat{v}_y(x;t) = \hat{K}_y(x) = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \hat{v}_z(x;t)}{\partial t} = 0 \rightarrow \hat{v}_z(x;t) = \hat{K}_z(x) = 0 \end{cases} \rightarrow \hat{v}(x;t) = \hat{v}_x(x;t)\vec{e}_x$$

notée  $\hat{v}(x;t)$

moyennes temporelles nulles

### Equations de l'acoustique en unidimensionnel

- Lois fondamentales
 
$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \text{grad } \hat{p} = \vec{0} \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \hat{v} = 0 \\ \hat{p} = c_0^2 \hat{\rho} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \hat{v}(x;t)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{p}(x;t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \hat{p}(x;t)}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \hat{v}(x;t)}{\partial x} = 0 \\ \hat{p}(x;t) = c_0^2 \hat{\rho}(x;t) \end{aligned}$$
- Equation de propagation
 
$$\left( \Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{p} = 0 \rightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{p}(x;t) = 0$$

### Solution générale en unidimensionnel

- Equation de propagation  $\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{p}(x;t) = 0$
- Changement de variables  $u = t - \frac{x}{c_0}$  et  $v = t + \frac{x}{c_0}$ 

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial t} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial u} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial v}$$

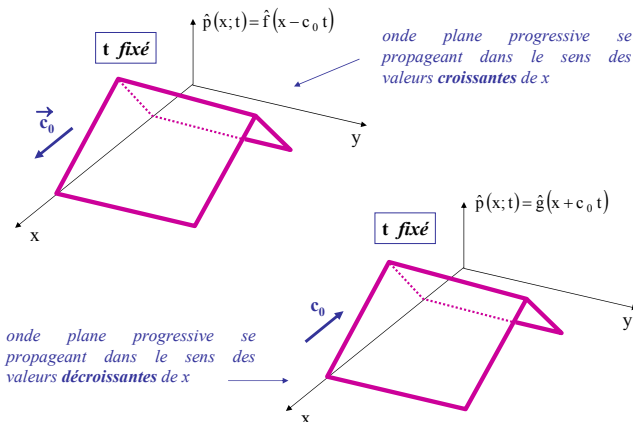
$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{c_0} \left( \frac{\partial \hat{p}}{\partial u} - \frac{\partial \hat{p}}{\partial v} \right)$$

$$\frac{1}{c_0^2} \left( \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial u \partial v} \right) - \frac{1}{c_0^2} \left( \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial u \partial v} \right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial u \partial v} = 0 \rightarrow \hat{p} = \hat{f}(u) + \hat{g}(v)$$
- Solution générale
 
$$\hat{p}(x;t) = \hat{f}\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + \hat{g}\left(t + \frac{x}{c_0}\right) \quad \text{ou} \quad \hat{p}(x;t) = \hat{f}(x - c_0 t) + \hat{g}(x + c_0 t)$$

$$\hat{p}(x;t) = \hat{f}[k(x - c_0 t)] + \hat{g}[k(x + c_0 t)]$$

### Cas particulier : ondes planes progressives (1D)



### Cas particulier (1D) : ondes planes stationnaires (1/2)

$p(x;t) = X(x)T(t)$  (pression réelle)

Succession de noeuds (ici zéros de pression) et de ventres (ici maxima de pression), qui évolue dans le temps suivant la loi imposée par la fonction  $T(t)$ .

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p(x;t) = 0, \forall x, \forall t \rightarrow \begin{cases} c_0^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} \\ \text{ne dépend que de } x & \text{ne dépend que de } t \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} T''(t) + \omega^2 T(t) = 0 \\ X''(x) + k^2 X(x) = 0 \end{cases} \quad \text{avec } k = \omega/c_0$$

Méthode de séparation des variables

### Cas particulier (1D) : ondes planes stationnaires (2/2)

•  $X''(x) + k^2 X(x) = 0 \implies$   $X(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$   
ou  
 $X(x) = \hat{C} e^{ikx} + \hat{D} e^{-ikx}$

•  $T''(t) + \omega^2 T(t) = 0 \implies$   $T(t) = E \cos(\omega t) + F \sin(\omega t)$   
ou  
 $T(t) = \hat{G} e^{i\omega t} + \hat{H} e^{-i\omega t}$

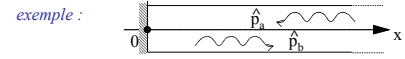
$\implies$  Une onde stationnaire est nécessairement **sinusoïdale** en t.

En pratique, **choix d'une convention temporelle**  $e^{i\omega t}$  ou  $e^{-i\omega t}$

L'une ou l'autre convention conduit au **même résultat réel**.

### Ondes planes progressives et stationnaires

•  $p(x; t) = A \cos(kx) \cos(\omega t) = \frac{A}{2} [\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)]$   
onde plane stationnaire    onde plane progressive    +    onde plane progressive



•  $p(x; t) = A \cos(kx - \omega t) = A \cos(kx) \cos(\omega t) + A \sin(kx) \sin(\omega t)$   
onde plane progressive    onde plane stationnaire    onde plane stationnaire

•  $e^{i(kx + \omega t)} = e^{ikx} e^{i\omega t}$   
 MAIS  $\Re[e^{i(kx + \omega t)}] = \cos(kx + \omega t) \neq \Re(e^{ikx}) \Re(e^{i\omega t})$

### Les ondes planes (1/4)

•  $\hat{p}(\vec{r}; t) = \hat{f}(\vec{n} \cdot \vec{r} - c_0 t) + \hat{g}(\vec{n} \cdot \vec{r} + c_0 t)$      $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$

•  $F[\kappa(c_0 t - \vec{n} \cdot \vec{r})]$     • **A 1 instant donné**, en tout point M tel que

$\vec{n} \cdot \vec{r} = \text{constante}$

la valeur de la variable de champ (grandeur physique) est la même.

Ces points sont situés dans un même plan, appelé **plan d'onde (surface d'onde plane)**, perpendiculaire à la direction de  $\vec{n}$ .

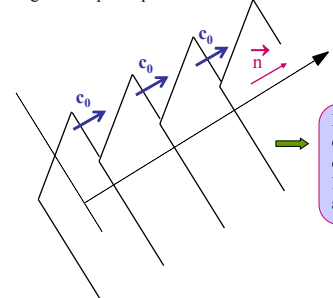
$\vec{n} \cdot \vec{r} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{OM} = OM \cos \theta = OM_0$

### Les ondes planes (2/4)

• **Lorsque le temps varie**, suivre une valeur donnée de F  $\implies$   $(c_0 t - \vec{n} \cdot \vec{r}) = \text{constante}$

c.à.d.  $d(c_0 t - \vec{n} \cdot \vec{r}) = 0$  soit  $\vec{n} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = c_0$

vitesse à laquelle doit se déplacer un point géométrique M pour suivre une valeur donnée de F



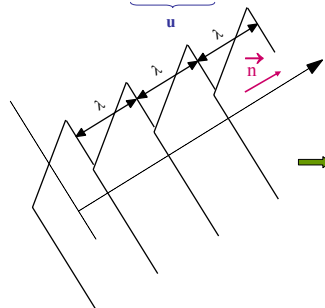
si  $\vec{r} // \vec{n} \implies \frac{d\vec{r}}{dt} = c_0 \vec{n}$

Les plans d'onde qui véhiculent une valeur donnée de la variable de champ F, se déplacent parallèlement à eux-mêmes dans la direction  $\vec{n}$  qui leur est perpendiculaire, et avec la vitesse de propagation  $c_0$ .

### Les ondes planes (3/4)

• Cas particulier d'une onde plane périodique : F périodique de période U

$F[\kappa(c_0 t - \vec{n} \cdot \vec{r})] \implies F(u)$  avec  $u = \kappa(c_0 t - \vec{n} \cdot \vec{r})$



A un instant t donné, et pour deux valeurs  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  du vecteur position  $\vec{r}$  telles que

$\kappa \vec{n} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = U$

alors  $F = \text{constante}$

$\implies$  deux plans d'onde distants l'un de l'autre d'une longueur égale à  $U/\kappa$  véhiculent la même valeur de champ

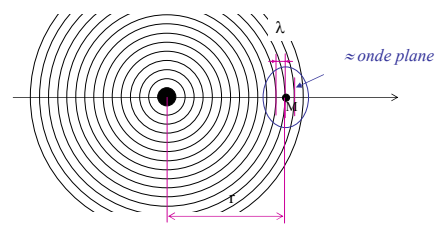
$\lambda = \frac{U}{\kappa}$     longueur d'onde

cas particulier des champs **monochromatiques** :  $C \cos(\omega t - k \vec{n} \cdot \vec{r} + \alpha) \implies U = 2\pi$

$\implies$   $\lambda = \frac{2\pi}{k}$


### Les ondes planes (4/4)

• Validité de l'hypothèse d'onde plane



Approximation "onde quasi plane" d'un champ au voisinage d'un point d'observation M : cas d'un champ sphérique en hypothèse de champ lointain ( $r \gg \lambda$ ).

### Les ondes planes monochromatiques (1/4)

- Onde monochromatique : propagation à 1 fréquence (pulsation  $\omega$  donnée)
    - ➔ fréquence imposée par une source émettant en permanence
    - ➔ **mouvement forcé, régime établi**, acoustique linéaire
  - Toute grandeur peut s'écrire  $\hat{u}(x;t) = \hat{U}(x)e^{i\omega t}$   convention temporelle
  - ➔  $\hat{p}(x;t) = \hat{P}(x)e^{i\omega t}$ ,  $\hat{v}(x;t) = \hat{V}(x)e^{i\omega t}$ ,  $\hat{\phi}(x;t) = \hat{\Phi}(x)e^{i\omega t}$ , ...
  - Equation de Helmholtz
 
$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \hat{p}(x;t) = 0 \quad \rightarrow \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 \right] \hat{P}(x)e^{i\omega t} = 0, \quad \forall x, \forall t$$

$$\rightarrow \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 \right] \hat{P}(x) = 0, \quad \forall x$$
- Notation :  $k_0 = \omega/c_0$
- $$\rightarrow \quad (\partial_{xx}^2 + k_0^2) \hat{P}(x) = 0, \quad \forall x$$

### Les ondes planes monochromatiques (2/4)

- Recherche de solutions  $\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 \right] \hat{P}(x) = 0, \quad \forall x$
- ➔ équation mise sous la forme : (facteur indépendant de x) (fonction de x) = 0,  $\forall x$
- ➔  $\hat{P}(x) = \hat{A}e^{-ikx} + \hat{B}e^{ikx}$
- Report dans l'équation de Helmholtz :  $(-k^2 + k_0^2) \hat{P}(x) = 0, \quad \forall x$  avec  $k_0 = \omega/c_0$
- ➔  $k^2 = k_0^2$  **équation de dispersion** soit  $k = k_0$  ou  $k = -k_0$
- ➔ choix :  $k = k_0$  redondant avec  $e^{-ikx}$  et  $e^{ikx}$
- ➔  $\hat{p}(x;t) = \hat{A}e^{i(-kx + \omega t)} + \hat{B}e^{i(kx + \omega t)}$ 
  - onde plane progressive vers les x  $\nearrow$
  - onde plane progressive vers les x  $\searrow$

### Les ondes planes monochromatiques (3/4)

- Notation  $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ 
  - source
  - milieu de propagation  $c_0 = \sqrt{\gamma / (\rho_0 \chi_T)}$ 
    - masse volumique
    - compressibilité
- équation de dispersion en fluide non dissipatif :  $k = k_0$
- ⚠ le nombre d'onde  $k$  n'est pas toujours égal à  $k_0$
- Exemple : terme dissipatif de la forme  $R \frac{\partial \hat{p}}{\partial t}$ 

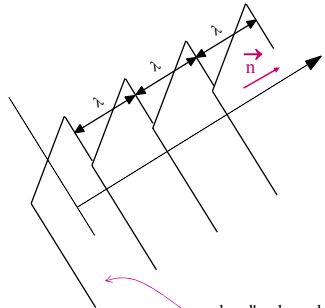
$$\rightarrow \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + R \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \hat{p}(x;t) = 0, \quad \forall x, \forall t$$

$$\hat{P}(x) = \hat{A}e^{-ikx} + \hat{B}e^{ikx} \quad \rightarrow \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\omega R + \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 \right] \hat{P}(x) = 0, \quad \forall x$$

