

## Chapitre 7

### FORMULATION INTEGRALE DES PROBLEMES AUX LIMITES DE L'ACOUSTIQUE EN MILIEUX FLUIDES

#### Formulation différentielle

- Equation de propagation  $\left[ \Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \hat{p}(\vec{r}; t) = 0, \forall \vec{r} \in \mathcal{V}, \forall t$
- Equation de Helmholtz  $\left[ \Delta + \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 \right] \hat{P}(\vec{r}; \omega) = 0, \forall \vec{r} \in \mathcal{V}$



Pas de solution générale connue à l'équation de Helmholtz en dehors du cas de propagation unidimensionnel :



$$\hat{p}(\vec{r}; t) = \hat{f}(\vec{n} \cdot \vec{r} - c_0 t) + \hat{g}(\vec{n} \cdot \vec{r} + c_0 t)$$



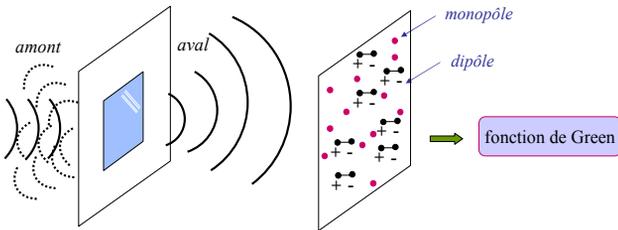
Solutions à variables séparées ou représentation intégrale

- Coordonnées cartésiennes  $\hat{p}(x, y, z; t) = \hat{X}(x) \hat{Y}(y) \hat{Z}(z) \hat{T}(t)$
- Coordonnées cylindriques  $\hat{p}(r, \psi, z; t) = \hat{R}(r) \hat{\Psi}(\psi) \hat{Z}(z) \hat{T}(t)$
- Coordonnées sphériques  $\hat{p}(r, \theta, \psi; t) = \hat{R}(r) \hat{\Theta}(\theta) \hat{\Psi}(\psi) \hat{T}(t)$

Solution à variables séparées = Base sur laquelle toute solution de problème peut être exprimée

#### Modélisation d'un champ acoustique complexe

- Superposition de modes adaptés à une géométrie donnée (ou à l'espace infini)   
  $\rightarrow$  séries modales
- Superposition d'ondes planes  $\rightarrow$  représentations de Fourier
- Superposition de sources centrées   
  $\rightarrow$  nombre fini de monopôles, dipôles, ... : série d'harmoniques sphériques
- Superposition de rayons provenant de sources réelles ou images
- Formulation intégrale des problèmes aux limites de l'acoustique



#### Monopôle et dipôle

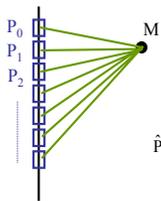
$$\hat{\phi}(\vec{R}; t) = -\frac{Q_0}{4\pi} \frac{\delta(\tau - R/c_0)}{R}$$

$$\hat{\phi}(\vec{R}; t) = \frac{D_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ik_0 R}}{R} \right) e^{i\omega t}$$

$$\hat{\phi}(\vec{R}; t) = -Q_0 \frac{e^{-ik_0 R}}{4\pi R} e^{i\omega t}$$

$$\hat{\phi}(r; t) = \frac{D_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \right) e^{i\omega t} = \frac{D_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \right) \cos \theta e^{i\omega t}$$

#### Fonction de Green : introduction



Le phénomène cherché au point M est la **superposition des phénomènes élémentaires** qui prennent naissance en  $P_0, P_1, \dots$  et qui interfèrent en M.

$\hat{P}(\vec{r}; \omega) =$  somme de champs élémentaires (fonction de Green) émis par chaque élément (quasi ponctuel) de sources

Exemple  $\hat{p}(\vec{r}; t) = \iiint_{\mathcal{V}} \int_{t_1}^t G(\vec{r}, \vec{r}_0; t, t_0) \hat{f}(\vec{r}_0; t_0) dt_0 d\mathcal{V}_0, \vec{r} \in \mathcal{V}, t \geq t_1$

champ de pression recueilli à l'instant t au point M ( $\vec{r}$ ) qui a été émis au point  $M_0$  ( $\vec{r}_0$ ) à l'époque antérieure  $t_0$

champ émis par la source  $\hat{f}(\vec{r}_0; t_0)$  qui occupe le volume  $d\mathcal{V}_0$  située au point  $\vec{r}_0$  et qui émet pendant la durée infinitésimale  $dt_0$ .

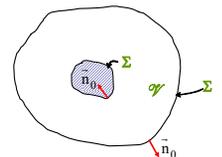
$\leftrightarrow$  produit de convolution

#### Fonction de Green : définition

La fonction de Green est la solution du **problème élémentaire**

$\checkmark \left[ \Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] G(\vec{r}, \vec{r}_0; t, t_0) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0)$   
 ou  $(\Delta + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$

$\checkmark$  conditions aux frontières **AD LIBITUM**



$\rightarrow G(\vec{r}, \vec{r}_0; t, t_0) = g(\vec{r}, \vec{r}_0; t, t_0) + h(\vec{r}, \vec{r}_0; t, t_0)$

solution particulière, dite **fondamentale**, solution de

$\checkmark \left[ \Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] g(\vec{r}, \vec{r}_0; t, t_0) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0)$   
 ou  $(\Delta + k^2) g(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$

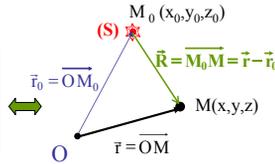
$\checkmark$  conditions de Sommerfeld

solution générale de l'équation homogène de façon à satisfaire à des conditions aux frontières autres que Sommerfeld

