

Chapitre 5

FORMULATION ANALYTIQUE DE PROBLEMES LINEAIRES FONDAMENTAUX DE L'ACOUSTIQUE EN MILIEU FLUIDE HOMOGENE, INDEPENDANT DU TEMPS ET AU REPOS : LES SOLUTIONS FONDAMENTALES EN COORDONNEES CYLINDRIQUES

Solutions de l'équation de propagation

- Equation de propagation
- Equation de Helmholtz

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \hat{p}(\vec{r}; t) = -\hat{f}(\vec{r}; t) \quad \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_0^2}\right) \hat{p}(\vec{r}; \omega) = -\hat{F}(\vec{r}; \omega)$$

- ✓ Pas de solution générale connue en dehors du cas de propagation unidimensionnel
- ✓ Si les frontières du domaine coïncident avec des surfaces de coordonnées curvilignes séparables

- solutions à variables séparées
- "base" sur laquelle toute solution peut être développée
- famille complète

Choix de système de coordonnées

- Coordonnées cartésiennes
 - Diagram: piston plan, plan d'air
 - Equation: $A \cos(\omega t)$, $A \cos(\omega t - k \cdot x)$
 - Diagram: rectangular box with source
 - fonctions circulaires
- Coordonnées cylindriques
 - Diagram: cylinder with source S
 - fonctions de Bessel
- Coordonnées sphériques
 - Diagram: sphere with radius a
 - polynômes de Legendre

Solutions de problèmes à 3 dimensions (1/6)

- Equation de propagation $\left(\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \hat{p}(\vec{r}; t) = 0, \forall \vec{r} \in \mathcal{V}, \forall t$
- Equation de Helmholtz $\left(\Delta + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2\right) \hat{p}(\vec{r}; \omega) = 0, \forall \vec{r} \in \mathcal{V}$



Pas de solution générale connue à l'équation de Helmholtz en dehors du cas de propagation unidimensionnel :

$$\hat{p}(\vec{r}; t) = \hat{f}(\vec{n} \cdot \vec{r} - c_0 t) + \hat{g}(\vec{n} \cdot \vec{r} + c_0 t)$$



Solutions à variables séparées ou représentation intégrale

- Coordonnées cartésiennes $\hat{p}(x, y, z; t) = \hat{X}(x)\hat{Y}(y)\hat{Z}(z)\hat{T}(t)$
- Coordonnées cylindriques $\hat{p}(r, \psi, z; t) = \hat{R}(r)\hat{\Psi}(\psi)\hat{Z}(z)\hat{T}(t)$
- Coordonnées sphériques $\hat{p}(r, \theta, \varphi; t) = \hat{R}(r)\hat{\Theta}(\theta)\hat{\Psi}(\varphi)\hat{T}(t)$

Solution à variables séparées = Base sur laquelle toute solution de problème peut être exprimée

Equation des ondes en coordonnées cylindriques

$\vec{r} = \overline{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ → $d\vec{r} = d\overline{OM} = dr\vec{e}_r + r d\psi\vec{e}_\psi + dz\vec{e}_z$

$\vec{\Delta}(\vec{r}, \psi, z) = A_r\vec{e}_r + A_\psi\vec{e}_\psi + A_z\vec{e}_z$

Les principaux opérateurs en coordonnées cylindriques

$\overline{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \psi}\vec{e}_\psi + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{e}_z$

$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

$\overline{\text{rot}} \vec{A} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \psi} - \frac{\partial A_\psi}{\partial z}\right]\vec{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\vec{e}_\psi + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\psi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \psi}\right]\vec{e}_z$

$\Delta U = \text{div}(\overline{\text{grad}} U) = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$ et $\Delta \vec{A} = \overline{\text{grad}}(\text{div } \vec{A}) - \overline{\text{rot}}(\overline{\text{rot}} \vec{A})$

Equation de propagation

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \hat{p}(r, \psi, z; t) = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \hat{p}(r, \psi, z; t) = 0$$

Solutions de problèmes à 3 dimensions (2/6)

- Equation de propagation $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \hat{p}(r, \psi, z; t) = 0, \forall (r, \psi, z) \in \mathcal{V}, \forall t$

- Solutions à variables séparées $\hat{p}(r, \psi, z; t) = \hat{R}(r)\hat{\Psi}(\psi)\hat{Z}(z)\hat{T}(t)$

$$\rightarrow \underbrace{\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \psi^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}}_{\text{fonction de } r, \psi, z} = \underbrace{\frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}}_{\text{fonction de } t} = -k_0^2$$

→ $\frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial t^2} + \omega^2 \hat{T} = 0, \forall t$ → $\begin{cases} e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{cases}$ on pose $k_0^2 c_0^2 = \omega^2$ choix d'une convention temporelle

$$\rightarrow \hat{T}(t) = \hat{G} e^{i\omega t}$$

Solutions de problèmes à 3 dimensions (3/6)

• Solutions à variables séparées - solution en z

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\hat{R}} \frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial r^2} + \frac{1}{r \hat{R}} \frac{\partial \hat{R}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \psi^2} + k_0^2 \right)}_{\text{fonction de } r, \psi} = \underbrace{\frac{1}{\hat{Z}} \frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial z^2}}_{\text{fonction de } z}, \quad \forall (r, \psi, z) \in \mathcal{V}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{Z}}{\partial z^2} + k_z^2 \hat{Z} &= 0, \quad \forall z \Rightarrow \hat{Z}(z) = \hat{E} e^{-ik_z z} + \hat{F} e^{ik_z z} \\ \text{ou } \hat{Z}(z) &= \hat{E}' \cos(k_z z) + \hat{F}' \sin(k_z z) \\ \text{avec } \hat{E}' &= \hat{E} + \hat{F} \text{ et } \hat{F}' = i(\hat{F} - \hat{E}) \end{aligned}$$

Solutions de problèmes à 3 dimensions (4/6)

