

Chapitre 6

FORMULATION ANALYTIQUE DE PROBLEMES LINEAIRES FONDAMENTAUX DE L'ACOUSTIQUE EN MILIEU FLUIDE HOMOGENE, INDEPENDANT DU TEMPS ET AU REPOS : LES SOLUTIONS FONDAMENTALES EN COORDONNEES SPHERIQUES

Solutions de l'équation de propagation

- Equation de propagation
 - Equation de Helmholtz
- $$\left(\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \hat{p}(\vec{r}; t) = -\hat{f}(\vec{r}; t)$$
- $$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c_0^2}\right) \hat{p}(\vec{r}; \omega) = -\hat{f}(\vec{r}; \omega)$$
- ✓ Pas de solution générale connue en dehors du cas de propagation unidimensionnel
 - ✓ Si les frontières du domaine coïncident avec des surfaces de coordonnées curvilignes séparables
 - solutions à variables séparées
 - "base" sur laquelle toute solution peut être développée
 - famille complète

Choix de système de coordonnées

- Coordonnées cartésiennes
 - piston plan
 - plan d'air
 - $A \cos(\omega t)$
 - $A \cos(\omega t - kx)$
 - fonctions circulaires
- Coordonnées cylindriques
 - source S
 - fonctions de Bessel
- Coordonnées sphériques
 - polynômes de Legendre

Solutions de problèmes à 3 dimensions (1/6)

- Equation de propagation
- Equation de Helmholtz

$$\left(\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \hat{p}(\vec{r}; t) = 0, \forall \vec{r} \in \mathcal{V}, \forall t$$

$$\left[\Delta + \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2\right] \hat{p}(\vec{r}; \omega) = 0, \forall \vec{r} \in \mathcal{V}$$

Pas de solution générale connue à l'équation de Helmholtz en dehors du cas de propagation unidimensionnel :

$$\hat{p}(\vec{r}; t) = \hat{f}(\vec{n} \cdot \vec{r} - c_0 t) + \hat{g}(\vec{n} \cdot \vec{r} + c_0 t)$$

Solutions à variables séparées ou représentation intégrale

- Coordonnées cartésiennes $\hat{p}(x, y, z, t) = \hat{X}(x)\hat{Y}(y)\hat{Z}(z)\hat{T}(t)$
- Coordonnées cylindriques $\hat{p}(r, \psi, z, t) = \hat{R}(r)\hat{\Psi}(\psi)\hat{Z}(z)\hat{T}(t)$
- Coordonnées sphériques $\hat{p}(r, \theta, \psi, t) = \hat{R}(r)\hat{\Theta}(\theta)\hat{\Psi}(\psi)\hat{T}(t)$

Solution à variables séparées = Base sur laquelle toute solution de problème peut être exprimée

Modélisation d'une surface active

Toute surface active peut être modélisée par une répartition continue de **monopôles** et de **dipôles**

- sources ponctuelles
- 2 sources ponctuelles en opposition de phase

Equation des ondes en coordonnées sphériques

$$\vec{r} = \overline{OM} = r \vec{e}_r \quad \rightarrow \quad d\vec{r} = d\overline{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\psi \vec{e}_\psi$$

$$\vec{\Delta}(\vec{r}, \theta, \psi) = \Delta_r \vec{e}_r + \Delta_\theta \vec{e}_\theta + \Delta_\psi \vec{e}_\psi$$

Les principaux opérateurs en coordonnées sphériques

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial U}{\partial \psi} \vec{e}_\psi$$

$$\text{div } \vec{\Delta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \Delta_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta \Delta_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \Delta_\psi}{\partial \psi}$$

$$\text{rot } \vec{\Delta} = \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial(\sin\theta \Delta_\psi)}{\partial \theta} - \frac{\partial \Delta_\theta}{\partial \psi} \right] \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \Delta_r}{\sin\theta} - \frac{\partial(r \Delta_\psi)}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r \Delta_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial \Delta_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\psi$$

$$\Delta U = \text{div}(\text{grad } U) = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}$$

Equation de propagation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{p}(r, \theta, \psi; t) = 0$$

Solutions de problèmes à 3 dimensions (2/6)

• **Equation de propagation**

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{p}(r, \theta, \psi; t) = 0, \forall (r, \theta, \psi) \in \mathcal{V}, \forall t$$

• **Solutions à variables séparées** $\hat{p}(r, \theta, \psi; t) = \hat{R}(r) \hat{\Theta}(\theta) \hat{\Psi}(\psi) \hat{T}(t)$

$$\frac{1}{\hat{R}} \frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \hat{R}}{\partial r} + \frac{1}{\hat{\Theta} \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\hat{\Psi} r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \psi^2} = \frac{1}{\hat{T}} \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial t^2}, \forall (r, \theta, \psi) \in \mathcal{V}, \forall t$$

fonction de r, θ, ψ fonction de t
 $= -k_0^2$ on pose $k_0^2 c_0^2 = \omega^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial t^2} + \omega^2 \hat{T} = 0, \forall t \Rightarrow \begin{cases} e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} \end{cases} \text{ choix d'une convention temporelle}$$

$$\Rightarrow \hat{T}(t) = \hat{G} e^{i\omega t}$$

Solutions de problèmes à 3 dimensions (3/6)

• **Solutions à variables séparées - solution en r**

$$-\left[\frac{1}{\hat{\Theta} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\hat{\Psi} \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \psi^2} \right] = \frac{r^2}{\hat{R}} \frac{\partial^2 \hat{R}}{\partial r^2} + \frac{2r}{\hat{R}} \frac{\partial \hat{R}}{\partial r} + r^2 k_0^2, \forall (r, \theta, \psi) \in \mathcal{V}$$

fonction de θ, ψ fonction de r

$$\frac{\partial^2 \hat{R}_n}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \hat{R}_n}{\partial r} + \left(k_0^2 - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) \hat{R}_n = 0, \forall r \xrightarrow{s = k_0 r} \frac{\partial^2 \hat{R}_n}{\partial s^2} + \frac{2}{s} \frac{\partial \hat{R}_n}{\partial s} + \left(1 - \frac{n(n+1)}{s^2} \right) \hat{R}_n = 0$$

Equation de Bessel sphérique

$$\hat{R}_n(r) = \hat{A} h_n^{(1)}(k_0 r) + \hat{B} h_n^{(2)}(k_0 r) \quad \text{ou} \quad \hat{R}_n(r) = \hat{A}' j_n(k_0 r) + \hat{B}' n_n(k_0 r)$$

Fonction convergente quand $r \rightarrow \infty$ en $\exp(+ik_0 r)$ *Fonction divergente quand $r \rightarrow \infty$ en $\exp(-ik_0 r)$* *Fonction de Bessel sphérique : comportement d'un cosinus quand $r \rightarrow \infty$* *Fonction de Neumann sphérique : comportement d'un sinus quand $r \rightarrow \infty$*

