Université du Maine

COURS DE MECANIQUE - VIBRATIONS

1ère année

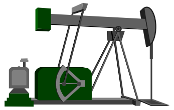
Catherine POTEL, Philippe GATIGNOL

Chapitre 5.
L'ENERGIE EN MECANIQUE DU POINT MATERIEL

Université du Maine - UFR Sciences et Techniques

A noter que la numérotation des paragraphes adoptée ici est calquée sur celle du cours oral afin de faciliter le suivi du cours magistral, mais ne répond pas aux normes de présentation usuelles d'un document écrit.

Les points importants de ce chapitre sont :



La puissance et le travail d'une force
Le théorème de l'énergie cinétique

I PUISSANCE D'UNE FORCE

1 Puissance et travail élémentaire d'une force

a) Puissance

Soit une force $\vec{F}$ appliquée en un point A en mouvement par rapport à un repère $\mathscr{R}_0 = (O_0, \mathscr{B}_0)$.

*Définition : On définit la "**puissance de la force** $\vec{F}$ **appliquée en A relativement au repère** $\mathscr{R}_0$" par le produit scalaire :*

$$\mathscr{P}\left(\vec{F} \to A / \mathscr{R}_0\right) = \vec{F}.\vec{V}\left(A / \mathscr{R}_0\right) \ . \qquad (5.1)$$

La puissance, ainsi définie, dépend donc :
- de la *force* considérée,
- du *point d'application,*
- du *repère* $\mathscr{R}_0$.

b) Travail élémentaire

*On définit le "**travail élémentaire**" de la force $\vec{F}$ appliquée au point A pour un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{O_0A}_{/\mathscr{B}_0}$ de ce point par rapport à $\mathscr{R}_0$ par :*

$$\boxed{\delta\mathscr{W}\left(\vec{F} \to A / \mathscr{R}_0\right) = \vec{F}.d\overrightarrow{O_0A}_{/\mathscr{B}_0}}. \qquad (5.2)$$

Si le mouvement de A sur sa trajectoire $\mathscr{C}$ est connu, $d\overrightarrow{O_0A}_{/\mathscr{B}_0}$ est lié à l'accroissement dt par :

$$d\overrightarrow{O_0A}_{/\mathscr{B}_0} = \vec{V}\left(A / \mathscr{R}_0\right) dt, \qquad (5.3)$$

et par suite :

$$\boxed{\delta\mathscr{W}\left(\vec{F} \to A / \mathscr{R}_0\right) = \mathscr{P}\left(\vec{F} \to A / \mathscr{R}_0\right) dt}. \qquad (5.4)$$

2. Travail d'une force

▪ Il est important de connaître le travail effectué par une force s'exerçant sur un point A pour un déplacement fini de ce point le long de sa trajectoire, lorsque A s'est déplacé du point A_0 au point A_1.

*Ce travail est défini comme la **somme des travaux élémentaires** effectués par la force au cours de tous les déplacements élémentaires qui ont conduit A, le long de la trajectoire $\mathscr{C}$, du point A_0 au point A_1. Il est représenté mathématiquement par une **intégrale** (dite curviligne) **le long de la trajectoire** :*

$$\boxed{\mathscr{W}_{A_0 \to A_1}(\mathscr{C}) = \int_{A_0}^{A_1} \delta\mathscr{W}\left(\vec{F} \to A / \mathscr{R}_0\right) = \int_{A_0}^{A_1} \vec{F}.d\overrightarrow{O_0A}_{/\mathscr{B}_0} = \int_{t_0}^{t_1} \mathscr{P}\left(\vec{F} \to A / \mathscr{R}_0\right) dt} \ .(5.5)$$

Le travail peut être également être défini comme la circulation de la force sur la trajectoire (voir cours d'électromagnétisme et Annexe 5A).

Si la force $\vec{F}$ et la vitesse du point A par rapport au repère $\mathscr{R}_0$ ont pour composantes respectives dans la base $\mathscr{B} = \left(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z \ , \qquad (5.6)$$

et

$$\vec{V}\left(A / \mathscr{R}_0\right) = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z \ , \qquad (5.7)$$

alors la puissance de la force $\vec{F}$ appliquée en A relativement au repère $\mathscr{R}_0$ s'écrit :

$$\mathscr{P}\left(\vec{F} \to A / \mathscr{R}_0\right) = \vec{F} \cdot \vec{V}\left(A / \mathscr{R}_0\right) = F_x\,\dot{x} + F_y\,\dot{y} + F_z\,\dot{z} \ , \qquad (5.8)$$

et l'équation (5.5) peut se mettre sous la forme :

$$\mathscr{W}_{A_0 \to A_1}(\mathscr{C}) = \int_{t_0}^{t_1} \mathscr{P}\left(\vec{F} \to A / \mathscr{R}_0\right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(F_x\,\dot{x} + F_y\,\dot{y} + F_z\,\dot{z}\right) dt \ . \qquad (5.9)$$

▪ Les fonctions $x(t), y(t), z(t)$ qui définissent paramétriquement la forme de la trajectoire $\mathscr{C}$ figurent par leurs dérivées $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ et dans les composantes F_x, F_y, F_z, ainsi peut-être que leurs dérivées dans le cas de forces dépendant de la vitesse.

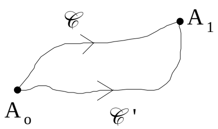


Figure 5.1

$\mathscr{W}_{A_0 \to A_1}(\mathscr{C})$ dépend donc de manière essentielle de ces fonctions, c'est-à-dire du trajet $\mathscr{C}$ suivi par le point A pour aller de A_0 à A_1. En général, le travail de $\vec{F}$ entre ces deux positions ne sera pas le même selon que A suit le trajet $\mathscr{C}$ ou le trajet $\mathscr{C}'$:

$$\mathscr{W}_{A_0 \to A_1}(\mathscr{C}) \neq \mathscr{W}_{A_0 \to A_1}(\mathscr{C}') \qquad (5.10)$$

A titre d'exemple, le travail de la force de frottement pour aller d'un point A_0 à un point A_1 dépend du chemin suivi : plus le trajet est long, plus le frottement dure longtemps.

3. Unités

▪ L'équation aux dimensions de la *puissance mécanique* est la suivante :

$$[\mathscr{P}] = [\mathrm{F}][\mathrm{V}] = \left[\mathrm{MLT^{-2}}\right]\left[\mathrm{LT^{-1}}\right] = \left[\mathrm{ML^2T^{-3}}\right] \tag{5.11}$$

L'unité MKSA est le *watt* :

$$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{kg.m^2.s^{-3}} = 1\ \mathrm{N.m.s^{-1}} \tag{5.12}$$

- Plus anciennement, on a utilisé le kilogramme force (kgf) au lieu du Newton :

$$1\ \mathrm{kgf} = 1\ \mathrm{kg.g} = 1\ \mathrm{kg.9{,}81\ m.s^{-2}} = 9{,}81\ \mathrm{N}, \tag{5.13-a}$$

et la puissance s'exprimait alors en $\mathrm{kgf.m.s^{-1}}$:

$$1\ \mathrm{kgf.m.s^{-1}} = 9{,}81\ \mathrm{W}\ \ . \tag{5.13-b}$$

- Le cheval-vapeur (CV) vaut 75 $\mathrm{kgf.m.s^{-1}}$, soit :

$$1\ \mathrm{CV} = 75\times 9{,}81 = 736\ \mathrm{W} = 0{,}736\ \mathrm{kW}\ \ . \tag{5.14}$$

▪ L'équation aux dimensions du *travail*, ou encore de l'*énergie*, est donnée par :

$$[\mathscr{W}] = [\mathscr{P}]\cdot[\mathrm{t}] = \left[\mathrm{ML^2T^{-2}}\right]\ \ . \tag{5.15}$$

L'unité MKSA est le *joule* :

$$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{kg.m^2.s^{-2}}\ \ . \tag{5.16}$$

Le joule et le watt sont des unités assez faibles. En pratique, on utilise souvent le kilowatt (kW) pour la puissance et le kilowatt.heure pour l'énergie :

$$1\ \mathrm{kWh} = 36\times 10^5\ \mathrm{J}\ \ . \tag{5.17}$$

Remarque : La dimension d'une énergie est donc la même que celle d'un moment. La différence essentielle réside dans le fait qu'un moment est le produit d'une force par une longueur alors qu'un travail est le produit d'une force par un déplacement.

