

COURS DE MECANIQUE

2ème année

Catherine POTEL, Philippe GATIGNOL

A noter que la numérotation des paragraphes adoptée ici est calquée sur celle du cours oral afin de faciliter le suivi du cours magistral, mais ne répond pas aux normes de présentation usuelles d'un document écrit.

**Chapitre 5.
L'ENERGIE EN MECANIQUE DU SOLIDE**

Université du Maine - UFR Sciences et Techniques

Les points importants de ce chapitre sont :



La puissance et le travail d'une force
Le théorème de l'énergie cinétique

I RETOUR SUR LA PUISSANCE

On a déjà vu au Chapitre 2, § V, la puissance des actions d'un solide sur un autre en liaison sans frottement, relativement à un repère, par anticipation sur le présent chapitre.

1 Puissance d'une force

Soit une force \vec{F} appliquée en un point A en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0 = (O_0, \mathcal{B}_0)$.

Définition : On définit la "puissance de la force \vec{F} appliquée en A relativement au repère \mathcal{R}_0 " par le produit scalaire :

$$\mathcal{P}(\vec{F} \rightarrow A / \mathcal{R}_0) = \vec{F} \cdot \vec{V}(A / \mathcal{R}_0) . \quad (5.1)$$

La puissance, ainsi définie, dépend donc :

- de la force considérée,
- du point d'application,
- du repère \mathcal{R}_0 .

2 Cas général d'un système déformable

Dans le cas d'un ensemble de forces (A_i, \vec{F}_i) appliquées aux points A_i d'un système Σ , la puissance totale est définie comme la somme des puissances de chacune des forces. On peut donc en donner la définition suivante :

Définition : la puissance d'un ensemble de forces $\mathcal{F} = (A_i, \vec{F}_i)$ appliquées aux points A_i d'un système Σ dans son mouvement par rapport à un repère \mathcal{R}_0 est égale à la somme des puissances de chacune des forces :

$$\mathcal{P}(\mathcal{F} \rightarrow \Sigma / \mathcal{R}_0) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \vec{V}(A_i / \mathcal{R}_0) . \quad (5.2)$$

3 Cas d'actions s'exerçant sur un système rigide

Hypothèse : les forces (A_i, \vec{F}_i) d'un ensemble \mathcal{F} s'appliquent aux points A_i d'un même solide S en mouvement par rapport à un repère \mathcal{R}_0 .

La puissance de l'ensemble \mathcal{F} de forces considérées s'écrit alors :

$$\mathcal{P}(\mathcal{F} \rightarrow S / \mathcal{R}_0) = \mathcal{F} \cdot \mathcal{V}(S / \mathcal{R}_0) , \quad (5.3)$$

où $\mathcal{V}(S / \mathcal{R}_0)$ est le torseur distributeur des vitesses pour le mouvement du solide S par rapport au repère \mathcal{R}_0 . Dans le cas des actions d'un solide S_1 sur un solide S_2 , relativement au repère \mathcal{R}_0 , la relation (5.3) peut donc s'écrire

$$\mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2 / \mathcal{R}_0) = \{S_1 \rightarrow S_2\} \cdot \mathcal{V}(S_2 / \mathcal{R}_0) . \quad (5.4)$$

On peut également écrire :

$$\mathcal{P}(\mathcal{F} \rightarrow S / \mathcal{R}_0) = \vec{R}(\mathcal{F}) \cdot \vec{V}(P \in S / \mathcal{R}_0) + \vec{M}_P(\mathcal{F}) \cdot \vec{\Omega}(\mathcal{B} / \mathcal{B}_0) , \quad (5.5)$$

où \mathcal{B} est la base associée au repère lié au solide S.

Notations : On a vu au chapitre 2, que, si les composantes de la résultante $\vec{R}(\mathcal{F} \rightarrow S)$ et du moment au point P $\vec{M}_P(\mathcal{F} \rightarrow S)$ du torseur $\{S_1 \rightarrow S_2\}$ sur la même base \mathcal{B} sont

$$\vec{R}(\mathcal{F} \rightarrow S) \Big|_{\mathcal{B}} \begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \text{ et } \vec{M}_P(\mathcal{F} \rightarrow S) \Big|_{\mathcal{B}} \begin{matrix} L \\ M \\ N \end{matrix} ,$$

alors on peut aussi noter $\{S_1 \rightarrow S_2\} = \begin{matrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{matrix} \Big|_{\mathcal{B}}$.

Si, de plus, les composantes du vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{B} / \mathcal{B}_0)$ et de la vitesse du point P appartenant à S par rapport au repère \mathcal{R}_0 sont notées

$$\vec{\Omega}(\mathcal{B} / \mathcal{B}_0) \Big|_{\mathcal{B}} \begin{matrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{matrix} \text{ et } \vec{V}(P \in S / \mathcal{R}_0) \Big|_{\mathcal{B}} \begin{matrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{matrix} \text{ alors } \mathcal{V} = \begin{matrix} \omega_x & v_x \\ \omega_y & v_y \\ \omega_z & v_z \end{matrix} \Big|_{\mathcal{B}} .$$

La relation (5.5) s'écrit donc

$$\mathcal{P}(\mathcal{F} \rightarrow S / \mathcal{R}_0) = Xv_x + Yv_y + Zv_z + L\omega_x + M\omega_y + N\omega_z . \quad (5.6)$$

4 Puissance des efforts intérieurs à un système

a) Cas général

En général, la puissance des forces intérieures à un système Σ est *différente de 0*.

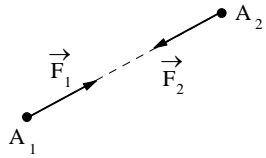


Figure 5.1

Considérons d'abord un système Σ constitué de deux points A_1 et A_2 (figure 5.1). Σ est soumis à des actions extérieures qui se traduisent par des forces appliquées à A_1 et à A_2 , et à des actions intérieures qui sont les forces d'interaction entre les deux points. Désignons ces dernières par \vec{F}_1 et \vec{F}_2 . En vertu du principe d'action-réaction, ces forces sont opposées : $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$.

Si Σ est en mouvement par rapport à un repère \mathcal{R}_0 (figure 5.2), la puissance totale de ces deux forces, intérieures à Σ , par rapport à \mathcal{R}_0 est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{F}_1 \rightarrow A_1, \vec{F}_2 \rightarrow A_2 / \mathcal{R}_0) &= \vec{F}_1 \cdot \vec{V}(A_1 / \mathcal{R}_0) + \vec{F}_2 \cdot \vec{V}(A_2 / \mathcal{R}_0) \\ &= \vec{F}_1 \cdot \underbrace{[\vec{V}(A_1 / \mathcal{R}_0) - \vec{V}(A_2 / \mathcal{R}_0)]}_{\vec{V}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

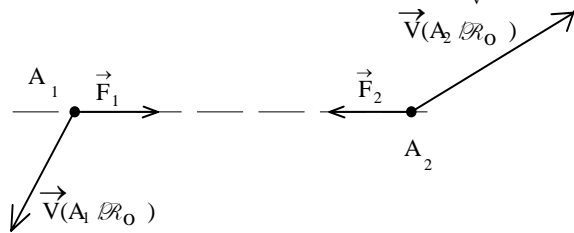


Figure 5.2

Dans le cas général, le vecteur \vec{V} est non nul et il n'est même pas perpendiculaire à \vec{F}_1 comme dans le cas d'un solide en raison de l'équiprojectivité. Par conséquent, la puissance de ces forces intérieures à Σ est *différente de 0*.

b) Cas d'un solide rigide

Si les deux points A_1 et A_2 sont en mouvement de solide rigide, leur distance est constante et leurs vecteurs vitesses, par rapport à un repère quelconque, vérifient la propriété d'équiprojectivité. Comme la force intérieure \vec{F}_1 admet la droite $(A_1 A_2)$ comme support d'après le principe d'action-réaction, on a dans ce cas :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_1 \rightarrow A_1, \vec{F}_2 \rightarrow A_2 / \mathcal{R}_0) = \vec{F}_1 \cdot [\vec{V}(A_1 / \mathcal{R}_0) - \vec{V}(A_2 / \mathcal{R}_0)] = 0 \quad (5.8)$$

Ce résultat se généralise immédiatement au cas d'un système constitué de n points A_i et l'on est conduit à l'énoncé suivant :

La puissance totale des interactions intérieures à un solide rigide est nulle par rapport à tout repère de référence.

c) Retour au cas général

Corollaire : La puissance totale des interactions intérieures à un système quelconque est indépendante du repère par rapport auquel est étudié le mouvement,

et par suite :

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}_{\text{int}} \rightarrow \Sigma / \mathcal{R}_0) = \mathcal{P}(\mathcal{F}_{\text{int}} \rightarrow \Sigma / \mathcal{R}_1) \quad (5.9)$$

où \mathcal{F}_{int} désigne les interactions intérieures à un système quelconque. D'après le principe de l'action-réaction, on a donc pour le torseur : $\mathcal{F}_{\text{int}} = \mathcal{O}$.