Solutions de problèmes à 3 dimensions (4/6)

• **Solutions à variables séparées - solution en ψ**

$$-\left[\frac{\sin \theta}{\hat{\Theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \hat{\Theta}}{\partial \theta} \right) + n(n+1) \sin^2 \theta \right] = \frac{1}{\hat{\Psi}} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \psi^2}, \forall (\theta, \psi)$$

fonction de θ fonction de ψ
 $= -m^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \hat{\Psi}_m}{\partial \psi^2} + m^2 \hat{\Psi}_m = 0, \forall \psi \Rightarrow \begin{cases} \hat{\Psi}_m(\psi) = \hat{C} e^{-im\psi} + \hat{D} e^{im\psi} \\ \text{ou } \hat{\Psi}_m(\psi) = \hat{C}' \cos(m\psi) + \hat{D}' \sin(m\psi) \end{cases}$$

Solutions de problèmes à 3 dimensions (5/6)

• **Solutions à variables séparées - solution en θ**

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \hat{\Theta}_{nm}}{\partial \theta} \right) + [n(n+1) \sin^2 \theta - m^2] \hat{\Theta}_{nm} = 0$$

en posant $\mu = \cos \theta$

$$\left((1-\mu^2) \frac{\partial^2 \hat{\Theta}_{nm}}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial \hat{\Theta}_{nm}}{\partial \mu} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{(1-\mu^2)} \right] \hat{\Theta}_{nm} = 0 \right) \Rightarrow \hat{\Theta}_{nm}(\theta) = P_{nm}(\cos \theta)$$

Equation de Legendre associée ou généralisée

Fonctions de Legendre, pour m et n entiers

• **Fonctions de Legendre**

$$P_{nm}(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m P_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)^m}, \quad n, m = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ et } n > m$$

où $(m+1)P_{m+1} = (2m+1)\cos \theta P_m - m P_{m-1}$ avec $P_0 = 1$ ← *Polynômes de Legendre*

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_1 &= \cos \theta & ; & & P_2 &= \frac{1}{2}(3\cos^2 \theta - 1) \\ P_3 &= \frac{1}{2}(5\cos^3 \theta - 3\cos \theta) & ; & & P_4 &= \frac{1}{8}(35\cos^4 \theta - 30\cos^2 \theta + 3) & ; \text{ etc...} \end{aligned}$$

Solutions de problèmes à 3 dimensions (6/6)

• **Solutions à variables séparées**

$$\hat{p}_{nm}(r, \theta, \psi; t) = \underbrace{[\hat{A}' j_n(k_0 r) + \hat{B}' n_n(k_0 r)]}_{\hat{R}_n(r)} \underbrace{[\hat{C} e^{-im\psi} + \hat{D} e^{im\psi}]}_{\hat{\Psi}_m(\psi)} \underbrace{P_{nm}(\cos \theta)}_{\hat{\Theta}_{nm}(\theta)} \underbrace{e^{i\omega t}}_{\hat{T}(t)}$$

ou $\hat{p}_{nm}(r, \theta, \psi; t) = [\hat{A}' j_n(k_0 r) + \hat{B}' n_n(k_0 r)] [\hat{C} \cos(m\psi) + \hat{D}' \sin(m\psi)] P_{nm}(\cos \theta) e^{i\omega t}$

ou $\hat{p}_{nm}(r, \theta, \psi; t) = [\hat{A} h_n^{(1)}(k_0 r) + \hat{B} h_n^{(2)}(k_0 r)] [\hat{C} e^{-im\psi} + \hat{D} e^{im\psi}] P_{nm}(\cos \theta) e^{i\omega t}$

ou $\hat{p}_{nm}(r, \theta, \psi; t) = \hat{A}_0 [j_n(k_0 r) + \mathcal{P}_1 n_n(k_0 r)] [e^{-im\psi} + \mathcal{P}_2 e^{im\psi}] P_{nm}(\cos \theta) e^{i\omega t}$

avec $Y_{nm}^{(1)} = \cos(m\psi) P_{nm}(\cos \theta)$ et $Y_{nm}^{(2)} = \sin(m\psi) P_{nm}(\cos \theta)$ *harmoniques sphériques*

• **Nombre d'onde local** $\vec{k} = k_r(r) \vec{e}_r + k_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta + k_\psi(r, \theta) \vec{e}_\psi$

$$\Rightarrow k_r^2(r) + k_\theta^2(r, \theta) + k_\psi^2(r, \theta) = k_0^2 \text{ avec } k_0 = \omega/c_0 \quad \text{équation de dispersion}$$

avec $k_r^2(r) = k_0^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}$; $k_\theta^2(r, \theta) = \frac{1}{r^2} \left[n(n+1) - \frac{m^2}{(1-\mu^2)} \right]$ et $k_\psi^2(r, \theta) = \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta}$

Fonctions de Bessel sphériques j_n et n_n (1/2)

(1) $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2} \right) y = 0, \nu \in \mathbb{R}$ solution de (1) : $y_\nu(x)$

• changement de variables : $y = x^{-1/2} Z \Rightarrow \frac{d^2 Z}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dZ}{dx} + \left(1 - \frac{(\nu+1/2)^2}{x^2} \right) Z = 0, \nu \in \mathbb{R}$
équation de Bessel (cylindrique)

$$\Rightarrow Z_\nu(x) = A J_{\nu+1/2}(x) + B N_{\nu+1/2}(x)$$

$$\Rightarrow y_\nu(x) = \frac{A}{\sqrt{x}} J_{\nu+1/2}(x) + \frac{B}{\sqrt{x}} N_{\nu+1/2}(x)$$

• fonctions de Bessel et de Neumann sphériques

$$j_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\nu+1/2}(x)$$

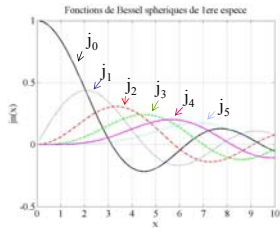
$$n_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{\nu+1/2}(x)$$

• solution de (1) $y_\nu(x) = A j_\nu(x) + B n_\nu(x) = A' h_\nu^{(1)}(x) + B' h_\nu^{(2)}(x)$

Fonctions de Bessel sphériques j_n et n_n (2/2)

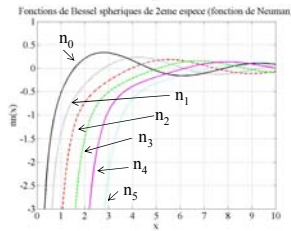
- $j_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\nu+1/2}(x)$

quand $x \rightarrow \infty$: $j_n(x) \sim \frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{n+1}{2}\pi\right)$



- $n_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{\nu+1/2}(x)$

quand $x \rightarrow \infty$: $n_n(x) \sim \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{n+1}{2}\pi\right)$