II CAS PARTICULIER DU CHAMP DE FORCES A POTENTIEL

1. Potentiel et énergie potentielle

a) Potentiel (exemples)

Le **potentiel** est une propriété de "l'espace" considéré (associé à la gravité, l'électrostatique, le noyau atomique, l'élasticité, ...) qui est révélée par l'action qu'il exerce sur une "sonde".

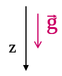


Figure 5.2

Ainsi, l'existence de la gravité (potentiel) est-elle révélée par une masse (sonde) (figure 5.2), et le poids $\vec{P}$ (l'action) de la masse est tel que, pour l'orientation retenue pour l'axe z (voir discussion § II.4))

$$\vec{P} = m\,\vec{g} = m\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\underbrace{(g\,z)}_{\mathscr{U}}\ \ , \tag{5.18}$$

où $\mathscr{U}$ est un potentiel auquel est associée la fonction de force $U = m\,g\,z$ (voir § II.3 suivant) dont dérive le poids $\vec{P}$.

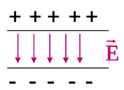


Figure 5.3

De même, l'existence d'un champ électrique $\vec{E}$ (dérive d'un potentiel, cas du condensateur plan sur la figure 5.3) est révélée par une sonde (charge électrique ponctuelle), et la force $\vec{F}$ (l'action) correspondante est telle que

$$\vec{F} = q\,\vec{E} = q\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\underbrace{(-V)}_{\mathscr{U}}\ \ , \tag{5.19}$$

où $\mathscr{U}$ est un potentiel dont dérive le champ électrique $\vec{E}$, V désignant le potentiel électrique qui règne dans l'espace interélectrode (entre l'électrode chargée positivement et celle chargée négativement sur la figure 5.3).

b) Energie potentielle (exemple)

L'***énergie potentielle*** est une énergie (autre que cinétique notamment) *emmagasinée* (c'est-à-dire reçue) par un système, qui ne dépend que de son "état" (c'est-à-dire en mécanique de sa position ou du point considéré), et qui peut être restituée intégralement en revenant au même état (en l'absence de phénomènes irréversibles tels les frottements en mécanique).

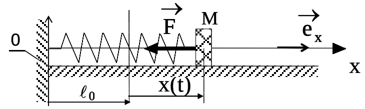


Figure 5.4

Enfin, l'existence de l'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur k est révélée par un système sensible à la force que peut exercer le ressort (une masse accrochée au ressort et libre d'osciller par exemple, figure 5.4). L'action $\vec{F}$ du ressort sur ce système sensible (la masse M) est telle que

$$\vec{F} = -k\,x\,\vec{e}_x = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\underbrace{\left(-\tfrac{1}{2}k\,x^2\right)}_{U}\ \ , \tag{5.20}$$

où la fonction de force U dont dérive la force $\vec{F}$, est l'opposé de l'énergie potentielle (voir § II.3 et II.4 suivant).

2. Champ de forces

*Définition : Lorsqu'une force $\vec{F}$ est donnée en fonction uniquement du point de l'espace (x, y, z) où est située la particule sur laquelle elle s'exerce, on dit que l'on a défini un "**champ de forces**".*

Ainsi un champ de forces peut être défini par une fonction vectorielle des coordonnées spatiales du point :

$$\vec{F}(x, y, z) \quad .$$

Exemples : champ de forces dû à l'attraction newtonienne d'un corps donné (le Soleil, une planète, ...), champ de forces dû au champ électrique, ... Dans le cas d'un champ de pesanteur supposé uniforme, la fonction $\vec{F}(x, y, z)$ est constante :

$$\vec{F} = -mg\,\vec{e}_{z_0} \quad , \tag{5.21}$$

si $\vec{e}_{z_0}$ est un vecteur unitaire vertical ascendant, g étant le module de l'accélération de la pesanteur.

Dans le cas d'une attraction par un point fixe O, proportionnelle à la distance $r = OA$ (cas d'un système élastique isotrope) :

$$\vec{F}(O \to A) = -k\,\overrightarrow{OA} = -k\left(x\,\vec{e}_{x_0} + y\,\vec{e}_{y_0} + z\,\vec{e}_{z_0}\right) \quad . \tag{5.22}$$

Contre-exemples : la force de frottement subie par une particule en mouvement sur une surface ou dans l'air, ou la force exercée par un champ électromagnétique sur une charge en mouvement. Ces forces ne sont déterminées que si l'on connaît la vitesse de la particule.

3. Fonction de force

*Définition : On dit qu'un champ de forces "**dérive d'une fonction de force**" s'il existe une fonction $U(x, y, z)$ (définie à une constante additive près), appelée fonction de force, telle que le champ $\vec{F}$ en soit le champ de gradient. Dans une base cartésienne orthonormée $\mathscr{B}_0$, les composantes de $\vec{F}$ s'expriment sous la forme :*

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \ , \ F_y = \frac{\partial U}{\partial y} \ , \ F_z = \frac{\partial U}{\partial z} \quad . \tag{5.23}$$

soit

$$\boxed{\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\,U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_{x_0} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_{y_0} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_{z_0}} \quad . \tag{5.24}$$

L'expression (5.24) du gradient de la fonction $\vec{F}$ n'est valable qu'en coordonnées cartésiennes : l'expression est totalement différente en coordonnées cylindriques ou sphériques (Annexe 5B).

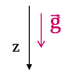


Figure 5.5-a

Ainsi, l'action de la gravité terrestre locale sur une masse m est-elle représentée par le poids $\vec{P}$ tel que, pour l'orientation retenue pour l'axe z (voir figure 5.5.-a et discussion au § II.4-a suivant)

$$\vec{P} = m\vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}}(m\,g\,z) \quad , \tag{5.25}$$

où $U = m\,g\,z$ est la fonction de force dont dérive le poids $\vec{P}$ (ici $-g\,z$ représente un potentiel).

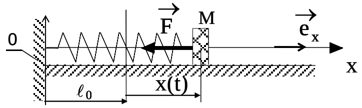


Figure 5.5-b

De même, l'action d'un ressort de raideur k sur une masse M (accrochée au ressort de longueur à vide ℓ_0 et libre d'osciller par exemple, figure 5.5-b) est telle que

$$\vec{F} = -k\,x\,\vec{e}_x = \overrightarrow{\text{grad}}\left(-\tfrac{1}{2}k\,x^2\right) = \tfrac{d}{dx}\left(-\tfrac{1}{2}k\,x^2\right)\vec{e}_x \quad , \tag{5.26}$$

où $U = -\frac{1}{2}k\,x^2$ est la fonction de force dont dérive la force $\vec{F}$.

Ces deux exemples sont repris au § II.6.