### Fonction de Green : solution fondamentale

La solution **fondamentale** est solution de

$$\begin{aligned} \checkmark \left( \Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) g(\vec{r}, \vec{r}_0; t, t_0) &= -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0) \\ \text{ou } (\Delta + k^2) g(\vec{r}, \vec{r}_0) &= -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \\ \checkmark \text{ conditions de Sommerfeld} \end{aligned}$$



champ créé au point  $\vec{r}$  (M) par une source ponctuelle située au point  $\vec{r}_0$  ( $M_0$ )

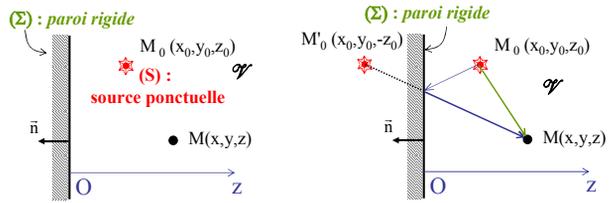
$$\begin{aligned} g(\vec{r}, \vec{r}_0; t, t_0) &= \frac{\delta(t - t_0 - |\vec{r} - \vec{r}_0|/c_0)}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|} \\ g(\vec{r}, \vec{r}_0) &= \frac{e^{-ik|\vec{r} - \vec{r}_0|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|} \end{aligned}$$

solution

$$g = -\hat{\phi} \begin{cases} \hat{\phi}(R; t) = -\frac{Q_0}{4\pi} \frac{\delta(t - R/c_0)}{R} \\ \hat{\phi}(R; t) = -Q_0 \frac{e^{-ik_0 R}}{4\pi R} e^{i\omega t} \end{cases}$$

$Q_0 = 1$

### Fonction de Green en espace semi-infini (1/6)



Le problème :

$$\begin{cases} * (\Delta + k^2)G = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad \forall x, y, z \geq 0 \\ * \frac{\partial G}{\partial n} = 0 \quad \forall x, y, z = 0 \\ * \text{Sommerfeld} \end{cases}$$

**Problème (A)** Fonction de Green en espace semi-infini (2/6)

$(\Sigma) : \text{paroi rigide}$

$(S) : \text{source ponctuelle}$

$M(x, y, z)$

$$\begin{cases} * (\Delta + k^2)G = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad \forall x, y, z \geq 0 \\ * \frac{\partial G}{\partial n} = 0 \quad \forall x, y, z = 0 \\ * \text{Sommerfeld} \end{cases}$$

**Problème (B)** Plus de paroi rigide mais  $\partial_n G = 0$

$(S') : \text{source image}$

$M(x, y, z)$

*espace physique*

$$\begin{cases} * (\Delta + k^2)\Gamma = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) - \delta(\vec{r} - \vec{r}'_0) \quad \forall x, y, z \\ * \frac{\partial \Gamma}{\partial n} = 0 \quad \forall x, y, z = 0 \\ * \text{Sommerfeld} \end{cases}$$

ce problème n'est pas un problème de Green dans tout l'espace

Dans tout l'espace (sans  $\Sigma$ ) :

$$\Gamma(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} + \frac{e^{-ikR'}}{4\pi R'}, \quad \forall z \quad (B)$$

**MAIS**

$$\text{solution élémentaire : } g(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \quad G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} + \frac{e^{-ikR'}}{4\pi R'}, \quad \forall z \geq 0 \quad (A)$$

### Fonction de Green en espace semi-infini (3/6)

- Vérification de la condition aux frontières  $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$  avec  $\vec{n} = -\vec{e}_z$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

$$R' = |\vec{r} - \vec{r}'_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} + \frac{e^{-ikR'}}{4\pi R'}$$

$$\frac{\partial G}{\partial z}(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = -\frac{1}{4\pi} \left[ \left( ik + \frac{1}{R} \right) \frac{e^{-ikR}}{R} \frac{z-z_0}{R} + \left( ik + \frac{1}{R'} \right) \frac{e^{-ikR'}}{R'} \frac{z+z_0}{R'} \right]$$

$\frac{\partial G}{\partial z}(x, y, z=0; x_0, y_0, z_0) = 0$  ou  $\frac{\partial G}{\partial z_0}(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = 0$

### Fonction de Green en espace semi-infini (4/6)

- Expression sur la paroi ( $R = R'$ )

$$R = |\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

$$R' = |\vec{r} - \vec{r}'_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} + \frac{e^{-ikR'}}{4\pi R'}$$

$$G(x, y, z=0; x_0, y_0, z_0) = \frac{e^{-ik\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}}}{2\pi\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}}$$

ou

$$G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{e^{-ik\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}}}{2\pi\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}}$$

### Fonction de Green en espace semi-infini (5/6)

- Autres conditions aux frontières (condition de Dirichlet)

$$G = 0$$

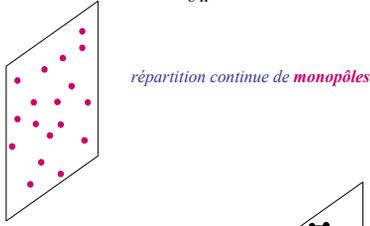
$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{e^{-ik|\vec{r} - \vec{r}_0|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|} - \frac{e^{-ik|\vec{r} - \vec{r}'_0|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'_0|}, \quad \forall x, y, \forall z \geq 0$$

avec

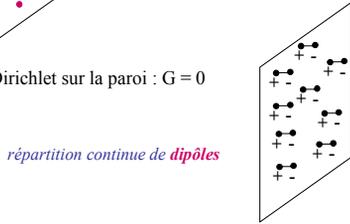
$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = 0, \quad \forall x, y, z = 0 \text{ ou } z_0 = 0$$