En effet, soit un ensemble de forces de torseur \mathcal{F} appliquées à un système quelconque Σ (déformable en général). Soient \mathcal{R}_0 et \mathcal{R}_1 deux repères d'observation pour le mouvement de Σ . Pour chaque point A de Σ , le théorème de composition des vitesses s'écrit :

$$\vec{V}(A / \mathcal{R}_0) = \vec{V}(A / \mathcal{R}_1) + \vec{V}(A \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) \quad (5.10)$$

On en déduit la relation correspondante pour les puissances du torseur de forces \mathcal{F} :

$$\mathcal{P}(\mathcal{F} \rightarrow \Sigma / \mathcal{R}_0) = \mathcal{P}(\mathcal{F} \rightarrow \Sigma / \mathcal{R}_1) + \mathcal{P}(\mathcal{F} \rightarrow \Sigma \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) \quad (5.11)$$

Dans le second terme du second membre, le système $\Sigma \in \mathcal{R}_1$ auquel sont appliquées les forces \mathcal{F} est "solidifié" dans le repère d'entraînement \mathcal{R}_1 (système "coincident"). La puissance correspondante s'écrira donc, en appliquant l'équation (5.3) :

$$\mathcal{P}(\mathcal{F} \rightarrow \Sigma \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) = \mathcal{F} \cdot \mathcal{V}(\mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) \quad (5.12)$$

• **Dans le cas particulier où le torseur \mathcal{F} est nul**, ce qui est le cas pour l'ensemble des forces intérieures au système Σ , on aura :

$$\mathcal{P}(\mathcal{F} \rightarrow \Sigma \in \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}_0) = 0, \quad (5.13-a)$$

et par suite :

$$\mathcal{P}(\mathcal{F} \rightarrow \Sigma / \mathcal{R}_0) = \mathcal{P}(\mathcal{F} \rightarrow \Sigma / \mathcal{R}_1). \quad (5.13-b)$$

Corollaire : La puissance totale des interactions intérieures à un système quelconque est indépendante du repère par rapport auquel est étudié le mouvement.

et par suite :

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}_{\text{int}} \rightarrow \Sigma / \mathcal{R}_0) = \mathcal{P}(\mathcal{F}_{\text{int}} \rightarrow \Sigma / \mathcal{R}_1). \quad (5.14)$$

Conclusion : La puissance d'un torseur de forces nul n'est pas nulle en général, mais elle est indépendante du repère d'observation.

• **Exemple :** Cas de deux solides S_1 et S_2 en contact ponctuel

Σ est ici constitué des deux solides S_1 et S_2 en contact ponctuel au point K (voir figure 5.3).

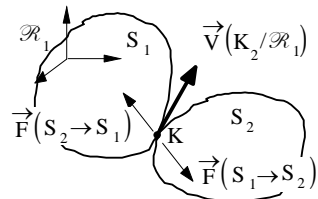


figure 5.3

Les interactions de contact entre S_1 et S_2 au point K se traduisent par deux forces $\vec{F}(S_1 \rightarrow S_2)$ et $\vec{F}(S_2 \rightarrow S_1)$ appliquées au point K, ou, plus précisément, au point K_1 pour $\vec{F}(S_2 \rightarrow S_1)$ et au point K_2 pour $\vec{F}(S_1 \rightarrow S_2)$. Ces deux forces sont opposées en vertu du principe d'action-réaction.

La puissance totale de ces deux forces ne dépendant pas du repère, on peut l'évaluer par rapport à un repère \mathcal{R}_1 lié à S_1 .

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) &= \mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2 / \mathcal{R}_1) + \mathcal{P}(S_2 \rightarrow S_1 / \mathcal{R}_1) \\ &= \vec{F}(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{V}(K_2 / \mathcal{R}_1) + \vec{F}(S_2 \rightarrow S_1) \cdot \vec{V}(K_1 / \mathcal{R}_1), \end{aligned} \quad (5.15)$$

où la notation $\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2)$ désigne la puissance des forces intérieures au système constitué des solides S_1 et S_2 .

La vitesse de K_1 étant nulle par rapport au repère \mathcal{R}_1 , la puissance totale se réduit donc à la seule puissance de $\vec{F}(S_1 \rightarrow S_2)$ par rapport à \mathcal{R}_1 . On reconnaît par ailleurs dans $\vec{V}(K_2 / \mathcal{R}_1)$ la vitesse de glissement au point K du solide S_2 par rapport au solide S_1 . Cette vitesse est située dans le plan tangent commun aux deux solides en K.

▪ Si le contact est sans frottement, $\vec{F}(S_1 \rightarrow S_2)$ est normale au plan tangent. Par suite le produit scalaire est nul :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0 \quad (5.16-a)$$

▪ Si le contact est sans glissement, la vitesse $\vec{V}(K_2 / \mathcal{R}_1)$ est nulle et l'on a, dans ce cas également

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = 0. \quad (5.16-b)$$

Dans chacun de ces cas, la liaison s'effectue **sans consommation d'énergie** : on dit qu'elle est **conservative**.

▪ Pour une liaison avec frottement (de coefficient de frottement f) et avec glissement, en vertu des lois de Coulomb, on a :

$$\mathcal{P}(S_1 \leftrightarrow S_2) = \vec{T}(S_1 \rightarrow S_2) \cdot \vec{V}(K_2 / \mathcal{R}_1) < 0 \quad (5.17)$$

La liaison est alors consommatrice d'énergie.

II TRAVAIL

1 Travail d'une force

Définition : Le travail d'une force s'exerçant sur un point A pour un déplacement fini de ce point le long de sa trajectoire \mathcal{C} , lorsque A s'est déplacé du point A_0 au point A_1 , est défini par :

$$\mathcal{W}_{A_0 \rightarrow A_1}(\mathcal{C}) = \int_{A_0}^{A_1} \delta \mathcal{W}(\vec{F} \rightarrow A / \mathcal{R}_0), \quad (5.18)$$

où $\delta \mathcal{W}(\vec{F} \rightarrow A / \mathcal{R}_0)$ désigne le "**travail élémentaire**" de la force \vec{F} appliquée au point A pour un déplacement élémentaire $d\vec{O}_0 A_{/\mathcal{B}_0}$ de ce point par rapport au repère \mathcal{R}_0 d'origine O_0 et de base associée \mathcal{B}_0 . Ce travail élémentaire est tel que

$$\delta \mathcal{W}(\vec{F} \rightarrow A / \mathcal{R}_0) = \vec{F} \cdot d\vec{O}_0 A_{/\mathcal{B}_0}, \quad (5.19)$$

où

$$d\vec{O}_0 A_{/\mathcal{B}_0} = \vec{V}(A / \mathcal{R}_0) dt. \quad (5.20)$$

Le report de la relation (5.19) dans l'expression (5.18) du travail s'écrit

$$\mathcal{W}_{A_0 \rightarrow A_1}(\mathcal{C}) = \int_{A_0}^{A_1} \vec{F} \cdot d\vec{O}_0 A_{/\mathcal{B}_0}, \quad (5.21)$$

soit, en utilisant la définition (5.1) de la puissance de la force \vec{F} appliquée en A relativement au repère \mathcal{R}_0 :

$$\mathcal{W}_{A_0 \rightarrow A_1}(\mathcal{C}) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P}(\vec{F} \rightarrow A / \mathcal{R}_0) dt \quad (5.22)$$

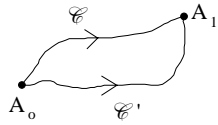


Figure 5.4

$\mathcal{W}_{A_0 \rightarrow A_1}(\mathcal{C})$ dépend de manière essentielle du trajet \mathcal{C} suivi par le point A pour aller de A_0 à A_1 (Figure 5.4). En général, le travail de \vec{F} entre ces deux positions ne sera pas le même selon que A suit le trajet \mathcal{C} ou le trajet \mathcal{C}' :

$$\mathcal{W}_{A_0 \rightarrow A_1}(\mathcal{C}) \neq \mathcal{W}_{A_0 \rightarrow A_1}(\mathcal{C}') \quad (5.23)$$

2 **Cas d'un champ de forces à potentiel**

a) **Potentiel et énergie potentielle**

i) **Potentiel (exemples)**

Le **potentiel** est une propriété de "l'espace" considéré (associé à la gravité, l'électrostatique, le noyau atomique, l'élasticité, ...) qui est révélée par l'action qu'il exerce sur une "sonde".

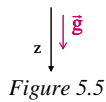


Figure 5.5

Ainsi, l'existence de la gravité (potentiel) est-elle révélée par une masse (sonde) (figure 5.5), et le poids \vec{P} (l'action) de la masse est tel que, pour l'orientation retenue pour l'axe z (voir discussion § II.2.d)

$$\vec{P} = m \vec{g} = m \underset{\mathcal{U}}{\text{grad}}(gz) \quad (5.24)$$

où \mathcal{U} est un potentiel auquel est associée la fonction de force $U = mgz$ (voir § II.2.c suivant) dont dérive le poids \vec{P} .

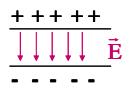


Figure 5.6

De même, l'existence d'un champ électrique \vec{E} (dérive d'un potentiel, cas du condensateur plan sur la figure 5.6) est révélée par une sonde (charge électrique ponctuelle), et la force \vec{F} (l'action) correspondante est telle que

$$\vec{F} = q \vec{E} = q \underset{\mathcal{U}}{\text{grad}}(-V) \quad (5.25)$$

où \mathcal{U} est un potentiel dont dérive le champ électrique \vec{E} , V désignant le potentiel électrique qui règne dans l'espace interélectrode (entre l'électrode chargée positivement et celle chargée négativement sur la figure 5.6).

ii) **Energie potentielle (exemple)**

L'**énergie potentielle** est une énergie (autre que cinétique notamment) *emmagasinée* (c'est-à-dire reçue) par un système, qui ne dépend que de son "état" (c'est-à-dire en mécanique de sa position ou du point considéré), et qui peut être restituée intégralement en revenant au même état (en l'absence de phénomènes irréversibles tels les frottements en mécanique).

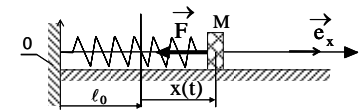


Figure 5.7

Enfin, l'existence de l'énergie potentielle élastique d'un ressort de raideur k est révélée par un système sensible à la force que peut exercer le ressort (une masse accrochée au ressort et libre d'osciller par exemple, figure 5.7). L'action \vec{F} du ressort sur ce système sensible (la masse M) est telle que

$$\vec{F} = -k x \vec{e}_x = \underset{U}{\text{grad}}\left(-\frac{1}{2} k x^2\right) \quad (5.26)$$

où la fonction de force U dont dérive la force \vec{F} , est l'opposé de l'énergie potentielle (voir § II.2 et II.2.d suivant).

b) **Champ de forces**

Définition : Lorsqu'une force \vec{F} est donnée en fonction uniquement du point de l'espace (x, y, z) où est située la particule sur laquelle elle s'exerce, on dit que l'on a défini un "champ de forces".