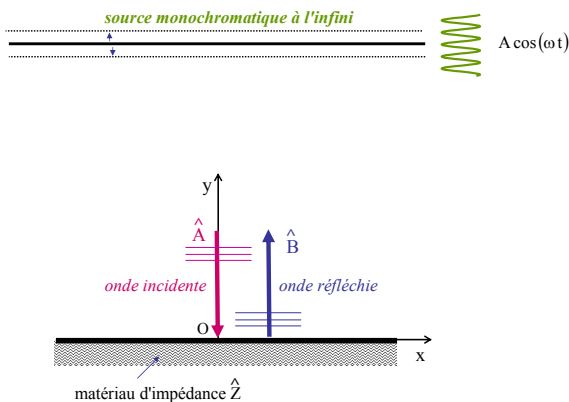
$$\rightarrow \quad (-k^2 + i\omega R + k_0^2) \hat{P}(x) = 0, \quad \forall x$$

$$\rightarrow \quad k^2 = k_0^2 + i\omega R \quad \text{équation de dispersion}$$

### Les ondes planes monochromatiques (4/4)

- $F[k(c_0 t - \vec{n} \cdot \vec{r})]$  de la forme  $C \cos(\omega t - k \vec{n} \cdot \vec{r} + \alpha)$
  - fonction périodique de période  $U = 2\pi$
  - $\lambda = \frac{U}{k} \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k}$  **longueur d'onde**
  - Vecteur nombre d'onde  $\vec{k} = k \vec{n}$
  - ou **vecteur d'onde**
  - plan d'onde = plan équiphase
- 

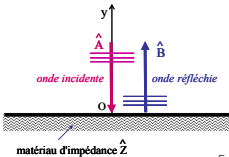
### Interaction d'une onde plane monochromatique avec une paroi d'admittance non nulle, en incidence normale (1/5)



### Interaction d'une onde plane monochromatique avec une paroi d'admittance non nulle, en incidence normale (2/5)

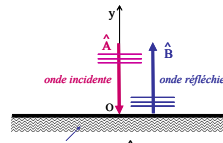
- Equation de propagation
 
$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \hat{p}(y;t) = 0, \quad \forall y \geq 0, \forall t$$
- Champ monochromatique  $\hat{p}(y;t) = \hat{P}(y)e^{i\omega t}$  incident
- Equation de Helmholtz  $\left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 \right] \hat{P}(y) = 0, \quad \forall y \geq 0$
- Conditions aux frontières  $\left[ \frac{\partial}{\partial n} + i k_0 \hat{\beta} \right] \hat{P}(0) = 0$  avec  $\hat{\beta} = \rho_0 c_0 / \hat{Z}$  et  $\vec{n} = -\vec{e}_y$
- ➔  $\left[ -\frac{\partial}{\partial y} + i k_0 \hat{\beta} \right] \hat{P}(y) = 0, \quad y = 0$
- Onde retour  $\hat{B}$  se propage à l'infini

### Interaction d'une onde plane monochromatique avec une paroi d'admittance non nulle, en incidence normale (3/5)



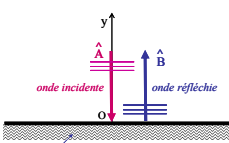
- Solutions du problème
  - $\hat{p}(y;t) = \hat{p}_a(y;t) + \hat{p}_b(y;t) = (\hat{A}e^{ik_0 y} + \hat{B}e^{-ik_0 y})e^{i\omega t}$
  - $\frac{\partial \hat{P}(y)}{\partial y} = ik_0(\hat{A}e^{ik_0 y} - \hat{B}e^{-ik_0 y}) \quad \hat{P}(y)$
- Conditions aux frontières :  $[-\frac{\partial}{\partial y} + ik_0 \hat{\beta}] \hat{P}(y) = 0, y=0 \Rightarrow -ik_0(\hat{A} - \hat{B}) + ik_0 \hat{\beta}(\hat{A} + \hat{B}) = 0$
- équation de dispersion :  $k = k_0 \Rightarrow \hat{A}(1 - \hat{\beta}) = \hat{B}(1 + \hat{\beta})$
- Coefficient de réflexion  $\hat{\mathcal{R}}_p = \frac{\hat{B}}{\hat{A}} = \frac{1 - \hat{\beta}}{1 + \hat{\beta}}$  Si  $\hat{\beta} = 0$  (matériau parfaitement rigide) : réflexion totale
- Pression acoustique  $\hat{P}(y) = \hat{A}(e^{ik_0 y} + \hat{\mathcal{R}}_p e^{-ik_0 y}) = \hat{A}[2\hat{\mathcal{R}}_p \cos(k_0 y) + (1 - \hat{\mathcal{R}}_p)e^{ik_0 y}]$
- $\hat{p}(y;t) = \hat{A}[2\hat{\mathcal{R}}_p \cos(k_0 y) + (1 - \hat{\mathcal{R}}_p)e^{ik_0 y}]e^{i\omega t}$
- *partie stationnaire* *partie propagative*

### Interaction d'une onde plane monochromatique avec une paroi d'admittance non nulle, en incidence normale (4/5)



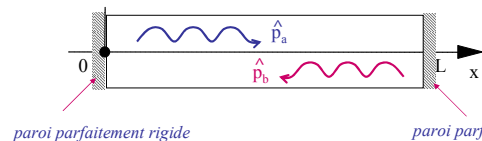
- Vitesse particulaire
  - Equation d'Euler  $\rho_0 \frac{\partial \hat{v}(y;t)}{\partial t} + \text{grad} \hat{p}(y;t) = \vec{0}$
  - $\hat{v}(y;t) = \hat{V}(y)e^{i\omega t} \Rightarrow \hat{v}(y;t) = -\frac{i}{\rho_0 \omega} \text{grad} \hat{P}(y;t)$
  - $\hat{v}(y;t) = \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial \hat{P}(y;t)}{\partial y} = \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial \hat{P}(y)}{\partial y} e^{i\omega t}$
- Pression acoustique  $\hat{P}(y) = \hat{A}(e^{ik_0 y} + \hat{\mathcal{R}}_p e^{-ik_0 y})$
- $\hat{v}(y;t) = -\frac{k}{\rho_0 \omega} \hat{A}(e^{ik_0 y} - \hat{\mathcal{R}}_p e^{-ik_0 y})e^{i\omega t} = -\frac{\hat{A}}{\rho_0 c_0}(e^{ik_0 y} - \hat{\mathcal{R}}_p e^{-ik_0 y})e^{i\omega t}$
- équation de dispersion :  $k = k_0 = \omega/c_0$

### Interaction d'une onde plane monochromatique avec une paroi d'admittance non nulle, en incidence normale (5/5)



- Intensité acoustique  $\bar{I} = \frac{1}{4}(\hat{p}^* \hat{v} + \hat{p} \hat{v}^*)$
- ici  $\bar{I} = \frac{1}{4}(\hat{p}^* \hat{v} + \hat{p} \hat{v}^*)$
- avec  $\begin{cases} \hat{p}(y;t) = \hat{A}(e^{ik_0 y} + \hat{\mathcal{R}}_p e^{-ik_0 y})e^{i\omega t} \\ \hat{v}(y;t) = -\frac{\hat{A}}{\rho_0 c_0}(e^{ik_0 y} - \hat{\mathcal{R}}_p e^{-ik_0 y})e^{i\omega t} \end{cases}$
- $\bar{I} = \frac{-\hat{A}^* \hat{A}}{4\rho_0 c_0} [(e^{-ik_0 y} + \hat{\mathcal{R}}_p^* e^{ik_0 y})(e^{ik_0 y} - \hat{\mathcal{R}}_p e^{-ik_0 y}) + (e^{ik_0 y} + \hat{\mathcal{R}}_p e^{-ik_0 y})(e^{-ik_0 y} - \hat{\mathcal{R}}_p^* e^{ik_0 y})]$
- $\bar{I} = \frac{|\hat{A}|^2}{2\rho_0 c_0} [1 - |\hat{\mathcal{R}}_p|^2]$
- Si la réflexion est totale,  $\hat{\mathcal{R}}_p = 1 \Rightarrow \bar{I} = 0$

### Champ acoustique dans un tube de longueur finie (1/D) (1/5)

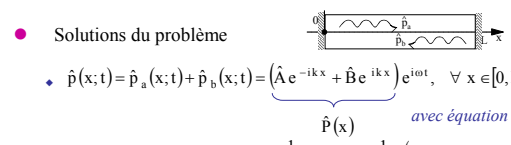


- $t < 0$  : sources acoustiques dans le tube
- $t = 0$  : extinction des sources
- solutions sont cherchées sous la forme d'une **superposition d'ondes planes monochromatiques** qui vérifient les conditions aux limites aux deux extrémités en  $x=0$  et  $x=L$ .

### Champ acoustique dans un tube de longueur finie (1/D) (2/5)

- Equation de propagation  $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \hat{p}(x;t) = 0, \forall x \in [0, L], \forall t \geq 0$
- Conditions aux frontières  $\hat{v}_x(0;t) = 0, \forall t \geq 0$  et  $\hat{v}_x(L;t) = 0, \forall t \geq 0$
- soit  $\frac{\partial \hat{p}(x;t)}{\partial n} = 0, \forall t \geq 0$  en  $x=0$  et  $x=L$
- avec  $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial x}$  en  $x=0$  et  $\frac{\partial}{\partial n} = +\frac{\partial}{\partial x}$  en  $x=L$
- Source éteinte à  $t=0$
- Solution cherchée à caractère harmonique  $\hat{p}(x;t) = \hat{P}(x)e^{i\omega t}$
- Equation de Helmholtz  $\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{P}(x)}{\partial x^2} + (\omega/c_0)^2 \hat{P}(x) &= 0, \forall x \in [0, L], \\ \frac{\partial \hat{P}(x)}{\partial x} &= 0, x=0 \text{ et } x=L, \end{aligned} \right.$
- Conditions aux frontières

### Champ acoustique dans un tube de longueur finie (1/D) (3/5)



- Solutions du problème  $\hat{p}(x;t) = \hat{p}_a(x;t) + \hat{p}_b(x;t) = (\hat{A}e^{-ik_0 x} + \hat{B}e^{ik_0 x})e^{i\omega t}, \forall x \in [0, L]$
- avec équation de dispersion :  $k = k_0$
- Vitesse particulaire  $\hat{v}_x = \frac{-1}{i\omega\rho_0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = \frac{-1}{\rho_0 c_0} (-\hat{A}e^{-ik_0 x} + \hat{B}e^{ik_0 x})e^{i\omega t}$
- Conditions aux frontières  $\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{P}(x)}{\partial x^2} + (\omega/c_0)^2 \hat{P}(x) = 0, \forall x \in [0, L], \\ \frac{\partial \hat{P}(x)}{\partial x} = 0, x=0 \text{ et } x=L, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-\hat{A} + \hat{B})e^{i\omega t} = 0, \forall t, \\ (-\hat{A}e^{-ik_0 L} + \hat{B}e^{ik_0 L})e^{i\omega t} = 0, \forall t. \end{cases}$
- $\hat{A} = \hat{B}$ , soit  $2i \sin(kL) = 0$  c.à.d.  $kL = m\pi, m \in \mathbb{N}$
- $\hat{A}(-e^{-ik_0 L} + e^{ik_0 L}) = 0 \Rightarrow \frac{2i \sin(kL)}{2i \sin(kL)} \Rightarrow k_m = \frac{m\pi}{L}, m \in \mathbb{N}$  **valeurs propres**
- Solution triviale  $\hat{A}_m = 0, \forall m$  SAUF SI  $\omega_m = k_m c_0 = \frac{m\pi c_0}{L}$  ; **fréquences propres**  $f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{m c_0}{2L}$

### Champ acoustique dans un tube de longueur finie (1/D) (4/5)

• Champ complexe porté par chaque mode m

• pression  $\hat{p}_m(x;t) = \hat{A}_m (e^{-ik_m x} + e^{ik_m x}) e^{i\omega_m t} = 2\hat{A}_m \cos(k_m x) e^{i\omega_m t}$

• vitesse  $\hat{v}_m(x;t) = \frac{-\hat{A}_m}{\rho_0 c_0} (-e^{-ik_m x} + e^{ik_m x}) e^{i\omega_m t} = \frac{-2i\hat{A}_m}{\rho_0 c_0} \sin(k_m x) e^{i\omega_m t}$

• Champ total : superposition de modes propres

• pression  $\hat{p}(x;t) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{p}_m(x;t) = \sum_{m=0}^{\infty} 2\hat{A}_m \cos(k_m x) e^{i\omega_m t}$