### Fonction de Green en espace semi-infini (6/6)

- Condition de Neumann sur la paroi :  $\frac{\partial G}{\partial n} = 0$

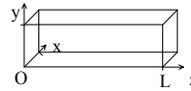


- Condition de Dirichlet sur la paroi :  $G = 0$



### Fonction de Green en espace clos (1/3)

- Problème aux valeurs propres (après extinction des sources)

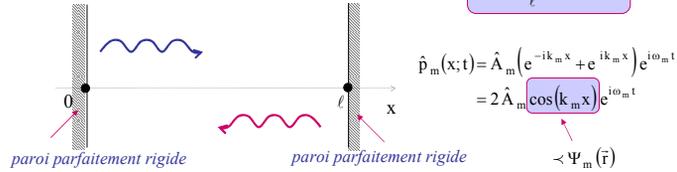


$$\begin{cases} (\Delta + k_m^2) \Psi_m(\vec{r}) = 0; & \vec{r} \in \mathcal{V}, \\ \partial_n \Psi_m(\vec{r}) = 0; & \vec{r} \in \Sigma. \end{cases}$$

Solution non nulle sauf si  $k_m$  prend une suite de nombres (**valeurs propres**)

$\Psi_m$  : **fonctions propres**, base de l'espace considéré

- Exemple : espace fini 1D



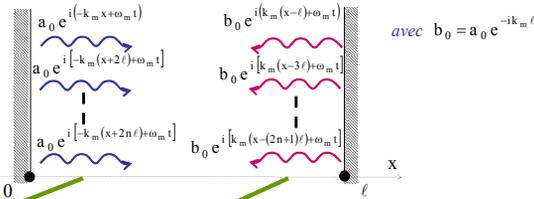
### Fonction de Green en espace clos (2/3)

- Espace fini 1D - suite

$$\Psi_m(x) = \sqrt{\frac{2 - \delta_{m0}}{\ell}} \cos(k_m x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 - \delta_{m0}}{\ell}} (e^{-ik_m x} + e^{ik_m x})$$

$$k_m = \frac{m\pi}{\ell}, m \in \mathbb{N}$$

avec  $\int_0^\ell \Psi_m(x) \Psi_p(x) dx = \delta_{mp}$  fonctions orthonormées



$$\frac{a_0}{1 - e^{-2ik_m \ell}} e^{i(-k_m x + \omega_m t)} + \frac{a_0}{1 - e^{-2ik_m \ell}} e^{i(k_m x + \omega_m t)} = \frac{2a_0}{1 - e^{-2ik_m \ell}} e^{-ik_m \ell} e^{i\omega_m t} \cos[k_m(x - \ell)]$$

### Fonction de Green en espace clos (3/3)

- Problème avec sources

1D : Série de Fourier

$$\hat{P}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} [\hat{a}_m \cos(m\pi x/\ell) + \hat{b}_m \sin(m\pi x/\ell)]$$



$$\hat{P}(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \hat{a}'_m \Psi_m(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \hat{a}_m \cos(m\pi x/\ell)$$

- Problème élémentaire

- Problème aux valeurs propres

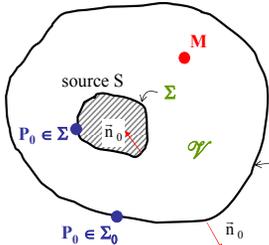
$$\begin{cases} (\Delta + k^2) G(\vec{r}/\vec{r}_0) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0); & \vec{r} \in \mathcal{V}, \\ \partial_n G(\vec{r}/\vec{r}_0) = 0; & \vec{r} \in \Sigma, \end{cases} \quad \begin{cases} (\Delta + k_m^2) \Psi_m(\vec{r}) = 0; & \vec{r} \in \mathcal{V}, \\ \partial_n \Psi_m(\vec{r}) = 0; & \vec{r} \in \Sigma. \end{cases}$$

$$\Rightarrow G(x, x_0) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2 - \delta_{m0}}{\ell} \frac{\cos(m\pi x_0/\ell) \cos(m\pi x/\ell)}{(m\pi/\ell)^2 - k^2} = \sum_{m=0}^{+\infty} A_m(x_0) \Psi_m(x) \quad (1D)$$

Généralisation :

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Psi_m(\vec{r}_0)}{k_m^2 - k^2} \Psi_m(\vec{r})$$

### Rôle de la fonction de Green



Le problème de Green est un **problème auxiliaire** dont la solution est nécessaire pour trouver la solution d'un problème général : quel est le champ  $\hat{P}(\vec{r}; \omega)$  créé au point  $\vec{r}$  par un ensemble de sources distribuées dans  $\mathcal{V}$  et sur  $\Sigma_T = \Sigma + \Sigma_0$  (qui délimite le domaine) ?

$$\hat{P}(\vec{r}; \omega) = \iiint_{\mathcal{V}} G(\vec{r}, \vec{r}_0) \hat{F}(\vec{r}_0; \omega) d\mathcal{V}_0 + \iint_{\Sigma_T} \left\{ G(\vec{r}, \vec{r}_0) \partial_{n_0} \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) - \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) \partial_{n_0} [G(\vec{r}, \vec{r}_0)] \right\} d\sigma_0$$