Ainsi un champ de forces peut être défini par une fonction vectorielle des coordonnées spatiales du point :

$$\vec{F}(x, y, z) \quad .$$

Exemples : champ de forces dû à l'attraction newtonienne d'un corps donné (le Soleil, une planète, ...), champ de forces dû au champ électrique, ... Dans le cas d'un champ de pesanteur supposé uniforme, la fonction $\vec{F}(x, y, z)$ est constante :

$$\vec{F} = -mg \vec{e}_{z_0} \quad (5.27)$$

si \vec{e}_{z_0} est un vecteur unitaire vertical ascendant, g étant le module de l'accélération de la pesanteur.

Dans le cas d'une attraction par un point fixe O, proportionnelle à la distance $r = OA$ (cas d'un système élastique isotrope) :

$$\vec{F}(O \rightarrow A) = -k \overrightarrow{OA} = -k(x \vec{e}_{x_0} + y \vec{e}_{y_0} + z \vec{e}_{z_0}) \quad (5.28)$$


Contre-exemples : la force de frottement subie par une particule en mouvement sur une surface ou dans l'air, ou la force exercée par un champ électromagnétique sur une charge en mouvement. Ces forces ne sont déterminées que si l'on connaît la vitesse de la particule.

c) Fonction de force

Définition : On dit qu'un champ de forces "**dérive d'une fonction de force**" s'il existe une fonction $U(x, y, z)$ (définie à une constante additive près), appelée fonction de force, telle que le champ \vec{F} en soit le champ de gradient. Dans une base cartésienne orthonormée \mathcal{B}_0 , les composantes de \vec{F} s'expriment sous la forme :

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, F_z = \frac{\partial U}{\partial z} . \tag{5.29}$$

soit
$$\vec{F} = \text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_{x_0} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_{y_0} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_{z_0} . \tag{5.30}$$

 L'expression (5.30) du gradient de la fonction \vec{F} n'est valable qu'en coordonnées cartésiennes : l'expression est totalement différente en coordonnées cylindriques ou sphériques (Annexe 5B).


 Ainsi, l'action de la gravité terrestre locale sur une masse m est-elle représentée par le poids \vec{P} tel que, pour l'orientation retenue pour l'axe z (voir figure 5.8.-a et discussion au § II.2.d-i suivant)

Figure 5.8-a
$$\vec{P} = m\vec{g} = \text{grad}(mgz) , \tag{5.31}$$

où $U = mgz$ est la fonction de force dont dérive le poids \vec{P} (ici $-gz$ représente un potentiel).

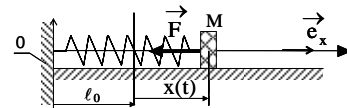
 De même, l'action d'un ressort de raideur k sur une masse M (accrochée au ressort de longueur à vide ℓ_0 et libre d'osciller par exemple, figure 5.8-b) est

Figure 5.8-b telle que
$$\vec{F} = -kx \vec{e}_x = \text{grad}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right) \vec{e}_x , \tag{5.32}$$

où $U = -\frac{1}{2}kx^2$ est la fonction de force dont dérive la force \vec{F} .

Ces deux exemples sont repris au § II.2.f.

d) Energie potentielle

Dans le domaine de la mécanique, il est intéressant de considérer l'opposé de la fonction U :

Définition : On appelle "**énergie potentielle**" associée au champ de force l'opposé de la fonction de force U :

$$E_p(x, y, z) = -U(x, y, z). \tag{5.33}$$

Le vecteur $\vec{F} = \text{grad } U$ est alors dirigé des grandes valeurs de E_p vers les plus petites (on peut aussi dire qu'il "**descend les potentiels**"). On parle d'un champ de force qui "**dérive d'une fonction de force**" (voir la remarque sur la terminologie en fin de §).

i) Exemples

▪ Champ de force d'attraction proportionnelle à la distance (par rapport à un point O choisi comme origine, ressort de raideur k par exemple) :

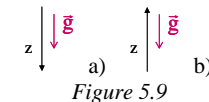
La fonction de force U s'écrit

$$U = -\frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = -\frac{1}{2}kr^2 . \tag{5.34}$$

Ainsi, l'énergie potentielle disponible, due à la déformation élastique du ressort, est donnée par l'expression $V = \frac{1}{2}kr^2$.

▪ Champ uniforme de la pesanteur (\vec{e}_{z_0} vertical ascendant), origine des coordonnées donnée (non spécifiée ici) :

- Lorsque \vec{e}_z est vertical descendant (figure 5.9-a), la fonction de force est $U = +mgz$, et donc l'énergie potentielle de gravité de la masse est $E_p = -mgz$.



- Au contraire, si \vec{e}_z est vertical ascendant (figure 5.9-b), la fonction de force est $U = -mgz$, et donc l'énergie potentielle de gravité de la masse est $E_p = +mgz$.

Ainsi, plus la masse est située à une altitude élevée, plus son énergie potentielle est grande.

ii) Variations de l'énergie potentielle

L'énergie potentielle (comme la fonction de force) est toujours **définie à une constante additive près** (dans le cas de la pesanteur, la valeur zéro de ces grandeurs a été choisie en $z = 0$, point arbitraire). En pratique, les quantités d'intérêt sont les variations possibles d'énergie potentielle qui peuvent être transformées en d'autres formes d'énergies.

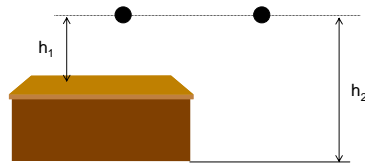


Figure 5.10

Ainsi, plus la variation d'altitude possible de la masse est grande, plus l'énergie qu'elle peut restituer est grande. Par exemple, la masse m située à une hauteur h_1 d'une table peut restituer moins d'énergie que si elle est située à une hauteur h_2 du sol (figure 5.10), alors que dans les deux cas elle est à la même altitude.

A noter que l'énergie potentielle peut être positive ou négative en fonction du choix de la constante définissant l'origine des énergies. Par contre, la définition admise pour l'énergie cinétique (voir § III) impose que cette énergie soit positive ou nulle.

iii) Remarque sur la terminologie

✓ Il est fréquent, en mécanique, d'appeler "potentiel" ce qui vient d'être défini comme étant l'énergie potentielle associée à un champ de forces. Ainsi, dans cette acception du terme, le potentiel V est l'opposé de la fonction de forces U , et l'on dit couramment que le champ de forces, s'il dérive d'une fonction de forces, "dérive d'un potentiel".

✓ Cependant, dans nombre de traités de physique, le terme de "potentiel" est réservé à une grandeur n'ayant pas la dimension d'une énergie. Ainsi, le potentiel électrique désigne-t-il l'énergie potentielle électrique par unité de charge de la particule utilisée comme sonde. De même, le potentiel gravitationnel induit par un certain nombre de corps attracteurs (de masses données) représentera l'énergie potentielle disponible pour une particule sonde de masse unité. Le potentiel gravitationnel, dans ce dernier cas, doit s'exprimer en J/kg. Dans la même logique, le terme de "champ" est introduit : le champ électrique représente la force électrique qui s'exerce sur une charge unité en un point donné ; le champ gravitationnel désigne la force d'attraction newtonienne subie par une particule de masse unité. Dans ce type de présentation, on préfère ainsi le concept de "champ" à celui de champ de forces introduit au § II.2.b : en effet, le "champ" est alors indépendant de toute propriété intrinsèque de la particule sonde.

e) Puissance et travail élémentaire

▪ Lorsque le champ dérive d'une fonction de forces, la puissance, produit scalaire du vecteur force \vec{F} (Equation (5.30)) et du vecteur vitesse $\vec{V}(A/\mathcal{R}_0) = \frac{dx}{dt} \vec{e}_{x_0} + \frac{dy}{dt} \vec{e}_{y_0} + \frac{dz}{dt} \vec{e}_{z_0}$,

s'exprime sous la forme :

$$\mathcal{P}(\vec{F} \rightarrow A/\mathcal{R}_0) = \vec{F} \cdot \vec{V}(A/\mathcal{R}_0) = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{dU}{dt} = -\frac{dE_p}{dt} \quad (5.35)$$

La puissance que peut engendrer une force dérivant d'une fonction de forces apparaît donc comme la dérivée totale de la fonction de forces U par rapport au temps.

Il convient de noter ici que, l'énergie potentielle ne dépendant pas explicitement du temps par définition, l'expression (5.35) est bien (au signe près) le rapport de la différentielle dE_p de l'énergie potentielle E_p sur le scalaire dt (en toute rigueur $d/dt = \partial/\partial t + \vec{V}(A/\mathcal{R}_0) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}$, avec ici $\partial E_p / \partial t = 0$).

▪ De même, le travail élémentaire de \vec{F} peut s'écrire :

$$\delta \mathcal{W}(\vec{F} \rightarrow A/\mathcal{R}_0) = \vec{F} \cdot d\vec{O}_0 A_{i/\mathcal{R}_0} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = dU = -dE_p \quad (5.36)$$

Ce travail élémentaire apparaît donc, dans ce cas, comme une différentielle totale exacte : la différentielle de la fonction de force U . (A noter que cette propriété n'est pas vraie dans le cas de forces ne dérivant pas d'une fonction de forces : c'est la raison pour laquelle dans ce cas le travail élémentaire est noté $\delta \mathcal{W}'$ et non $d\mathcal{W}'$). Par suite, on peut énoncer le résultat fondamental suivant :

Dans le cas particulier où la force dérive d'un potentiel, le travail ne dépend que de la position initiale A_0 et de la position finale A_1 . Autrement dit, **le travail ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A_0 à A_1** :

$$\mathcal{W}_{A_0 \rightarrow A_1}(\vec{F} \rightarrow A/\mathcal{R}_0) = \int_{A_0}^{A_1} dU = U(A_1) - U(A_0) = -[E_p(A_1) - E_p(A_0)] \quad (5.37)$$

On voit alors que le travail effectué par la force est égal à la variation de l'énergie potentielle entre la position initiale et la position finale.

f) Exemples de calcul d'énergie potentielle pour deux champs de force dérivant d'un potentiel

i) Préliminaire

Il convient de noter que les énergies sont des quantités le plus souvent positives, exception faite des énergies potentielles qui dépendent de la référence choisie (potentiel de référence, voir § II.2.d-ii). Aux notions d'énergie sont associées les notions de flux d'énergie (ou de transfert ou d'échange d'énergie). En mécanique (en particulier), on raisonne très souvent en cherchant quelles sont les actions exercées sur le système étudié. Par suite, par convention, les énergies sont considérées comme étant **reçues par** le (ou encore **fournies au**) système auquel on s'intéresse. Par suite, par exemple, une "énergie reçue" par un système négative, est en réalité une "énergie fournie" positive, fournie par le système considéré à un autre système extérieur (énergies fournies au système ou fournies par le système ont des signes opposés).