• vitesse  $\hat{v}_x(x;t) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{v}_m(x;t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{-2i\hat{A}_m}{\rho_0 c_0} \sin(k_m x) e^{i\omega_m t}$

avec  $\hat{A}_m = |\hat{A}_m| e^{i\alpha_m}$

### Champ acoustique dans un tube de longueur finie (1/D) (5/5)

• Champ réel porté par chaque mode m

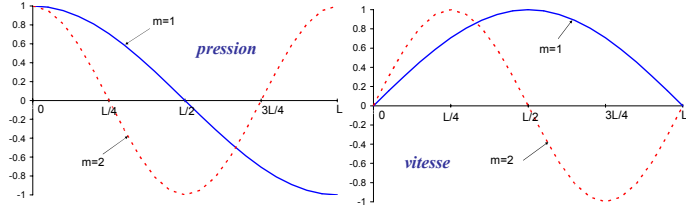
• pression  $p_m(x;t) = \text{Re}[\hat{p}_m(x;t)] = 2|\hat{A}_m| \cos(k_m x) \cos(\omega_m t + \alpha_m)$

• vitesse  $v_m(x;t) = \text{Re}[\hat{v}_m(x;t)] = \frac{2|\hat{A}_m|}{\rho_0 c_0} \sin(k_m x) \sin(\omega_m t + \alpha_m)$

• Champ total réel : superposition de modes propres

• pression  $p(x;t) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x;t) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} |\hat{A}_m| \cos(k_m x) \cos(\omega_m t + \alpha_m)$

• vitesse  $v(x;t) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m(x;t) = \frac{2}{\rho_0 c_0} \sum_{m=0}^{\infty} |\hat{A}_m| \sin(k_m x) \sin(\omega_m t + \alpha_m)$



### Solutions de problèmes à 3 dimensions (1/5)

- Equation de propagation  $\left[ \Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \hat{p}(\vec{r};t) = 0, \forall \vec{r} \in \mathcal{V}, \forall t$
- Equation de Helmholtz  $\left[ \Delta + \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 \right] \hat{p}(\vec{r};\omega) = 0, \forall \vec{r} \in \mathcal{V}'$



Pas de solution générale connue à l'équation de Helmholtz en dehors du cas de propagation unidimensionnel :

$$\hat{p}(\vec{r};t) = \hat{f}(\vec{n} \cdot \vec{r} - c_0 t) + \hat{g}(\vec{n} \cdot \vec{r} + c_0 t)$$



Solutions à variables séparées ou représentation intégrale

- Coordonnées cartésiennes  $\hat{p}(x,y,z;t) = \hat{X}(x)\hat{Y}(y)\hat{Z}(z)\hat{T}(t)$
- Coordonnées cylindriques  $\hat{p}(r,\psi,z;t) = \hat{R}(r)\hat{\Psi}(\psi)\hat{Z}(z)\hat{T}(t)$
- Coordonnées sphériques  $\hat{p}(r,\theta,\varphi;t) = \hat{R}(r)\hat{\Theta}(\theta)\hat{\Phi}(\varphi)\hat{T}(t)$

Solution à variables séparées  $\equiv$  Base sur laquelle toute solution de problème peut être exprimée

### Solutions de problèmes à 3 dimensions (2/5)

• Equation de propagation

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \hat{p}(x,y,z;t) = 0, \forall (x,y,z) \in \mathcal{V}, \forall t$$

• Solutions à variables séparées  $\hat{p}(x,y,z;t) = \hat{X}(x)\hat{Y}(y)\hat{Z}(z)\hat{T}(t)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\hat{X}} \frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial x^2} + \frac{1}{\hat{Y}} \frac{\partial^2 \hat{Y}}{\partial y^2} + \frac{1}{\hat{Z}} \frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial z^2} = \frac{1}{\hat{T}} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial t^2}, \forall (x,y,z) \in \mathcal{V}, \forall t$$

fonction de x,y,z      fonction de t

$$= -k_0^2 \quad \text{on pose } k_0^2 c_0^2 = \omega^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial t^2} + \omega^2 \hat{T} = 0, \forall t \quad \Rightarrow \begin{cases} e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{cases} \quad \text{choix d'une convention temporelle}$$

$$\Rightarrow \hat{T}(t) = \hat{G} e^{i\omega t}$$

### Solutions de problèmes à 3 dimensions (3/5)

• Solutions à variables séparées - solution en x

$$\frac{1}{\hat{X}} \frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial x^2} = \frac{1}{\hat{Y}} \frac{\partial^2 \hat{Y}}{\partial y^2} + \frac{1}{\hat{Z}} \frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial z^2} - k_0^2, \forall (x,y,z) \in \mathcal{V}'$$

fonction de x      fonction de y,z

$$= -k_x^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial x^2} + k_x^2 \hat{X} = 0, \forall x \quad \Rightarrow \begin{cases} \hat{X}(x) = \hat{A} e^{-ik_x x} + \hat{B} e^{ik_x x} \\ \text{ou } \hat{X}(x) = \hat{A}' \cos(k_x x) + \hat{B}' \sin(k_x x) \end{cases}$$

avec  $\hat{A}' = \hat{A} + \hat{B}$  et  $\hat{B}' = i(\hat{B} - \hat{A})$

### Solutions de problèmes à 3 dimensions (4/5)

• Solutions à variables séparées - solution en y

$$\frac{1}{\hat{Y}} \frac{\partial^2 \hat{Y}}{\partial y^2} = -\frac{1}{\hat{Z}} \frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial z^2} - k_0^2 + k_x^2, \forall (y,z) \in \mathcal{V}'$$

fonction de y      fonction de z

$$= -k_y^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{Y}}{\partial y^2} + k_y^2 \hat{Y} = 0, \forall y \quad \Rightarrow \begin{cases} \hat{Y}(y) = \hat{C} e^{-ik_y y} + \hat{D} e^{ik_y y} \\ \text{ou } \hat{Y}(y) = \hat{C}' \cos(k_y y) + \hat{D}' \sin(k_y y) \end{cases}$$

• Solutions à variables séparées - solution en z

$$\frac{1}{\hat{Z}} \frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial z^2} = -k_0^2 + k_x^2 + k_y^2, \forall z \in \mathcal{V}'$$

fonction de z      constante

$$= -k_z^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial z^2} + k_z^2 \hat{Z} = 0, \forall z \quad \Rightarrow \begin{cases} \hat{Z}(z) = \hat{E} e^{-ik_z z} + \hat{F} e^{ik_z z} \\ \text{ou } \hat{Z}(z) = \hat{E}' \cos(k_z z) + \hat{F}' \sin(k_z z) \end{cases}$$

### Solutions de problèmes à 3 dimensions (5/5)

• Solutions à variables séparées

$$\hat{p}(x, y, z, t) = \underbrace{(\hat{A} e^{-ik_x x} + \hat{B} e^{ik_x x})}_{X(x)} \underbrace{(\hat{C} e^{-ik_y y} + \hat{D} e^{ik_y y})}_{Y(y)} \underbrace{(\hat{E} e^{-ik_z z} + \hat{F} e^{ik_z z})}_{Z(z)} \underbrace{e^{i\omega t}}_{T(t)}$$

ou  $\hat{p}(x, y, z, t) = [\hat{A}' \cos(k_x x) + \hat{B}' \sin(k_x x)] [\hat{C}' \cos(k_y y) + \hat{D}' \sin(k_y y)] \cdot [\hat{E}' \cos(k_z z) + \hat{F}' \sin(k_z z)] \cos(\omega t)$ .

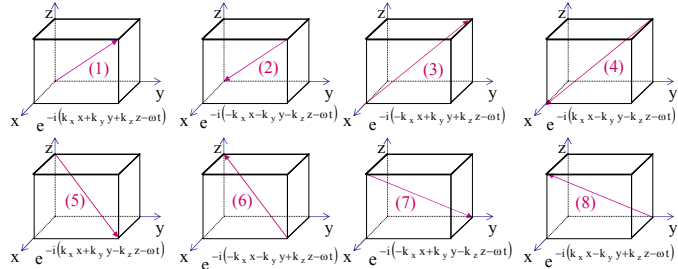
ou  $\hat{p}(x, y, z, t) = \hat{A}_0 [e^{-ik_x x} + \hat{\mathcal{R}}_1 e^{ik_x x}] [e^{-ik_y y} + \hat{\mathcal{R}}_2 e^{ik_y y}] [e^{-ik_z z} + \hat{\mathcal{R}}_3 e^{ik_z z}] e^{i\omega t}$

ou  $\hat{p}(x, y, z, t) = \hat{A}_0' [\cos(k_x x) + \hat{\mathcal{R}}_1' \sin(k_x x)] [\cos(k_y y) + \hat{\mathcal{R}}_2' \sin(k_y y)] \cdot [\cos(k_z z) + \hat{\mathcal{R}}_3' \sin(k_z z)] \cos(\omega t)$ .

sous réserve que :  $-k_z^2 = -k_0^2 + k_x^2 + k_y^2$  soit  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k_0^2$   
avec  $k_0 = \omega/c_0$   
équation de dispersion

### Ondes en espace 3D infini

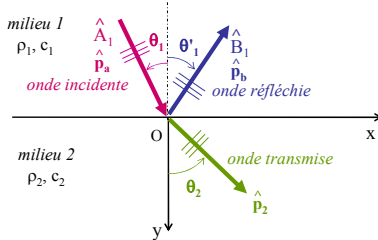
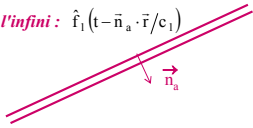
$$\hat{p}(x, y, z, t) = \hat{A}_0 e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} + \hat{A}_0 \hat{\mathcal{R}}_1 \hat{\mathcal{R}}_2 \hat{\mathcal{R}}_3 e^{-i(-k_x x - k_y y - k_z z - \omega t)} + \hat{A}_0 \hat{\mathcal{R}}_1 e^{-i(-k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)} + \hat{A}_0 \hat{\mathcal{R}}_2 \hat{\mathcal{R}}_3 e^{-i(k_x x - k_y y - k_z z - \omega t)} + \hat{A}_0 \hat{\mathcal{R}}_3 e^{-i(k_x x + k_y y - k_z z - \omega t)} + \hat{A}_0 \hat{\mathcal{R}}_1 \hat{\mathcal{R}}_2 e^{-i(-k_x x - k_y y + k_z z - \omega t)} + \hat{A}_0 \hat{\mathcal{R}}_2 e^{-i(k_x x - k_y y + k_z z - \omega t)}$$



→  $\hat{p}_i(x, y, z, t) = \hat{A}_i e^{-i(\vec{k}_i \cdot \vec{OM} - \omega t)}$

### Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux fluides différents (1/3)

source à l'infini :  $\hat{f}_1(t - \vec{n}_a \cdot \vec{r} / c_1)$



### Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux fluides différents (2/3)

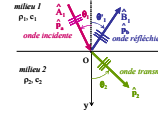
- Milieu 1 : problème bien posé
- Milieu 2 : problème bien posé

♦ Equation de propagation

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{p}_1(x, y, t) = 0, \quad \forall x, \forall y \leq 0, \forall t$$

♦ Equation de propagation

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{p}_2(x, y, t) = 0, \quad \forall x, \forall y \geq 0, \forall t$$



♦ Conditions aux frontières

$$\hat{p}_1(x, y, t) = \hat{p}_2(x, y, t), \quad \forall x, y = 0, \forall t$$

$$\hat{v}_1(x, y, t) \cdot \vec{n} = \hat{v}_2(x, y, t) \cdot \vec{n}, \quad \forall x, y = 0, \forall t$$

soit  $\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial y}(x, y, t) = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial y}(x, y, t), \quad \forall x, y = 0, \forall t$

♦ Champ incident entretenu

$$\hat{f}_1(t - \vec{n}_a \cdot \vec{r} / c_1)$$

♦ Conditions de rayonnement à l'infini

• Milieu 1 : solution

$$\hat{p}_1(x, y, t) = \hat{f}_1\left(t - \frac{\vec{n}_a \cdot \vec{r}}{c_1}\right) + \hat{g}_1\left(t - \frac{\vec{n}_b \cdot \vec{r}}{c_1}\right)$$

• Milieu 2 : solution

$$\hat{p}_2(x, y, t) = \hat{f}_2\left(t - \frac{\vec{n}_2 \cdot \vec{r}}{c_2}\right)$$

### Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux fluides différents (3/3)

• Lois de Snell-Descartes

- Conditions aux frontières  $\hat{p}_1(x, 0, t) = \hat{p}_2(x, 0, t), \quad \forall x, y = 0, \forall t$