Nous envisageons ici le cas particulier où les sources de volume n'existent pas, et par la suite, où les seules sources existantes sont réparties sur la surface interne  $\Sigma_T$

$$\hat{P}(\vec{r}; \omega) = \iint_{\Sigma_T} \left\{ G(\vec{r}_0, \vec{r}) \partial_{n_0} \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) - \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) \partial_{n_0} [G(\vec{r}_0, \vec{r})] \right\} d\sigma_0; \quad \vec{r} \in \mathcal{V}, \vec{r}_0 \in \Sigma$$

$$\downarrow$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0)$$

$$\downarrow$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0)$$

# LA FORMULATION INTEGRALE

## Formules mathématiques préliminaires

$$\begin{aligned} \text{div}(\hat{p} \text{grad} G) &= \hat{p} \Delta G + (\text{grad} G) \cdot (\text{grad} \hat{p}) \\ \text{div}(G \text{grad} \hat{p}) &= G \Delta \hat{p} + (\text{grad} \hat{p}) \cdot (\text{grad} G) \end{aligned}$$

$$\text{div}(\hat{p} \text{grad} G - G \text{grad} \hat{p}) = \hat{p} \Delta G - G \Delta \hat{p}$$

$$\vec{V} \cdot \vec{n}_0 = \hat{p} (\text{grad} G) \cdot \vec{n}_0 - G (\text{grad} \hat{p}) \cdot \vec{n}_0$$

$$= \hat{p} \frac{\partial G}{\partial n_0} - G \frac{\partial \hat{p}}{\partial n_0}$$

**Théorème d'Ostrogradsky**  $\iiint_{\mathcal{V}_0} (\text{div} \vec{V}) d\mathcal{V}_0 = \iint_{\Sigma} (\vec{V} \cdot \vec{n}_0) d\sigma_0$

$$\iiint_{\mathcal{V}_0} (\hat{p} \Delta G - G \Delta \hat{p}) d\mathcal{V}_0 = \iint_{\Sigma} \left( \hat{p} \frac{\partial G}{\partial n_0} - G \frac{\partial \hat{p}}{\partial n_0} \right) d\sigma_0$$

**Rappel**

Soient  $f(x, y, z) \rightarrow \vec{n}$  un vecteur unitaire  $\vec{n} \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \gamma = \text{grad} f \cdot \vec{n}$$

## Condition de Sommerfeld à l'infini

$$\hat{p}(\vec{r}; \omega) = \iiint_{\mathcal{V}_0} G(\vec{r}, \vec{r}_0) \hat{F}(\vec{r}_0) d\mathcal{V}_0 + \iint_{\Sigma} \left\{ G(\vec{r}, \vec{r}_0) \partial_{n_0} \hat{p}(\vec{r}_0) - \hat{p}(\vec{r}_0) \partial_{n_0} \left[ \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} \right] \right\} d\sigma_0$$

$$= \iint_{\Sigma_R} \left\{ \partial_{n_0} \hat{p}(\vec{r}_0) + \left( ik + \frac{1}{R} \right) \hat{p}(\vec{r}_0) \right\} R e^{-ikR} \sin \theta d\theta d\varphi$$

$R \rightarrow \infty$   $\left\{ \partial_{n_0} \hat{p}(\vec{r}_0) + \left( ik + \frac{1}{R} \right) \hat{p}(\vec{r}_0) \right\} R e^{-ikR} \sin \theta d\theta d\varphi$  négligeable borné

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ R \left( \partial_{n_0} \hat{p} + ik \hat{p} \right) \right\} = 0$$

## Problème acoustique bien posé (forme différentielle)

### • Domaine fréquentiel

**Equation de Helmholtz**  $(\Delta + k_0^2) \hat{p}(M; \omega) = -\hat{F}(M; \omega), \forall M \in \mathcal{V}$

**Conditions aux frontières**  $\left[ \frac{\partial}{\partial n} + ik_0 \hat{\beta}(M; \omega) \right] \hat{p}(M; \omega) = \hat{U}(M; \omega), \forall M \in \Sigma, \omega$  fixé

**Conditions de rayonnement à l'infini (éventuellement)**

### • Domaine temporel

**Equation de propagation**  $\left( \Delta - \frac{1}{c_0^2} \partial_{tt}^2 \right) \hat{p}(M; t) = -\hat{f}(M; t), \forall M \in \mathcal{V}, \forall t > t_i$

**Conditions aux frontières**  $\left[ \partial_n + ik_0 \hat{\beta}(M; t) * \right] \hat{p}(M; t) = \hat{u}(M; t), \forall M \in \Sigma, \forall t > t_i$

**Conditions initiales**  $\partial_t \hat{p}(M; t_i) = \hat{A}(M; t_i); \hat{p}(M; t_i) = \hat{B}(M; t_i), \forall M \in \mathcal{V}, t = t_i$

fonctions connues dans tout le domaine  $\mathcal{V}$  à l'époque initiales  $t = t_i$

## Formulation intégrale (domaine de Fourier) : démonstration

**Problème**  $\begin{cases} (\Delta + k^2) \hat{p}(\vec{r}; \omega) = -\hat{F}(\vec{r}; \omega), \vec{r} \in \mathcal{V} & (1) \\ \left[ \partial_{n_0} + ik_0 \hat{\beta}(\vec{r}; \omega) \right] \hat{p}(\vec{r}; \omega) = \hat{U}(\vec{r}; \omega), \vec{r} \in \Sigma & (2) \end{cases}$

**Problème élémentaire**  $\begin{cases} (\Delta + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \vec{r} \in \mathcal{V}_c & (3) \\ \left[ \partial_{n_0} + ik_0 \hat{\zeta}(\vec{r}; \omega) \right] G(\vec{r}, \vec{r}_0) = 0, \vec{r} \in \Sigma_c & (4) \end{cases}$  ( $\mathcal{V}_c \subset \mathcal{V}$ ) conditions aux frontières ad libitum