• Pour le système de la figure 5.7, l'énergie potentielle élastique est donc égale au travail fourni au ressort (c'est-à-dire l'énergie reçue par le ressort) de la part du système capable d'appliquer la force \vec{F} à chacune de ses extrémités (la même en module) ; elle est donc l'opposé du travail que recevra le ressort lorsqu'il restituera l'énergie emmagasinée à un système qui lui est extérieur (voir § II.2.f-ii) suivant).

• De même, l'énergie potentielle de gravité (figure 5.5) est le travail fourni à la masse pour l'amener à la cote z ; cette énergie est donc l'opposé du travail de l'action de la gravité sur la masse au cours de ce déplacement (voir § II.2.f-iii) suivant).

• L'énergie potentielle élastique de déformation d'un corps est ce qui est appelé "énergie interne de déformation", c'est-à-dire le travail fourni au corps élastique par un système extérieur qui exerce des forces opposées aux forces internes de cohésion. De manière générale, son expression est donnée par

$$V = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} T_{ij} S_{ij} d\mathcal{D} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} c_{ijkl} S_{kl} S_{ij} d\mathcal{D} ,$$

où T_{ij} désigne les composantes du tenseur des contraintes, S_{ij} les composantes du tenseur des déformations, \mathcal{D} le domaine considéré et c_{ijkl} les composantes du tenseur des rigidités élastiques. Ces dernières notions dépassent largement le cadre de ce cours.

• Autre exemple : l'énergie interne d'un gaz (énergie potentielle) est l'énergie emmagasinée sous l'effet d'un écart de pression et/ou d'un écart de température entre le système étudié et son environnement (énergie reçue par le système considéré sous forme d'un travail et/ou d'une quantité de chaleur reçus par ce système).

• Dernier exemple : les nucléons constituant un noyau atomique sont "piégés" dans un "puits de potentiel", ce qui signifie que leur énergie, référencée par rapport à une origine associée à leur état libre au repos (hors du noyau), est négative (elle est liée à l'énergie nécessaire à son extraction du noyau).



Figure 5.11-a

ii) *Attraction proportionnelle à la distance (ressort)*

L'action exercée par le ressort sur A_1 (figure 5.11-a) est :

$$\vec{F}_1 = k \overrightarrow{A_1 A_2} = -\vec{F}_2 \quad (5.38)$$

Exemple :

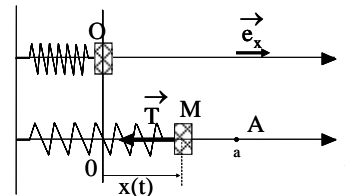


Figure 5.11-b

On attache à l'extrémité d'un ressort de masse négligeable, de raideur k , un cube M (figure 5.11-b). On l'écarte de $OA = a$ de sa position d'équilibre O et on repère la position de la masse par son abscisse $x(t)$.

L'action du ressort sur le cube est :

$$\vec{T} = -k x \vec{e}_x .$$

Le travail pour aller de O à A de \vec{T} est :

$$\mathcal{W}_{O \rightarrow A}(\vec{T} \rightarrow M/\mathcal{R}) = \int_O^A \vec{T} \cdot d\vec{OM} = \int_{t_0}^{t_a} \mathcal{P}(\vec{T} \rightarrow M/\mathcal{R}) dt = \int_{t_0}^{t_a} \vec{T} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}) dt . \quad (5.39)$$

Or $\vec{OM} = x \vec{e}_x$ donc $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{x} \vec{e}_x = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x$,

d'où $\vec{V}(M/\mathcal{R}) dt = dx \vec{e}_x$ et $\vec{T} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}) dt = -k x dx$.

$$\text{Finalement, } \mathcal{W}_{O \rightarrow A}(\vec{T} \rightarrow M/\mathcal{R}) = \int_0^a -k x dx = -\frac{1}{2} k [x^2]_0^a = -\frac{1}{2} k a^2 . \quad (5.40)$$

On peut définir l'*énergie potentielle élastique du ressort* au point A par :

$$E_{pe}(A) = -\mathcal{W}_{OA} = \frac{1}{2} k a^2 . \quad (5.41)$$

iii) *Champ de la pesanteur*

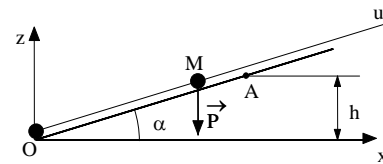


Figure 5.12

Une bille M , de masse m se déplace du point O au point A d'abscisse $u = a$ (figure 5.12).

Le poids de la bille est $\vec{P} = -m g \vec{e}_z$.

Le travail pour aller de O à A de \vec{P} est :

$$\mathcal{W}_{O \rightarrow A}(\vec{P} \rightarrow M/\mathcal{R}) = \int_O^A \vec{P} \cdot d\vec{OM} = \int_{t_0}^{t_a} \mathcal{P}(\vec{P} \rightarrow M/\mathcal{R}) dt = \int_{t_0}^{t_a} \vec{P} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}) dt . \quad (5.42)$$

Or $\vec{OM} = u \vec{e}_u$ donc $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{u} \vec{e}_u = \frac{du}{dt} \vec{e}_u$,

d'où $\vec{V}(M/\mathcal{R}) dt = du \vec{e}_u$ et $\vec{P} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}) dt = -mg du \vec{e}_u \cdot \vec{e}_z$.

Or $\vec{e}_u = \cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_z$ donc $\vec{e}_u \cdot \vec{e}_z = \sin \alpha$, d'où $\vec{P} \cdot \vec{V}(M/\mathcal{R}) dt = -mg \sin \alpha du$.

On obtient alors :

$$\mathcal{W}_{O \rightarrow A}(\vec{P} \rightarrow M/\mathcal{R}) = \int_0^a -mg \sin \alpha du = -mg \sin \alpha [u]_0^a = -mgh \sin \alpha.$$

Or $h = a \sin \alpha$ d'où $\mathcal{W}_{O \rightarrow A}(\vec{P} \rightarrow M/\mathcal{R}) = -mgh$.

On peut définir l'énergie potentielle de gravité au point A par :

$$E_{Pg}(A) = -\mathcal{W}_{OA} = mgh \quad (5.43)$$

Remarque. Bien noter le signe $\pm mgh$ selon l'orientation de l'axe z (voir § II.2.d-i)

3. Rappel des unités

▪ L'équation aux dimensions de la puissance mécanique est la suivante :

$$[\mathcal{P}] = [F][V] = [MLT^{-2}][LT^{-1}] = [ML^2T^{-3}]$$

L'unité MKSA est le watt :

$$1 \text{ W} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3} = 1 \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- Plus anciennement, on a utilisé le kilogramme force (kgf) au lieu du Newton :

$$1 \text{ kgf} = 1 \text{ kg} \cdot g = 1 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 9,81 \text{ N},$$

et la puissance s'exprimait alors en kgf.m.s⁻¹ :

$$1 \text{ kgf} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 9,81 \text{ W}$$

- Le cheval-vapeur (CV) vaut 75 kgf.m.s⁻¹, soit :

$$1 \text{ CV} = 75 \times 9,81 = 736 \text{ W} = 0,736 \text{ kW}$$

▪ L'équation aux dimensions du travail, ou encore de l'énergie, est donnée par :

$$[\mathcal{W}] = [\mathcal{P}] \cdot [t] = [ML^2T^{-2}]$$

L'unité MKSA est le joule :

$$1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

Le joule et le watt sont des unités assez faibles. En pratique, on utilise souvent le kilowatt (kW) pour la puissance et le kilowatt.heure pour l'énergie :

$$1 \text{ kWh} = 36 \times 10^5 \text{ J}$$

III ENERGIE CINETIQUE

1 Cas du point matériel

Définition : Un point matériel A de masse m étant en mouvement par rapport à un repère (quelconque) \mathcal{R}_0 , on appelle **énergie cinétique** (à l'instant considéré) du point A par rapport à \mathcal{R}_0 l'expression :

$$T(A/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} m \vec{V}^2(A/\mathcal{R}_0) \quad (5.44)$$

Théorème de l'énergie cinétique (TEC) : Lorsqu'un point matériel A de masse m est en mouvement par rapport à un repère galiléen \mathcal{R}_0 , la dérivée temporelle de son énergie cinétique par rapport à \mathcal{R}_0 est égale à la puissance de la **force totale** \vec{F} appliquée au point A relativement au repère \mathcal{R}_0 ,

soit
$$\frac{dT(A/\mathcal{R}_0)}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F} \rightarrow A/\mathcal{R}_0) \quad (5.45)$$

2 Cas particulier du solide rigide

a) Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un solide **rigide** (S) relativement à un repère \mathcal{R}_0 est

$$T(S/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} m \vec{V}^2(K \in S/\mathcal{R}_0) + m \vec{V}(K \in S/\mathcal{R}_0) \cdot \left[\vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0) \wedge \vec{KG} \right] + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0) \cdot \mathcal{I}_K(S) \vec{\Omega}(\mathcal{B}/\mathcal{B}_0) \quad (5.46)$$

où \mathcal{B} est la base associée au repère lié au solide (S).