Fonctions de Hankel sphériques $h_n^{(1)}$ et $h_n^{(2)}$ (1/2)

- $h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - i n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+1/2}^{(2)}(x) = (i)^{n+1} \frac{e^{-ix}}{x} f_n(ix)$

- $h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + i n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+1/2}^{(1)}(x) = (i)^{n+1} \frac{e^{ix}}{x} f_n(-ix)$

avec $f_n(z) = \sum_{s=0}^n \frac{(n+s)!}{(n-s)!s!} \left(\frac{1}{2z}\right)^s$

$$\left. \begin{aligned} h_n^{(1)}(x) &\approx \frac{e^{i\left[x - \frac{\pi}{2}(n+1)\right]}}{x} \\ h_n^{(2)}(x) &\approx \frac{e^{-i\left[x - \frac{\pi}{2}(n+1)\right]}}{x} \end{aligned} \right\} \text{quand } \begin{cases} |x| \rightarrow \infty \\ \Re\{e(x)\} > 0 \end{cases}$$

fonctions convergentes ou divergentes (suivant la convention temporelle)
 utilisation en milieux semi-infinis

Fonctions de Hankel sphériques $h_n^{(1)}$ et $h_n^{(2)}$ (2/2)

- ordre 0

$$h_0^{(1)}(x) = i \frac{e^{ix}}{x}$$

$$h_0^{(2)}(x) = i \frac{e^{-ix}}{x}$$

- ordre 1

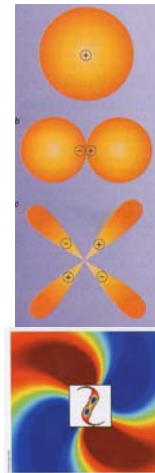
$$h_1^{(1)}(x) = -\frac{e^{ix}}{x} \left(1 - \frac{1}{ix}\right)$$

$$h_1^{(2)}(x) = -\frac{e^{-ix}}{x} \left(1 + \frac{1}{ix}\right)$$

- ordre 2

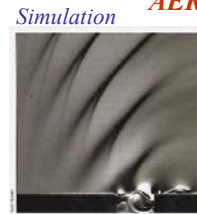
$$h_2^{(1)}(x) = -i \frac{e^{ix}}{x} \left(1 - \frac{3}{ix} - \frac{3}{x^2}\right)$$

$$h_2^{(2)}(x) = -i \frac{e^{-ix}}{x} \left(1 + \frac{3}{ix} - \frac{3}{x^2}\right)$$



Sources

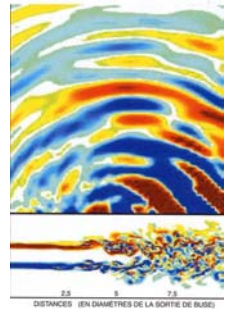
Simulation **AÉROACOUSTIQUE**



Expérience



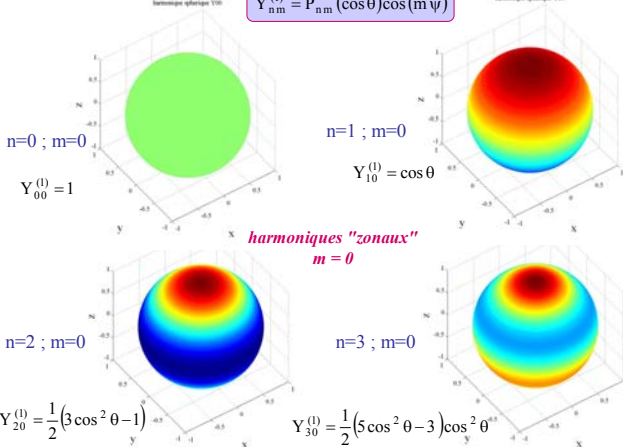
Écoulement qui se développe au-dessus d'une cavité



Simulation 3D du bruit rayonné par un jet à Mach 0.9

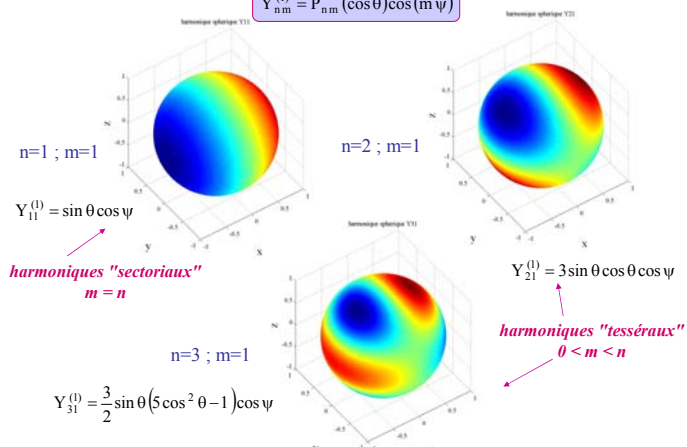
Les harmoniques sphériques (1/3)

$$Y_{nm}^{(1)} = P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\psi)$$



Les harmoniques sphériques (2/3)

$$Y_{nm}^{(1)} = P_{nm}(\cos\theta) \cos(m\psi)$$

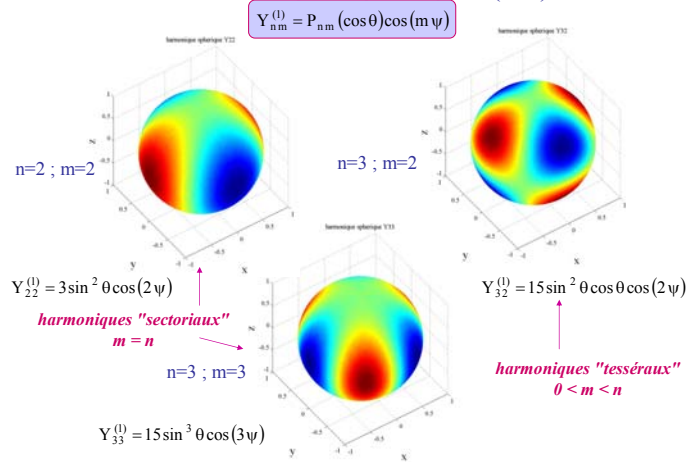


Tessère romain



© <http://www.cgb.fr> MONNAIES XXI

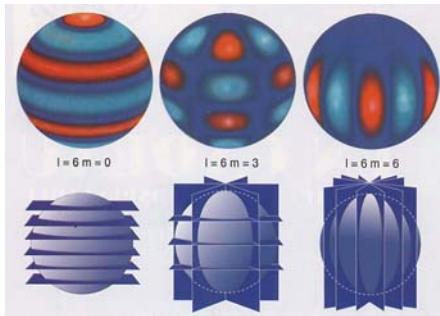
Les harmoniques sphériques (3/3)