**Théorème d'Ostrogradsky**  $\iiint_{\mathcal{V}_0} (\hat{p} \Delta G - G \Delta \hat{p}) d\mathcal{V}_0 = \iint_{\Sigma} \left( \hat{p} \partial_{n_0} G - G \partial_{n_0} \hat{p} \right) d\sigma_0$  (5)

**Démonstration**

(1)  $\Rightarrow \Delta \hat{p} = -\hat{F} - k^2 \hat{p}$

(3)  $\Rightarrow \Delta G = -k^2 G - \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$

$$\iiint_{\mathcal{V}_0} \left[ \hat{p} (-k^2 G - \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)) - G (-\hat{F} - k^2 \hat{p}) \right] d\mathcal{V}_0 = \iiint_{\mathcal{V}_0} [-\hat{p} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) + G \hat{F}] d\mathcal{V}_0$$

$$\iiint_{\mathcal{V}_0} \left[ \hat{p} \Delta G - G \Delta \hat{p} \right] d\mathcal{V}_0 = \iiint_{\mathcal{V}_0} \left[ \hat{p} \partial_{n_0} G - G \partial_{n_0} \hat{p} \right] d\sigma_0$$

(6) dans (5) :  $\Rightarrow -\hat{p}(\vec{r}; \omega) + \iiint_{\mathcal{V}_0} [G \hat{F}] d\mathcal{V}_0 = \iint_{\Sigma} \left( \hat{p} \partial_{n_0} G - G \partial_{n_0} \hat{p} \right) d\sigma_0$

$$\hat{p}(\vec{r}; \omega) = \iiint_{\mathcal{V}_0} G(\vec{r}, \vec{r}_0) \hat{F}(\vec{r}_0) d\mathcal{V}_0 + \iint_{\Sigma} \left\{ G(\vec{r}, \vec{r}_0) \partial_{n_0} \hat{p}(\vec{r}_0) - \hat{p}(\vec{r}_0) \partial_{n_0} [G(\vec{r}, \vec{r}_0)] \right\} d\sigma_0$$
 (7)

## Formulation intégrale (domaine de Fourier)

$$\hat{F}(\vec{r}; \omega) = TF_r[\hat{f}(\vec{r}; t)]$$

$$\hat{U}(\vec{r}; \omega) = TF_r[\hat{u}(\vec{r}; t)]$$

répartition de monopôles et dipôles

$$\hat{p}(\vec{r}; \omega) = \iiint_{\mathcal{V}_0} G(\vec{r}, \vec{r}_0) \hat{F}(\vec{r}_0) d\mathcal{V}_0 + \iint_{\Sigma} \left\{ G(\vec{r}, \vec{r}_0) \partial_{n_0} \hat{p}(\vec{r}_0) - \hat{p}(\vec{r}_0) \partial_{n_0} [G(\vec{r}, \vec{r}_0)] \right\} d\sigma_0$$

$\vec{r} \in \mathcal{V}$  Champ "direct" des sources réelles (+ éventuellement champ de sources images)

Champ provenant des sources de frontières, effets réactifs et dissipatifs des frontières (non contenus dans G)

$\partial_{n_0} + ik_0 \hat{\beta}(\vec{r}; \omega)$  Condition aux frontières  $\left( \hat{\beta} = \frac{\rho_0 c_0}{Z} \right)$

$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ R \left( \partial_{n_0} \hat{p} + ik \hat{p} \right) \right\} = 0$  Condition de Sommerfeld éventuelle

### Monopôle et dipôle

$\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$   
 $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$   
 $\vec{R} = \overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$

$\hat{\phi}(R; t) = -\frac{Q_0}{4\pi} \frac{\delta(\tau - R/c_0)}{R}$   
 $\hat{\phi}(R; t) = -Q_0 \frac{e^{-ik_0 R}}{4\pi R} e^{i\omega t}$

$\vec{n} = \vec{e}_z$   
 $\hat{\phi}(r; t) = \frac{D_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \right) e^{i\omega t} = \frac{D_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-ik_0 r}}{r} \right) \cos\theta e^{i\omega t}$

### Cas où la fonction de Green satisfait aux mêmes conditions aux frontières que $\hat{P}$

- Problème**  $\begin{cases} (\Delta + k^2) \hat{P}(\vec{r}; \omega) = -\hat{f}(\vec{r}; \omega), & \vec{r} \in \mathcal{V} \\ \partial_{n_0} \hat{P}(\vec{r}; \omega) + ik_0 \beta(\vec{r}; \omega) \hat{P}(\vec{r}; \omega) = \hat{U}(\vec{r}; \omega), & \vec{r} \in \Sigma \end{cases}$
- Problème élémentaire**  $\begin{cases} (\Delta + k^2) G(\vec{r} / \vec{r}_0) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), & \vec{r} \in \mathcal{V} \\ \partial_{n_0} G(\vec{r} / \vec{r}_0) + ik_0 \beta(\vec{r}; \omega) G(\vec{r} / \vec{r}_0) = 0, & \vec{r} \in \Sigma \end{cases}$
- Formulation intégrale**

$$\hat{P}(\vec{r}; \omega) = \iiint_{\mathcal{V}} G(\vec{r}, \vec{r}_0) \hat{F}(\vec{r}_0; \omega) d\mathcal{V}_0 + \iint_{\Sigma} \left\{ G(\vec{r}, \vec{r}_0) \partial_{n_0} \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) - \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) \partial_{n_0} [G(\vec{r}, \vec{r}_0)] \right\} d\sigma_0$$