→ factorisation d'une fonction de x et de t

avec  $\hat{p}_1(x, y, t) = \hat{f}_1\left(t - \frac{\vec{n}_a \cdot \vec{r}}{c_1}\right) + \hat{g}_1\left(t - \frac{\vec{n}_b \cdot \vec{r}}{c_1}\right)$  et  $\hat{p}_2(x, y, t) = \hat{f}_2\left(t - \frac{\vec{n}_2 \cdot \vec{r}}{c_2}\right)$

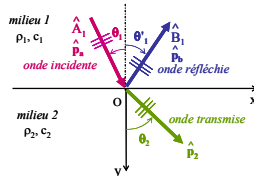
→ fonctions égales :  $\hat{f}_1 = \hat{g}_1 = \hat{f}_2$   
et arguments égaux :  $t - \frac{\vec{n}_a \cdot \vec{r}}{c_1} = t - \frac{\vec{n}_b \cdot \vec{r}}{c_1} = t - \frac{\vec{n}_2 \cdot \vec{r}}{c_2}, \quad \forall x, y = 0, \forall t$

→  $\frac{n_{x_a} x}{c_1} = \frac{n_{x_b} x}{c_1} = \frac{n_{x_2} x}{c_2}, \quad \forall x, y = 0$

→  $\frac{n_{y_a}}{c_1} = \frac{n_{y_b}}{c_1} = \frac{n_{y_2}}{c_2}$

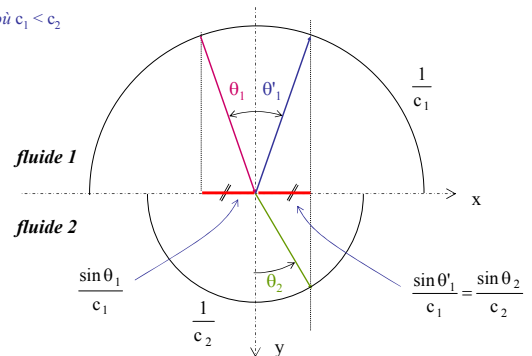
→  $\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta'_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2}$

→  $\theta_1 = \theta'_1$

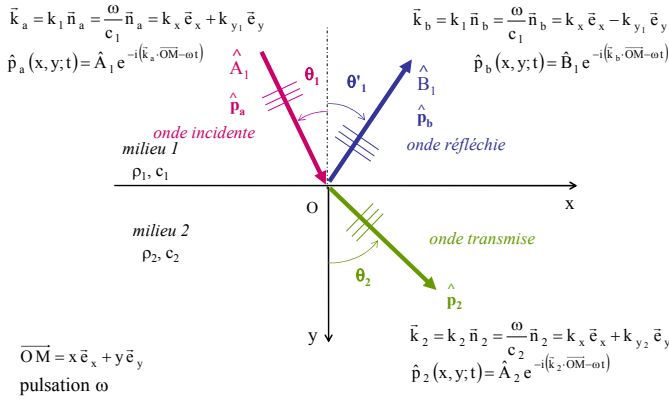


### Surfaces des lentilles

cas où  $c_1 < c_2$



Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux fluides différents - régime harmonique (1/12)



Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux fluides différents - régime harmonique (2/12)

- $\hat{p}_1(x,y,t) = \hat{p}_a(x,y,t) + \hat{p}_b(x,y,t) = \hat{A}_1 e^{-i(k_x x + k_y y - \omega t)} + \hat{B}_1 e^{-i(k_x x - k_y y - \omega t)}$ 

$$\Rightarrow \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial y}(x,y,t) = i k_{y1} [-\hat{A}_1 e^{-i k_{y1} y} + \hat{B}_1 e^{i k_{y1} y}] e^{-i(k_x x - \omega t)}$$
- $\hat{p}_2(x,y,t) = \hat{A}_2 e^{-i(k_x x + k_y y - \omega t)} \Rightarrow \frac{\partial \hat{p}_2}{\partial y}(x,y,t) = -i k_{y2} \hat{A}_2 e^{-i(k_x x - \omega t)}$
- Egalité des pressions en  $y = 0$** 

$$\hat{A}_1 e^{-i(k_x x - \omega t)} + \hat{B}_1 e^{-i(k_x x - \omega t)} = \hat{A}_2 e^{-i(k_x x - \omega t)}, \forall x, \forall t$$

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow -\hat{\mathcal{R}}_p + \hat{\mathcal{T}}_p = 1 \text{ avec } \hat{\mathcal{R}}_p = \hat{B}_1/\hat{A}_1 \text{ et } \hat{\mathcal{T}}_p = \hat{A}_2/\hat{A}_1$$
- Egalité des vitesses normales en  $y = 0$** 

$$\frac{i k_{y1} (-\hat{A}_1 + \hat{B}_1) e^{-i(k_x x - \omega t)}}{\rho_1} = \frac{-i k_{y2} \hat{A}_2 e^{-i(k_x x - \omega t)}}{\rho_2}, \forall x, y=0, \forall t$$

$$\Rightarrow \frac{k_{y1}}{\rho_1} \hat{\mathcal{R}}_p + \frac{k_{y2}}{\rho_2} \hat{\mathcal{T}}_p = \frac{k_{y1}}{\rho_1}$$

Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux fluides différents - régime harmonique (3/12)

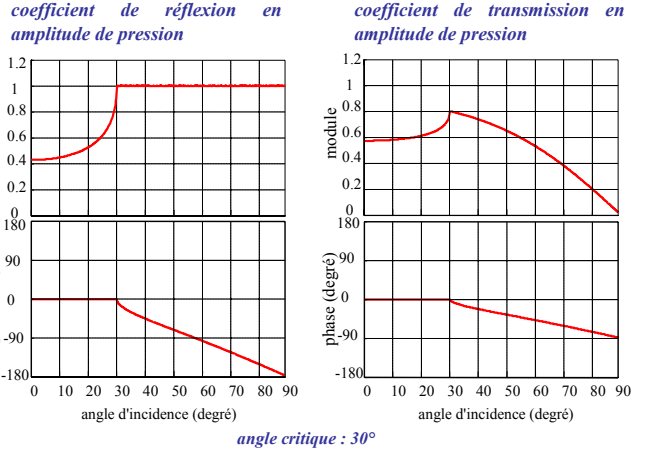
• Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de pression

$$\begin{cases} -\hat{\mathcal{R}}_p + \hat{\mathcal{T}}_p = 1 \\ \frac{k_{y1}}{\rho_1} \hat{\mathcal{R}}_p + \frac{k_{y2}}{\rho_2} \hat{\mathcal{T}}_p = \frac{k_{y1}}{\rho_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathcal{R}}_p = \frac{-k_{y2}/\rho_2 + k_{y1}/\rho_1}{k_{y2}/\rho_2 + k_{y1}/\rho_1} \\ \hat{\mathcal{T}}_p = \frac{2k_{y1}/\rho_1}{k_{y2}/\rho_2 + k_{y1}/\rho_1} \end{cases}$$

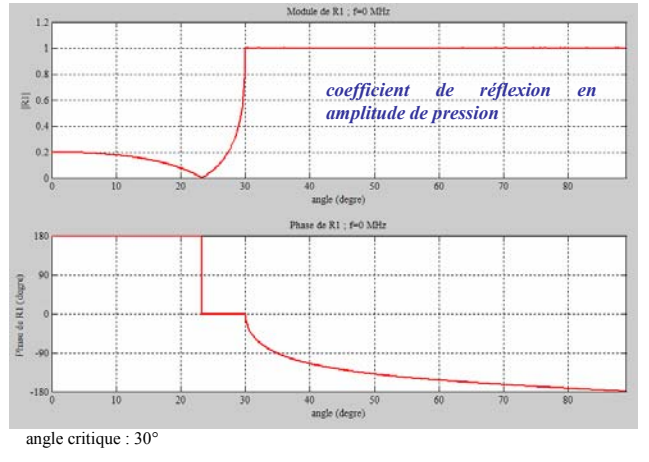
$$\text{ou } \begin{cases} \hat{\mathcal{R}}_p = \frac{-\cos\theta_2/Z_2 + \cos\theta_1/Z_1}{\cos\theta_2/Z_2 + \cos\theta_1/Z_1} \\ \hat{\mathcal{T}}_p = \frac{2\cos\theta_1/Z_1}{\cos\theta_2/Z_2 + \cos\theta_1/Z_1} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \hat{\mathcal{R}}_p = \frac{Z_2/\cos\theta_2 - Z_1/\cos\theta_1}{Z_1/\cos\theta_1 + Z_2/\cos\theta_2} \\ \hat{\mathcal{T}}_p = \frac{2Z_2/\cos\theta_2}{Z_1/\cos\theta_1 + Z_2/\cos\theta_2} \end{cases}$$

avec  $Z_1 = \rho_1 c_1$  ;  $Z_2 = \rho_2 c_2$  impédances caractéristiques  
 $k_{y1} = k_1 \cos\theta_1$  ;  $k_{y2} = k_2 \cos\theta_2$

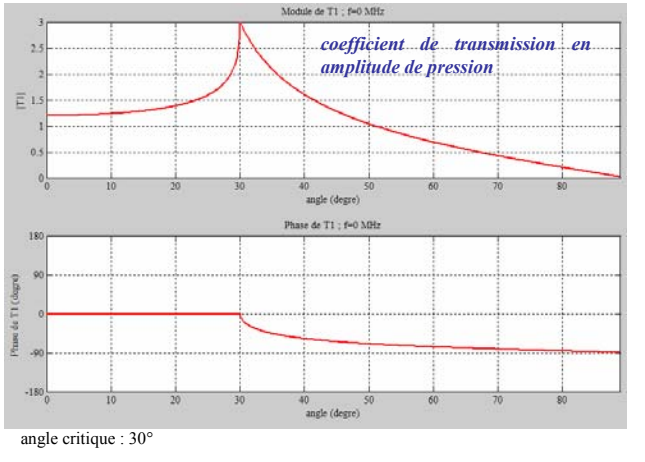
Exemple :  $\rho_1=2000 \text{ kg/m}^3, c_1=750 \text{ m/s}, \rho_2=2500 \text{ kg/m}^3, c_2=1500 \text{ m/s}$



Exemple :  $\rho_1=3000 \text{ kg/m}^3, c_1=750 \text{ m/s}, \rho_2=1000 \text{ kg/m}^3, c_2=1500 \text{ m/s}$

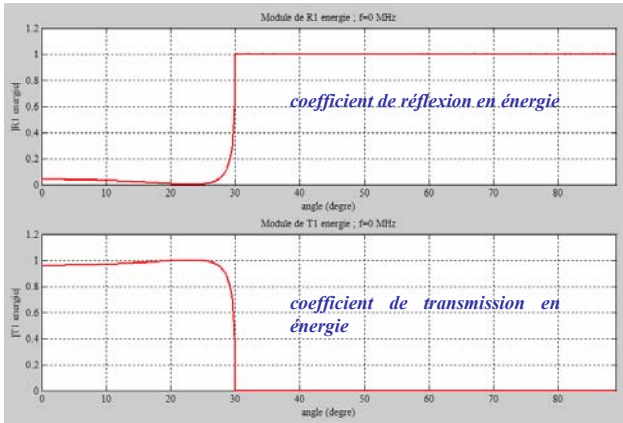


Exemple :  $\rho_1=3000 \text{ kg/m}^3, c_1=750 \text{ m/s}, \rho_2=1000 \text{ kg/m}^3, c_2=1500 \text{ m/s}$



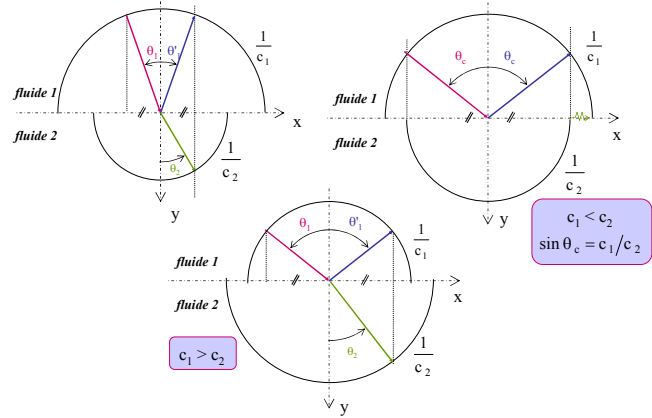


Exemple :  $\rho_1=3000 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_1=750 \text{ m/s}$ ,  $\rho_2=1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_2=1500 \text{ m/s}$