Remarques :

- Si $K \equiv G$, l'équation (5.46) s'écrit alors

$$T(S/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} m \vec{V}^2(G/\mathcal{R}_0) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(B/B_0) \cdot \mathcal{I}_G(S) \{ \vec{\Omega}(B/B_0) \} \quad (5.47)$$

Le mouvement général d'un solide (S) par rapport à \mathcal{R}_0 étant, à l'instant t, la composition d'un mouvement de rotation et d'un mouvement de translation, on retrouve dans cette expression que l'énergie cinétique de (S) dans son mouvement par rapport à \mathcal{R}_0 est la somme d'une *énergie cinétique de translation*, $\frac{1}{2} m \vec{V}^2(G/\mathcal{R}_0)$, et d'une *énergie cinétique de rotation*, $\frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/B_0) \cdot \mathcal{I}_G(S) \{ \vec{\Omega}(S/B_0) \}$.

- Si K est fixe par rapport à \mathcal{R}_0 , alors l'énergie cinétique est simplement une énergie cinétique de rotation :

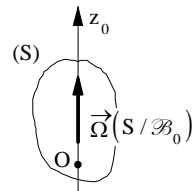
$$T(S/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}(B/B_0) \cdot \mathcal{I}_K(S) \{ \vec{\Omega}(B/B_0) \} \quad (5.48)$$

❖ Cas d'un solide rigide en mouvement de translation (quelconque)

La rotation instantanée $\vec{\Omega}(B/B_0)$ est nulle et l'on a alors simplement :

$$T(S/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} m \vec{V}^2(G/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} m \vec{V}^2(A/\mathcal{R}_0) \quad \forall A \in (S) \quad (5.49)$$

❖ Cas d'un solide rigide en rotation (quelconque) autour d'un axe fixe (figure 5.13)



Soit (O, \vec{e}_{z_0}) cet axe de rotation. On est alors dans le cas particulier d'un solide (S) ayant un point fixe O dans \mathcal{R}_0 . Son vecteur rotation instantanée est dirigé selon le vecteur \vec{e}_{z_0} :

$$\vec{\Omega}(S/B_0) = \omega \vec{e}_{z_0} \quad \text{avec } \omega(t) = \dot{\theta}.$$

Figure 5.13

L'énergie cinétique est donnée par :

$$T(S/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} \vec{\Omega}(B/B_0) \cdot \mathcal{I}_O(S) \{ \vec{\Omega}(B/B_0) \} \quad (5.50)$$

Or $\mathcal{I}_O(S) \{ \vec{\Omega}(B/B_0) \} = -E \omega \vec{e}_{x_0} - D \omega \vec{e}_{y_0} + C \omega \vec{e}_{z_0}$, donc :

$$T(S/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} C \omega^2 = \frac{1}{2} I_{Oz_0} \omega^2 \quad (5.51)$$

b) Théorème de l'énergie cinétique

Théorème de l'énergie cinétique (TEC) : Lorsqu'un solide rigide (S) est en mouvement par rapport à un repère galiléen \mathcal{R}_0 , la dérivée temporelle de son énergie cinétique par rapport à \mathcal{R}_0 est égale à la puissance des actions mécaniques extérieures exercées sur ce solide, relativement au repère \mathcal{R}_0 ,

$$\frac{d}{dt} \{ T(S/\mathcal{R}_0) \} = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S/\mathcal{R}_0) \quad (5.52)$$

La puissance des forces intérieures à un solide rigide étant nulle par rapport à n'importe quel repère, ne figure dans cet énoncé que la puissance des forces extérieures à (S).

3 Cas d'un système matériel constitué de solides rigides

De manière générale, un système mécanique Σ est constitué de plusieurs solides rigides $(S_1), (S_2), \dots, (S_n)$, tous en mouvement par rapport à un repère $\mathcal{R}_0 = (O_0, B_0)$.

- L'énergie cinétique de Σ est la somme des énergies cinétiques de chaque solide (S_i) par rapport à \mathcal{R}_0 :

$$T(\Sigma/\mathcal{R}_0) = \sum_{i=1}^n T(S_i/\mathcal{R}_0) \quad (5.53)$$

- Si le système Σ est constitué de plusieurs constituants solides rigides (S_i) , la puissance des actions intérieures à chaque constituant est encore nulle mais la *puissance des interactions entre les divers solides S_i (actions intérieures à Σ) est à prendre en compte*. On peut écrire symboliquement le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{d}{dt} \{ T(\Sigma/\mathcal{R}_0) \} = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma/\mathcal{R}_0) + \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j) \quad (5.54)$$

où $\mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j)$ représente la puissance des forces d'interaction entre les solides (S_i) et (S_j) (voir § I.4.). Ces interactions peuvent être des actions à distance (attraction newtonienne par exemple) ou des actions de contact dues aux liaisons mécaniques entre les solides :

$$\mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j) = \mathcal{P}(S_i \rightarrow S_j/\mathcal{R}) + \mathcal{P}(S_j \rightarrow S_i/\mathcal{R}), \quad \forall \mathcal{R} \quad (5.55)$$

- Remarques :

- Alors que le PFD ne met en jeu que les forces extérieures appliquées au système, le TEC fait appel à la puissance de toutes les forces appliquées au système, intérieures et extérieures.

- Dans le cas d'un point matériel, la distinction entre forces appliquées et forces extérieures appliquées est sans objet, contrairement au cas d'un système matériel quelconque.

4 Exemple d'application

Reprenons l'exemple du cerceau déjà étudié au chapitre 4 par application du Principe Fondamental de la Dynamique § III.6.

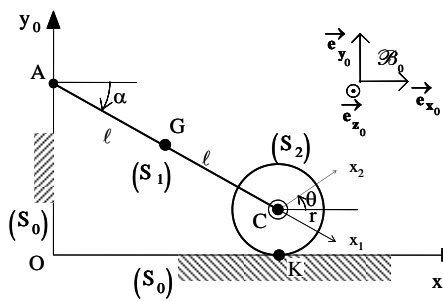


Figure 5.14-a

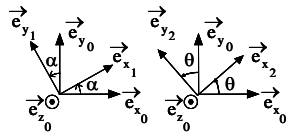


Figure 5.14-b

Soit le système Σ constitué d'une tige (S_1) d'extrémités A et C et d'un cerceau (S_2) , comme le montre la figure 5.14-a. Le bâti est désigné par (S_0) . L'ensemble est soumis au champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = -g \vec{e}_{y_0}$.

La tige (S_1) est de longueur 2ℓ , homogène de masse M et a pour centre de masse G , milieu de AC . Son extrémité A est astreinte à se déplacer sans frottements sur l'axe (O, \vec{e}_{y_0}) .

Le cerceau (S_2) est homogène de masse m , a pour rayon r et pour centre de masse C , et est lié à la tige (S_1) par une liaison pivot sans frottements d'axe (C, \vec{e}_{z_0}) .

La liaison entre ce cerceau et le bâti (S_0) peut être modélisée par une liaison ponctuelle en K. Le coefficient de frottement entre les deux matériaux constituant le cerceau et le bâti est noté f .

Les repères choisis, liés aux divers constituants du système (voir figures 5.14-a et b) sont les suivants :

- repère fixe $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{y_0}, \vec{e}_{z_0}) = (O, \mathcal{B}_0)$ lié au bâti (S_0) , et supposé galiléen ;
- repère $\mathcal{R}_1 = (A, \vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1}) = (A, \mathcal{B}_1)$ lié à la tige (S_1) tel que $\alpha = (\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{x_1})$, cet angle étant négatif dans la position de la figure 5.14-a ;
- repère $\mathcal{R}_2 = (C, \vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2}) = (C, \mathcal{B}_2)$ lié au cerceau (S_2) tel que $\theta = (\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{x_2})$, paramètre angulaire repérant la position du cerceau autour de son axe (C, \vec{e}_{z_0}) .

Le mouvement d'ensemble du système Σ est alors décrit par la variation de deux paramètres angulaires (figure 5.14-b) : l'angle orienté $\alpha = (\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{x_1})$ et l'angle orienté $\theta = (\vec{e}_{x_0}, \vec{e}_{x_2})$. Au cours du mouvement, ces deux angles varient simultanément en fonction du temps : $\alpha = \alpha(t)$, $\theta = \theta(t)$. A l'instant initial $t = 0$, le système est supposé au repos : $\dot{\alpha} = 0$, $\dot{\theta} = 0$.

Pour la bonne cohérence d'ensemble, un certain nombre de résultats déjà établis au chapitre 4 sont repris ici.

a) Etude du cerceau S_2 .

● Actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le solide (S_2) .

■ Action de la gravité : $\{\varpi \rightarrow S_2\} = (C, \vec{P}_2)$ avec $\vec{P}_2 = -mg \vec{e}_{y_0}$.