Application utilisant les harmoniques sphériques

ACOUSTIQUE DU SOLEIL

Oscillations de la surface du soleil



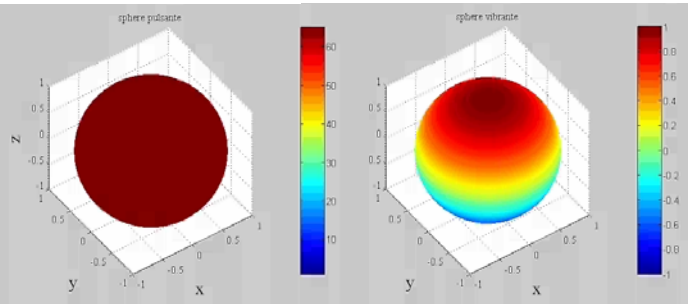
Développement sur la base des fonctions propres

- Solution générale** $\hat{p}(r, \psi, z; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \hat{p}_{nm}(r, \theta, \psi; t)$
- c.à.d. $\hat{p}(r, \theta, \psi; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n [\hat{A}_n h_n^{(1)}(k_0 r) + \hat{B}_n h_n^{(2)}(k_0 r)] [\hat{C}'_m \cos(m\psi) + \hat{D}'_m \sin(m\psi)] P_{nm}(\cos\theta) e^{i\omega t}$

- Ondes divergentes**
- $\hat{p}(r, \theta, \psi; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \hat{B}_n h_n^{(2)}(k_0 r) [\hat{C}'_m \cos(m\psi) + \hat{D}'_m \sin(m\psi)] P_{nm}(\cos\theta) e^{i\omega t}$
- $\hat{p}_{00} = \hat{A}_0 h_0^{(2)}(k_0 r) Y_{00}^{(l)} e^{i\omega t} = \hat{A}_0 i \frac{e^{-ik_0 r}}{k_0 r} e^{i\omega t}$ **caractère monopolaire**
- $\hat{p}_{10} = \hat{A}_0 h_1^{(2)}(k_0 r) Y_{10}^{(l)} e^{i\omega t} = -\hat{A}_0 \frac{e^{-ik_0 r}}{k_0 r} \left(1 + \frac{1}{ik_0 r}\right) \cos\theta e^{i\omega t}$ **caractère dipolaire**
- $\hat{p}_{20} = \hat{A}_0 h_2^{(2)}(k_0 r) Y_{20}^{(l)} e^{i\omega t} = -\hat{A}_0 \frac{i e^{-ik_0 r}}{2 k_0 r} \left(1 + \frac{3}{ik_0 r} - \frac{3}{(k_0 r)^2}\right) (3\cos^2\theta - 1) e^{i\omega t}$ **caractère quadrupolaire**

Rayonnement d'une sphère vibrant avec une symétrie axiale

- Vitesse vibratoire radiale imposée $\hat{w}_r(\theta; t) = \hat{W}_r(\theta) e^{i\omega t}$
- Exemples $\hat{w}_r(\theta; t) = V_0 e^{i\omega t}$ $\hat{w}_r(\theta; t) = V_1 \cos\theta e^{i\omega t}$ soit $\hat{w}_z(t) = V_1 e^{i\omega t}$



sphère pulsante $\hat{p}_{00} = \hat{A}_0 h_0^{(2)}(k_0 r) Y_{00}^{(l)} e^{i\omega t} = \hat{A}_0 i \frac{e^{-ik_0 r}}{k_0 r} e^{i\omega t}$ → **monopole**

sphère oscillante $\hat{p}_{10} = \hat{A}_0 h_1^{(2)}(k_0 r) Y_{10}^{(l)} e^{i\omega t} = -\hat{A}_0 \frac{e^{-ik_0 r}}{k_0 r} \left(1 + \frac{1}{ik_0 r}\right) \cos\theta e^{i\omega t}$ → **dipôle**

Rayonnement d'une sphère pulsante (1/4)

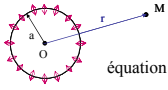


- Equation de propagation**
- champ à symétrie sphérique** $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \hat{p}(r; t) = 0, \forall r \geq a, \forall \theta, \psi, \forall t$

- Equation de Helmholtz** $\hat{p}(r; t) = \hat{p}(r) e^{i\omega t}$ $\hat{v}(r; t) = \hat{v}(r) e^{i\omega t}$
- $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \omega^2/c_0^2\right) \hat{p}(r) = 0, \forall r \geq a, \forall \theta, \psi$
- Conditions aux frontières** $\hat{v}(r=a; t) \cdot \vec{e}_r = \hat{w}_r(t), r=a, \forall \theta, \psi, \forall t$
- $\frac{i}{k_0 c_0 \rho_0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial r}(r=a) = V_0, r=a$

- Condition de Sommerfeld** ($r \rightarrow \infty$)

Rayonnement d'une sphère pulsante (2/4)



● **Forme du champ**

équation de Helmholtz : $\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2}\right) [r\hat{P}(r)] = 0, \forall r \geq a$

solution : $r\hat{P}(r) = \hat{A}e^{ik_0r} + \hat{B}e^{-ik_0r} \rightarrow \hat{P}(r) = \frac{\hat{A}e^{ik_0r}}{r} + \frac{\hat{B}e^{-ik_0r}}{r}$

condition de Sommerfeld $\rightarrow \hat{P}(r) = \hat{B} \frac{e^{-ik_0r}}{r}$

● **Equation de dispersion** $k^2 = k_0^2$ avec $k_0 = \omega/c_0$

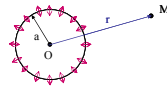
● **Conditions aux frontières** $\frac{i}{k_0 c_0 \rho_0} \frac{\partial \hat{P}}{\partial r}(r=a) = V_0, r=a$

$\frac{-i}{k_0 c_0 \rho_0} \hat{B} \left(ik_0 + \frac{1}{a}\right) \frac{e^{-ik_0 a}}{a} = V_0 \rightarrow \hat{B} = i\omega\rho_0 \frac{a^2 V_0}{1+ik_0 a} e^{ik_0 a}$

● **Solution** $\hat{p}(r,t) = i\omega\rho_0 \frac{a^2 V_0}{1+ik_0 a} \frac{e^{-ik_0(r-a)}}{r} e^{i\omega t}$

● **Vitesse** $\hat{v}_r(r,t) = \frac{i}{\omega\rho_0} \frac{\partial \hat{P}}{\partial r}(r) \rightarrow \hat{v}_r(r,t) = \frac{a^2 V_0}{1+ik_0 a} \left(ik_0 + \frac{1}{r}\right) \frac{e^{-ik_0(r-a)}}{r} e^{i\omega t}$

Rayonnement d'une sphère pulsante (3/4)