• Solutions à variables séparées - solution en ψ

$$\frac{1}{\hat{R}} \frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial r^2} + \frac{1}{r \hat{R}} \frac{\partial \hat{R}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \psi^2} = k_w^2 - k_0^2$$

fonction de r, ψ constante

$$= -k_w^2 \Rightarrow k_w^2 = k_0^2 - k_z^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\hat{\Psi}} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \psi^2} = -k_w^2 r^2 - \left(\frac{r^2}{\hat{R}} \frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial r^2} + \frac{r}{\hat{R}} \frac{\partial \hat{R}}{\partial r} \right), \quad \forall (r, \psi) \in \mathcal{V}$$

fonction de ψ fonction de r

$$= -v^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \psi^2} + v^2 \hat{\Psi} &= 0, \quad \forall \psi \Rightarrow \hat{\Psi}_v(\psi) = \hat{C} e^{-iv\psi} + \hat{D} e^{iv\psi} \\ \text{ou } \hat{\Psi}_v(\psi) &= \hat{C}' \cos(v\psi) + \hat{D}' \sin(v\psi) \end{aligned}$$

Solutions de problèmes à 3 dimensions (5/6)

• Solutions à variables séparées - solution en r

$$\frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{R}}{\partial r} + \left(k_w^2 - \frac{v^2}{r^2} \right) \hat{R} = 0, \quad \forall r \in \mathcal{V}$$

en posant $s = k_w r \Rightarrow \frac{d^2 \hat{R}}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{d\hat{R}}{ds} + \left(1 - \frac{v^2}{s^2} \right) \hat{R} = 0$

Equation de Bessel

$$\hat{R}_v(r) = \hat{A} H_v^{(1)}(k_w r) + \hat{B} H_v^{(2)}(k_w r) \quad \text{ou} \quad \hat{R}_v(r) = \hat{A}' J_v(k_w r) + \hat{B}' N_v(k_w r)$$

Fonction convergente quand $r \rightarrow \infty$ en $\exp(+ik_w r)$
Fonction de Bessel de 1ère espèce : comportement d'un cosinus quand $r \rightarrow \infty$
Fonction de Hankel
Fonction de Neumann : comportement d'un sinus quand $r \rightarrow \infty$

Solutions de problèmes à 3 dimensions (6/6)

• Solutions à variables séparées

$$\hat{p}_v(r, \psi, z; t) = \underbrace{\left[\hat{A}' J_v(k_w r) + \hat{B}' N_v(k_w r) \right]}_{R_v(r)} \underbrace{\left[\hat{C} e^{-iv\psi} + \hat{D} e^{iv\psi} \right]}_{\Psi_v(\psi)} \underbrace{\left[\hat{E} e^{-ik_z z} + \hat{F} e^{ik_z z} \right]}_{Z(z)} \underbrace{e^{i\omega t}}_{T(t)}$$

$$\begin{aligned} \text{ou } \hat{p}_v(r, \psi, z; t) &= \left[\hat{A}' J_v(k_w r) + \hat{B}' N_v(k_w r) \right] \left[\hat{C}' \cos(v\psi) + \hat{D}' \sin(v\psi) \right] \left[\hat{E}' \cos(k_z z) + \hat{F}' \sin(k_z z) \right] e^{i\omega t} \\ \text{ou } \hat{p}_v(r, \psi, z; t) &= \hat{A}_0 \left[J_v(k_w r) + \mathcal{R}_1 N_v(k_w r) \right] \left[e^{-iv\psi} + \mathcal{R}_2 e^{iv\psi} \right] \left[e^{-ik_z z} + \mathcal{R}_3 e^{ik_z z} \right] e^{i\omega t} \end{aligned}$$

sous réserve que : $k_w^2 = k_0^2 - k_z^2$ soit $k_w^2 + k_z^2 = k_0^2$ avec $k_0 = \omega/c_0$ *équation de dispersion*

• **Nombre d'onde local** $\vec{k} = k_r(r) \vec{e}_r + k_\psi(r) \vec{e}_\psi + k_z \vec{e}_z \Rightarrow k_r^2(r) + k_\psi^2(r) + k_z^2 = k_0^2$
avec $k_r^2(r) = k_w^2 - \left(\frac{v}{r}\right)^2 = k_w^2 - k_v^2(r)$ soit $k_w^2 = k_r^2(r) + k_v^2(r) = k_0^2 - k_z^2$

• **Solution générale** $\hat{p}(r, \psi, z; t) = \sum_{v=0}^{\infty} \hat{p}_v(r, \psi, z; t)$

Fonctions de Bessel J_v (1/5)

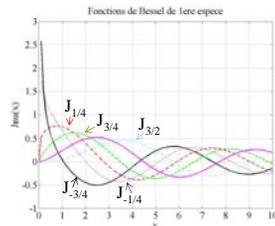
(1) $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{v^2}{x^2} \right) y = 0$ avec $v \in \mathbb{R}$ solution de (1) : $Z_v(x)$

• $v \notin \mathbb{N}$ (v non entier) : $Z_v(x) = A J_v(x) + B J_{-v}(x)$ $\Gamma(x+1) = x!$ avec $x \in \mathbb{N}$

$$J_v(x) = \left(\frac{x}{2} \right)^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2} \right)^{2k}}{k! \Gamma(k+v+1)}$$

$$\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos \left[x - \frac{\pi}{2} \left(v + \frac{1}{2} \right) \right] \text{ quand } \begin{cases} |x| \rightarrow \infty \\ \Re(x) > 0 \end{cases}$$

comportement d'un cosinus



fonctions de Bessel cylindriques de 1ère espèce d'ordre v

• $v \in \mathbb{N}$ (v entier) : J_v et J_{-v} ne sont plus linéairement indépendants

➔ autre solution

Fonctions de Bessel J_v (2/5)

• $v \in \mathbb{C}$ (v quelconque, entier ou non) :