4. Energie potentielle

Dans le domaine de la mécanique, il est intéressant de considérer l'opposé de la fonction U :

*Définition : On appelle "**énergie potentielle**" associée au champ de force l'opposé de la fonction de force U :*

$$E_p(x, y, z) = -U(x, y, z). \tag{5.27}$$

*Le vecteur $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\,U$ est alors dirigé des grandes valeurs de E_p vers les plus petites (on peut aussi dire qu'il "**descend les potentiels**"). On parle d'un champ de force qui "**dérive d'une fonction de force**" (voir la remarque sur la terminologie en fin de §).*

a) Exemples

▪ Champ de force d'attraction proportionnelle à la distance (par rapport à un point O choisi comme origine, ressort de raideur k par exemple) :

La fonction de force U s'écrit

$$U = -\tfrac{1}{2}k\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = -\tfrac{1}{2}kr^2 \quad . \tag{5.28}$$

Ainsi, l'énergie potentielle disponible, due à la déformation élastique du ressort, est donnée par l'expression $V = \frac{1}{2}kr^2$.

▪ Champ uniforme de la pesanteur ($\vec{e}_{z_0}$ vertical ascendant), origine des coordonnées donnée (non spécifiée ici) :

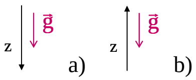


Figure 5.7

- Lorsque $\vec{e}_z$ est vertical descendant (figure 5.7-a), la fonction de force est $U = +mgz$, et donc l'énergie potentielle de gravité de la masse est $E_p = -mgz$.

- Au contraire, si $\vec{e}_z$ est vertical ascendant (figure 5.7-b), la fonction de force est $U = -mgz$, et donc l'énergie potentielle de gravité de la masse est $E_p = +mgz$.

Ainsi, plus la masse est située à une altitude élevée, plus son énergie potentielle est grande.

b) Variations de l'énergie potentielle

L'énergie potentielle (comme la fonction de force) est toujours ***définie à une constante additive près*** (dans le cas de la pesanteur, la valeur zéro de ces grandeurs a été choisie en $z = 0$, point arbitraire). En pratique, les quantités d'intérêt sont les variations possibles d'énergie potentielle qui peuvent être transformées en d'autres formes d'énergies.

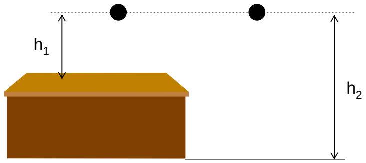


Figure 5.8

Ainsi, plus la variation d'altitude possible de la masse est grande, plus l'énergie qu'elle peut restituer est grande. Par exemple, la masse m située à une hauteur h_1 d'une table peut restituer moins d'énergie que si elle est située à une hauteur h_2 du sol (figure 5.8), alors que dans les deux cas elle est à la même altitude.

A noter que l'***énergie potentielle peut être positive ou négative*** en fonction du choix de la constante définissant l'origine des énergies. Par contre, la définition admise pour l'énergie cinétique (voir § III) impose que cette énergie soit positive ou nulle.

c) Remarque sur la terminologie

✓ Il est fréquent, en mécanique, d'appeler "**potentiel**" ce qui vient d'être défini comme étant l'**énergie potentielle** associée à un champ de forces. Ainsi, dans cette acception du terme, le potentiel E_p est l'opposé de la fonction de forces U, et l'on dit couramment que le champ de forces, s'il dérive d'une fonction de forces, "**dérive d'un potentiel**".

✓ Cependant, dans nombre de traités de physique, le terme de "potentiel" est réservé à une grandeur n'ayant pas la dimension d'une énergie. Ainsi, le potentiel électrique désigne-t-il l'énergie potentielle électrique *par unité de charge* de la particule utilisée somme sonde. De même, le potentiel gravitationnel induit par un certain nombre de corps attracteurs (de masses données) représentera l'énergie potentielle disponible pour une particule sonde *de masse unité*. Le potentiel gravitationnel, dans ce dernier cas, doit s'exprimer en Joules/kg. Dans la même logique, le terme de "champ" est introduit : le champ électrique représente la force

électrique qui s'exerce sur une charge unité en un point donné ; le champ gravitationnel désigne la force d'attraction newtonienne subie par une particule de masse unité. Dans ce type de présentation, on préfère ainsi le concept de "champ" à celui de champ de forces introduit au § II.2 : en effet, le "champ" est alors indépendant de toute propriété intrinsèque de la particule sonde.

5. Puissance et travail élémentaire

▪ Lorsque le champ dérive d'une fonction de forces, la puissance, produit scalaire du vecteur force $\vec{F}$ (Equation (5.24)) et du vecteur vitesse $\vec{V}(A/\mathscr{R}_0) = \frac{dx}{dt}\vec{e}_{x_0} + \frac{dy}{dt}\vec{e}_{y_0} + \frac{dz}{dt}\vec{e}_{z_0}$, s'exprime sous la forme :

$$\mathscr{P}\left(\vec{F} \to A/\mathscr{R}_0\right) = \vec{F}.\vec{V}\left(A/\mathscr{R}_0\right) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{dU}{dt} = -\frac{dE_p}{dt} \quad . \qquad (5.29)$$

La puissance que peut engendrer une force dérivant d'une fonction de forces apparaît donc comme la dérivée totale de la fonction de forces U *par rapport au temps.*

Il convient de noter ici que, l'énergie potentielle ne dépendant pas explicitement du temps par définition, l'expression (5.29) est bien (au signe près) le rapport de la différentielle dE_p de l'énergie potentielle E_p sur le scalaire dt (en toute rigueur $d/dt = \partial/\partial t + \vec{V}\left(A/\mathscr{R}_0\right)\cdot\overrightarrow{grad}$, avec ici $\partial E_p/\partial t = 0$).

▪ De même, le travail élémentaire de $\vec{F}$ peut s'écrire :

$$\delta\mathscr{W}\left(\vec{F} \to A/\mathscr{R}_0\right) = \vec{F}.d\overrightarrow{O_0A}_{/\mathscr{B}_0} = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU = -dE_p \qquad (5.30)$$

Ce travail élémentaire apparaît donc, dans ce cas, comme une différentielle totale exacte : la différentielle de la fonction de force U. *(A noter que cette propriété n'est pas vraie dans le cas de forces ne dérivant pas d'une fonction de forces : c'est la raison pour laquelle dans ce cas le travail élémentaire est noté* $\delta\mathscr{W}$ *et non* $d\mathscr{W}$ *). Par suite, on peut énoncer le résultat fondamental suivant :*

Dans le cas particulier où la force dérive d'un potentiel, le travail ne dépend que de la position initiale A_0 *et de la position finale* A_1. *Autrement dit,* ***le travail ne dépend pas du chemin suivi*** *pour aller de* A_0 *à* A_1 *:*

$$\mathscr{W}_{A_0 \to A_1}\left(\vec{F} \to A/\mathscr{R}_0\right) = \int_{A_0}^{A_1} dU = U(A_1) - U(A_0) = -\left[E_p(A_1) - E_p(A_0)\right] \qquad (5.31)$$

On voit alors que le travail effectué par la force est égal à la variation de l'énergie potentielle entre la position initiale et la position finale.

6. Exemples de calcul d'énergie potentielle pour deux champs de force dérivant d'un potentiel

a) Préliminaire

Il convient de noter que les énergies sont des quantités le plus souvent positives, exception faite des énergies potentielles qui dépendent de la référence choisie (potentiel de référence, voir § II.4-b). Aux notions d'énergie sont associées les notions de flux d'énergie (ou de transfert ou d'échange d'énergie). En mécanique (en particulier), on raisonne très souvent en cherchant quelles sont les actions exercées sur le système étudié. Par suite, par convention, les énergies sont considérées comme étant ***reçues par*** le (ou encore ***fournies au***) système auquel on s'intéresse. Par suite, par exemple, une "énergie reçue" par un système négative, est en réalité une "énergie fournie" positive, fournie par le système considéré à un autre système extérieur (énergies fournies au système ou fournies par le système ont des signes opposés).