■ Action du bâti S_0 sur le cerceau S_2 (liaison ponctuelle avec frottement) :

$$\{S_0 \rightarrow S_2\} = (K, \vec{\mathcal{R}}_K) = \begin{Bmatrix} T_K & 0 \\ N_K & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0} \quad \text{avec } N_K > 0 \text{ pour que le contact soit maintenu.}$$

■ Action de la tige S_1 sur le cerceau S_2 (liaison pivot sans frottement) :

$$\{S_1 \rightarrow S_2\} = (C, \vec{\mathcal{R}}_C) = \begin{Bmatrix} X_C & 0 \\ Y_C & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}_0}.$$

Par suite, le torseur des actions extérieures exercées sur le cerceau S_2 est donné par

$$\{\text{ext} \rightarrow S_2\} = \{\varpi \rightarrow S_2\} + \{S_0 \rightarrow S_2\} + \{S_1 \rightarrow S_2\}. \quad (5.56)$$

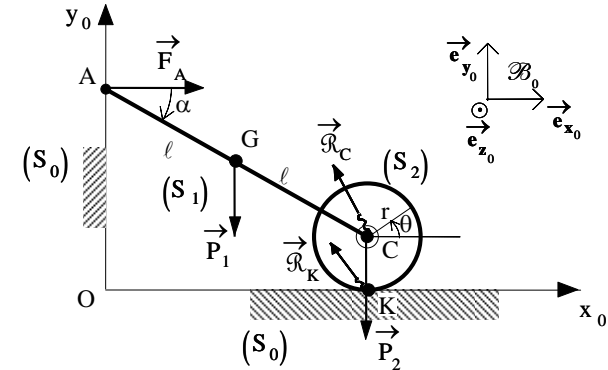


Figure 5.15 : Inventaire des actions mécaniques de gravité et de liaison

● Le vecteur rotation $\vec{\Omega}(\mathcal{B}_2 / \mathcal{B}_0)$ associé au mouvement de la base \mathcal{B}_2 par rapport à la base \mathcal{B}_0 est tel que

$$\vec{\Omega}(\mathcal{B}_2 / \mathcal{B}_0) = \dot{\theta} \vec{e}_{z_0}. \quad (5.57)$$

• Vecteur position : $\overline{OC} = \overline{OK} + \overline{KC} = 2\ell \cos \alpha \bar{e}_{x_0} + r \bar{e}_{y_0}$

• Vecteur vitesse du point C par rapport au repère \mathcal{R}_0 :

$$\vec{V}(C/\mathcal{R}_0) = \left(\frac{d\overline{OC}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}_0} = -2\ell \dot{\alpha} \sin \alpha \bar{e}_{x_0} \quad (5.58)$$

• La vitesse du point K appartenant au cerceau S_2 , noté K_2 , par rapport au repère \mathcal{R}_0 est donnée par la formule de distribution des vitesses (ou formule de changement de point pour les moments du torseur distributeur des vitesses du mouvement de \mathcal{R}_2 par rapport à \mathcal{R}_0) :

$$\vec{V}(K_2/\mathcal{R}_0) = \vec{V}(C_2/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_0) \wedge \overline{CK} \quad (5.59)$$

soit $\vec{V}(K_2/\mathcal{R}_0) = -2\ell \dot{\alpha} \sin \alpha \bar{e}_{x_0} + \dot{\theta} \bar{e}_{z_0} \wedge (-r \bar{e}_{y_0})$,

d'où $\vec{V}(K_2/\mathcal{R}_0) = (-2\ell \dot{\alpha} \sin \alpha + r \dot{\theta}) \bar{e}_{x_0}$. (5.60)

Il convient de noter que cette vitesse n'est nulle qu'en cas de non glissement entre le solide S_2 et le bâti S_0 , ce qui n'est pas le cas ici.

• Moment d'inertie du cerceau S_2 par rapport à l'axe (C, \bar{e}_{z_0})

D'après le tableau 4.15 des éléments d'inertie de quelques solides usuels donné au chapitre 4, le moment d'inertie du cerceau par rapport à l'axe (C, \bar{e}_{z_0}) est

$$I_{Cz_0}(S_2) = m r^2 \quad (5.61)$$

• Energie cinétique du cerceau (S_2) par rapport au repère \mathcal{R}_0 et dérivée par rapport au temps.

• L'énergie cinétique du cerceau S_2 par rapport au repère \mathcal{R}_0 s'écrit

$$T(S_2/\mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} m [\vec{V}(C/\mathcal{R}_0)]^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_0) \cdot \mathcal{I}_C(S_2) \{ \vec{\Omega}(\mathcal{B}_2/\mathcal{B}_0) \}$$

où $\mathcal{I}_C(S_2)$ désigne l'opérateur d'inertie au point C du cerceau S_2 . Le repère \mathcal{R}_2 étant repère principal d'inertie, cet opérateur est diagonal et peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{I}_C(S_2) \Big|_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 \end{bmatrix}, \quad (5.62)$$

où la notation C_2 désigne classiquement le moment d'inertie $I_{Cz_0}(S_2)$ donné par l'équation (5.61) (et non pas le point C appartenant au solide S_2).

En faisant usage des expressions (5.58), (5.57), (5.62) et (5.61) respectivement des vitesses, vecteur rotation, opérateur d'inertie et moment d'inertie, l'énergie cinétique $T(S_2/\mathcal{R}_0)$ s'écrit

$$T(S_2/\mathcal{R}_0) = 2m \ell^2 \dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 \quad (5.63)$$

• La dérivée par rapport au temps de l'expression (8) conduit à

$$\frac{dT(S_2/\mathcal{R}_0)}{dt} = 4m \ell^2 (\ddot{\alpha} \dot{\alpha} \sin^2 \alpha + \dot{\alpha}^3 \sin \alpha \cos \alpha) + m r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} \quad (5.64)$$

• Puissance des efforts extérieurs au cerceau (S_2) par rapport au repère \mathcal{R}_0 .

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S_2/\mathcal{R}_0) = \mathcal{P}(\overline{\text{m}} \rightarrow S_2/\mathcal{R}_0) + \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_2/\mathcal{R}_0) + \mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/\mathcal{R}_0),$$

soit $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S_2/\mathcal{R}_0) = \vec{P}_2 \cdot \vec{V}(C_2/\mathcal{R}_0) + \vec{\mathcal{R}}_K \cdot \vec{V}(K_2/\mathcal{R}_0) + \vec{\mathcal{R}}_C \cdot \vec{V}(C_2/\mathcal{R}_0)$.



Le fait que la liaison entre la tige S_1 et le cerceau S_2 soit une liaison parfaite implique que la puissance $\mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/\mathcal{R}_1)$ des actions de S_1 sur S_2 par rapport au repère \mathcal{R}_1 est nulle, mais n'implique pas que la puissance $\mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/\mathcal{R}_0)$ des mêmes actions par rapport au repère \mathcal{R}_0 le soit.

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S_2/\mathcal{R}_0) = 0 + (T_K \bar{e}_{x_0} + N_K \bar{e}_{y_0}) \cdot (-2\ell \dot{\alpha} \sin \alpha + r \dot{\theta}) \bar{e}_{x_0} + (X_C \bar{e}_{x_0} + Y_C \bar{e}_{y_0}) \cdot (-2\ell \dot{\alpha} \sin \alpha) \bar{e}_{x_0},$$

d'où $\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S_2/\mathcal{R}_0) = T_K (-2\ell \dot{\alpha} \sin \alpha + r \dot{\theta}) - 2X_C \ell \dot{\alpha} \sin \alpha$. (5.65)

• Théorème de l'Energie Cinétique au cerceau (S_2) .

$$\frac{dT(S_2/\mathcal{R}_0)}{dt} = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S_2/\mathcal{R}_0), \quad (\mathcal{R}_0 \text{ repère galiléen}),$$

soit $4m \ell^2 (\ddot{\alpha} \dot{\alpha} \sin^2 \alpha + \dot{\alpha}^3 \sin \alpha \cos \alpha) + m r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = T_K (-2\ell \dot{\alpha} \sin \alpha + r \dot{\theta}) - 2X_C \ell \dot{\alpha} \sin \alpha$. (5.66)

Remarque. Le report dans la relation (5.66) de l'expression (4.111-b) de la composante X_C ,

soit $X_C = -T_K - 2m \ell (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha)$, conduit à

$$4m \ell^2 (\ddot{\alpha} \dot{\alpha} \sin^2 \alpha + \dot{\alpha}^3 \sin \alpha \cos \alpha) + m r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = T_K (-2\ell \dot{\alpha} \sin \alpha + r \dot{\theta}) + 2 [T_K + 2m \ell (\ddot{\alpha} \sin \alpha + \dot{\alpha}^2 \cos \alpha)] \ell \dot{\alpha} \sin \alpha,$$

soit $T_K = m r \ddot{\theta}$, (5.67)

qui n'est autre que l'équation (4.113) obtenue par l'application du PFD au cerceau S_2 pour les moments au point C.

b) Etude du système $\Sigma = \{S_1 + S_2\}$

- *Actions mécaniques extérieures s'exerçant sur le système Σ .*

▪ **Action de la gravité :** $\{\varpi \rightarrow S_1\} = (G, \vec{P}_1)$ avec $\vec{P}_1 = -Mg \vec{e}_{y_0}$,
 et $\{\varpi \rightarrow S_2\} = (C, \vec{P}_2)$ avec $\vec{P}_2 = -mg \vec{e}_{y_0}$.

- **Action du bâti S_0 sur la tige S_1** (liaison ponctuelle sans frottement) :

$$\{S_0 \rightarrow S_1\} = (A, \vec{F}_A) = \begin{cases} F_A & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{cases} \mathcal{B}_0 \quad \text{avec } F_A > 0 \text{ pour que le contact soit maintenu.}$$

- **Action du bâti S_0 sur le cerceau S_2** (liaison ponctuelle avec frottement) :

$$\{S_0 \rightarrow S_2\} = (K, \vec{R}_K) = \begin{cases} T_K & 0 \\ N_K & 0 \\ 0 & 0 \end{cases} \mathcal{B}_0 \quad \text{avec } N_K > 0 \text{ pour que le contact soit maintenu.}$$

Par suite, le torseur des actions extérieures exercées sur le système Σ est donné par

$$\{\text{ext} \rightarrow \Sigma\} = \{\varpi \rightarrow S_1\} + \{\varpi \rightarrow S_2\} + \{S_0 \rightarrow S_1\} + \{S_0 \rightarrow S_2\}. \quad (5.68)$$

- *Vecteur rotation associé au mouvement de \mathcal{B}_1 par rapport à \mathcal{B}_0 .*

$$\vec{\Omega}(\mathcal{B}_1 / \mathcal{B}_0) = \dot{\alpha} \vec{e}_{z_0}. \quad (5.69)$$

- *Vitesse du point G par rapport au repère \mathcal{R}_0 .*

▪ Vecteur position : $\vec{OG} = \vec{OA} + \vec{AG} = \ell \cos \alpha \vec{e}_{x_0} + (r - \ell \sin \alpha) \vec{e}_{y_0}$ avec $\alpha < 0$.