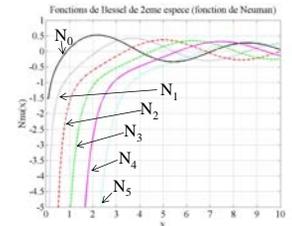
$$\begin{aligned} Z_v(x) &= A J_v(x) + B N_v(x) \\ \text{ou } Z_v(x) &= A H_v^{(1)}(x) + B H_v^{(2)}(x) \end{aligned}$$

$$N_v(x) = \frac{\cos(\pi v) J_v(x) - J_{-v}(x)}{\sin(\pi v)}$$

fonction de Neumann

$$\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left[x - \frac{\pi}{2} \left(v + \frac{1}{2} \right) \right] \text{ quand } \begin{cases} |x| \rightarrow \infty \\ \Re(x) > 0 \end{cases}$$

comportement d'un sinus



$$\left. \begin{aligned} N_0(x) &\approx \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{\gamma x}{2} \right) \\ N_n(x) &\approx -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x} \right)^n, \quad n > 0 \end{aligned} \right\} x \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} N_n(x) = -\infty$$

$\gamma = \ln C = 1.781...$ C : constante d'Euler

Fonctions de Bessel J_ν (3/5)

- Fonctions de Hankel

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{i}{\sin(\pi\nu)} [e^{-i\nu\pi} J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)] = J_\nu(x) + iN_\nu(x)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{-i}{\sin(\pi\nu)} [e^{i\nu\pi} J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)] = J_\nu(x) - iN_\nu(x)$$

$$\left. \begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left[x - \frac{\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right]} \\ H_\nu^{(2)}(x) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left[x - \frac{\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right]} \end{aligned} \right\} \text{quand } \begin{cases} |x| \rightarrow \infty \\ \Re(x) > 0 \end{cases}$$

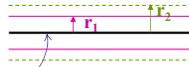
fonctions convergentes ou divergentes (suivant la convention temporelle)

→ utilisation en milieux semi-infinis

Application

- Onde cylindrique

$$\Phi \propto |\hat{A}|^2 S \quad \text{avec} \quad S \propto 2\pi r$$



fil pulsant

$$\rightarrow \Phi \propto |\hat{A}|^2 r \quad \text{et} \quad \Phi = \text{constante}$$

$$\rightarrow |\hat{A}|^2 r = \text{constante} \rightarrow |\hat{A}| \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$$

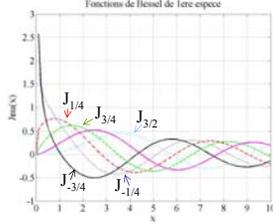
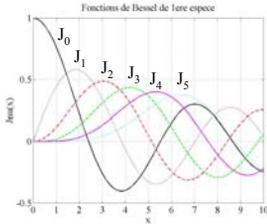
Toute onde dont l'amplitude décroît en $1/\sqrt{r}$ dans un certain espace, a un caractère **cylindrique** dans cet espace.

Application : départ en vacances sur l'autoroute

En première approche, le bruit émis par l'autoroute peut être modélisé par un champ à caractère cylindrique



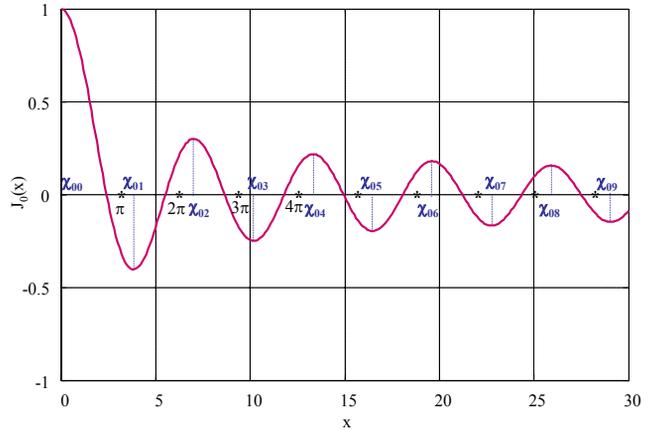
Fonctions de Bessel J_ν (4/5)



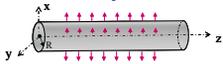
v \ m	0	1	2	3
0	0	3.83	7.02	10.17
1	1.84	5.33	8.54	11.71
2	3.05	6.71	9.97	13.17
3	4.20	8.02	11.35	14.59
1/2	1.40	4.60	7.70	11.00
3/2	2.50	6.00	9.50	12.40

$\chi_{vm} : (m+1)$ -ième zéro de J'_ν
 $(m+1)$ -ième extremum de J_ν

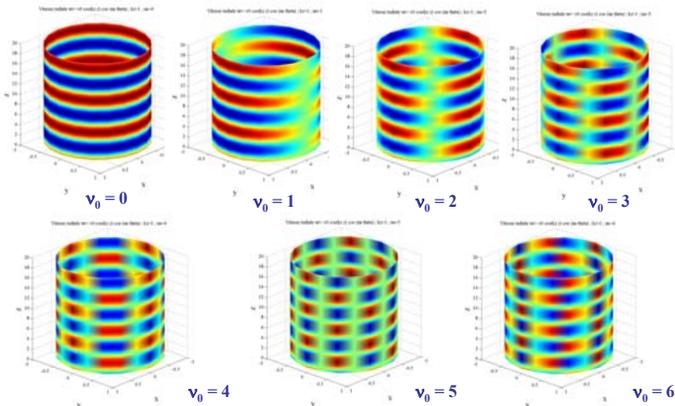
Fonctions de Bessel J_ν (5/5)



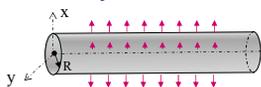
Rayonnement d'un cylindre infiniment long (1/4)



- Vitesse vibratoire radiale imposée $\hat{w}_r(\psi, z; t) = V_0 \cos(\nu_0 \psi) \cos(k_z z) e^{i\omega t}$



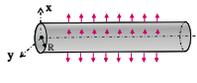
Rayonnement d'un cylindre infiniment long (2/4)



- Vitesse vibratoire radiale imposée $\hat{w}_r(\psi, z; t) = V_0 \cos(\nu_0 \psi) \cos(k_z z) e^{i\omega t}$