• Pour le système de la figure 5.4, l'énergie potentielle élastique est donc égale au travail fourni au ressort (c'est-à-dire l'énergie reçue par le ressort) de la part du système capable d'appliquer la force $\vec{F}$ à chacune de ses extrémités (la même en module) ; elle est donc l'opposé du travail que recevra le ressort lorsqu'il restituera l'énergie emmagasinée à un système qui lui est extérieur (voir § II.6-b) suivant).

• De même, l'énergie potentielle de gravité (figure 5.2) est le travail fourni à la masse pour l'amener à la cote z ; cette énergie est donc l'opposé du travail de l'action de la gravité sur la masse au cours de ce déplacement (voir § II.6-c) suivant).

• L'énergie potentielle élastique de déformation d'un corps est ce qui est appelé "énergie interne de déformation", c'est-à-dire le travail **fourni au corps élastique** par un système extérieur qui exerce des forces opposées aux forces internes de cohésion. De manière générale, son expression est donnée par

$$V = \tfrac{1}{2}\int_{\mathscr{D}} T_{ij} S_{ij}\, d\mathscr{D} = \tfrac{1}{2}\int_{\mathscr{D}} c_{ijk\ell} S_{k\ell} S_{ij}\, d\mathscr{D} \quad ,$$

où T_{ij} désigne les composantes du tenseur des contraintes, S_{ij} les composantes du tenseur des déformations, $\mathscr{D}$ le domaine considéré et $c_{ijk\ell}$ les composantes du tenseur des rigidités élastiques. Ces dernières notions dépassent largement le cadre de ce cours.

• Autre exemple : l'énergie interne d'un gaz (énergie potentielle) est l'énergie emmagasinée sous l'effet d'un écart de pression et/ou d'un écart de température entre le système étudié et son environnement (énergie reçue par le système considéré sous forme d'un travail et/ou d'une quantité de chaleur reçus par ce système).

• Dernier exemple : les nucléons constituant un noyau atomique sont "piégés" dans un "puits de potentiel", ce qui signifie que leur énergie, référencée par rapport à une origine associée à leur état libre au repos (hors du noyau), est négative (elle est liée à l'énergie nécessaire à son extraction du noyau).

b) Attraction proportionnelle à la distance (ressort)

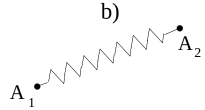


Figure 5.9-a

L'action exercée par le ressort sur A_1 (figure 5.9-a) est :

$$\vec{F}_1 = k\,\overrightarrow{A_1 A_2} = -\vec{F}_2 \qquad (5.32)$$

Exemple :

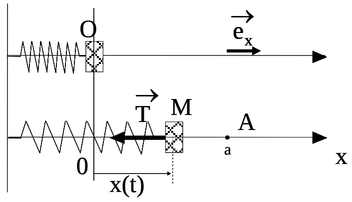


Figure 5.9-b

On attache à l'extrémité d'un ressort de masse négligeable, de raideur k, un cube M (figure 5.9-b). On l'écarte de $OA = a$ de sa position d'équilibre O et on repère la position de la masse par son abscisse x(t).

L'action du ressort sur le cube est : $\boxed{\vec{T} = -k\,x\,\vec{e}_x}$.

Le travail pour aller de O à A de $\vec{T}$ est :

$$\mathscr{W}_{O\to A}\left(\vec{T}\to M/\mathscr{R}\right) = \int_O^A \vec{T}.d\overrightarrow{OM} = \int_{t_0}^{t_a} \mathscr{P}\left(\vec{T}\to M/\mathscr{R}\right) dt = \int_{t_0}^{t_a} \vec{T}\cdot\vec{V}\left(M/\mathscr{R}\right) dt\,.$$

Or $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x$ donc $\vec{V}\left(M/\mathscr{R}\right) = \dot{x}\,\vec{e}_x = \dfrac{dx}{dt}\vec{e}_x$,

d'où $\vec{V}\left(M/\mathscr{R}\right) dt = dx\,\vec{e}_x$ et $\vec{T}\cdot\vec{V}\left(M/\mathscr{R}\right) dt = -k\,x\,dx$.

Finalement, $\mathscr{W}_{O\to A}\left(\vec{T}\to M/\mathscr{R}\right) = \int_0^a -k\,x\,dx = -\dfrac{1}{2}k\left[x^2\right]_0^a = -\dfrac{1}{2}k\,a^2$.

On peut définir l'***énergie potentielle élastique du ressort*** au point A par :

$$\boxed{E_{p_e}(A) = -\mathscr{W}_{OA} = \frac{1}{2}k\,a^2}\ . \qquad (5.33)$$

c) Champ de la pesanteur

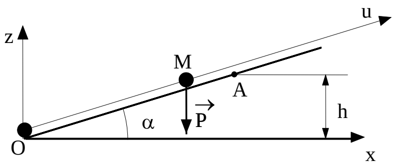


Figure 5.10

Une bille M, de masse m se déplace du point O au point A d'abscisse $u = a$ (figure 5.10).

Le poids de la bille est $\vec{P} = -m\,g\,\vec{e}_z$.

Le travail pour aller de O à A de $\vec{P}$ est :

$$\mathscr{W}_{O\to A}\left(\vec{P}\to M/\mathscr{R}\right) = \int_O^A \vec{P}.d\overrightarrow{OM} = \int_{t_0}^{t_a}\mathscr{P}\left(\vec{P}\to M/\mathscr{R}\right)dt = \int_{t_0}^{t_a}\vec{P}\cdot\vec{V}(M/\mathscr{R})\,dt\,.$$

Or $\overrightarrow{OM} = u\,\vec{e}_u$ donc $\vec{V}(M/\mathscr{R}) = \dot{u}\,\vec{e}_u = \dfrac{du}{dt}\vec{e}_u$,

d'où $\vec{V}(M/\mathscr{R})\,dt = du\,\vec{e}_u$ et $\vec{P}\cdot\vec{V}(M/\mathscr{R})\,dt = -m\,g\,du\;\vec{e}_u\cdot\vec{e}_z$.

Or $\vec{e}_u = \cos\alpha\,\vec{e}_x + \sin\alpha\,\vec{e}_z$ donc $\vec{e}_u\cdot\vec{e}_z = \sin\alpha$, d'où $\vec{P}\cdot\vec{V}(M/\mathscr{R})\,dt = -m\,g\sin\alpha\,du$.

On obtient alors :

$$\mathscr{W}_{O\to A}\left(\vec{P}\to M/\mathscr{R}\right) = \int_0^a -m\,g\sin\alpha\,du = -m\,g\sin\alpha\,[u]_0^a = -m\,g\,a\sin\alpha\,.$$

Or $h = a\sin\alpha$ d'où $\mathscr{W}_{O\to A}\left(\vec{P}\to M/\mathscr{R}\right) = -m\,g\,h$.

On peut définir l'***énergie potentielle de gravité*** au point A par :

$$\boxed{E_{p_g}(A) = -\mathscr{W}_{OA} = m\,g\,h}\ . \qquad (5.34)$$

Remarque. Bien noter le signe $\pm m\,g\,h$ selon l'orientation de l'axe z (voir § II.4-a)

III ENERGIE CINETIQUE

1 Définition

*Définition : Un point matériel A de masse m étant en mouvement par rapport à un repère (quelconque) $\mathscr{R}_0$, on appelle **énergie cinétique** (à l'instant considéré) du point A par rapport à $\mathscr{R}_0$ l'expression :*

$$\boxed{T(A/\mathscr{R}_0) = \frac{1}{2}m\left[\vec{V}(A/\mathscr{R}_0)\right]^2}\ . \qquad (5.35)$$

2 Théorème de l'énergie cinétique

Théorème de l'énergie cinétique (TEC) : Lorsqu'un point matériel A de masse m est en mouvement par rapport à un repère galiléen $\mathscr{R}_0$, la dérivée temporelle de son énergie cinétique par rapport à $\mathscr{R}_0$ est égale à la puissance de la résultante $\vec{\mathscr{R}}(\text{ext}\to A)$ de toutes les forces (extérieures) exercées sur le point A relativement au repère $\mathscr{R}_0$,

soit $$\boxed{\frac{dT(A/\mathscr{R}_0)}{dt} = \mathscr{P}\left(\text{ext}\to A/\mathscr{R}_0\right)}\ . \qquad (5.36)$$

⚠ Il faut que le repère $\mathscr{R}_0$ soit galiléen.