● **Débit de la source** $Q_0 = 4\pi a^2 V_0$

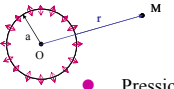
● **Pression** $\hat{p}(r,t) = i\omega\rho_0 \frac{Q_0}{4\pi} \frac{1}{1+ik_0 a} \frac{e^{-ik_0(r-a)}}{r} e^{i\omega t}$

● **Vitesse** $\hat{v}_r(r,t) = \frac{Q_0}{4\pi} \frac{1}{1+ik_0 a} \left(ik_0 + \frac{1}{r}\right) \frac{e^{-ik_0(r-a)}}{r} e^{i\omega t}$

● **Intensité acoustique** $I_r(r) = \frac{\rho_0 c_0 k_0^2}{r^2} \frac{Q_0^2}{32\pi^2} \frac{1}{1+(k_0 a)^2}$

● **Puissance acoustique** $\mathcal{P}_m(S) = \frac{Q_0^2}{8\pi} \frac{\rho_0 c_0 k_0^2}{1+(k_0 a)^2}$

Rayonnement d'une sphère pulsante (4/4)



❖ **CHAMP MONOPOLAIRE : $k_0 a \rightarrow 0, Q_0$ constant**

● **Pression** $\hat{p}(r,t) = i\omega\rho_0 \frac{Q_0}{4\pi} \frac{e^{-ik_0 r}}{r} e^{i\omega t}$

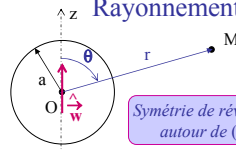
● **Potentiel des vitesses** $\hat{p}(r,t) = -\rho_0 \frac{\partial \hat{\phi}(r,t)}{\partial t}$
 $\rightarrow \hat{\phi}(r,t) = -\frac{Q_0}{4\pi} \frac{e^{-ik_0 r}}{r} e^{i\omega t}$
opposé de la fonction de Green pour $Q_0=1$

● **Vitesse** $\hat{v}_r(r,t) = \frac{Q_0}{4\pi} \left(ik_0 + \frac{1}{r}\right) \frac{e^{-ik_0 r}}{r} e^{i\omega t}$

● **Intensité acoustique** $I_r(r) = \frac{\rho_0 c_0 k_0^2}{r^2} \frac{Q_0^2}{32\pi^2}$

● **Puissance acoustique** $\mathcal{P}_m(S) = \frac{Q_0^2}{8\pi} \rho_0 c_0 k_0^2$

Rayonnement d'une sphère oscillante (1/5)



● **Vitesse vibratoire radiale imposée**

$\hat{v}_r(\theta,t) = V_1 \cos\theta e^{i\omega t}$ c.a.d. $\hat{w}_z(t) = V_1 e^{i\omega t}$

Symétrie de révolution autour de (Oz)

● **Equation de propagation**

$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \hat{p}(r,\theta,t) = 0, \forall r \geq a, \forall \theta, \forall t$

● **Equation de Helmholtz** $\hat{p}(r,\theta,t) = \hat{P}(r,\theta) e^{i\omega t}$

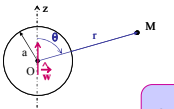
$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{\omega^2}{c_0^2}\right) \hat{P}(r,\theta) = 0, \forall r \geq a, \forall \theta, \forall t$

● **Conditions aux frontières** $\hat{v}(r=a,\theta,t) \cdot \vec{e}_r = \hat{w}_z(\theta,t), r=a, \forall \theta, \forall t$

$\rightarrow \frac{i}{k_0 c_0 \rho_0} \frac{\partial \hat{P}}{\partial r}(r=a,\theta) = V_1 \cos\theta, r=a, \forall \theta$

● **Condition de Sommerfeld ($r \rightarrow \infty$)**

Rayonnement d'une sphère oscillante (2/4)



● **Forme du champ**
 $\hat{P}(r,\theta) = \frac{\partial \hat{P}_1(r)}{\partial r} \cos\theta$ *solution de l'équation à symétrie sphérique*

solution : $\hat{P}(r,\theta) = \left[\hat{A} \left(-\frac{1}{r} + ik_0\right) \frac{e^{ik_0 r}}{r} - \hat{B} \left(\frac{1}{r} + ik_0\right) \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \right] \cos\theta$

condition de Sommerfeld $\rightarrow \hat{P}(r,\theta) = -\hat{B} \left(\frac{1}{r} + ik_0\right) \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \cos\theta$

● **Equation de dispersion** $k^2 = k_0^2$ avec $k_0 = \omega/c_0$

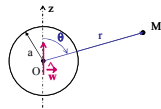
● **Conditions aux frontières** $\frac{i}{k_0 c_0 \rho_0} \frac{\partial \hat{P}}{\partial r}(r=a,\theta) = V_1 \cos\theta, r=a, \forall \theta$

$\rightarrow \hat{B} = -i \frac{a^3 V_1 k_0 c_0 \rho_0}{2+2ik_0 a - (k_0 a)^2} e^{ik_0 a}$

● **Solution** $\hat{p}(r,\theta,t) = i \frac{a^3 V_1 k_0 c_0 \rho_0}{2+2ik_0 a - (k_0 a)^2} \left(\frac{1}{r} + ik_0\right) \frac{e^{-ik_0(r-a)}}{r} \cos\theta e^{i\omega t}$

● **Vitesse** $\hat{v}_r(r,t) = -\hat{B} \frac{i}{\omega\rho_0} \left(-k_0^2 + \frac{2ik_0}{r} + \frac{2}{r^2}\right) \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \cos\theta e^{i\omega t}$

Rayonnement d'une sphère oscillante (3/4)



● **Moment dipolaire de la source**

$D_0 = 2\pi a^3 V_1$

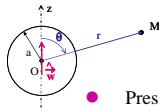
● **Pression**

$\hat{p}(r,\theta,t) = \frac{D_0}{2\pi} \frac{ik_0 c_0 \rho_0}{2+2ik_0 a - (k_0 a)^2} \left(\frac{1}{r} + ik_0\right) \frac{e^{-ik_0(r-a)}}{r} \cos\theta e^{i\omega t}$

● **Vitesse**

$\hat{v}_r(r,t) = -\frac{D_0}{2\pi} \frac{1}{2+2ik_0 a - (k_0 a)^2} \left(-k_0^2 + \frac{2ik_0}{r} + \frac{2}{r^2}\right) \frac{e^{-ik_0(r-a)}}{r} \cos\theta e^{i\omega t}$

Rayonnement d'une sphère oscillante (4/4)



❖ **CHAMP DIPOLAIRE** : $k_0 a \rightarrow 0$, D_0 constant

• Pression

$$\hat{p}(r, \theta; t) = \frac{D_0}{4\pi} i \omega \rho_0 \left(\frac{1}{r} + i k_0 \right) \frac{e^{-i k_0 r}}{r} \cos \theta e^{i \omega t}$$