- Equation de propagation $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \hat{p}(r, \psi, z; t) = 0, \forall r \geq R, \forall \psi \in [0, 2\pi], \forall z, \forall t.$
- Equation de Helmholtz $\hat{p}(r, \psi, z; t) = \hat{P}(r, \psi, z) e^{i\omega t}$
 $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2}\right) \hat{P}(r, \psi, z) = 0, \forall r \geq R, \forall \psi \in [0, 2\pi], \forall z$
- Conditions aux frontières $\hat{v}(R, \psi, z; t) \cdot \vec{e}_r = \hat{w}_r(\psi, z; t), r = R, \forall \psi \in [0, 2\pi], \forall z, \forall t$
 $\rightarrow \frac{i}{k_0 c_0 \rho_0} \frac{\partial \hat{P}}{\partial r}(r = R, \psi, z) = V_0 \cos(\nu_0 \psi) \cos(k_z z), r = R, \forall \psi \in [0, 2\pi], \forall z$
- Condition de Sommerfeld ($r \rightarrow \infty$)

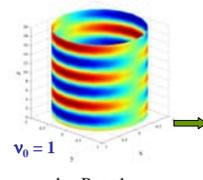
Rayonnement d'un cylindre infiniment long (3/4)



- Forme du champ

$$\hat{P}(r, \psi, z) = \hat{B} H_v^{(2)}(k_w r) [\hat{C} e^{-iv\psi} + \hat{D} e^{iv\psi}] [\hat{E} e^{-ik_z z} + \hat{F} e^{ik_z z}]$$
- Equation de dispersion $k_w^2 = k_0^2 - k_z^2$ avec $k_0 = \omega/c_0$
- Conditions aux frontières $\frac{i}{k_0 c_0 \rho_0} \frac{\partial \hat{P}}{\partial r}(r=R, \psi, z) = V_0 \cos(v_0 \psi) \cos(k_z z)$, $r=R$, $\forall \psi \in [0, 2\pi]$, $\forall z$
- avec $\frac{\partial \hat{P}}{\partial r} = \hat{B} \frac{\partial H_v^{(2)}(k_w r)}{\partial r} \Big|_{r=R} [\hat{C} e^{-iv\psi} + \hat{D} e^{iv\psi}] [\hat{E} e^{-ik_z z} + \hat{F} e^{ik_z z}]$
- $\frac{i}{k_0 c_0 \rho_0} \hat{B} \frac{\partial H_v^{(2)}(k_w R)}{\partial R} [\hat{C} e^{-iv\psi} + \hat{D} e^{iv\psi}] [\hat{E} e^{-ik_z z} + \hat{F} e^{ik_z z}] = V_0 \cos(v_0 \psi) \cos(k_z z)$, $r=R$, $\forall \psi \in [0, 2\pi]$, $\forall z$.
- $\hat{E} e^{-ik_z z} + \hat{F} e^{ik_z z} = \cos(k_z z)$ $\rightarrow v = v_0$ et $k_z = k_{z_0}$
- $\hat{C} e^{-iv\psi} + \hat{D} e^{iv\psi} = \cos(v_0 \psi)$ $\rightarrow \hat{B} = \frac{k_0 c_0 \rho_0 V_0}{i \partial H_v^{(2)}(k_w R) / \partial R}$
- Solution $\hat{p}(r, \psi, z; t) = \frac{-i k_0 c_0 \rho_0 V_0}{\partial H_{v_0}^{(2)}(k_w R) / \partial R} H_{v_0}^{(2)}(k_w r) \cos(v_0 \psi) \cos(k_{z_0} z) e^{i\omega t}$

Rayonnement d'un cylindre infiniment long (4/4)

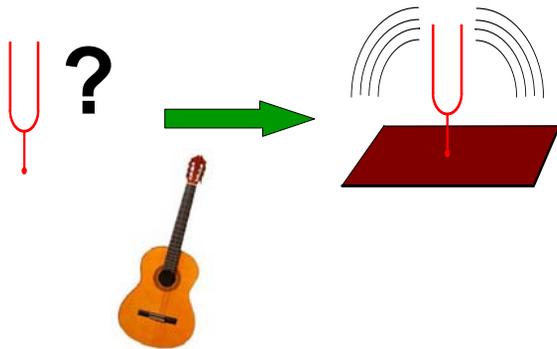


- Cylindre oscillant, corde vibrante

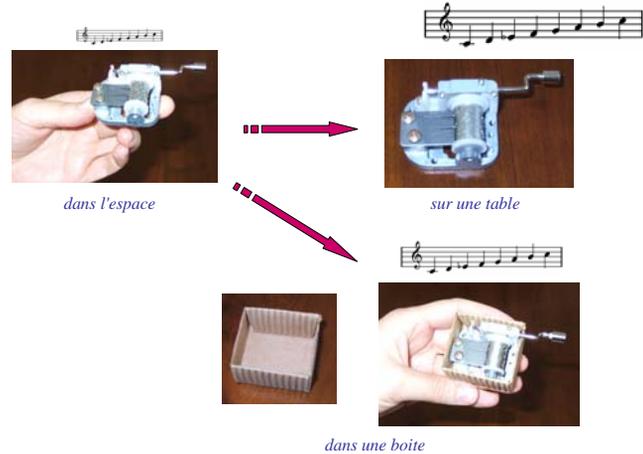
$$\hat{w}_r(z; t) = V_0 \cos \psi \cos(k_{z_0} z) e^{i\omega t}$$
- $\hat{p}(r, \psi, z; t) = \frac{-i k_0 c_0 \rho_0 V_0}{\partial H_1^{(2)}(k_w R) / \partial R} H_1^{(2)}(k_w r) \cos \psi \cos(k_{z_0} z) e^{i\omega t}$
- $v_0 = 1$
- $k_w R \ll 1$
- $H_1^{(2)}(k_w R) \approx \frac{2i}{\pi k_w R}$ $\rightarrow \hat{p}(r, \psi, z; t) = \frac{\pi}{2} k_0 c_0 \rho_0 V_0 k_w R^2 H_1^{(2)}(k_w r) \cos \psi \cos(k_{z_0} z) e^{i\omega t}$
- $k_w R \ll 1$ et $k_w r \rightarrow \infty$ $H_1^{(2)}(k_w r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k_w r}} e^{-i(k_w r - \frac{3\pi}{4})}$
- $\hat{p}(r, \psi, z; t) = \rho_0 c_0 V_0 k_0 R \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{R}{r} e^{-i(k_w r - \frac{3\pi}{4})} \cos \psi \cos(k_{z_0} z) e^{i\omega t}$
- amplitude proportionnelle à $\frac{k_0 \sqrt{k_w} R^2}{\sqrt{r}}$ \rightarrow extrêmement faible