Démonstration.

Le Principe Fondamental de la Dynamique, énoncé au Chapitre 4, stipule que

$$\vec{\mathscr{R}}(\text{ext}\to A) = m\,\vec{\Gamma}(A/\mathscr{R}_0)\ , \qquad (5.37)$$

soit, en multipliant scalairement les deux membres de l'équation (5.37) par le vecteur vitesse $\vec{V}(A/\mathscr{R}_0)$,

$$\vec{\mathscr{R}}(\text{ext}\to A)\cdot\vec{V}(A/\mathscr{R}_0) = m\,\vec{\Gamma}(A/\mathscr{R}_0)\cdot\vec{V}(A/\mathscr{R}_0)\ . \qquad (5.38)$$

Le premier membre de l'équation (5.38) est la puissance $\mathscr{P}(\text{ext}\to A/\mathscr{R}_0)$ des actions mécaniques extérieures exercées sur le point A relativement au repère $\mathscr{R}_0$. Le second membre de l'équation (5.38) est la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique $T(A/\mathscr{R}_0)$. En effet,

$$\left[\vec{V}(A/\mathscr{R}_0)\right]^2 = \vec{V}(A/\mathscr{R}_0)\cdot\vec{V}(A/\mathscr{R}_0)\ , \qquad (5.39)$$

et la dérivée par rapport au temps d'un produit scalaire s'écrit de manière classique

$$\frac{d\left[\vec{V}(A/\mathscr{R}_0)\cdot\vec{V}(A/\mathscr{R}_0)\right]}{dt} = \vec{\Gamma}(A/\mathscr{R}_0)\cdot\vec{V}(A/\mathscr{R}_0) + \vec{V}(A/\mathscr{R}_0)\cdot\vec{\Gamma}(A/\mathscr{R}_0)\ ,$$

soit $$\frac{d\left[\vec{V}(A/\mathscr{R}_0)\cdot\vec{V}(A/\mathscr{R}_0)\right]}{dt} = 2\,\vec{\Gamma}(A/\mathscr{R}_0)\cdot\vec{V}(A/\mathscr{R}_0)\ . \qquad (5.40)$$

3. Exemples

a) Chute d'un point matériel glissant sur un plan incliné (contact sans frottements)

Reprenons l'exemple du point matériel glissant sur un plan incliné, traité au chapitre 4.

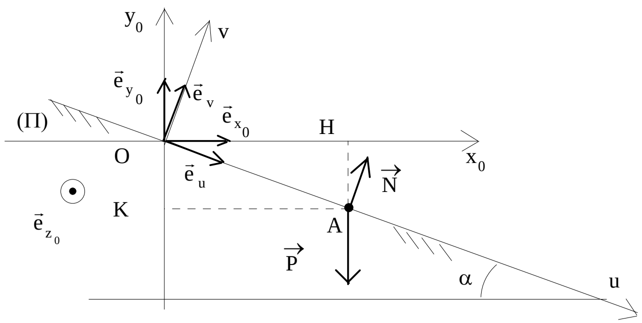


Figure 5.10

Le contact entre le point A et le plan (Π) se fait sans frottement.

A $t=0$, on abandonne A à l'origine O sur le plan (Π), et sans vitesse initiale.

• L'énergie cinétique du point A par rapport au repère $\mathscr{R}_0$ supposé galiléen est

$$T(A/\mathscr{R}_0)=\frac{1}{2}m\left[\vec{V}(A/\mathscr{R}_0)\right]^2 \quad , \tag{5.41}$$

avec
$$\vec{V}(A/\mathscr{R}_0)=\dot{u}\,\vec{e}_u \quad , \tag{5.42}$$

d'où
$$\boxed{T(A/\mathscr{R}_0)=\frac{1}{2}m\,\dot{u}^2} \quad . \tag{5.43}$$

La dérivée par rapport au temps de cette énergie cinétique s'écrit donc

$$\boxed{\frac{d\,T(A/\mathscr{R}_0)}{d\,t}=m\,\ddot{u}\,\dot{u}} \quad . \tag{5.44}$$

• <u>Inventaire des forces</u> :

▪ action de la gravité : $\{\varpi\to A\}=(A,\vec{P})=\underset{A}{\begin{Bmatrix}0 & 0\\ -mg & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}}_{\mathscr{B}_0}=\underset{A}{\begin{Bmatrix}mg\sin\alpha & 0\\ -mg\cos\alpha & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}}_{\mathscr{B}}$.

▪ action du plan (Π) sur A : $\{\Pi\to A\}=(A,\vec{N})=\underset{A}{\begin{Bmatrix}0 & 0\\ N & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}}_{\mathscr{B}}$,

avec $N>0$ (condition de contact).

• La puissance des forces extérieures exercées sur le point A, relativement au repère $\mathscr{R}_0$ est

$$\mathscr{P}(ext\to A/\mathscr{R}_0)=\mathscr{P}(\varpi\to A/\mathscr{R}_0)+\mathscr{P}(\Pi\to A/\mathscr{R}_0) \quad , \tag{5.45}$$

soit
$$\mathscr{P}(ext\to A/\mathscr{R}_0)=\vec{P}\cdot\vec{V}(A/\mathscr{R}_0)+\underbrace{\vec{N}\cdot\vec{V}(A/\mathscr{R}_0)}_{0} \quad , \tag{5.46}$$

d'où
$$\boxed{\mathscr{P}(ext\to A/\mathscr{R}_0)=m\,g\,\dot{u}\sin\alpha} \quad . \tag{5.47}$$

• Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit

$$\frac{d\,T(A/\mathscr{R}_0)}{d\,t}=\mathscr{P}(ext\to A/\mathscr{R}_0) \quad , \tag{5.46}$$

soit, en reportant les relations (5.44) et (5.47) dans l'équation (5.46)

$$\boxed{m\,\ddot{u}\,\dot{u}=m\,g\,\dot{u}\sin\alpha} \quad , \tag{5.47}$$

soit
$$\ddot{u}=g\sin\alpha \quad . \tag{5.48}$$

L'équation (5.47) n'est autre que l'équation du mouvement déjà trouvée au chapitre 4.

Par ailleurs, l'intégration par rapport au temps de l'équation (5.47) permet d'obtenir une expression de la vitesse $\dot{u}(t)$, en utilisant les conditions initiales $u(0)=0$ et $\dot{u}(0)=0$

$$\boxed{\frac{1}{2}\dot{u}^2=g\,u\sin\alpha} \quad . \tag{5.49}$$

b) Le projectile terrestre

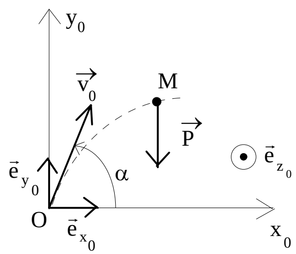


Figure 5.11

Le projectile est assimilé à un point matériel M, de masse m. Il est soumis uniquement à son poids, dans le champ uniforme de la pesanteur..

Le repère $\mathscr{R}_0=(O,\vec{e}_{x_0},\vec{e}_{y_0},\vec{e}_{z_0})$ lié à la Terre est supposé galiléen. L'axe Oy_o est vertical ascendant (figure 5.11).