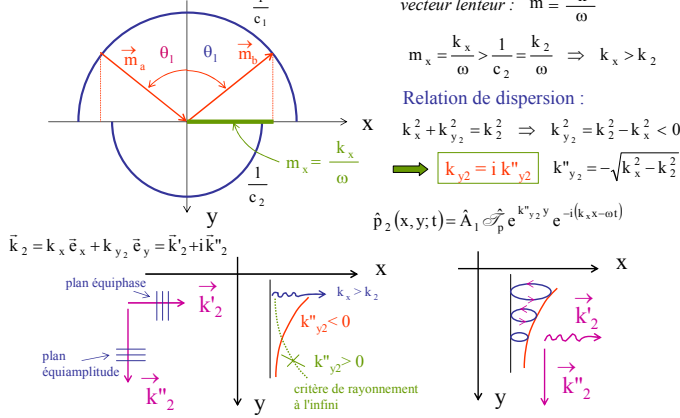
### Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux fluides différents - régime harmonique (4/12)

- Ondes évanescentes (1/4)



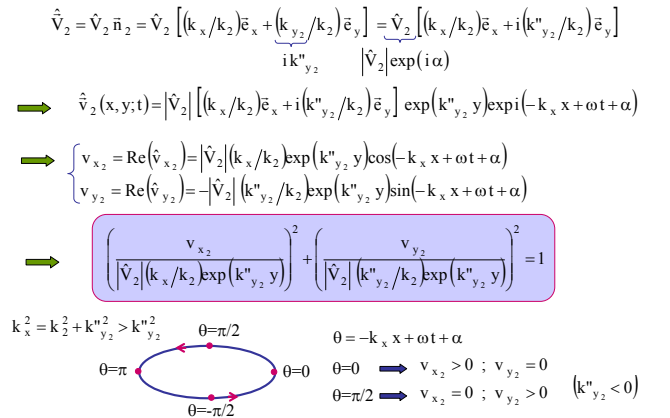
### Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux fluides différents - régime harmonique (5/12)

- Ondes évanescentes (2/4)



### Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux fluides différents - régime harmonique (6/12)

- Ondes évanescentes (3/4)



### Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux fluides différents - régime harmonique (7/12)

- Ondes évanescentes (4/4)

coefficient de réflexion :  $\hat{\mathcal{R}}_p = \frac{-k_{y2}/\rho_2 + k_{y1}/\rho_1}{k_{y2}/\rho_2 + k_{y1}/\rho_1}$  avec  $k_{y2} = i k''_{y2}$

$\hat{\mathcal{R}}_p = \frac{-i k''_{y2}/\rho_2 + k_{y1}/\rho_1}{i k''_{y2}/\rho_2 + k_{y1}/\rho_1} \Rightarrow |\hat{\mathcal{R}}_p| = 1$  réflexion totale dans le milieu 1

MAIS présence d'énergie acoustique dans le milieu 2 de transmission.

Onde évanescente  $\equiv$  Onde d'accompagnement dans le milieu 2, qui accompagne le phénomène de réflexion totale dans le milieu 1, et qui a son énergie propre.

Problème **monochromatique**  $\equiv$  problème en **régime établi** : pendant la période du régime transitoire, l'énergie ayant pénétré dans le milieu 2 s'y trouve de manière permanente pendant un temps infini.

Le problème monochromatique est donc en réalité une situation asymptotique, pour un temps  $t$  très grand, qui modélise de manière trop forte la réalité physique, ce qui implique l'existence d'une onde évanescente d'extension infinie dans le sens de l'interface.

### Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux fluides différents - régime harmonique (8/12)

- Flux d'énergie incident

$\hat{p}_a(x,y,t) = \hat{A}_1 e^{-i k_{y1} y} e^{-i(k_x x - \omega t)} \Rightarrow \hat{v}_a(x,y,t) = \frac{i}{\rho_1 \omega} \frac{\partial \hat{p}_a(x,y,t)}{\partial y} = \frac{k_{y1}}{\rho_1 \omega} \hat{A}_1 e^{-i k_{y1} y} e^{-i(k_x x - \omega t)}$

$I_{y_a} = \frac{1}{4} (\hat{p}_a^* \hat{v}_a + \hat{p}_a \hat{v}_a^*) = \frac{1}{2} |\hat{A}_1|^2 \frac{k_{y1}}{\rho_1 \omega}$

- Flux d'énergie réfléchi

$\hat{p}_b(x,y,t) = \hat{A}_1 \hat{\mathcal{R}}_p e^{i k_{y1} y} e^{-i(k_x x - \omega t)} \Rightarrow \hat{v}_b(x,y,t) = \frac{i}{\rho_1 \omega} \frac{\partial \hat{p}_b(x,y,t)}{\partial y} = \frac{-k_{y1}}{\rho_1 \omega} \hat{A}_1 \hat{\mathcal{R}}_p e^{i k_{y1} y} e^{-i(k_x x - \omega t)}$

$I_{y_b} = \frac{1}{4} (\hat{p}_b^* \hat{v}_b + \hat{p}_b \hat{v}_b^*) = -\frac{1}{2} |\hat{A}_1|^2 |\hat{\mathcal{R}}_p|^2 \frac{k_{y1}}{\rho_1 \omega} \Rightarrow \mathcal{R}^E = (-I_{y_b})/I_{y_a} = |\hat{\mathcal{R}}_p|^2$

coefficient de réflexion en énergie

- Flux d'énergie transmis

$\hat{p}_2(x,y,t) = \hat{A}_1 \hat{\mathcal{C}}_p e^{-i k_{y2} y} e^{-i(k_x x - \omega t)} \Rightarrow \hat{v}_2(x,y,t) = \frac{i}{\rho_2 \omega} \frac{\partial \hat{p}_2(x,y,t)}{\partial y} = \frac{k_{y2}}{\rho_2 \omega} \hat{A}_1 \hat{\mathcal{C}}_p e^{-i k_{y2} y} e^{-i(k_x x - \omega t)}$

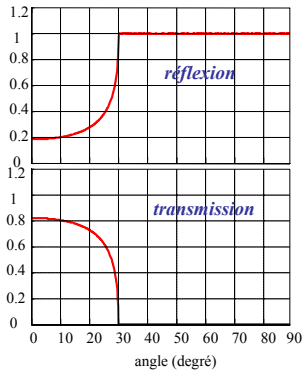
$I_{y_2} = \frac{1}{4} (\hat{p}_2^* \hat{v}_2 + \hat{p}_2 \hat{v}_2^*) = \frac{1}{4} |\hat{A}_1|^2 |\hat{\mathcal{C}}_p|^2 \frac{1}{\rho_2 \omega} (k_{y2} + k''_{y2}) y e^{-i(k_{y2} - k''_{y2}) y}$

$\mathcal{T}^E = I_{y_2}/I_{y_a} = \frac{Z_1 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2} |\hat{\mathcal{C}}_p|^2 \quad \theta < \theta_c \quad \mathcal{T}^E = I_{y_2}/I_{y_a} = 0 \quad \theta > \theta_c$

coefficient de transmission en énergie

Exemple :  $\rho_1=2000 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_1=750 \text{ m/s}$ ,  $\rho_2=2500 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_2=1500 \text{ m/s}$

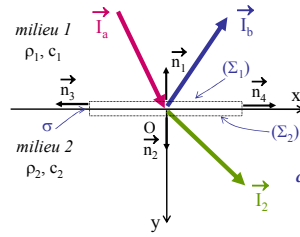
coefficients en énergie



angle critique :  $30^\circ$

### Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux fluides différents - régime harmonique (9/12)

- Conservation de l'énergie



$$\text{div } \vec{I} = 0 \implies \Phi_{\text{tot}} = \iint_S \vec{I} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

$$\text{avec } (S) = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \sigma$$

$$\text{c.à.d.} \iint_{\Sigma_1} \vec{I}_1 \cdot \vec{n}_1 \, d\Sigma_1 + \iint_{\Sigma_2} \vec{I}_2 \cdot \vec{n}_2 \, d\Sigma_2 = 0$$

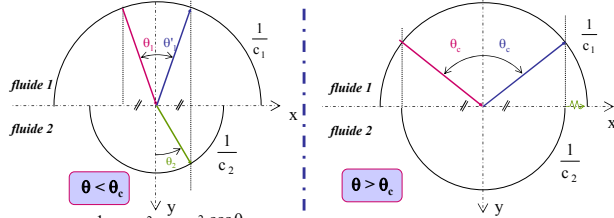
$$\text{c.à.d.} \iint_{\Sigma_1} -(I_{y_a} + I_{y_b}) \, d\Sigma_1 + \iint_{\Sigma_2} I_{y_2} \, d\Sigma_2 = 0$$

$$\implies -I_{y_a} - I_{y_b} + I_{y_2} = 0 \implies (-I_{y_b}) + I_{y_2} = I_{y_a}$$

### Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux fluides différents - régime harmonique (11/12)

- Flux d'énergie transmis

$$I_{y_2} = \frac{1}{4} (\hat{p}_2^* \hat{v}_{y_2} + \hat{p}_2 \hat{v}_{y_2}^*) = \frac{1}{4} |\hat{A}_1|^2 |\hat{\mathcal{S}}_p|^2 \frac{1}{\rho_2 \omega} (\hat{k}_{y_2} + \hat{k}_{y_2}^*) e^{-i(\hat{k}_{y_2} - \hat{k}_{y_2}^*)y}$$



$$I_{y_2} = \frac{1}{2} |\hat{A}_1|^2 |\hat{\mathcal{S}}_p|^2 \frac{\cos \theta_2}{Z_2}$$

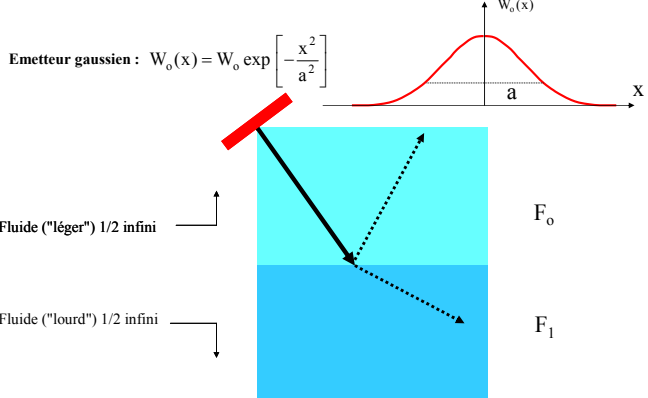
conservation de l'énergie :

$$1 = |\hat{\mathcal{R}}_p|^2 + \frac{|\hat{\mathcal{S}}_p|^2 \cos \theta_2}{\cos \theta_1} \frac{k_2 \rho_1}{k_1 \rho_2}$$

ou

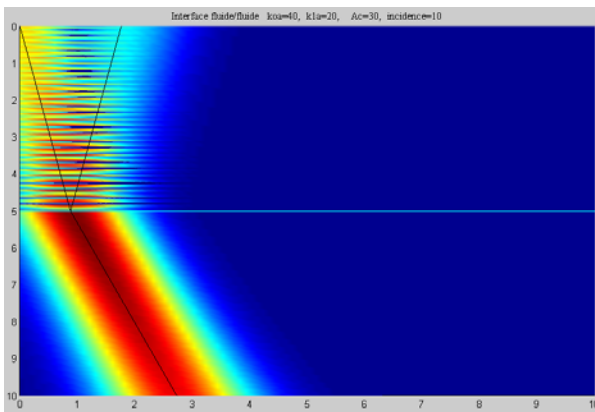
$$1 = |\hat{\mathcal{R}}_p|^2 + \frac{Z_1 / \cos \theta_1}{Z_2 / \cos \theta_2} |\hat{\mathcal{S}}_p|^2$$

### Faisceau gaussien incident sur une interface (1/6)



Programmes réalisés par Ph. Gatignol, Pr., Université de Technologie de Compiègne

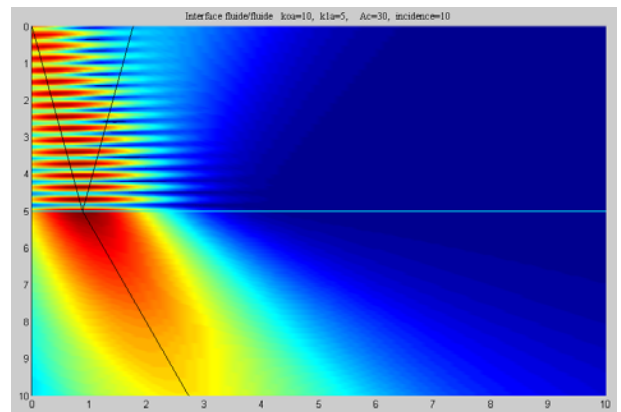
### Incidence sous-critique, haute fréquence ( $k_0 a = 40$ )



$\rho_0/\rho_1 = 0,5$

Programmes réalisés par Ph. Gatignol, Pr., Université de Technologie de Compiègne