Rayonnement d'un cylindre infiniment long (4/4)

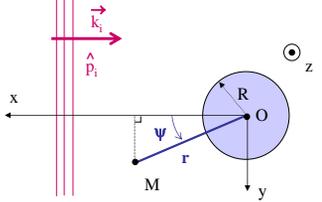
Bruit pas toujours émis directement par la source vibrante mais par la structure mise en vibration par la source



Exemple d'une boîte à musique



Onde plane diffractée par un cylindre (1/4)



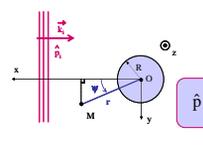
- Champ incident monochromatique

$$\hat{p}_i(r, \psi, z; t) = \hat{P}_i e^{ik_0 r \cos \psi} e^{i\omega t}$$

$$k_0 c_0 = \omega$$
- $\hat{p}(r, \psi, z; t) = \hat{P}(r, \psi, z) e^{i\omega t}$
- Equation de Helmholtz

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) \hat{P}(r, \psi, z) = 0, \forall r \geq R, \forall \psi \in [0, 2\pi], \forall z$$
- Conditions aux frontières $\left(\frac{\partial}{\partial n} + i k_0 \hat{\beta} \right) \hat{P}(r, \psi, z) = 0, r=R, \forall \psi \in [0, 2\pi], \forall z$ avec $\hat{\beta} = \rho_0 c_0 / Z$ et $\partial/\partial n = -\partial/\partial r$
- Condition de Sommerfeld ($r \rightarrow \infty$)

Onde plane diffractée par un cylindre (2/4)



- Champ incident monochromatique en coordonnées cylindriques

$$\hat{p}_i(r, \psi; t) = \hat{P}_0 e^{ik_0 r \cos \psi} e^{i\omega t} = \hat{P}_0 \sum_{v=0}^{\infty} (2 - \delta_{v0}) i^v J_v(k_0 r) \cos(v\psi) e^{i\omega t}$$
- Champ diffracté $\hat{p}_r(r, \psi; t) = \hat{P}_r(r, \psi) e^{i\omega t}$ avec $\hat{P}_r(r, \psi) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \hat{R}_\mu(k_w r) \hat{\Psi}_\mu(\psi)$
- développement sur les modes propres en coordonnées cylindriques
- Conditions aux frontières $\hat{R}_\mu(k_w r) = \hat{B}_\mu H_\mu^{(2)}(k_0 r)$ et $\hat{\Psi}_\mu(\psi) = \cos(\mu\psi)$
- $\hat{P}_r(r, \psi) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \hat{B}_\mu H_\mu^{(2)}(k_0 r) \cos(\mu\psi)$
- or $\left(-\frac{\partial}{\partial r} + i k_0 \hat{\beta} \right) (\hat{P}_i + \hat{P}_r) = 0, r=R, \forall \psi \in [0, 2\pi]$
- par identification terme à terme

$$\hat{B}_v = -\hat{P}_0 \frac{(2 - \delta_{v0}) i^v \left[i \partial J_v(k_0 R) / \partial R + k_0 \hat{\beta} J_v(k_0 R) \right]}{i \partial H_v^{(2)}(k_0 R) / \partial R + k_0 \hat{\beta} H_v^{(2)}(k_0 R)}$$

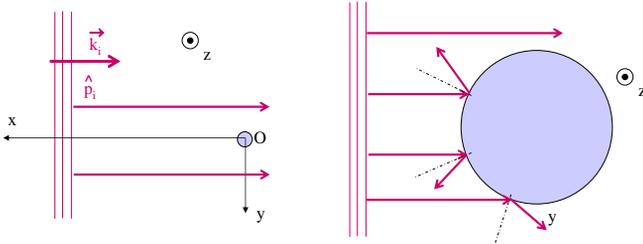
Onde plane diffractée par un cylindre (3/4)

• Champ diffracté $\hat{P}_r(r, \psi) = \sum_{v=0}^{\infty} \hat{B}_v H_v^{(2)}(k_0 r) \cos(v\psi)$

avec $\hat{B}_v = -\hat{P}_0 \frac{(2 - \delta_{v0}) i^v [\partial J_v(k_0 R) / \partial R + k_0 \hat{B} J_v(k_0 R)]}{i \partial H_v^{(2)}(k_0 R) / \partial R + k_0 \hat{B} H_v^{(2)}(k_0 R)}$

• Basses fréquences ($k_0 R \ll 1$)

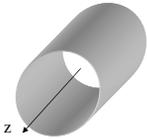
• Hautes fréquences ($k_0 R \gg 1$)



Onde plane diffractée par un cylindre (4/4)



Champ acoustique dans un conduit cylindrique infini (1/16)



• Equation de propagation $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{p}(r, \psi, z; t) = 0$, $\forall r \leq a, \forall \psi \in [0, 2\pi], \forall z > 0, \forall t$.