A $t=0$, le point M est en O et sa vitesse est supposée connue : $\vec{V}(M/\mathscr{R}_0)=\vec{v}_0$.

• L'énergie cinétique du point M par rapport au repère $\mathscr{R}_0$ supposé galiléen est

$$T(M/\mathscr{R}_0)=\frac{1}{2}m\left[\vec{V}(M/\mathscr{R}_0)\right]^2 \quad . \tag{5.50}$$

- <u>Inventaire des forces</u> :

- action de la gravité : $\{\varpi \to M\} = \left(M, \vec{P}\right) = {}_{M}\left\{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -m\,g & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right\}_{\mathscr{B}_0}$.

- La puissance des forces extérieures exercées sur le point M, relativement au repère $\mathscr{R}_0$ est

$$\mathscr{P}\left(\text{ext} \to M/\mathscr{R}_0\right) = \mathscr{P}\left(\varpi \to M/\mathscr{R}_0\right) = \frac{d\,U}{d\,t} \quad , \qquad (5.51)$$

avec

$$U = -m\,g\,y \quad . \qquad (5.52)$$

- Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit

$$\frac{d\,T\left(M/\mathscr{R}_0\right)}{d\,t} = \mathscr{P}\left(\text{ext} \to M/\mathscr{R}_0\right) \quad . \qquad (5.53)$$

L'intégration des deux membres de l'équation (5.53) entre les instants $t = 0$ et t s'écrit :

$$\int_0^t d\,T\left(M/\mathscr{R}_0\right) = \int_0^t d\,U \quad , \qquad (5.54)$$

soit

$$\frac{1}{2}m\left[\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right)\right]^2 - \frac{1}{2}m\,v_0^2 = -m\,g\,y \quad , \qquad (5.55)$$

qui peut s'écrire

$$\boxed{\frac{1}{2}m\left[\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right)\right]^2 + m\,g\,y = \frac{1}{2}m\,v_0^2} \quad . \qquad (5.56)$$

L'équation (5.56) est ce que l'on appelle une intégrale première du mouvement, qui traduit la conservation de l'énergie totale du système (ici du point M) au cours du temps. Dans cette intégrale première, la constante d'intégration est donnée par les conditions initiales.

Rappelons que :

✓ $\frac{1}{2}m\left[\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right)\right]^2$ représente l'***énergie cinétique*** du mobile

✓ $m\,g\,y$ représente l'***énergie potentielle*** de la force de pesanteur.

IV ENERGIE MECANIQUE

1. <u>Exemple du pendule circulaire (sans frottements)</u>

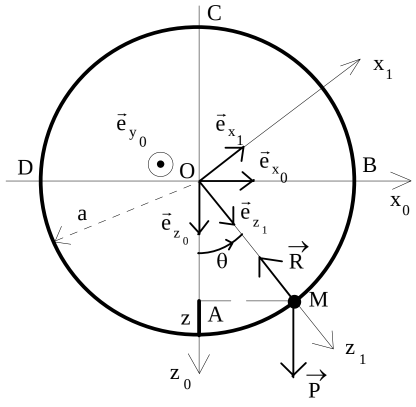


Figure 5.12

Un point matériel M pesant est astreint à se déplacer *sans frottement* sur un cercle vertical fixe (figure 5.12). La liaison peut être bilatérale ou unilatérale (dans le cas par exemple du pendule à fil). Le repère $\mathscr{R}_0 = \left(O, \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0}\right)$ est supposé galiléen. Afin de caractériser la position basse A par l'angle $\theta = 0$, on a choisi ici un axe vertical descendant Oz_o (figure 5.12). Le plan de figure est alors orienté dans le sens habituel par l'axe perpendiculaire Oy_o.

On choisit les conditions initiales suivantes : à $t = 0$, le point M est lancé au point A ($\theta = 0$) avec une certaine vitesse $v_0 = a\,\dot{\theta}_0$ ($\dot{\theta}_0 > 0$ par exemple).

Le vecteur position est tel que

$$\overrightarrow{OM} = a\,\vec{e}_{z_1} \quad , \qquad (5.57)$$

donc

$$\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right) = a\,\dot{\theta}\,\vec{e}_{x_1} \quad . \qquad (5.58)$$

- L'énergie cinétique du point M par rapport au repère $\mathscr{R}_0$ supposé galiléen est

$$T\left(M/\mathscr{R}_0\right) = \frac{1}{2}m\left[\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right)\right]^2 \quad , \qquad (5.59)$$

soit

$$\boxed{T\left(M/\mathscr{R}_0\right) = \frac{1}{2}m\,a^2\dot{\theta}^2} \quad . \qquad (5.60)$$

- <u>Inventaire des forces</u> :
  - poids : $\vec{P} = m\,g\,\vec{e}_{z_0} = mg\left(\cos\theta\,\vec{e}_{z_1} - \sin\theta\,\vec{e}_{x_1}\right)$
  - action du cercle sur M : $\vec{R} = -R\,\vec{e}_{z_1}$

• Energie potentielle de gravité :

Vue l'orientation de l'axe z_0, vertical descendant (voir § II.4-a), la fonction de force est telle

que $$U = +m g z \quad , \tag{5.61}$$

soit $$E_p = -m g z \quad , \tag{5.62}$$

avec $$z = -a(1-\cos\theta) \; , \tag{5.63}$$

d'où $$\boxed{E_p = m g a(1-\cos\theta)} \; , \tag{5.64}$$

Il convient de noter que, l'origine du mouvement étant prise en $M \equiv A$ (position d'équilibre), pour se déplacer algébriquement vers l'origine, $z < 0$, et l'origine de l'énergie potentielle est prise en ce point. Par conséquent, en $\theta = 0$, cette énergie potentielle est prise égale à 0.

Remarque : l'énergie potentielle pourrait être calculée à partir du travail du poids pour aller du point A au point M :

$$\mathscr{W}_{A\to M}\left(\vec{P} \to M/\mathscr{R}_0\right) = \int_A^M \vec{P}\cdot\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right) d t \quad , \tag{5.65}$$

avec $$\vec{P} = -m g \sin\theta\, \vec{e}_{x_1} + m g \cos\theta\, \vec{e}_{z_1} \quad ,$$

et $$\vec{V}\left(M/\mathscr{R}_0\right) = a\dot{\theta}\,\vec{e}_{x_1} \quad ,$$

donc $$\mathscr{W}_{A\to M}\left(\vec{P} \to M/\mathscr{R}_0\right) = \int_A^M - m g \dot{\theta} \sin\theta\, d t = \int_0^\theta - m g \sin\theta\, d\theta \quad ,$$

soit $$\mathscr{W}_{A\to M}\left(\vec{P} \to M/\mathscr{R}_0\right) = m g a\left[\cos\theta\right]_0^\theta = m g a(\cos\theta - 1) \quad . \tag{5.66}$$

Or $$E_p = -\mathscr{W}_{A\to M}\left(\vec{P} \to M/\mathscr{R}_0\right) \quad ,$$

donc $$E_p = m g a(1-\cos\theta) \quad . \tag{5.67}$$

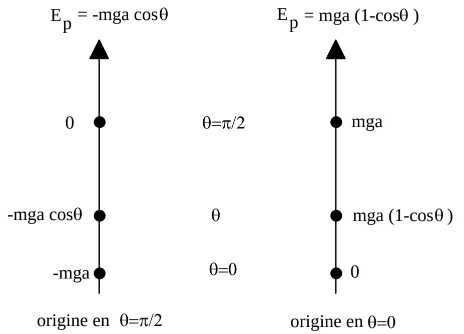


Figure 5.13

L'équation (5.67) exprime en réalité la variation d'énergie potentielle pour aller du point A au point M. L'origine du potentiel est donc prise au point A, $\theta = 0$. Si l'on prend comme origine des potentiels $\theta = \pi/2$, la variation d'énergie potentielle est égale à $-m g a \cos\theta$. Quelle que soit l'origine, le potentiel en $\theta = \pi/2$ est plus élevé qu'en $\theta = 0$ (figure 5.13).