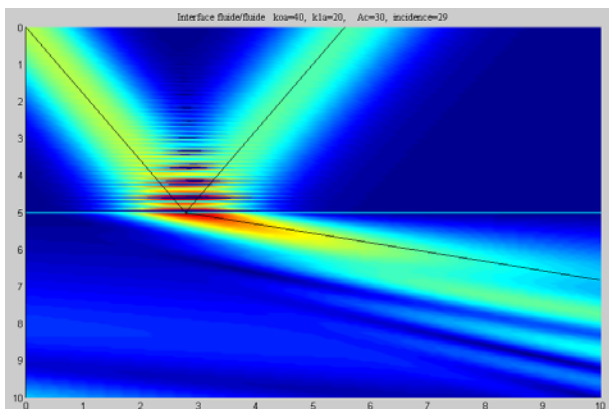
### Incidence sous-critique, basse fréquence ( $k_0 a = 10$ )



$\rho_0/\rho_1 = 0,5$

Programmes réalisés par Ph. Gatignol, Pr., Université de Technologie de Compiègne

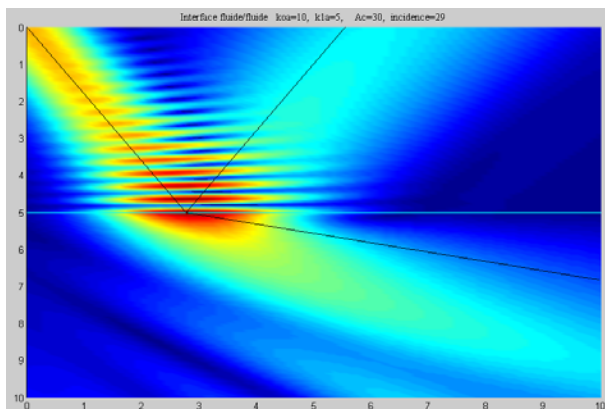
Incidence presque critique, haute fréquence ( $k_0 a = 40$ )



$\rho_0/\rho_1 = 0,5$

Programmes réalisés par Ph. Gagnon, Pr., Université de Technologie de Compiègne

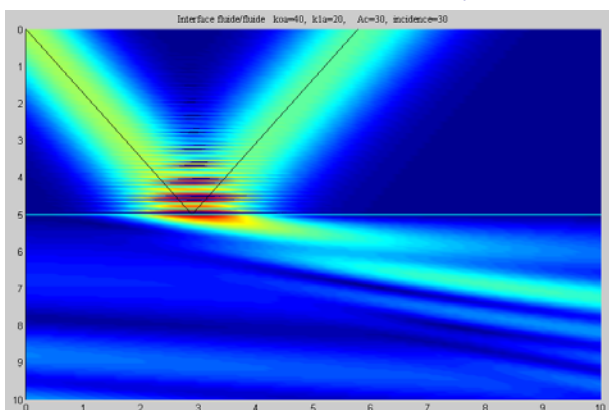
Incidence presque critique, basse fréquence ( $k_0 a = 10$ )



$\rho_0/\rho_1 = 0,5$

Programmes réalisés par Ph. Gagnon, Pr., Université de Technologie de Compiègne

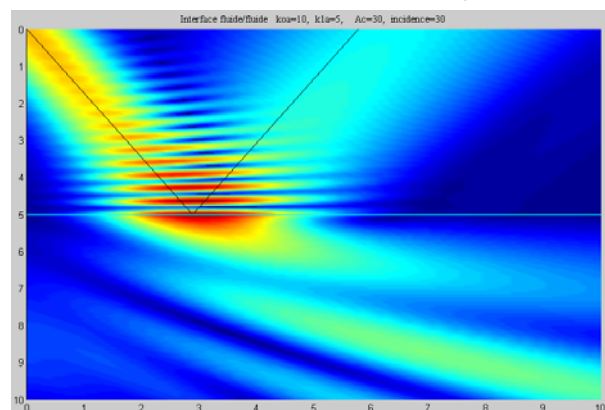
Incidence critique, haute fréquence ( $k_0 a = 40$ )



$\rho_0/\rho_1 = 0,5$

Programmes réalisés par Ph. Gagnon, Pr., Université de Technologie de Compiègne

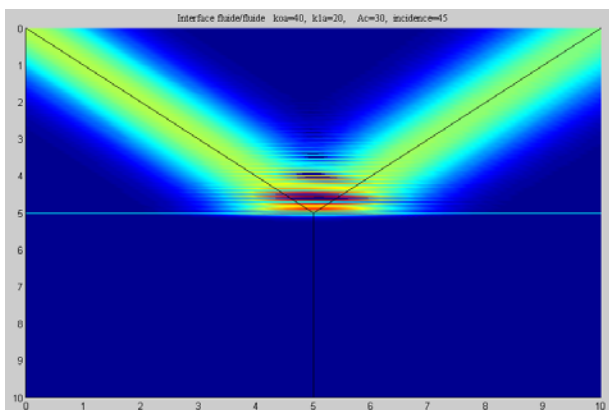
Incidence critique, basse fréquence ( $k_0 a = 10$ )



$\rho_0/\rho_1 = 0,5$

Programmes réalisés par Ph. Gagnon, Pr., Université de Technologie de Compiègne

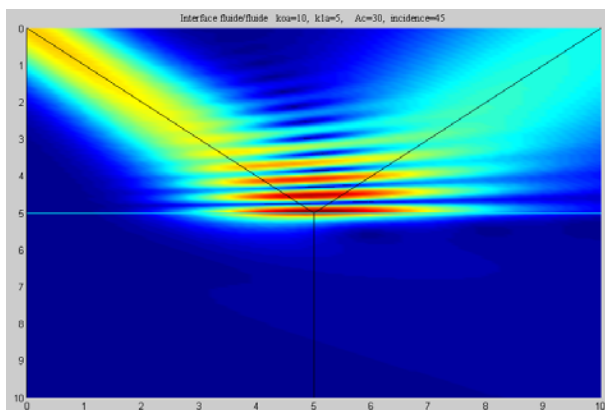
Incidence sur-critique, haute fréquence ( $k_0 a = 40$ )



$\rho_0/\rho_1 = 0,5$

Programmes réalisés par Ph. Gagnon, Pr., Université de Technologie de Compiègne

Incidence sur-critique, basse fréquence ( $k_0 a = 10$ )



$\rho_0/\rho_1 = 0,5$

Programmes réalisés par Ph. Gagnon, Pr., Université de Technologie de Compiègne

### Réflexion et transmission à l'interface entre deux milieux fluides différents - régime harmonique (12/12)

• Interface air - eau

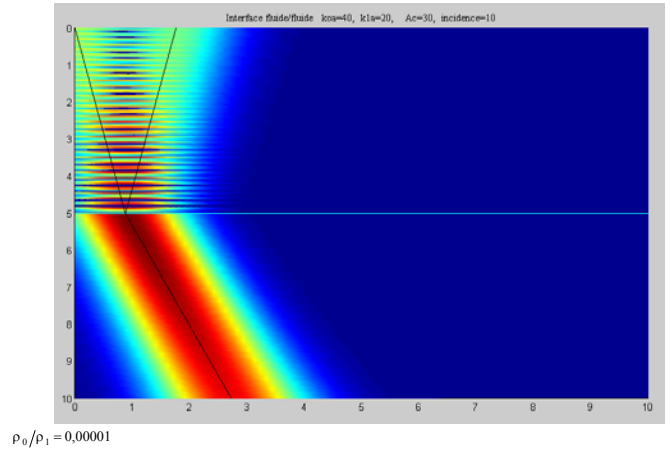
$$Z_1 \ll Z_2 \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathcal{R}}_p = \frac{-\cos\theta_2/Z_2 + \cos\theta_1/Z_1}{\cos\theta_2/Z_2 + \cos\theta_1/Z_1} \Rightarrow \hat{\mathcal{R}}_p \approx 1 \\ \hat{\mathcal{T}}_p = \frac{2\cos\theta_1/Z_1}{\cos\theta_2/Z_2 + \cos\theta_1/Z_1} \Rightarrow \hat{\mathcal{T}}_p \approx 2 \end{cases}$$

Mais  $\mathcal{E}^E = I_2/I_{y_2} \approx 0$

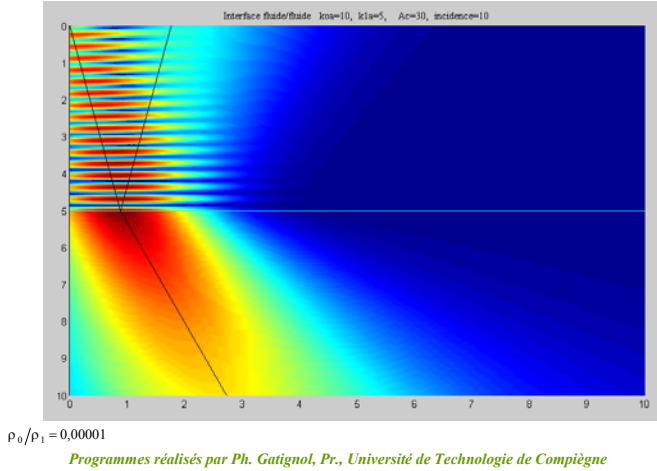
• Interface eau - air

$$Z_1 \gg Z_2 \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathcal{R}}_p = \frac{Z_2/\cos\theta_2 - Z_1/\cos\theta_1}{Z_1/\cos\theta_1 + Z_2/\cos\theta_2} \Rightarrow \hat{\mathcal{R}}_p \approx -1 \\ \hat{\mathcal{T}}_p = \frac{2Z_2/\cos\theta_2}{Z_1/\cos\theta_1 + Z_2/\cos\theta_2} \Rightarrow \hat{\mathcal{T}}_p \approx 0 \end{cases}$$

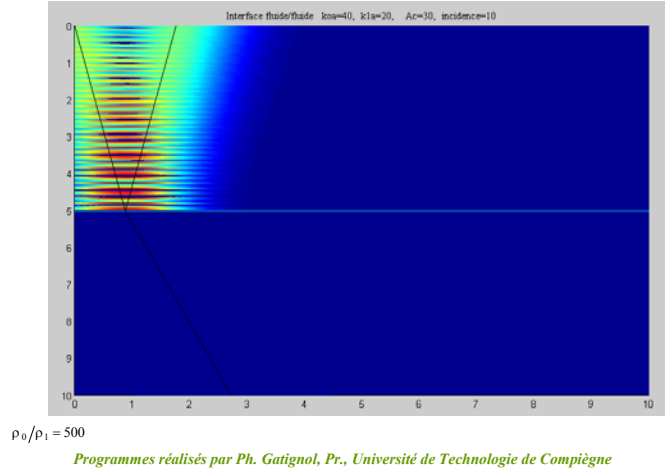
### Incidence sous-critique, haute fréquence ( $k_0a = 40$ ), $Z_0 \ll Z_1$



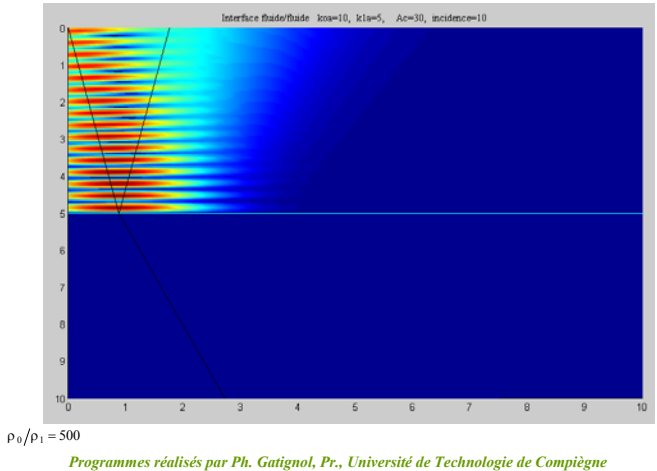
### Incidence sous-critique, basse fréquence ( $k_0a = 10$ ), $Z_0 \ll Z_1$



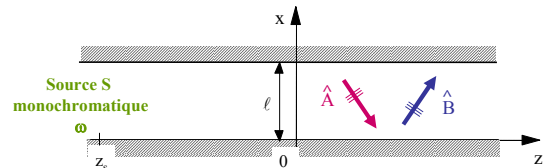
### Incidence sous-critique, haute fréquence ( $k_0a = 40$ ), $Z_0 \gg Z_1$



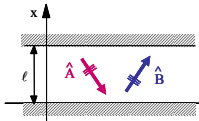
### Incidence sous-critique, basse fréquence ( $k_0a = 10$ ), $Z_0 \gg Z_1$