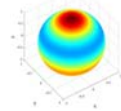
• Potentiel des vitesses $\hat{p}(r; t) = -\rho_0 \frac{\partial \hat{\phi}(r; t)}{\partial t}$

$$\hat{\phi}(r, \theta; t) = -\frac{D_0}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + i k_0 \right) \frac{e^{-i k_0 r}}{r} \cos \theta e^{i \omega t} = \frac{D_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-i k_0 r}}{r} \right) e^{i \omega t}$$

avec $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \cos \theta$ car $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{r} = \cos \theta$

• Vitesse $\hat{v}_r(r; t) = -\frac{D_0}{4\pi} \left(-k_0^2 + \frac{2i k_0}{r} + \frac{2}{r^2} \right) \frac{e^{-i k_0(r-a)}}{r} \cos \theta e^{i \omega t}$

Rayonnement d'une sphère vibrant avec une symétrie axiale (1/4)



• **Vitesse vibratoire radiale imposée** $\hat{w}_r(\theta; t) = \hat{W}_r(\theta) e^{i \omega t}$

Symétrie de révolution autour de (Oz)

• **Equation de propagation**

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{p}(r, \theta; t) = 0, \quad \forall r \geq a, \quad \forall \theta, \psi, \forall t$$

• **Equation de Helmholtz** $\hat{p}(r, \theta; t) = \hat{P}(r, \theta) e^{i \omega t}$

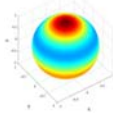
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\omega^2}{c_0^2} \right) \hat{P}(r, \theta) = 0, \quad \forall r \geq a, \quad \forall \theta, \psi$$

• **Conditions aux frontières** $\hat{v}(r=a, \theta; t) \cdot \vec{e}_r = \hat{w}_r(\theta; t)$, $r=a$, $\forall \theta, \psi, \forall t$

$$\frac{i}{k_0 c_0 \rho_0} \frac{\partial \hat{P}}{\partial r}(r=a, \theta) = \hat{W}_r(\theta), \quad r=a, \quad \forall \theta$$

• **Condition de Sommerfeld** ($r \rightarrow \infty$)

Rayonnement d'une sphère vibrant avec une symétrie axiale (2/4)



• **Vitesse vibratoire développée sur les polynômes de Legendre**

$$\hat{W}_r(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n P_n(\cos \theta)$$

avec $V_n = (n+1/2) \int_0^\pi \hat{W}_r(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta$

rappel : $\int_0^\pi P_m(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{\delta_{mn}}{n+1/2}$

• **Champ rayonné** $\hat{P}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta) h_n^{(2)}(k_0 r)$

• **Conditions aux frontières** $\frac{i}{k_0 c_0 \rho_0} \frac{\partial \hat{P}}{\partial r}(r=a, \theta) = \hat{W}_r(\theta)$, $r=a$, $\forall \theta$

$$\frac{i}{k_0 c_0 \rho_0} k_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(\cos \theta) \partial h_n^{(2)}(k_0 a) / \partial (k_0 a) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n P_n(\cos \theta), \quad r=a$$

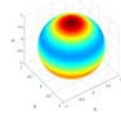
par identification terme à terme

$$A_n = -i \rho_0 c_0 \frac{V_n}{\partial h_n^{(2)}(k_0 a) / \partial (k_0 a)}$$

• **Solution**

$$\hat{p}(r, \theta; t) = \sum_{n=0}^{\infty} -i \rho_0 c_0 \frac{V_n}{\partial h_n^{(2)}(k_0 a) / \partial (k_0 a)} P_n(\cos \theta) h_n^{(2)}(k_0 r) e^{i \omega t}$$

Rayonnement d'une sphère vibrant avec une symétrie axiale (3/4)



• **Pression**

$$\hat{p}(r, \theta; t) = \sum_{n=0}^{\infty} -i \rho_0 c_0 \frac{V_n}{\partial h_n^{(2)}(k_0 a) / \partial (k_0 a)} P_n(\cos \theta) h_n^{(2)}(k_0 r) e^{i \omega t}$$

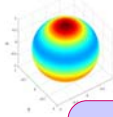
• **Vitesse radiale** $\hat{v}_r(r, \theta; t) = \frac{i}{k_0 \rho_0 c_0} \frac{\partial \hat{p}(r, \theta; t)}{\partial r}$

$$\hat{v}_r(r, \theta; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_n}{\partial h_n^{(2)}(k_0 a) / \partial (k_0 a)} P_n(\cos \theta) \partial h_n^{(2)}(k_0 r) / \partial (k_0 r) e^{i \omega t}$$

• **Vitesse "latérale"** $\hat{v}_\theta(r, \theta; t) = \frac{i}{k_0 \rho_0 c_0 r} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \hat{p}(r, \theta; t)}{\partial \theta}$

$$\hat{v}_\theta(r, \theta; t) = \frac{1}{k_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-V_n \sin \theta}{\partial h_n^{(2)}(k_0 a) / \partial (k_0 a)} P_n'(\cos \theta) h_n^{(2)}(k_0 r) e^{i \omega t}$$

Rayonnement d'une sphère vibrant avec une symétrie axiale (4/4)



• **En champ lointain** : $k_0 r \rightarrow \infty$

$$h_n^{(2)}(k_0 r) \approx \frac{e^{-i[k_0 r - \frac{\pi}{2}(n+1)]}}{k_0 r} \rightarrow \frac{\partial h_n^{(2)}(k_0 r)}{\partial (k_0 r)} \approx -\left(i + \frac{1}{k_0 r} \right) \frac{e^{-i[k_0 r - \frac{\pi}{2}(n+1)]}}{k_0 r}$$

$$\hat{p}_\infty(r, \theta; t) \approx \sum_{n=0}^{\infty} i \rho_0 c_0 \frac{V_n}{\left(i + \frac{1}{k_0 a} \right) \frac{e^{-i[k_0 a - \frac{\pi}{2}(n+1)]}}{k_0 a}} P_n(\cos \theta) \frac{e^{-i[k_0 r - \frac{\pi}{2}(n+1)]}}{k_0 r} e^{i \omega t}$$

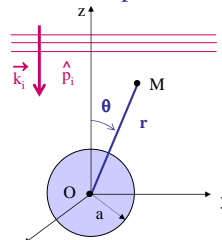
• **En champ lointain** : $k_0 r \rightarrow \infty$ et $k_0 r \gg k_0 a$

$$\hat{p}_\infty(r, \theta; t) \approx \frac{i \rho_0 c_0 (k_0 a)^2}{i k_0 a + 1} \frac{e^{-i k_0 r}}{k_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} V_n P_n(\cos \theta) e^{i \omega t}$$

$$\hat{v}_{r_\infty}(r, \theta; t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_n (k_0 a)^2}{i k_0 a + 1} P_n(\cos \theta) \left(i + \frac{1}{k_0 r} \right) \frac{e^{-i k_0 r}}{k_0 r} e^{i \omega t}$$

$$I_{r_\infty}(r) = \frac{1}{2} \frac{\rho_0 c_0 (k_0 a)^2}{1 - (k_0 a)^2} \frac{1}{(k_0 r)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} V_n V_n (\cos \theta) P_n(\cos \theta) \rightarrow \text{couplage de modes}$$