• Champ monochromatique incident imposé (non précisé) $\hat{p}(r, \psi, z; t) = \hat{P}(r, \psi, z) e^{i\omega t}$

• Equation de Helmholtz

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) \hat{P}(r, \psi, z) = 0, \forall r \leq a, \forall \psi \in [0, 2\pi], \forall z > 0$$

• Conditions aux frontières

$$\frac{\partial \hat{P}(r, \psi, z; t)}{\partial n} = 0, r = a, \forall \psi \in [0, 2\pi], \forall z > 0, \forall t \text{ avec } \partial/\partial n = \partial/\partial r$$

$$\frac{\partial \hat{P}(r, \psi, z)}{\partial r} = 0, r = a, \forall \psi \in [0, 2\pi], \forall z > 0$$

• Champ propagatif dans le sens des z croissants (pas d'onde retour)

• Champ acoustique borné en $r = 0$

Champ acoustique dans un conduit cylindrique infini (2/16)



• Forme du champ $\hat{p}(r, \psi, z) = \hat{A} J_v(k_w r) (e^{-iv\psi} + \hat{\mathcal{R}} e^{iv\psi}) e^{-ik_z z}$

• Equation de dispersion $k_w^2 = k_0^2 - k_z^2$ avec $k_0 = \omega/c_0$

• Conditions aux frontières $\frac{\partial \hat{P}(r, \psi, z)}{\partial r} = 0, r = a, \forall \psi \in [0, 2\pi], \forall z > 0$

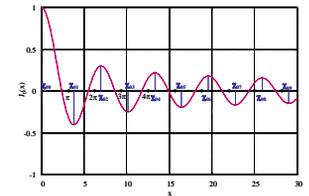
$$\text{avec } \frac{\partial \hat{P}(r, \psi, z)}{\partial r} = \hat{A} k_w J'_v(k_w r) (e^{-iv\psi} + \hat{\mathcal{R}} e^{iv\psi}) e^{-ik_z z}$$

$$\Rightarrow \hat{A} k_w J'_v(k_w a) (e^{-iv\psi} + \hat{\mathcal{R}} e^{iv\psi}) e^{-ik_z z} = 0, r = a, \forall \psi \in [0, 2\pi], \forall z$$

$$\Rightarrow \hat{A} k_w J'_v(k_w a) = 0 \Rightarrow J'_v(k_w a) = 0 \Rightarrow k_w a = \chi_{v,m}, (v, m) \in \mathbb{N}^2$$

où $\chi_{v,m}$: (m+1)-ième zéro de J'_v , (m+1)-ième extremum de J_v

v \ m	0	1	2	3
0	0	3.83	7.02	10.17
1	1.84	5.33	8.54	11.71
2	3.05	6.71	9.97	13.17
3	4.20	8.02	11.35	14.59
1/2	1.40	4.60	7.70	11.00
3/2	2.50	6.00	9.50	12.40



Champ acoustique dans un conduit cylindrique infini (3/16)



• Solutions du problème

$\hat{A}_{v,m} = 0, \forall m$ SAUF SI $k_{w,v,m}$ prend une suite de valeurs propres

$$k_{w,v,m} = \frac{\chi_{v,m}}{a}, (v, m) \in \mathbb{N}^2$$

à laquelle est associée (équation de dispersion) une suite de nombre d'ondes $k_{z,v,m}$ tels que

$$k_{z,v,m}^2 = k_0^2 - k_{w,v,m}^2 \text{ c.à.d. } k_{z,v,m}^2 = \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 - \left(\frac{\chi_{v,m}}{a} \right)^2$$

dépend de v,m ne dépend pas de v,m dépend de v,m

→ 2 cas : $k_{z,v,m}^2 > 0$ ou $k_{z,v,m}^2 < 0$

• Pression portée par chaque mode (v,m)

$$\hat{p}_{v,m}(r, \psi, z; t) = \hat{A}_{v,m} J_v(k_{w,v,m} r) (e^{-iv\psi} + \hat{\mathcal{R}} e^{iv\psi}) e^{-ik_{z,v,m} z} e^{i\omega t}$$

• Pression totale

$$\hat{p}(r, \psi, z; t) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{p}_{v,m}(r, \psi, z; t) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{A}_{v,m} J_v(k_{w,v,m} r) (e^{-iv\psi} + \hat{\mathcal{R}} e^{iv\psi}) e^{-ik_{z,v,m} z} e^{i\omega t}$$

Champ acoustique dans un conduit cylindrique infini (4/16)

• Modes propagatifs et évanescents

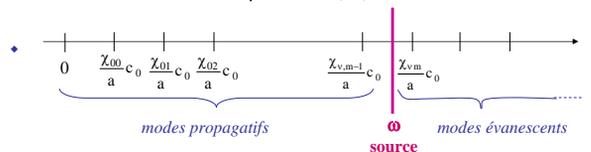
$$k_{w,v,m} = \frac{\chi_{v,m}}{a}, (v, m) \in \mathbb{N}^2 \text{ avec } k_{z,v,m}^2 = \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 - \left(\frac{\chi_{v,m}}{a} \right)^2$$

• modes (v,m) tels que $k_{z,v,m}^2 > 0$ c.à.d. $\omega > \frac{\chi_{v,m}}{a} c_0$ → modes (v,m) **propagatifs**

• modes (v,m) tels que $k_{z,v,m}^2 < 0$ c.à.d. $\omega < \frac{\chi_{v,m}}{a} c_0$ → modes (v,m) **évanescents**

$$\text{et } e^{-ik_{z,v,m} z} = e^{k_{z,v,m} z}$$

$$\text{avec } k_{z,v,m} = i k_{z,v,m}^- = -i \sqrt{\left(\frac{\chi_{v,m}}{a} \right)^2 - \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2}$$



Champ acoustique dans un conduit cylindrique infini (5/16)

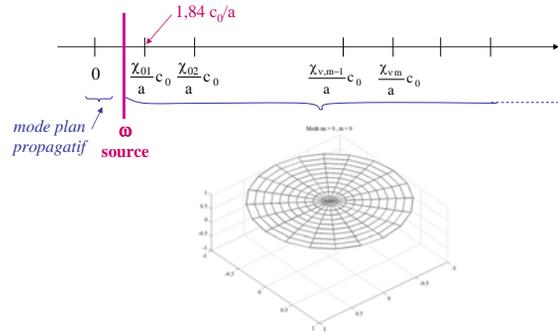
• Mode plan

$$k_{\psi, v=0, m=0} = \frac{\chi_{00}}{a} = 0$$

$$\hat{p}_{v=0, m=0}(r, \psi, z, t) = \hat{A}_{v=0, m=0} \left(1 + \frac{\partial}{\partial z}\right) e^{-ik_0 z} e^{i\omega t}$$

$$k_{z, v=0, m=0} = \frac{\omega}{c_0}$$

onde plane progressive dans la direction des z croissants



Champ acoustique dans un conduit cylindrique infini (6/16)

Le champ a toujours un caractère propagatif en ψ .