$G(2) \Rightarrow G \partial_{n_0} \hat{P} = G(\hat{U} - ik_0 \beta \hat{P}) \Rightarrow G \partial_{n_0} \hat{P} - \hat{P} \partial_{n_0} G = G \hat{U}$   
 $\hat{P}(9) \Rightarrow \hat{P} \partial_{n_0} G = \hat{P}(-ik_0 \beta G) \Rightarrow \iint_{\Sigma} (G \partial_{n_0} \hat{P} - \hat{P} \partial_{n_0} G) d\sigma_0 = \iint_{\Sigma} G \hat{U} d\sigma_0$

**(9) dans (7) :** 
$$\hat{P}(\vec{r}; \omega) = \iint_{\Sigma} G(\vec{r}, \vec{r}_0) \hat{U}(\vec{r}_0; \omega) d\sigma_0 + \iint_{\Sigma} G(\vec{r}, \vec{r}_0) \hat{U}(\vec{r}_0; \omega) d\sigma_0$$
*simple ajout des sources*

### Formulation intégrale (domaine temporel)

$\begin{cases} (\Delta - \partial_{tt}^2 / c_0^2) \hat{p}(\vec{r}; t) = -\hat{f}(\vec{r}; t), & \vec{r} \in \mathcal{V}, t > t_i \\ \partial_{n_0} \hat{p}(\vec{r}; t) + ik_0 \beta(\vec{r}; t) \hat{p}(\vec{r}; t) = \hat{u}(\vec{r}; t), & \vec{r} \in \Sigma, t > t_i \\ \partial_t \hat{p}(\vec{r}; t_i) = \hat{A}(\vec{r}; t_i); \hat{p}(\vec{r}; t_i) = \hat{B}(\vec{r}; t_i), & \vec{r} \in \mathcal{V}, t = t_i \end{cases}$

$ik_0 \beta(\vec{r}; t) = TF_{\omega} [ik_0 \beta(\vec{r}; \omega)]$

$\hat{p}(\vec{r}; t) = \int_{t_i}^t dt_0 \iiint_{\mathcal{V}} G(\vec{r}, \vec{r}_0; t, t_0) \hat{f}(\vec{r}_0; t_0) d\mathcal{V}_0 + \int_{t_i}^t dt_0 \iint_{\Sigma} \left\{ G(\vec{r}, \vec{r}_0; t, t_0) \partial_{n_0} \hat{p}(\vec{r}_0; t_0) - \hat{p}(\vec{r}_0; t_0) \partial_{n_0} [G(\vec{r}, \vec{r}_0; t, t_0)] \right\} d\sigma_0 + \frac{1}{c_0^2} \iint_{\mathcal{V}} \left\{ G(\vec{r}, \vec{r}_0; t, t_0) \partial_t \hat{p}(\vec{r}_0; t_0) - \hat{p}(\vec{r}_0; t_0) \partial_t [G(\vec{r}, \vec{r}_0; t, t_0)] \right\}_{t_0=t_i} d\mathcal{V}_0$

*Champ "direct" des sources réelles (+ éventuellement des sources images)*  
*Réaction de la frontière*  
*Effet des conditions initiales*

$\partial_{n_0} \hat{p}(\vec{r}; t) = \hat{u}(\vec{r}; t), \vec{r} \in \Sigma, t > t_i$  *Condition aux frontières*  $\left( \beta = \frac{\rho_0 c_0}{Z} \right)$

### Intégrale de Rayleigh (1/14)

- Le problème**

$\hat{w}_0(x, y, t) = \hat{W}_0(x, y) e^{i\omega t}$

### Intégrale de Rayleigh (2/14)

- Problème sous forme différentielle**

$$\begin{cases} (\Delta + k^2) \hat{P}(x, y, z) = 0, & \forall x, y, \forall z \geq 0, \\ \partial_{n_0} \hat{P}(x, y, z) = -i\rho_0 \omega \hat{W}_0(x, y) - \hat{n}_0, & \forall (x, y) \in \Omega, z = 0, \\ \partial_{n_0} \hat{P}(x, y, z) = 0, & \forall (x, y) \notin \Omega, z = 0, \end{cases}$$

Condition de Sommerfeld
- Problème sous forme intégrale**

$$\hat{P}(\vec{r}) = \iint_{\Sigma} \left\{ -G(\vec{r}, \vec{r}_0) \partial_{z_0} \hat{P}(\vec{r}_0) + \hat{P}(\vec{r}_0) \partial_{z_0} [G(\vec{r}, \vec{r}_0)] \right\} d\sigma_0, \forall x, y, \forall z \geq 0,$$

$$\begin{cases} \partial_{z_0} \hat{P}(x, y, z) = -i\rho_0 \omega \hat{W}_0(x, y), & \forall (x, y) \in \Omega, z = 0, \\ \partial_{z_0} \hat{P}(x, y, z) = 0, & \forall (x, y) \notin \Omega, z = 0, \end{cases}$$

Condition de Sommerfeld

### Rappel : Formulation intégrale (domaine de Fourier)

$\hat{P}(\vec{r}; \omega) = TF_{t_i} [\hat{f}(\vec{r}; t)]$   
 $\hat{U}(\vec{r}; \omega) = TF_{t_i} [\hat{u}(\vec{r}; t)]$