### Guide bidimensionnel (1/8)

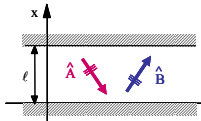


### Guide bidimensionnel (2/8)



- Equation de propagation  $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \hat{p}(x, z, t) = 0, \forall x \in [0, \ell], \forall z \geq 0, \forall t$
- Champ monochromatique  $\hat{p}(x, z, t) = \hat{P}(x, z) e^{i\omega t}$  incident imposé (non précisé)
- Equation de Helmholtz  $\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2\right] \hat{P}(x, z) = 0, \forall x \in [0, \ell], \forall z \geq 0$
- Conditions aux frontières  $\frac{\partial \hat{P}(x, z, t)}{\partial n} = 0, \forall z \geq 0, \forall t$  en  $x = 0$  et  $x = \ell$   
 $\Rightarrow \frac{\partial \hat{P}(x, z)}{\partial x} = 0, \forall z \geq 0, \forall t, \text{ en } x = 0 \text{ et } x = \ell$
- Champ propagatif dans le sens des z croissants (pas d'onde retour)

### Guide bidimensionnel (3/8)



- Forme du champ  $\hat{p}(x, z, t) = [\hat{A} e^{-i(k_x x + k_z z)} + \hat{B} e^{-i(k_x x + k_z z)}] e^{i\omega t}$
- Equation de dispersion  $k_x^2 + k_z^2 = k_0^2$  avec  $k_0 = \omega/c_0$
- Conditions aux frontières  $\frac{\partial \hat{P}(x, z)}{\partial x} = 0, \forall z \geq 0, \forall t, \text{ en } x = 0 \text{ et } x = \ell$   
avec  $\frac{\partial \hat{p}(x, z, t)}{\partial x} = i k_x [\hat{A} e^{-i(k_x x + k_z z)} - \hat{B} e^{-i(k_x x + k_z z)}] e^{i\omega t}$   
 $\begin{cases} i k_x (\hat{A} - \hat{B}) e^{-i k_x z} e^{i\omega t}, \text{ en } x = 0, \forall z \geq 0, \forall t \\ i k_x (\hat{A} e^{i k_x \ell} - \hat{B} e^{-i k_x \ell}) e^{-i k_z z} e^{i\omega t}, \text{ en } x = \ell, \forall z \geq 0, \forall t \end{cases}$   
 $\Rightarrow \begin{cases} \hat{A} - \hat{B} = 0 \\ \hat{A} e^{i k_x \ell} - \hat{B} e^{-i k_x \ell} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{B} \\ \hat{A} (e^{i k_x \ell} - e^{-i k_x \ell}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{B} \\ 2i \sin(k_x \ell) = 0 \end{cases} \Rightarrow k_x \ell = m\pi, m \in \mathbb{N}$

### Guide bidimensionnel (4/8)

- Solutions du problème  $\hat{A}_m = 0, \forall m$  SAUFSI  $k_x$  prend une suite de valeurs propres  $k_{x_m} = \frac{m\pi}{\ell}, m \in \mathbb{N}$  à laquelle est associée (équation de dispersion) une suite de nombres d'onde  $k_{z_m}$  tels que

$$k_{z_m}^2 = k_0^2 - k_{x_m}^2 \quad \text{c.à.d.} \quad k_{z_m}^2 = \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2$$

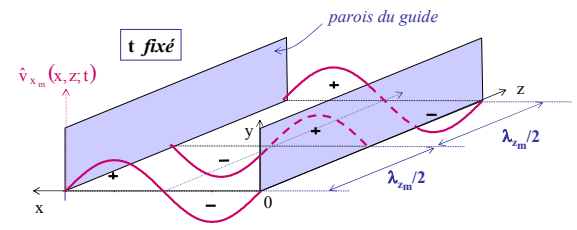
dépend de m      ne dépend pas de m      dépend de m

$\Rightarrow$  2 cas :  $k_{z_m}^2 > 0$  ou  $k_{z_m}^2 < 0$

### Guide bidimensionnel (5/8)

- Pression portée par chaque mode m  $\hat{p}_m(x, z, t) = \hat{A}_m (e^{i k_{x_m} x} + e^{-i k_{x_m} x}) e^{-i k_{z_m} z} e^{i\omega t} \Rightarrow \hat{p}_m(x, z, t) = 2 \hat{A}_m \cos(k_{x_m} x) e^{-i k_{z_m} z} e^{i\omega t}$

champ d'ondes stationnaires à caractère modal suivant Ox, et qui se translate suivant Oz.



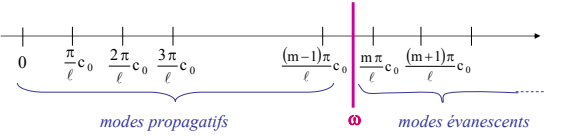
- Champ total  $\hat{p}(x, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{p}_m(x, z, t) = 2 \left( \sum_{m=0}^{\infty} \hat{A}_m \cos(k_{x_m} x) e^{-i k_{z_m} z} \right) e^{i\omega t}$

### Guide bidimensionnel (6/8)

- Vitesse portée par chaque mode m  $\hat{v}_m(x, z, t) = \frac{i}{\rho_0 \omega} \text{grad} \hat{p}_m(x, z, t) \Rightarrow \begin{cases} \hat{v}_{x_m}(x, z, t) = -\frac{2i k_{x_m}}{\rho_0 \omega} \hat{A}_m \sin(k_{x_m} x) e^{-i k_{z_m} z} e^{i\omega t} \\ \hat{v}_{z_m}(x, z, t) = \frac{2k_{z_m}}{\rho_0 \omega} \hat{A}_m \cos(k_{x_m} x) e^{-i k_{z_m} z} e^{i\omega t} \end{cases}$
- Champ de vitesse total  $\hat{v}_x(x, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{v}_{x_m}(x, z, t) = -\frac{2i}{\rho_0 \omega} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \hat{A}_m k_{x_m} \sin(k_{x_m} x) e^{-i k_{z_m} z} \right) e^{i\omega t}$   
 $\hat{v}_z(x, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{v}_{z_m}(x, z, t) = \frac{2}{\rho_0 \omega} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \hat{A}_m k_{z_m} \cos(k_{x_m} x) e^{-i k_{z_m} z} \right) e^{i\omega t}$

### Guide bidimensionnel (7/8)

- Modes propagatifs et évanescents  $k_{x_m} = \frac{m\pi}{\ell}, m \in \mathbb{N}$  avec  $k_{z_m}^2 = \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{\ell}\right)^2$
- modes m tels que  $k_{z_m}^2 > 0$  c.à.d.  $\omega > \frac{m\pi}{\ell} c_0 \Rightarrow$  modes m **propagatifs**  
et  $p_m(x, z, t) = \text{Re}[\hat{p}_m(x, z, t)] = 2 |\hat{A}_m| \cos(k_{x_m} x) \cos(\omega t - k_{z_m} z + \alpha_m)$  avec  $\hat{A}_m = |\hat{A}_m| e^{i\alpha_m}$
- modes m tels que  $k_{z_m}^2 < 0$  c.à.d.  $\omega < \frac{m\pi}{\ell} c_0 \Rightarrow$  modes m **évanescents**  
et  $p_m(x, z, t) = \text{Re}[\hat{p}_m(x, z, t)] = 2 |\hat{A}_m| e^{k_{z_m} z} \cos(k_{x_m} x) \cos(\omega t + \alpha_m)$   
avec  $k_{z_m} = i k_{z_m}^- = -i \sqrt{(m\pi/\ell)^2 - (\omega/c_0)^2}$



### Guide bidimensionnel (8/8)

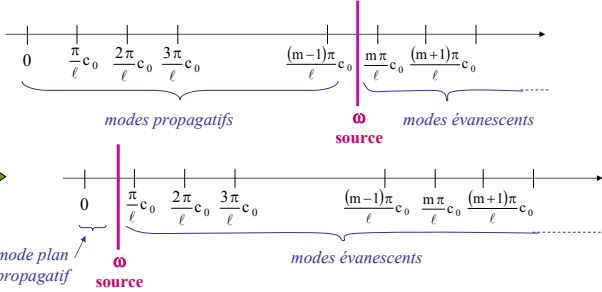
● **Mode plan**

$$k_{x_{m=0}} = 0$$

$$k_{z_{m=0}} = \frac{\omega}{c_0}$$

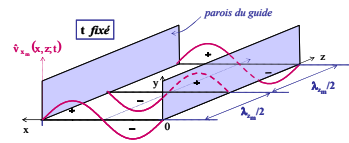
$$p_{m=0}(x, z, t) = 2|\hat{A}_0| \cos(\omega t - k_{z_0} z + \alpha_0)$$

onde plane progressive dans la direction des z croissants



### Vitesse de phase (modes propagatifs) : 1/4

$$p_m(x, z, t) = \text{Re}[\hat{p}_m(x, z, t)] = 2|\hat{A}_m| \cos(k_{x_m} x) \cos(\omega t - k_{z_m} z + \alpha_m)$$

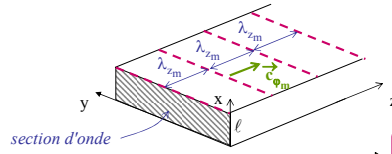


$$\lambda_{z_m} = 2\pi/k_{z_m} = 2\pi/\sqrt{(\omega/c_0)^2 - (m\pi/\ell)^2}$$

● vitesse de déplacement d'un observateur particulier pour lequel l'onde apparaît immobile (observateur lié à une "section d'onde") :

$$\omega t - k_{z_m} z + \alpha_m = \text{constante}$$

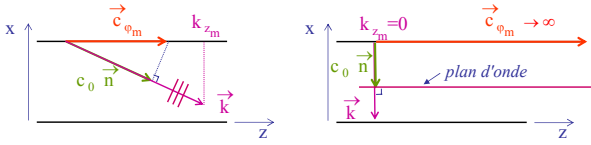
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k_{z_m}}$$



$$c_{\phi_m} = \frac{\omega}{k_{z_m}} = \omega/\sqrt{(\omega/c_0)^2 - (m\pi/\ell)^2}$$

### Vitesse de phase (modes propagatifs) : 2/4

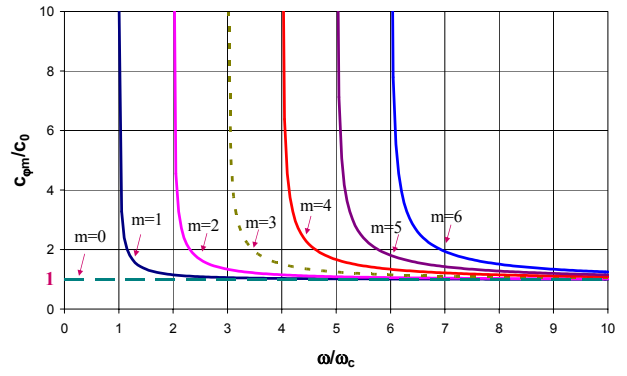
$$c_{\phi_m} = \frac{\omega}{k_{z_m}} = \omega/\sqrt{(\omega/c_0)^2 - (m\pi/\ell)^2}$$



### Vitesse de phase (modes propagatifs) : 3/4

$$c_{\phi_m} = \frac{\omega}{k_{z_m}} = \omega/\sqrt{(\omega/c_0)^2 - (m\pi/\ell)^2} \quad \text{ou encore} \quad c_{\phi_m}/c_0 = v/\sqrt{v^2 - m^2}$$

avec  $v = \omega/c_0$  et  $\omega_c = \pi c_0/\ell$



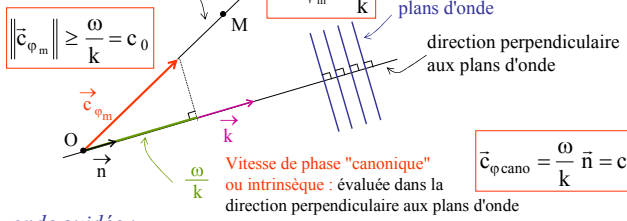
### Vitesse de phase (modes propagatifs) : 4/4

● **Généralisation**

direction d'observation quelconque

$$\vec{n} \cdot \vec{c}_{\phi_m} = \frac{\omega}{k}$$

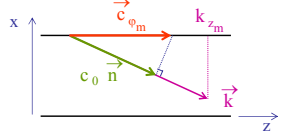
plans d'onde



Vitesse de phase "canonique" ou intrinsèque : évaluée dans la direction perpendiculaire aux plans d'onde

$$\vec{c}_{\phi_{\text{cano}}} = \frac{\omega}{k} \vec{n} = c_0 \vec{n}$$

onde guidée :