• Puissance des forces extérieures :

$$\mathscr{P}\left(\text{ext} \to M/\mathscr{R}_0\right) = \mathscr{P}\left(\varpi \to M/\mathscr{R}_0\right) + \underbrace{\mathscr{P}\left(\text{cerceau} \to A/\mathscr{R}_0\right)}_{0} \quad ,$$

soit $$\boxed{\mathscr{P}\left(\text{ext} \to M/\mathscr{R}_0\right) = \mathscr{P}\left(\varpi \to M/\mathscr{R}_0\right) = \frac{d U}{d t} = -\frac{d E_p}{d t}} \quad . \tag{5.68}$$

• Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{d T\left(M/\mathscr{R}_0\right)}{d t} = \mathscr{P}\left(\text{ext} \to M/\mathscr{R}_0\right) \quad ,$$

soit, en faisant usage de la relation (5.68)

$$\frac{d T\left(M/\mathscr{R}_0\right)}{d t} = -\frac{d E_p}{d t} \quad . \tag{5.69}$$

L'intégration entre les temps $t = 0$ et t des deux membres de l'équation (5.69) conduit à

$$\left[T\left(M/\mathscr{R}_0\right)\right]_0^t = -\left[E_p\right]_0^t \quad ,$$

soit $$T\left(M/\mathscr{R}_0\right)\Big|_t - T\left(M/\mathscr{R}_0\right)\Big|_{t=0} = -E_p\Big|_t + E_p\Big|_{t=0} \quad ,$$

d'où $$\boxed{T\left(M/\mathscr{R}_0\right)\Big|_t + E_p\Big|_t = T\left(M/\mathscr{R}_0\right)\Big|_{t=0} + E_p\Big|_{t=0}} \quad . \tag{5.70}$$

L'équation (5.70) traduit la conservation de l'énergie mécanique E_{mec}, définie par

$$\boxed{E_{mec} = T\left(M/\mathscr{R}_0\right) + E_p} \quad . \tag{5.71}$$

Au temps $t = 0$, la vitesse initiale est v_0 et l'angle est $\theta = 0$,

donc $$T\left(M/\mathscr{R}_0\right)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad . \tag{5.72}$$

L'équation (5.70) peut donc s'écrire

$$T\left(M/\mathscr{R}_0\right) = \frac{1}{2} m v_0^2 - \Delta E_p \quad , \tag{5.73-a}$$

avec $$\Delta E_p = m g a(1-\cos\theta) \quad . \tag{5.73-b}$$

Au cours du mouvement, il y a échange des énergies cinétique et potentielle (figure 5.14). La vitesse est maximale lorsque l'énergie cinétique est maximale et l'énergie potentielle minimale. Inversement, lorsque $\theta = 0$ ou $\theta = 2\pi$, l'énergie potentielle est minimale, et l'on parle alors de "***puits de potentiel***".

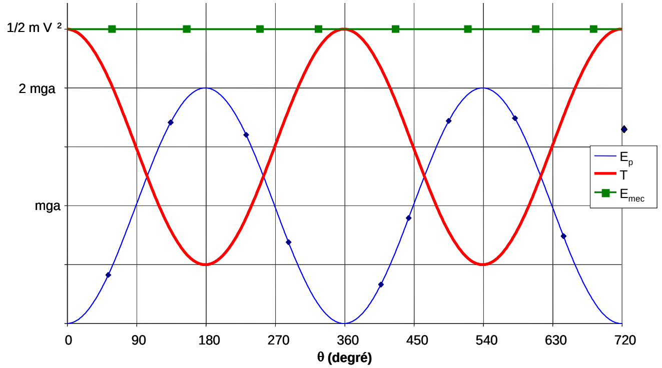


Figure 5.14

2. <u>Généralisation</u>

a) <u>Système conservatif</u>

*<u>Définition</u> : Un système dans lequel il n'y a pas de mécanisme physique de dissipation d'énergie et pas d'apport d'énergie extérieure, est dit **conservatif**.*

Il y a eu une mise en mouvement au départ, et une fois mis en mouvement, le système conserve son mouvement.

b) <u>Exemples de systèmes conservatifs</u>

- le pendule vu au § IV.1., si le frottement dû à l'air et celui de la ficelle sur son point d'attache sont négligés,
- le système solaire : les planètes tournent autour du Soleil, et il n'y a pas de dissipation (le mouvement des planètes ne se ralentit pas).

c) <u>Energie mécanique</u>

L'énergie mécanique d'un système est égale à la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$\boxed{E_{mec}(\Sigma/\mathscr{R}_0) = T(\Sigma/\mathscr{R}_0) + E_p(\Sigma/\mathscr{R}_0)} \quad . \qquad (5.74)$$

Au cours du mouvement d'un système conservatif, il y a ***conservation de l'énergie mécanique***. Par suite, la variation d'énergie cinétique est égale à l'opposé de la variation d'énergie potentielle :

$$\boxed{\Delta T(\Sigma/\mathscr{R}_0) = -\Delta E_p(\Sigma/\mathscr{R}_0)} \quad . \qquad (5.75)$$

ANNEXE 5A : CIRCULATION D'UN VECTEUR SUR UNE COURBE

Ce paragraphe est destiné à faciliter la compréhension de la notion de circulation, en vue de l'appliquer à la mécanique. Il ne remplace nullement le cours de Mathématiques sur le sujet.

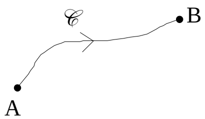


Figure 5A.1

Soient un champ de vecteur $\vec{F}(x,y,z)$ et une courbe $\mathscr{C}$ paramétrée en $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ (figure 5A.1).

Par définition, la circulation du champ de vecteur $\vec{F}$ le long de la courbe $\mathscr{C}$ est l'intégrale

$$\int_A^B \vec{F}(x,y,z)\cdot d\overrightarrow{OM} \quad , \qquad (5A.1)$$

qui s'identifie donc au travail de la force $\vec{F}$ pour aller du point A au point B.

ANNEXE 5B : GRADIENT D'UNE FONCTION

Ce paragraphe est destiné à faciliter la compréhension de la notion de gradient, en vue de l'appliquer à la mécanique. Il ne remplace nullement le cours de Mathématiques sur le sujet.

5B.1 DEFINITIONS DE BASE

Le gradient d'une fonction scalaire $U(x,y,z)$ (encore appelé champ scalaire) est un vecteur dont les composantes sur la base orthonormée des coordonnées cartésiennes $\mathscr{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont données par :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, U(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z} \quad . \qquad (5B.1)$$

A noter qu'en coordonnées cylindriques et sphériques, l'opérateur gradient prend une forme différente de celle de l'équation (5B.1), à savoir,

- en cylindriques, fonction $U(\rho,\varphi,z)$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, U(\rho,\varphi,z) = \frac{\partial U}{\partial \rho}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z \quad , \qquad (5B.2)$$

- en sphériques, fonction $U(r,\theta,\varphi)$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, U(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi \quad . \qquad (5B.3)$$

5B.2 POUR ALLER PLUS LOIN

✓ De manière plus abstraite, le gradient d'une fonction $U(M)$ entre dans l'écriture de l'application différentielle (application linéaire tangente) associée à cette fonction au point M :

$$\boxed{d\,U = \left(\overrightarrow{\text{grad}}\,U\right)\cdot d\,\overrightarrow{M}}\ , \qquad \text{(5B.4)}$$

où $d\,\overrightarrow{M}$ représente la variable vectorielle indépendante de l'application linéaire. Dans le calcul infinitésimal, $d\,\overrightarrow{M}$ représente la variation élémentaire de la position du point M.