$\begin{cases} (\Delta + k^2) \hat{P}(\vec{r}; \omega) = -\hat{F}(\vec{r}; \omega), & \vec{r} \in \mathcal{V}, \\ \partial_{n_0} \hat{P}(\vec{r}; \omega) + ik_0 \beta(\vec{r}; \omega) \hat{P}(\vec{r}; \omega) = \hat{U}(\vec{r}; \omega), & \vec{r} \in \Sigma, \end{cases}$ 
*Condition de Sommerfeld éventuelle,*

$$\hat{P}(\vec{r}; \omega) = \iint_{\Sigma} G(\vec{r}, \vec{r}_0) \hat{U}(\vec{r}_0; \omega) d\sigma_0 + \iint_{\Sigma} \left\{ G(\vec{r}, \vec{r}_0) \partial_{n_0} \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) - \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) \partial_{n_0} [G(\vec{r}, \vec{r}_0)] \right\} d\sigma_0$$

*répartition de monopôles et dipôles*

$\hat{P}(\vec{r}; \omega) = \iint_{\Sigma} G(\vec{r}, \vec{r}_0) \hat{U}(\vec{r}_0; \omega) d\sigma_0 + \iint_{\Sigma} \left\{ G(\vec{r}, \vec{r}_0) \partial_{n_0} \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) - \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) \partial_{n_0} [G(\vec{r}, \vec{r}_0)] \right\} d\sigma_0$

*Champ "direct" des sources réelles (+ éventuellement champ de sources images)* *Champ provenant des sources de frontières, effets réactifs et dissipatifs des frontières (non contenus dans G)*

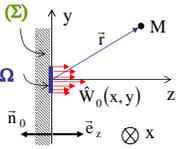
$\partial_{n_0} \hat{P}(\vec{r}; \omega) = \hat{U}(\vec{r}; \omega), \vec{r} \in \Sigma$  *Condition aux frontières*  $\left( \hat{\beta} = \frac{\rho_0 c_0}{Z} \right)$   
 $\lim_{R \rightarrow \infty} \{ R (\partial_{n_0} \hat{P} + ik \hat{P}) \} = 0$  *Condition de Sommerfeld éventuelle*

### Intégrale de Rayleigh (3/14)

- Problème élémentaire associé

$$\left\{ \begin{array}{l} \checkmark (\Delta + k^2)G = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad \forall \vec{r} \in \mathcal{V}' \\ \checkmark \text{conditions aux frontières AD LIBITUM}, \quad \forall \vec{r} \in \Sigma \end{array} \right.$$

$$\text{or } \hat{P}(\vec{r}) = \iint_{\Sigma} \left\{ -G(\vec{r}, \vec{r}_0) \partial_{z_0} \hat{P}(\vec{r}_0) + \hat{P}(\vec{r}_0) \partial_{z_0} [G(\vec{r}, \vec{r}_0)] \right\} d\sigma_0, \quad \forall x, y, \forall z \geq 0$$



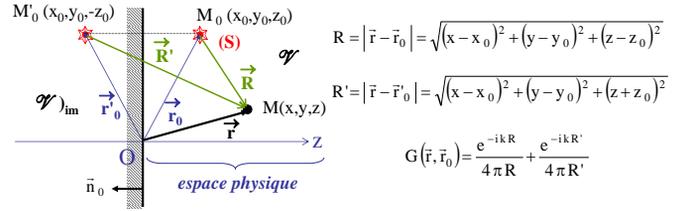
$$\text{choix judicieux ici : } \partial_{n_0} [G(\vec{r}, \vec{r}_0)] = 0$$

- Fonction de Green

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} + \frac{e^{-ikR'}}{4\pi R'}, \quad \forall z \geq 0$$

### Intégrale de Rayleigh (4/14)

- Expression de la fonction de Green sur la paroi (R = R')



$$R = |\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

$$R' = |\vec{r} - \vec{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}$$

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} + \frac{e^{-ikR'}}{4\pi R'}$$

$$G(x, y, z=0; x_0, y_0, z_0) = \frac{e^{-ik\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}}}{2\pi\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}}$$

ou

$$G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{e^{-ik\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}}}{2\pi\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}}$$

### Intégrale de Rayleigh (5/14)

- Champ acoustique rayonné

$$\hat{P}(x, y, z) = -\iint_{\Sigma} G(x, y, z; x_0, y_0, 0) \partial_{z_0} \hat{P}(x_0, y_0, 0) dx_0 dy_0$$

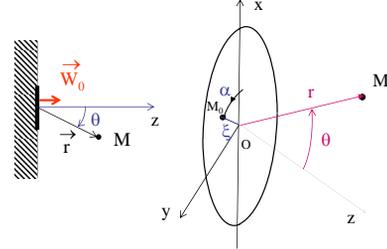
$$\text{avec } G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{e^{-ik\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}}}{2\pi\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}}$$

$$\text{et } \begin{cases} \partial_{z_0} \hat{P}(x, y, z) = -i\rho_0 \omega \hat{W}_0(x, y); \quad \forall (x, y) \in \Omega, z=0, \\ \partial_{z_0} \hat{P}(x, y, z) = 0; \quad \forall (x, y) \notin \Omega, z=0. \end{cases}$$

$$\hat{P}(x, y, z) = \frac{i\rho_0 \omega}{2\pi} \iint_{\Omega} \frac{e^{-ik\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}} \hat{W}_0(x_0, y_0) dx_0 dy_0$$

### Intégrale de Rayleigh (6/14)

- Disque ayant une vitesse vibratoire indépendante du point



Applications :  
enceintes, transducteurs, ...

$$\overline{OM}_0 = \xi \cos \alpha \vec{e}_x + \xi \sin \alpha \vec{e}_y$$

$$\overline{OM} = r \sin \theta \vec{e}_x + r \cos \theta \vec{e}_z$$

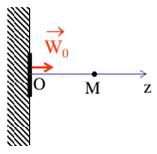
$$\overline{M_0M} = \begin{cases} r \sin \theta - \xi \cos \alpha \\ -\xi \sin \alpha \\ r \cos \theta \end{cases}$$

$$\hat{P}(r, \theta) = \frac{i\rho_0 \omega \hat{W}_0}{2\pi} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ik\sqrt{r^2 + \xi^2 - 2r\xi \sin \theta \cos \alpha}}}{\sqrt{r^2 + \xi^2 - 2r\xi \sin \theta \cos \alpha}} \xi d\xi d\alpha$$