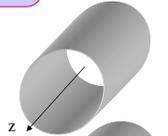
• Cas particulier des modes stationnaires en ψ

$$\hat{p}_{vm}(r, \psi, z, t) = \hat{A}_{vm} J_v(k_{\psi vm} r) \cos(v\psi) e^{-ik_{zvm} z} e^{i\omega t}$$

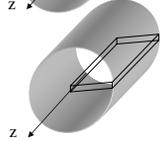
$$\text{ou } \hat{p}_{vm}(r, \psi, z, t) = \hat{A}_{vm} J_v(k_{\psi vm} r) \sin(v\psi) e^{-ik_{zvm} z} e^{i\omega t}$$

$v = n$ entier

Si \mathcal{Y} permet de contourner l'axe Oz lorsque ψ varie : v est entier

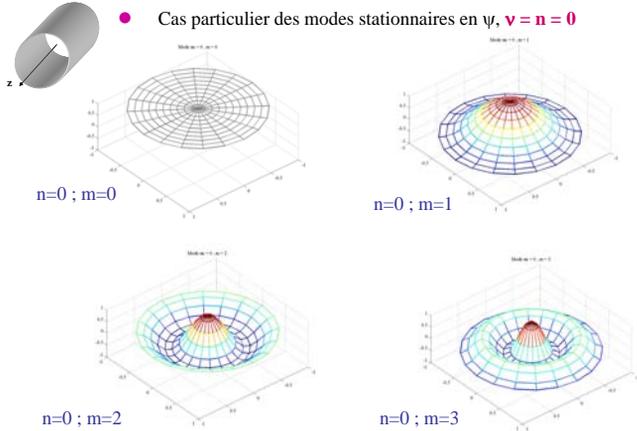


Si \mathcal{Y} ne permet pas de contourner l'axe Oz lorsque ψ varie : v n'est pas nécessairement entier



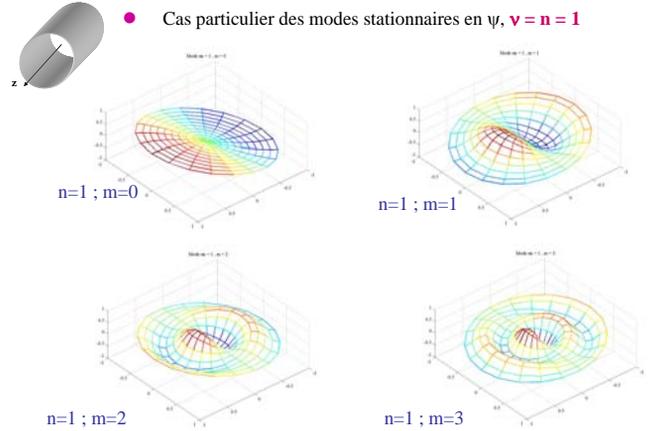
Champ acoustique dans un conduit cylindrique infini (7/16)

• Cas particulier des modes stationnaires en ψ , $v = n = 0$



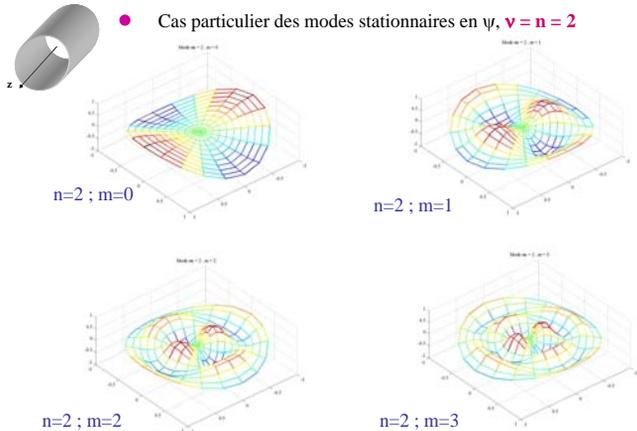
Champ acoustique dans un conduit cylindrique infini (8/16)

• Cas particulier des modes stationnaires en ψ , $v = n = 1$



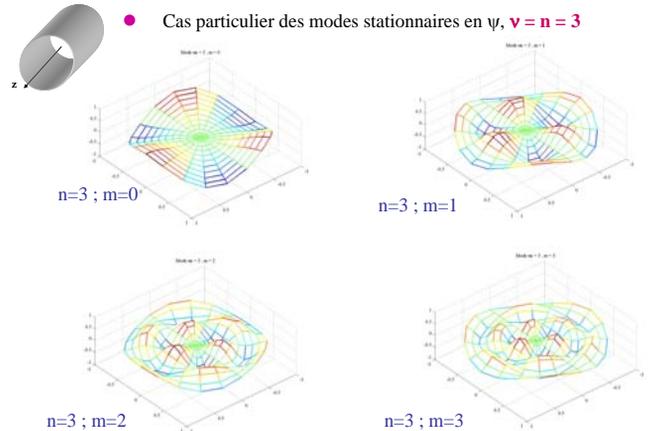
Champ acoustique dans un conduit cylindrique infini (9/16)

• Cas particulier des modes stationnaires en ψ , $v = n = 2$



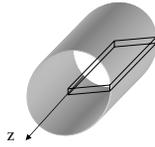
Champ acoustique dans un conduit cylindrique infini (10/16)

• Cas particulier des modes stationnaires en ψ , $v = n = 3$



Champ acoustique dans un conduit cylindrique infini (11/16)

- Conduit avec demi paroi méridienne



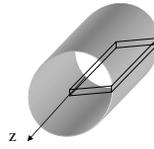
$$\hat{p}_{Nm}(r, \psi, z; t) = \hat{A}_{Nm} J_{\frac{N}{2}} \left(\frac{\chi_{Nm}}{a} r \right) \cos \left(\frac{N}{2} \psi \right) e^{-ik_z Nm z} e^{i\omega t}$$

$$v = N/2$$

N pair : modes stationnaires du conduit infini ordinaire

N impair : modes antisymétriques par rapport à la demi paroi méridienne

Champ acoustique dans un conduit cylindrique infini (12/16)