- Vecteur vitesse du point G par rapport au repère \mathcal{R}_0 :

$$\vec{v}(G / \mathcal{R}_0) = \left(\frac{d\vec{OG}}{dt} \right)_{/\mathcal{B}_0} = -\ell \dot{\alpha} \sin \alpha \vec{e}_{x_0} - \ell \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{e}_{y_0}. \quad (5.70)$$

- *Moment d'inertie de la tige (S_1) par rapport à l'axe (G, \vec{e}_{z_0}).*

D'après le tableau des éléments d'inertie de quelques solides usuels donné avec l'énoncé, le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (G, \vec{e}_{z_0}) est

$$I_{Gz_0}(S_1) = \frac{M \ell^2}{3}. \quad (5.71)$$

- *Energie cinétique du système $\Sigma = \{S_1 + S_2\}$ par rapport au repère \mathcal{R}_0*

▪ L'énergie cinétique du système Σ par rapport au repère \mathcal{R}_0 est la somme des énergies cinétiques de chaque solide, soit

$$T(\Sigma / \mathcal{R}_0) = T(S_1 / \mathcal{R}_0) + T(S_2 / \mathcal{R}_0), \quad (5.72)$$

où $T(S_2 / \mathcal{R}_0)$ est donnée par l'équation (5.63). L'énergie cinétique $T(S_1 / \mathcal{R}_0)$ est donnée par

$$T(S_1 / \mathcal{R}_0) = \frac{1}{2} M [\vec{v}(G / \mathcal{R}_0)]^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(\mathcal{B}_1 / \mathcal{B}_0) \cdot \mathcal{I}_G(S_1) \{ \vec{\Omega}(\mathcal{B}_1 / \mathcal{B}_0) \},$$

où $\mathcal{I}_G(S_1)$ désigne l'opérateur d'inertie au point G de la tige S_1 . Le repère \mathcal{R}_1 étant repère principal d'inertie, cet opérateur est diagonal et peut s'écrire sous la forme

$$\mathcal{I}_G(S_1) \Big|_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}, \quad (5.73)$$

où la notation C_1 désigne classiquement le moment d'inertie $I_{Gz_0}(S_1)$ donné par l'équation (5.71).

En faisant usage des expressions (5.70), (5.69), (5.73) et (5.61) respectivement des vecteur vitesse, vecteur rotation, opérateur d'inertie et moment d'inertie, l'énergie cinétique $T(S_1 / \mathcal{R}_0)$ s'écrit

$$T(S_1 / \mathcal{R}_0) = \frac{2}{3} M \ell^2 \dot{\alpha}^2. \quad (5.74)$$

Le report des expressions (5.63) et (5.74) dans la relation (5.72) conduit finalement à

$$T(\Sigma / \mathcal{R}_0) = 2 \left(\frac{M}{3} + m \sin^2 \alpha \right) \ell^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2. \quad (5.75)$$

- La dérivée par rapport au temps de l'expression (5.75) conduit à

$$\frac{dT(\Sigma / \mathcal{R}_0)}{dt} = 4 \ell^2 \left[\left(\frac{M}{3} + m \sin^2 \alpha \right) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + m \dot{\alpha}^3 \sin \alpha \cos \alpha \right] + m r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta}. \quad (5.76)$$

- *Puissance des efforts extérieurs et intérieurs au système Σ par rapport au repère \mathcal{R}_0 .*

- La puissance des efforts extérieurs exercés sur le système Σ par rapport au repère \mathcal{R}_0 est donnée par

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma / \mathcal{R}_0) = \mathcal{P}(\varpi \rightarrow S_1 / \mathcal{R}_0) + \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1 / \mathcal{R}_0) + \mathcal{P}(\varpi \rightarrow S_2 / \mathcal{R}_0) + \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_2 / \mathcal{R}_0),$$

où la puissance $\mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_1 / \mathcal{R}_0)$ est nulle du fait que la liaison entre le bâti S_0 et la tige S_1 est parfaite (sans frottements), et où les puissances $\mathcal{P}(\varpi \rightarrow S_2 / \mathcal{R}_0)$ et $\mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_2 / \mathcal{R}_0)$

ont déjà été calculées au § III.4/a).

Par suite,

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma / \mathcal{R}_0) = \vec{P}_1 \cdot \vec{v}(G / \mathcal{R}_0) + 0 + \vec{P}_2 \cdot \vec{v}(C_2 / \mathcal{R}_0) + \vec{R}_K \cdot \vec{v}(K_2 / \mathcal{R}_0),$$

$$\text{soit } \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma / \mathcal{R}_0) = (-Mg \vec{e}_{y_0}) \cdot (-\ell \dot{\alpha} \sin \alpha \vec{e}_{x_0} - \ell \dot{\alpha} \cos \alpha \vec{e}_{y_0}) + 0 + T_K (-2 \ell \dot{\alpha} \sin \alpha + r \dot{\theta}),$$

$$\text{d'où } \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma / \mathcal{R}_0) = Mg \ell \dot{\alpha} \cos \alpha + T_K (-2 \ell \dot{\alpha} \sin \alpha + r \dot{\theta}). \quad (5.77-a)$$

▪ La puissance $\mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j)$ des efforts intérieurs au système Σ est

$$\mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j) = \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_2) = 0, \quad (5.77-b)$$

du fait que la liaison est parfaite entre les deux solides.

● *Théorème de l'Energie Cinétique au système Σ*

$$\frac{dT(\Sigma/\mathcal{R}_0)}{dt} = \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow \Sigma/\mathcal{R}_0) + \mathcal{P}(S_i \leftrightarrow S_j),$$

soit

$$4\ell^2 \left[\left(\frac{M}{3} + m \sin^2 \alpha \right) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + m \dot{\alpha}^3 \sin \alpha \cos \alpha \right] + m r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = M g \ell \dot{\alpha} \cos \alpha + T_K (-2 \ell \dot{\alpha} \sin \alpha + r \dot{\theta}). \quad (5.78-a)$$

Remarque. De même que précédemment, le report, dans le terme $(T_K r \dot{\theta})$ du second membre de la relation (5.78-a), de l'expression (5.67) de la composante T_K , soit $T_K = m r \ddot{\theta}$, conduit à

$$4\ell \left[\left(\frac{M}{3} + m \sin^2 \alpha \right) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + m \dot{\alpha}^2 \sin \alpha \cos \alpha \right] = M g \cos \alpha - 2 T_K \ell \sin \alpha, \quad (5.78-b)$$

qui est une combinaison linéaire des équations (4.111), (4.113), (4.105), (4.106) et (4.110) provenant de l'application du PFD (chapitre 4).

Il convient de noter que l'application du Théorème de l'Energie Cinétique conduit seulement à deux équations scalaires (5.66) et (5.78-a) qui ne permettent pas, à elles seules, d'obtenir les équations du mouvement, puisqu'elles font intervenir les inconnues de liaison T_K et X_C .

c) Introduction d'une condition de roulement sans glissement

● La vitesse de glissement du cerceau (S_2) par rapport au bâti (S_0) est

$$\vec{v}_g(S_2/S_0) = \vec{v}(K_2/\mathcal{R}_0).$$

La condition de roulement sans glissement s'écrit donc

$$\vec{v}(K_2/\mathcal{R}_0) = \vec{0}, \quad (5.79)$$

soit, en faisant usage de la relation (5.60) conduit à

$$-2 \ell \dot{\alpha} \sin \alpha + r \dot{\theta} = 0. \quad (5.80)$$

● D'après le § III.4/a),

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S_2/\mathcal{R}_0) = \mathcal{P}(\varpi \rightarrow S_2/\mathcal{R}_0) + \mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_2/\mathcal{R}_0) + \mathcal{P}(S_1 \rightarrow S_2/\mathcal{R}_0),$$

$$\text{soit } \mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S_2/\mathcal{R}_0) = \vec{P}_2 \cdot \vec{V}(C_2/\mathcal{R}_0) + \mathcal{R}_K \cdot \vec{v}(K_2/\mathcal{R}_0) + \mathcal{R}_C \cdot \vec{v}(C_2/\mathcal{R}_0).$$

Du fait de la condition (5.79) de roulement sans glissement au point K, la puissance $\mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_2/\mathcal{R}_0)$ des actions de S_0 sur S_2 par rapport à \mathcal{R}_0 est nulle. Par suite,

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S_2/\mathcal{R}_0) = 0 + 0 + (X_C \vec{e}_{x_0} + Y_C \vec{e}_{y_0}) \cdot (-2 \ell \dot{\alpha} \sin \alpha) \vec{e}_{x_0},$$

d'où

$$\mathcal{P}(\text{ext} \rightarrow S_2/\mathcal{R}_0) = -2 X_C \ell \dot{\alpha} \sin \alpha. \quad (5.81)$$

● *Théorème de l'Energie Cinétique au cerceau (S_2) et au système Σ .*

▪ Du fait que

$$\mathcal{P}(S_0 \rightarrow S_2/\mathcal{R}_0) = \vec{\mathcal{R}}_K \cdot \vec{v}(K_2/\mathcal{R}_0) = T_K (-2 \ell \dot{\alpha} \sin \alpha + r \dot{\theta}) = 0, \quad (5.82)$$

l'équation (5.68) provenant de l'application du Théorème de l'Energie Cinétique au cerceau (S_2) s'écrit :

$$4 m \ell^2 (\dot{\alpha} \ddot{\alpha} \sin^2 \alpha + \dot{\alpha}^3 \sin \alpha \cos \alpha) + m r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = -2 X_C \ell \dot{\alpha} \sin \alpha. \quad (5.83)$$

▪ De même, l'équation (5.78-a) provenant de l'application du Théorème de l'Energie Cinétique au système Σ s'écrit :

$$4 \ell^2 \left[\left(\frac{M}{3} + m \sin^2 \alpha \right) \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + m \dot{\alpha}^3 \sin \alpha \cos \alpha \right] + m r^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = M g \ell \dot{\alpha} \cos \alpha. \quad (5.84)$$

ANNEXE 5A : CIRCULATION D'UN VECTEUR SUR UNE COURBE

! Ce paragraphe est destiné à faciliter la compréhension de la notion de circulation, en vue de l'appliquer à la mécanique. Il ne remplace nullement le cours de Mathématiques sur le sujet.