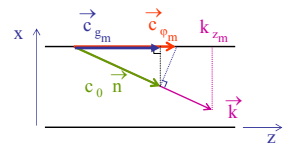
Vitesse de phase appréciée parallèlement au guide

$$c_{\phi_m} = \frac{\omega}{k_{z_m}}$$

### Vitesse de groupe (1/2)

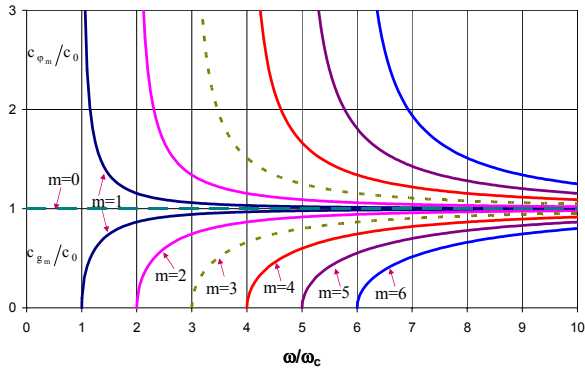
$$c_{g_m} = c_0 \vec{n} \cdot \vec{e}_z = c_0 \frac{k_{z_m}}{k} \quad \rightarrow \quad c_{g_m} = \frac{c_0^2}{\omega} \sqrt{(\omega/c_0)^2 - (m\pi/\ell)^2}$$

et  $c_{g_m} = \frac{\partial \omega}{\partial k_{z_m}} = 1/\left(\frac{\partial k_{z_m}}{\partial \omega}\right)$

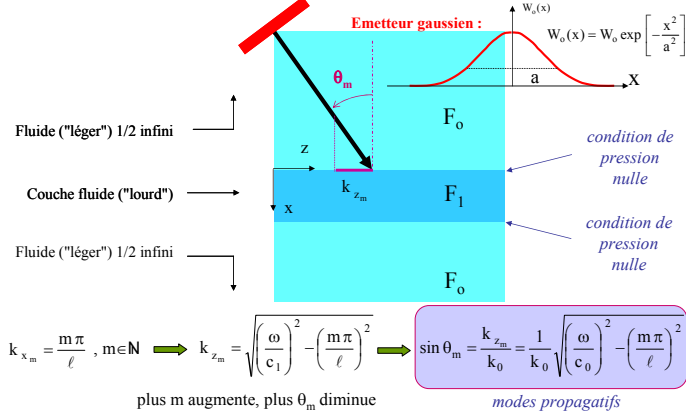


### Vitesse de groupe (2/2)

$$c_{g_m} = \frac{c_0^2}{\omega} \sqrt{(\omega/c_0)^2 - (m\pi/\ell)^2} \quad \text{ou encore} \quad c_{g_m}/c_0 = \sqrt{v^2 - m^2/\ell^2} \quad \text{avec} \quad v = \omega/\omega_c \quad \text{et} \quad \omega_c = \pi c_0/\ell$$

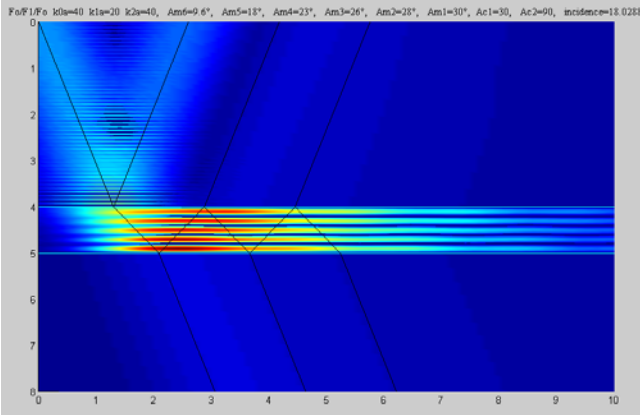


### Faisceau gaussien incident sur une couche fluide ("lourd") immergée dans un fluide "léger"



Programmes réalisés par Ph. Gatignol, Pr., Université de Technologie de Compiègne

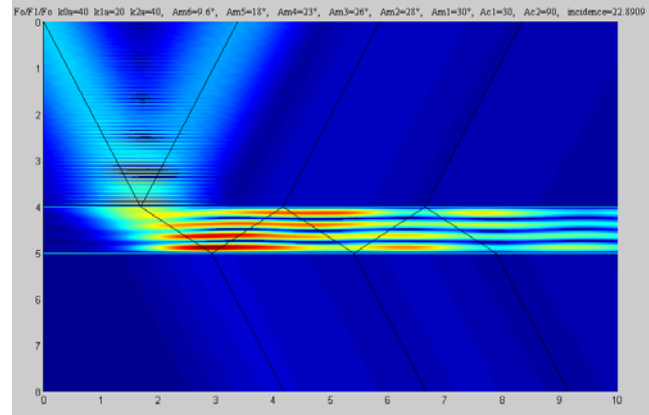
### haute fréquence ( $k_0 a = 40$ ), $\theta = \theta_{m5}$



$\rho_0/\rho_1 = 0,2 \quad \rho_2/\rho_1 = 0,2$

Programmes réalisés par Ph. Gatignol, Pr., Université de Technologie de Compiègne

### haute fréquence ( $k_0 a = 40$ ), $\theta = \theta_{m4}$



$\rho_0/\rho_1 = 0,2 \quad \rho_2/\rho_1 = 0,2$

Programmes réalisés par Ph. Gatignol, Pr., Université de Technologie de Compiègne

### Les pavillons (1/2)

- Les phonographes



Edison Home Phonograph (1910)

<http://perso.wanadoo.fr/jlf/phonos.htm>



Gramophone N° 9 (1904)

<http://perso.wanadoo.fr/jlf/phonos.htm>

- Les porte-voix



### Les pavillons (2/2)

- Les cornets acoustiques



[http://www.inrp.fr/she/instruments/lyc\\_bdb/acoustique.htm](http://www.inrp.fr/she/instruments/lyc_bdb/acoustique.htm)



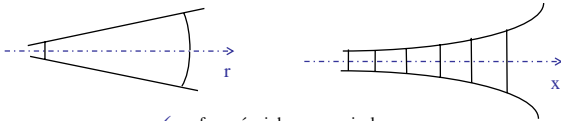
Expériences faites en 1826 sur le lac de Genève par les physiciens Colladon et Sturm



<http://www.beethoven-france.org/Beethoven/Luwig-van-Beethoven.html>

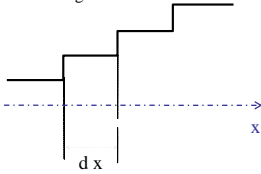
### Propagation dans les pavillons, théorie à 1 paramètre (1/6)

• Hypothèses



- ✓ surfaces équiphasés quasi-planes
- ✓ lente variation du rayon en fonction de x
- ✓ vitesse particulaire orientée suivant x

• Discrétisation sous la forme d'une succession de guides cylindriques élémentaires à parois parfaitement rigides



### Propagation dans les pavillons, théorie à 1 paramètre (3/6)

• Equation de propagation

✓ Conservation du débit à la discontinuité

$$vS = \text{constante} \implies \frac{dv}{v} = -\frac{dS}{S} \quad \text{c.à.d.} \quad dv = -\frac{v}{S} dS \quad \text{c.à.d.} \quad dv = -\frac{v}{S} \frac{dS}{dx} dx$$

✓ Utilisation du potentiel des vitesses  $v = \frac{\partial \phi}{\partial x}$

$$d\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = -\frac{dS/dx}{S} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dx$$

En posant  $\phi'_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x}$  et  $S' = \frac{dS}{dx} \implies d\phi'_1 = -\frac{S'}{S} \phi'_1 dx$

"responsabilité" du changement de section dans la variation élémentaire de la dérivée  $d\phi'_1$  du potentiel des vitesses

✓ Entre deux changements de section

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad \text{soit} \quad d\phi'_2 = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} dx \quad \text{en posant} \quad \phi'_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

### Propagation dans les pavillons, théorie à 1 paramètre (5/6)

• Solutions de l'équation des pavillons exponentiels infinis  $S(x) = S_0 e^{2\alpha x}$

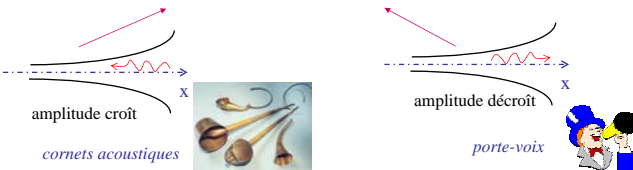
✓ Forme des solutions :  $e^{\pm i k x} e^{i \omega t}$

✓ Report dans l'équation de propagation  $\phi'' + \frac{S'}{S} \phi' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$

$$\implies k^2 \mp 2i\alpha k - \frac{\omega^2}{c_0^2} = 0 \implies k = \pm i\alpha \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \alpha^2}$$

✓ Solutions physiques non divergentes du problème

$$e^{-\alpha x} e^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \alpha^2} x} e^{i\omega t} \quad \text{et} \quad e^{-\alpha x} e^{-i\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \alpha^2} x} e^{i\omega t}$$



### Propagation dans les pavillons, théorie à 1 paramètre (2/6)

• Conservation du débit à la discontinuité

✓ loi de conservation de la masse :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathcal{V} = - \iint_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$$

$$\approx h S_2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow 0 \quad \text{avec } h \rightarrow 0$$

$$\iint_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \rho_0 \iint_{S_1} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma + \rho_0 \iint_{S_2} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma + \rho_0 \iint_{\delta S} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$$

$$\approx -v_1 S_1 \quad \approx +v_2 S_2 \quad \rightarrow 0$$

$$\approx \rho_0 (-v_1 S_1 + v_2 S_2)$$

$\implies \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{c.à.d.} \quad v_1 S_1 = v_2 S_2 \quad \text{soit} \quad vS = \text{constante}$

### Propagation dans les pavillons, théorie à 1 paramètre (4/6)

• Equation de propagation - suite

✓ Variation totale  $d\phi'$  sur la longueur dx

$$d\phi' = d\phi'_1 + d\phi'_2 = \left[ -\frac{S'}{S} \phi'_1 + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right] dx$$

$$\implies \phi'' + \frac{S'}{S} \phi' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \implies \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{S'}{S} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial t^3} \right] = 0$$

Or  $p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} \implies \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \frac{\partial \ln S}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$

Equation dite de Webster (proposée en premier lieu par Lagrange et Bernoulli)

### Propagation dans les pavillons, théorie à 1 paramètre (6/6)

• Solutions de l'équation des pavillons exponentiels infinis  $S(x) = S_0 e^{2\alpha x}$

✓ Vitesse de phase :  $c_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c_0}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \alpha^2}} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$

fréquence de coupure :

$$f_c = \frac{\alpha c_0}{2\pi}$$

✓ Vitesse de groupe :  $c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$

✓ Intensité acoustique :  $I = \frac{\hat{p} \hat{p}^*}{4\rho_0 c_0} \left\{ \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} \right\}$

$\implies$  Si  $f \leq f_c$  :  $I = 0$

$\implies$  Si  $f > f_c$  :  $I = \frac{e^{-2\alpha x}}{2\rho_0 c_0} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$

$\implies$  densité d'énergie :  $E = \frac{\rho_0}{4} \hat{v} \hat{v}^* + \frac{\hat{p} \hat{p}^*}{4\rho_0 c_0^2} = \frac{e^{-2\alpha x}}{2\rho_0 c_0^2}$

$\implies \frac{I}{E} = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2} = c_g$



Exemple d'un pavillon replié (1/2)



Exemple d'un pavillon replié (2/2)

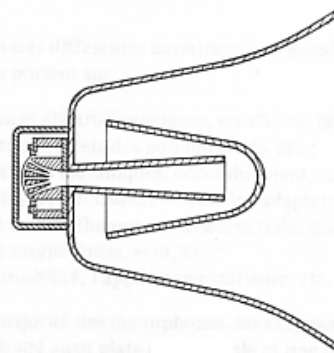


Figure extraite de Mario Rossi, *Traité d'électricité, Volume XXI, Electroacoustique*, Presses Polytechniques Romandes, 1986

Exemple du tuba



<http://www.gleblanc.com/>

Exemple du cor des Alpes



Transparents basés sur

C. POTEL, M. BRUNEAU, *Acoustique Générale - équations différentielles et intégrales, solutions en milieux fluide et solide, applications*, Ed. Ellipse collection Technosup, 352 pages, ISBN 2-7298-2805-2, 2006