- Equation de propagation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{p}(r, \psi, z; t) = 0,$$

$$\forall r \leq a, \forall \psi \in [0, 2\pi], \forall z > 0, \forall t.$$

- Champ monochromatique incident imposé (non précisé)

$$\hat{p}(r, \psi, z; t) = \hat{P}(r, \psi, z) e^{i\omega t}$$

- Equation de Helmholtz

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) \hat{P}(r, \psi, z) = 0, \forall r \leq a, \forall \psi \in [0, 2\pi], \forall z > 0$$

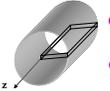
- Conditions aux frontières

$$\checkmark \frac{\partial \hat{P}(r, \psi, z; t)}{\partial n} = 0, r = a, \forall \psi \in [0, 2\pi], \forall z > 0, \forall t \text{ avec } \partial/\partial n = \partial/\partial r$$

$$\checkmark \frac{\partial \hat{P}(r, \psi, z; t)}{\partial n} = 0, \forall r \in [0, a], \psi = 0 \text{ et } \psi = 2\pi, \forall z > 0, \forall t \text{ avec } \partial/\partial n = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi}$$

- Champ propagatif dans le sens des z croissants (pas d'onde retour)
- Champ acoustique borné en $r = 0$

Champ acoustique dans un conduit cylindrique infini (13/16)



- Forme du champ $\hat{P}(r, \psi, z) = \hat{A} J_v(k_w r) (e^{-iv\psi} + \mathcal{R} e^{iv\psi}) e^{-ik_z z}$
- Equation de dispersion $k_w^2 = k_0^2 - k_z^2$ avec $k_0 = \omega/c_0$

- Conditions aux frontières $\frac{\partial \hat{P}(r, \psi, z)}{\partial r} = 0, r = a, \forall \psi \in [0, 2\pi], \forall z > 0$
avec $\frac{\partial \hat{P}(r, \psi, z)}{\partial r} = \hat{A} k_w J'_v(k_w r) (e^{-iv\psi} + \mathcal{R} e^{iv\psi}) e^{-ik_z z} \rightarrow k_w a = \chi_{vm}, (v, m) \in \mathbb{N}^2$

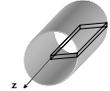
- Conditions aux frontières $\frac{\partial \hat{P}(r, \psi, z)}{\partial \psi} = 0, \forall r \in [0, a], \psi = 0 \text{ et } \psi = 2\pi, \forall z > 0$
avec $\frac{\partial \hat{P}(r, \psi, z)}{\partial \psi} = \hat{A} k_w J_v(k_w r) (-i v e^{-iv\psi} + i v \mathcal{R} e^{iv\psi}) e^{-ik_z z}$
 $\rightarrow \frac{\partial \hat{P}(r, \psi, z)}{\partial \psi} = \hat{A} k_w J_v(k_w r) i v (-e^{-iv\psi} + \mathcal{R} e^{iv\psi}) e^{-ik_z z} = 0,$

$$\forall r \in [0, a], \psi = 0 \text{ et } \psi = 2\pi, \forall z > 0$$

$$\begin{cases} -1 + \mathcal{R} = 0 \\ -e^{-iv2\pi} + \mathcal{R} e^{iv2\pi} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{R} = 1 \\ \sin(2\pi v) = 0 \end{cases} \rightarrow 2\pi v = N\pi, N \in \mathbb{N}$$

$$\rightarrow v = \frac{N}{2}, N \in \mathbb{N}$$

Champ acoustique dans un conduit cylindrique infini (14/16)



- Solutions du problème

$$\checkmark \hat{A}_{vm} = 0, \forall m \text{ SAUF SI } k_{wvm} \text{ prend une suite de valeurs propres}$$

$$k_{wvm} = \frac{\chi_{vm}}{a}, (v, m) \in \mathbb{N}^2 \text{ comme dans le tuyau sans paroi méridienne}$$

$$\checkmark \hat{\Psi}(\psi) = 2 \cos \left(\frac{N}{2} \psi \right) \text{ caractère stationnaire en } \psi \rightarrow v = N/2$$

N pair : modes stationnaires du conduit infini ordinaire

N impair : modes antisymétriques par rapport à la demi paroi méridienne

- Pression portée par chaque mode (N,m)

$$\hat{p}_{Nm}(r, \psi, z; t) = \hat{A}_{Nm} J_{\frac{N}{2}} \left(\frac{\chi_{Nm}}{a} r \right) \cos \left(\frac{N}{2} \psi \right) e^{-ik_z Nm z} e^{i\omega t}$$

- Pression totale

$$\hat{p}(r, \psi, z; t) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{p}_{vm}(r, \psi, z; t) = \sum_{v=0}^{\infty} \hat{A}_{Nm} J_{\frac{N}{2}} \left(\frac{\chi_{Nm}}{a} r \right) \cos \left(\frac{N}{2} \psi \right) e^{-ik_z Nm z} e^{i\omega t}$$

Champ acoustique dans un conduit cylindrique infini (15/16)



- Cas particulier des modes stationnaires en $\psi, v = 0,5$

$v=0.5 ; m=0$

$v=0.5 ; m=1$

$v=0.5 ; m=2$

$v=0.5 ; m=3$

Champ acoustique dans un conduit cylindrique infini (16/16)



- Cas particulier des modes stationnaires en $\psi, v = 1,5$

$v=1.5 ; m=0$

$v=1.5 ; m=1$

$v=1.5 ; m=2$

$v=1.5 ; m=3$

Transparents basés sur

C. POTEL, M. BRUNEAU, *Acoustique Générale - équations différentielles et intégrales, solutions en milieux fluide et solide, applications*, Ed. Ellipse collection Technosup, 352 pages, ISBN 2-7298-2805-2, 2006