Onde plane diffractée par une sphère (1/3)



• **Champ incident monochromatique**

$$\hat{p}_i(r, \theta; t) = \hat{P}_0 e^{i k_0 r \cos \theta} e^{i \omega t}$$

$$k_0 c_0 = \omega$$

$$\hat{p}(r, \theta; t) = \hat{P}(r, \theta) e^{i \omega t}$$

• **Equation de Helmholtz**

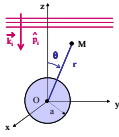
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\omega^2}{c_0^2} \right) \hat{P}(r, \theta) = 0, \quad \forall r \geq a, \quad \forall \theta, \psi$$

• **Conditions aux frontières**

$$\left(\frac{\partial}{\partial n} + i k_0 \hat{\beta} \right) \hat{P}(r, \theta) = 0, \quad r=a, \quad \forall \theta \quad \text{avec } \hat{\beta} = \rho_0 c_0 / \hat{Z} \text{ et } \partial / \partial n = -\partial / \partial r$$

• **Condition de Sommerfeld** ($r \rightarrow \infty$)

Onde plane diffractée par une sphère (2/2)



- **Champ incident monochromatique en coordonnées sphériques**

$$\hat{p}_i(r, \theta, t) = \hat{P}_0 e^{ik_0 r \cos \theta} e^{i\omega t} = \hat{P}_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(k_0 r) P_n(\cos \theta) e^{i\omega t}$$

- **Champ diffracté** $\hat{p}_r(r, \theta, t) = \hat{P}_r(r, \theta) e^{i\omega t}$ avec $\hat{P}_r(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\Lambda}_n h_n^{(2)}(k_0 r) P_n(\cos \theta)$

développement sur les modes propres en coordonnées sphériques

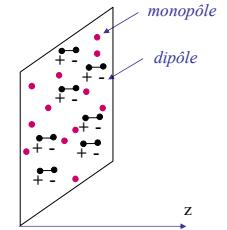
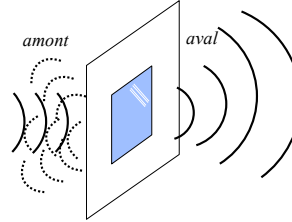
- **Conditions aux frontières** $\rightarrow \left(-\frac{\partial}{\partial r} + ik_0 \beta\right) (\hat{p}_i + \hat{p}_r) = 0, r = a, \forall \theta$
- $$-\hat{P}_0 i^n (2n+1) \frac{d j_n(k_0 a)}{da} - \hat{\Lambda}_n \frac{d h_n^{(2)}(k_0 a)}{da} + ik_0 \beta [\hat{P}_0 i^n (2n+1) j_n(k_0 a) + \hat{\Lambda}_n h_n^{(2)}(k_0 a)] = 0$$
- et pour toute valeur de n

$$\hat{\Lambda}_n = -\hat{P}_0 \frac{i^n (2n+1) [i \partial j_n(k_0 a) / \partial a + k_0 \beta j_n(k_0 a)]}{i \partial h_n^{(2)}(k_0 a) / \partial a + k_0 \beta h_n^{(2)}(k_0 a)}$$

ce qui définit complètement la solution

Préparation à la formulation intégrale

Modélisation d'une surface active

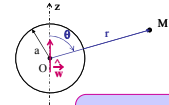


- **Champ monopolaire :** $k_0 a \rightarrow 0, Q_0$ constant

$$\hat{\phi}(r; t) = \frac{Q_0}{4\pi r} e^{-ik_0 r} e^{i\omega t}$$

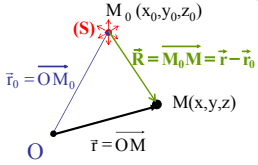
opposé de la fonction de Green pour $Q_0 = -1$

- **Champ dipolaire :** $k_0 a \rightarrow 0, D_0$ constant



$$\hat{\phi}(r, \theta; t) = \frac{D_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-ik_0 r}}{r} \right) e^{i\omega t}$$

Le monopôle



- **Le problème**

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] [R \hat{\phi}(R; t)] &= 0, R > a, \forall t \\ \frac{\partial \hat{\phi}(R; t)}{\partial R} &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\hat{q}_0(t)}{4\pi a^2}, R = a \rightarrow 0, \forall t \end{aligned} \right.$$

conditions de Sommerfeld à l'infini

- **Le problème équivalent**

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{R} \left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] [R \hat{\phi}(R; t)] &= \hat{q}_0(t) \delta(\vec{R}) \\ \text{conditions de Sommerfeld à l'infini} \end{aligned} \right.$$

$$\hat{v} = \text{grad } \hat{\phi} \rightarrow [\hat{\phi}] = L^2 T^{-1}$$

$$[\delta(\vec{R})] = L^{-3} [\delta(t - t_0)] = T^{-1}$$

$$[\hat{q}_0] = L^3 T^{-1}$$

- **La solution**

$$\hat{\phi}(R; t) = -\frac{1}{4\pi R} \hat{q}_0(t - R/c_0)$$

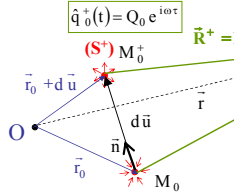
source impulsionnelle $\hat{q}_0(t) = \hat{Q}_0 \delta(t - t_0)$

source harmonique $\hat{q}_0(t) = \hat{Q}_0 e^{i\omega(t - t_0)}$

$$\hat{\phi}(R; t) = -\frac{\hat{Q}_0}{4\pi} \frac{\delta(t - R/c_0)}{R}$$

$$\hat{\phi}(R; t) = -\frac{\hat{Q}_0}{4\pi R} e^{-ik_0 R} e^{i\omega t}$$

Le dipôle (1/2)



- **Le problème**

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{R} \left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + k_0^2 \right] [R \hat{\phi}(R; t)] &= Q_0 \delta(\vec{R} - d \vec{u}) e^{i\omega t} \\ -Q_0 \delta(\vec{R}) e^{i\omega t} \end{aligned} \right.$$

conditions de Sommerfeld à l'infini

- **La solution**

$$\hat{\phi}(R; t) = \frac{Q_0}{4\pi} \left[\frac{e^{-ik_0 |\vec{R} - d \vec{u}|}}{|\vec{R} - d \vec{u}|} - \frac{e^{-ik_0 R}}{R} \right] e^{i\omega t}$$

de la forme $\hat{\phi}(R; t) = -\frac{Q_0}{4\pi} [f(\vec{R} - d \vec{u}) - f(\vec{R})] e^{i\omega t} \rightarrow \hat{\phi}(R; t) = -\frac{Q_0}{4\pi} [\text{grad } f(\vec{R})] \cdot (-d \vec{u}) e^{i\omega t}$