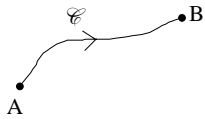


Figure 5A.1

Soient un champ de vecteur $\vec{F}(x, y, z)$ et une courbe \mathcal{C} paramétrée en $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ (figure 5A.1).

Par définition, la circulation du champ de vecteur \vec{F} le long de la courbe \mathcal{C} est l'intégrale

$$\int_A^B \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{OM} \quad (5A.1)$$

qui s'identifie donc au travail de la force \vec{F} pour aller du point A au point B.

ANNEXE 5B : GRADIENT D'UNE FONCTION

! Ce paragraphe est destiné à faciliter la compréhension de la notion de gradient, en vue de l'appliquer à la mécanique. Il ne remplace nullement le cours de Mathématiques sur le sujet.

5B.1 DEFINITIONS DE BASE

Le gradient d'une fonction scalaire $U(x, y, z)$ (encore appelé champ scalaire) est un vecteur dont les composantes sur la base orthonormée des coordonnées cartésiennes $\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

sont données par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} U(x, y, z) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \quad (5B.1)$$

A noter qu'en coordonnées cylindriques et sphériques, l'opérateur gradient prend une forme différente de celle de l'équation (5B.1), à savoir,

- en cylindriques, fonction $U(\rho, \varphi, z)$

$$\overrightarrow{\text{grad}} U(\rho, \varphi, z) = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \quad (5B.2)$$

- en sphériques, fonction $U(r, \theta, \varphi)$

$$\overrightarrow{\text{grad}} U(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad (5B.3)$$

5B.2 POUR ALLER PLUS LOIN

✓ De manière plus abstraite, le gradient d'une fonction $U(M)$ entre dans l'écriture de l'application différentielle (application linéaire tangente) associée à cette fonction au point M :

$$dU = \left(\overrightarrow{\text{grad}} U \right) \cdot d\vec{M} \quad (5B.4)$$

où $d\vec{M}$ représente la variable vectorielle indépendante de l'application linéaire. Dans le calcul infinitésimal, $d\vec{M}$ représente la variation élémentaire de la position du point M.

✓ En coordonnées cartésiennes, la définition (5B.4) du gradient de la fonction $U(x, y, z)$ s'écrit, en utilisant les composantes des différents vecteurs sur la base des coordonnées cartésiennes :

$$dU = \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{e}_z \right)}_{\overrightarrow{\text{grad}} U} \cdot \underbrace{(dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z)}_{d\vec{M}} \quad ,$$

et ce, quels que soient les accroissements dx , dy et dz ; la donnée de ces trois accroissements et de $\overrightarrow{\text{grad}} U$ permet d'en déduire la variation dU de U .

5B.2.1 Raisonnement à deux dimensions

Menons maintenant un raisonnement à deux dimensions, qui peut être généralisé sans difficultés à plus de deux dimensions.

Si les variations dx et dy sont choisies telles que

$$dU = 0, \quad (5B.5-a)$$

soit

$$U(x, y) = \text{constante} \quad , \quad (5B.5-b)$$

cela revient à écrire que, géométriquement, tous les vecteurs élémentaires $d\vec{M}$ tels que $dU = 0$, restent tangents en M à la ligne $U(x, y) = \text{constante}$. On voit alors d'après l'expression (5B.4) de la différentielle de U que $\overrightarrow{\text{grad}} U$ est perpendiculaire à ces vecteurs $d\vec{M}$. Les courbes du plan (x, y) telles que $U(x, y) = \text{constante}$ sont classiquement appelées **lignes de niveau** du champ scalaire U , et on peut énoncer le résultat suivant :

• En tout point (x, y) , le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} U$ est perpendiculaire à la ligne de niveau de la fonction U passant par ce point. (5B.6)

Dans l'espace à trois dimensions, en tout point M , le vecteur $\overrightarrow{\text{grad } U}$ est normal à la surface $U(x, y, z) = \text{constante}$ qui passe par ce point.

5B.2.1.1. Les lignes de niveau : exemple d'une carte topographique

De manière générale, l'ensemble des points où un champ scalaire U prend la même valeur, sont ses **lignes** (voire surfaces) **de niveau**.

Les **lignes de niveau** reflètent toujours une réalité physique.

Ainsi, sur une carte topographique où l'on s'intéresse au relief, x et y représentent par exemple les axes Est-Ouest et Nord-Sud, et la fonction U désigne l'altitude z . Sur les cartes météorologiques, la fonction U désigne soit la température, soit la pression, et les lignes de niveau représentent soit les isothermes (points qui sont tous à la même température), soit les isobares (points à la même pression). Dans l'exemple qui suit, on s'intéresse aux cartes topographiques. A titre d'exemple, la figure 5B.1 montre les lignes de niveau de la surface

$$U(x, y) = x e^{-(x^2+y^2)} \quad (5B.7)$$

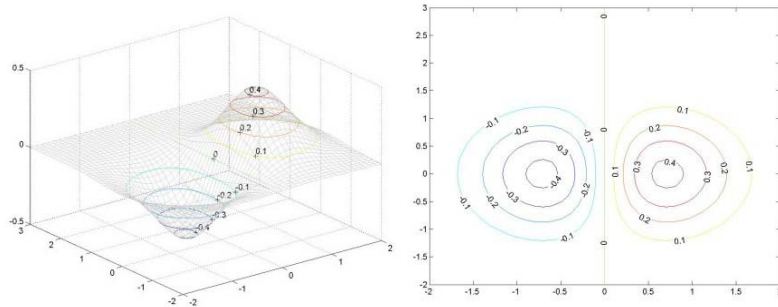


Figure 5B.1

Sur une carte d'une région montagneuse (figure 5B.2), figurent des lignes de niveau, ensemble des points situés à la même altitude, qui permettent de comprendre comment se présente le relief. Les courbes tracées en bleu représentent les torrents, qui coupent les lignes de niveau orthogonalement : les torrents coulent dans le sens des altitudes décroissantes, suivant la **ligne de plus grande pente** (là où ils coulent), ligne orthogonale en tout point à la ligne de niveau passant par ce point.

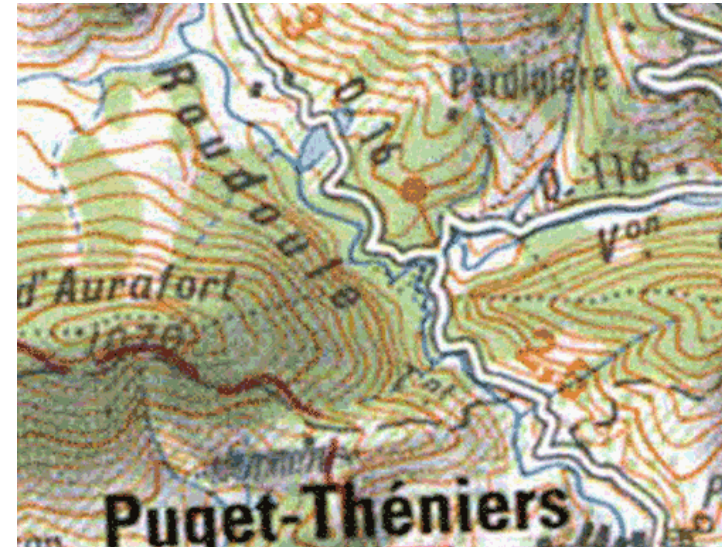


Figure 5B.2

5B.2.1.2. Orientation du gradient

Dans le plan (x, y) , si l'on se déplace en restant constamment perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{\text{grad } U}$, on suit une ligne de niveau $U(x, y) = \text{constante}$. Par contre, la variation de la fonction U est maximale si l'on se déplace en suivant les droites ou les directions qui portent le vecteur $\overrightarrow{\text{grad } U}$; la fonction U croît si ce déplacement s'effectue dans le sens du vecteur $\overrightarrow{\text{grad } U}$ et elle décroît dans le sens opposé.

En résumé :

- $\overrightarrow{\text{grad } U}$ est dirigé suivant la **direction de variation la plus rapide** de U (ligne de plus grande pente), **dans le sens des valeurs croissantes** de U . (5B.8)

5B.2.1.3. Retour sur l'énergie potentielle

Comme on l'a vu au chapitre 5, § II.2.d), une force \vec{F} (fonction vectorielle) dérive d'une fonction de force (ou d'un potentiel), s'il existe un champ scalaire U tel que

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad } U} \quad (5B.9)$$

D'après la propriété (5B.8), la force \vec{F} est dirigée vers les valeurs croissantes du champ scalaire U . Si l'on définit l'énergie potentielle E_p comme l'opposé de la fonction scalaire (champ scalaire) U , soit $E_p = -U$, alors la force \vec{F} est orientée des grandes valeurs de E_p vers les plus petites.

Tout ce qui vient d'être vu à deux dimensions se généralise aisément à plusieurs dimensions.

5B.2.2 Opérateur nabla

Le moyen de "fabriquer" un champ à partir d'un autre champ est ce que l'on appelle un *opérateur*. L'opérateur gradient, noté $\overrightarrow{\text{grad}}$ ou encore $\vec{\nabla}$ (opérateur "*nabla*") est donc un opérateur vectoriel et différentiel. En coordonnées cartésiennes, cet opérateur s'écrit (à rapprocher de la relation (5B.1))

$$\vec{\nabla} = \overrightarrow{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z . \quad (5B.10)$$