✓ En coordonnées cartésiennes, la définition (5B.4) du gradient de la fonction $U(x,y,z)$ s'écrit, en utilisant les composantes des différents vecteurs sur la base des coordonnées cartésiennes :

$$d\,U = \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z\right)}_{\overrightarrow{\text{grad}}\,U} \cdot \underbrace{\left(d\,x\,\vec{e}_x + d\,y\,\vec{e}_y + d\,z\,\vec{e}_z\right)}_{d\,\overrightarrow{M}}\ ,$$

et ce, quels que soient les accroissements $d\,x$, $d\,y$ et $d\,z$; la donnée de ces trois accroissements et de $\overrightarrow{\text{grad}}\,U$ permet d'en déduire la variation $d\,U$ de U.

5B.2.1 Raisonnement à deux dimensions

Menons maintenant un raisonnement à deux dimensions, qui peut être généralisé sans difficultés à plus de deux dimensions.

Si les variations $d\,x$ et $d\,y$ sont choisies telles que

$$d\,U = 0, \qquad \text{(5B.5-a)}$$

soit

$$U(x,y) = \text{constante}\ , \qquad \text{(5B.5-b)}$$

cela revient à écrire que, géométriquement, tous les vecteurs élémentaires $d\,\overrightarrow{M}$ tels que $d\,U = 0$, restent tangents en M à la ligne $U(x,y) = \text{constante}$. On voit alors d'après l'expression (5B.4) de la différentielle de U que $\overrightarrow{\text{grad}}\,U$ est perpendiculaire à ces vecteurs $d\,\overrightarrow{M}$. Les courbes du plan (x,y) telles que $U(x,y) = \text{constante}$ sont classiquement appelées ***lignes de niveau*** du champ scalaire U, et on peut énoncer le résultat suivant :

• En tout point (x,y), le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,U$ est perpendiculaire à la ligne de niveau de la fonction U passant par ce point. (5B.6)

Dans l'espace à trois dimensions, en tout point M, le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,U$ est normal à la surface $U(x,y,z) = \text{constante}$ qui passe par ce point.

5B.2.1.1. Les lignes de niveau : exemple d'une carte topographique

De manière générale, l'ensemble des points où un champ scalaire U prend la même valeur, sont ses ***lignes*** (voire surfaces) ***de niveau***.

Les ***lignes de niveau*** reflètent toujours une réalité physique.

Ainsi, sur une carte topographique où l'on s'intéresse au relief, x et y représentent par exemple les axes Est-Ouest et Nord-Sud, et la fonction U désigne l'altitude z. Sur les cartes météorologiques, la fonction U désigne soit la température, soit la pression, et les lignes de niveau représentent soit les isothermes (points qui sont tous à la même température), soit les isobares (points à la même pression). Dans l'exemple qui suit, on s'intéresse aux cartes topographiques. A titre d'exemple, la figure 5B.1 montre les lignes de niveau de la surface

$$U(x,y) = x\,e^{-\left(x^2+y^2\right)}\ . \qquad \text{(5B.7)}$$

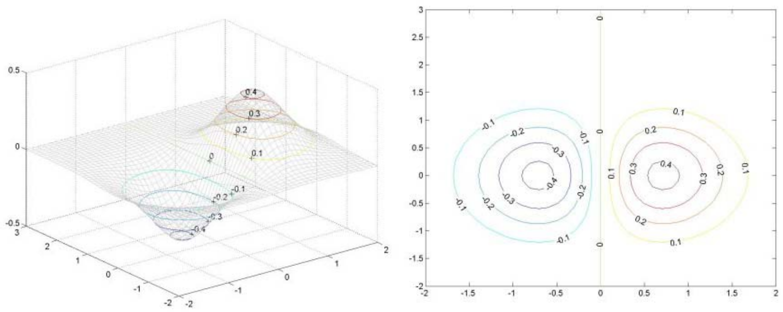


Figure 5B.1

Sur une carte d'une région montagneuse (figure 5B.2), figurent des lignes de niveau, ensemble des points situés à la même altitude, qui permettent de comprendre comment se présente le relief. Les courbes tracées en bleu représentent les torrents, qui coupent les lignes de niveau orthogonalement : les torrents coulent dans le sens des altitudes décroissantes, suivant la ***ligne de plus grande pente*** (là où ils coulent), ligne orthogonale en tout point à la ligne de niveau passant par ce point.

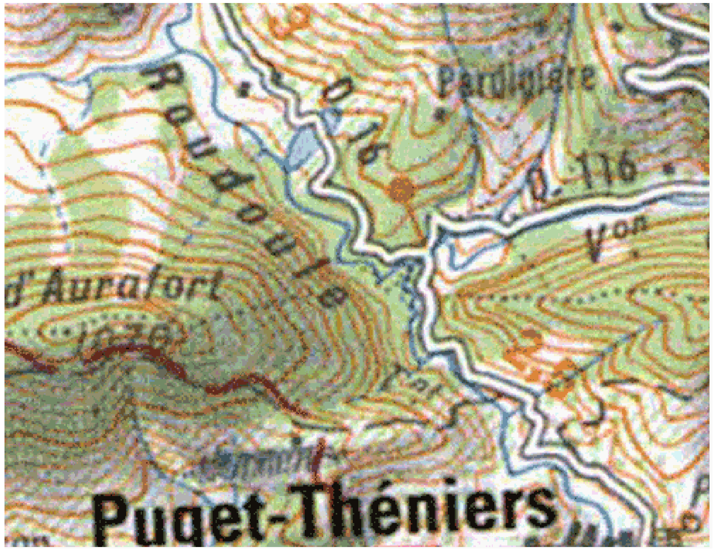


Figure 5B.2

5B.2.1.2. Orientation du gradient

Dans le plan (x,y), si l'on se déplace en restant constamment perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,U$, on suit une ligne de niveau $U(x,y) = \text{constante}$. Par contre, la variation de la fonction U est maximale si l'on se déplace en suivant les droites ou les directions qui portent le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,U$; la fonction U croît si ce déplacement s'effectue dans le sens du vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,U$ et elle décroît dans le sens opposé.

En résumé :

• $\overrightarrow{\text{grad}}\,U$ est dirigé suivant la ***direction de variation la plus rapide*** de U (ligne de plus grande pente), ***dans le sens des valeurs croissantes*** de U. (5B.8)

5B.2.1.3. Retour sur l'énergie potentielle

Comme on l'a vu au chapitre 5, § II/4, une force $\vec{F}$ (fonction vectorielle) dérive d'une fonction de force (ou d'un potentiel), s'il existe un champ scalaire U tel que

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\,U \quad . \qquad (5B.9)$$

D'après la propriété (5B.8), la force $\vec{F}$ est dirigée vers les valeurs croissantes du champ scalaire U. Si l'on définit l'énergie potentielle E_p comme l'opposé de la fonction scalaire (champ scalaire) U, soit $E_p = -U$, alors la force $\vec{F}$ est orientée des grandes valeurs de E_p vers les plus petites.

Tout ce qui vient d'être vu à deux dimensions se généralise aisément à plusieurs dimensions.

5B.2.2 Opérateur nabla

Le moyen de "fabriquer" un champ à partir d'un autre champ est ce que l'on appelle un ***opérateur***. L'opérateur gradient, noté $\overrightarrow{\text{grad}}$ ou encore $\vec{\nabla}$ (opérateur ***"nabla"***) est donc un opérateur vectoriel et différentiel. En coordonnées cartésiennes, cet opérateur s'écrit (à rapprocher de la relation (5B.1))

$$\vec{\nabla} = \overrightarrow{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z \quad . \qquad (5B.10)$$