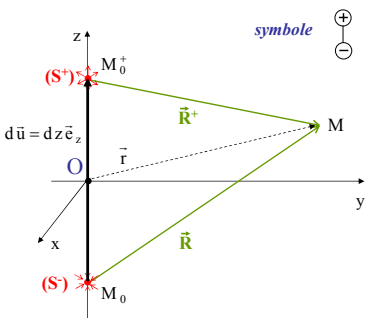
avec $d \vec{u} = d u \vec{n}$

$$\hat{\phi}(R; t) = \frac{Q_0 d u}{4\pi} \left[\frac{e^{-ik_0 R}}{R} \right] \cdot \vec{n} e^{i\omega t} = \frac{D_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ik_0 R}}{R} \right) e^{i\omega t}$$

avec $D_0 = D_0 \vec{n} = Q_0 d u \vec{n}$

Le dipôle (2/2)

- Cas particulier : $d \vec{u} = dz \vec{e}_z$



- expansion
- M_0^+ $\uparrow +V_1 \vec{e}_z$
 - M_0 \downarrow t fixé
- contraction
- 1/2 période plus tard
- M_0^+ \uparrow t + T/2
 - M_0 $\downarrow -V_1 \vec{e}_z$
- contraction
- expansion

$$\hat{\phi}(r; t) = \frac{D_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-ik_0 r}}{r} \right) e^{i\omega t} = \frac{D_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-ik_0 r}}{r} \right) \cos \theta e^{i\omega t}$$

En résumé : monopôle et dipôle

$$\hat{\phi}(R; t) = -\frac{\hat{Q}_0}{4\pi} \frac{\delta(t - R/c_0)}{R}$$

$$\hat{\phi}(R; t) = \frac{D_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ik_0 R}}{R} \right) e^{i\omega t}$$

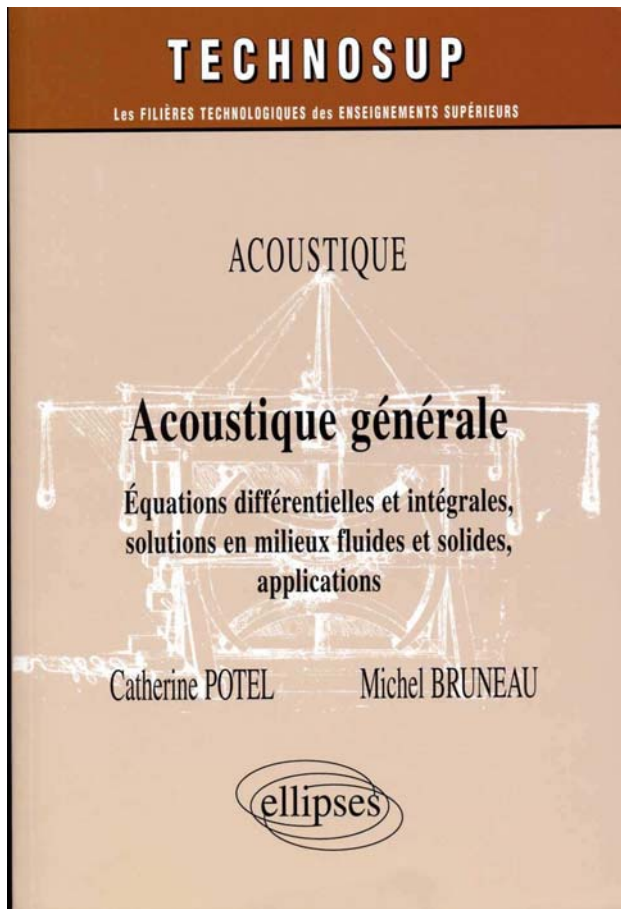
si $\vec{n} = \vec{e}_z$

$$\hat{\phi}(r; t) = -\frac{Q_0}{4\pi R} e^{-ik_0 R} e^{i\omega t}$$

$$\hat{\phi}(r; t) = \frac{D_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-ik_0 r}}{r} \right) e^{i\omega t} = \frac{D_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-ik_0 r}}{r} \right) \cos \theta e^{i\omega t}$$

Transparents basés sur

C. POTEL, M. BRUNEAU, *Acoustique Générale - équations différentielles et intégrales, solutions en milieux fluide et solide, applications*, Ed. Ellipse collection Technosup, 352 pages, ISBN 2-7298-2805-2, 2006



La collection TECHNOSUP dirigée par Claude Chêze est une sélection d'ouvrages dans toutes les disciplines, pour les filières technologiques des enseignements supérieurs.

Niveau A **Approche** (éléments, résumés ou travaux dirigés) *IUT - BTS - 1^{er} cycle*
Niveau B **Bases** (cours avec exercices et problèmes résolus) *IUP - Licence*
Niveau C **Compléments** (approfondissement, spécialisation) *Écoles d'ingénieurs, Master*

L'ouvrage : niveaux B (Licence) et C (Master, Ecoles d'ingénieurs)

L'ouvrage fournit avec minutie les bases de l'acoustique classique, tout en présentant régulièrement un ensemble d'applications relevant de la pratique de l'acoustique. Il est construit pour être compréhensible sans avoir recours à d'autres documents. Son contenu est lié à l'acoustique en milieux fluides simples, puis en milieux solides homogènes. Les hypothèses sous-jacentes sont régulièrement précisées et les méthodes exposées conservent le plus souvent un caractère analytique.

Pour couvrir le domaine de l'acoustique fondamentale, l'ouvrage traite successivement : les ondes acoustiques, l'environnement sonore et la perception des sons, les équations générales, les solutions fondamentales dans les systèmes de coordonnées courants, les problèmes aux limites et leur formulation intégrale, la propagation en milieu solide homogène (avec application au contrôle non destructif par ultrasons). Il s'achève sur des annexes qui apportent des éclairages sur les éléments mathématiques utiles et sur certaines notions délicates (impédance, vitesses de phase et de groupe...).

Les auteurs :

Catherine Potel est Professeur des universités à l'Université du Maine, où elle est responsable du Master professionnel Acoustique des transports. Elle mène des travaux de recherche dans le domaine de l'évaluation et du contrôle non destructifs par ultrasons.

Michel Bruneau est Professeur émérite à l'Université du Maine, où il a dirigé le 3^e cycle d'acoustique et dont il a créé le Laboratoire d'acoustique associé au CNRS. Il mène des recherches dans le domaine des fluides dissipatifs confinés. Il a assuré diverses responsabilités scientifiques nationales.

Illustration de couverture : Dessin de Léonard de Vinci.



ISBN 2-7298-2805-2