- ✓ Calcul exact lorsque M ∈ (Oz)
- ✓ Calcul approché en champ lointain
- ✓ Calcul exact en z = 0, puis approché en basses et hautes fréquences (impédance de rayonnement)

### Intégrale de Rayleigh (7/14)

- Champ sur l'axe Oz



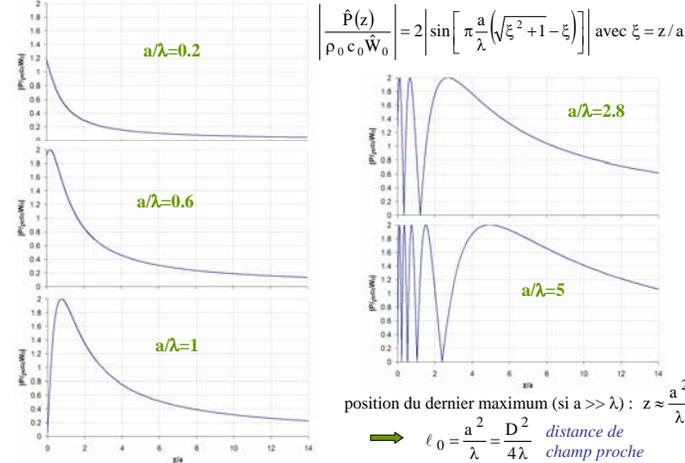
$$\frac{\hat{P}(z; t)}{\rho_0 c_0} = \hat{W}_0 e^{i(-kz + \omega t)} - \hat{W}_0 e^{i(-k\sqrt{z^2 + a^2} + \omega t)}$$

onde plane progressive forcée qui serait émise par l'ensemble du plan  $\Sigma$ , animé de la vitesse  $W_0$

facteur de diffraction du bord du piston

$$\left| \frac{\hat{P}(z)}{\rho_0 c_0 \hat{W}_0} \right| = 2 \left| \sin \left[ \pi \frac{\sqrt{z^2 + a^2} - z}{\lambda} \right] \right| = 2 \left| \sin \left[ \pi \frac{a}{\lambda} \left( \sqrt{\xi^2 + 1} - \xi \right) \right] \right| \text{ avec } \xi = z/a$$

### Intégrale de Rayleigh : champ sur l'axe z (8/14)



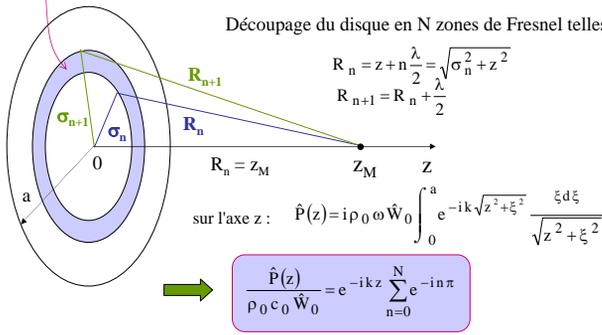
zones de Fresnel

Zones de Fresnel

Découpage du disque en N zones de Fresnel telles que :

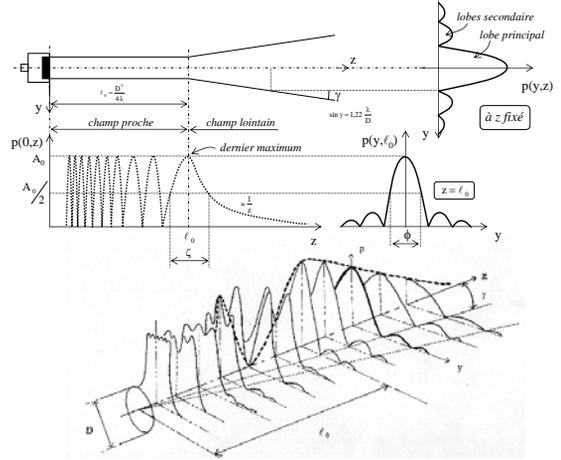
$$R_n = z + n \frac{\lambda}{2} = \sqrt{\sigma_n^2 + z^2}$$

$$R_{n+1} = R_n + \frac{\lambda}{2}$$



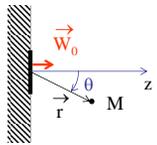
- ✓ Termes de rang pair de la somme = +1 } les contributions de 2 zones de Fresnel successives s'annulent
- ✓ Termes de rang impair de la somme = -1 }
- ✓ Si a et z tels que le disque contient N zones de Fresnel (N pair), alors P(z) = 0
- ✓ Si a et z tels que le disque contient N zones de Fresnel (N impair), alors P(z) max

Champ acoustique émis par un transducteur ultrasonore plan



Intégrale de Rayleigh (9/14)

- En champ lointain et si la vitesse  $\vec{W}_0$  est indépendante du point (piston oscillant)

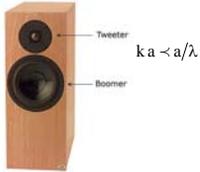


$$\hat{P}(r, \theta) \approx i 2 \pi a^2 \hat{W}_0 k_0 \rho_0 c_0 \frac{e^{-i k_0 r}}{4 \pi r} \frac{2 J_1(k_0 a \sin \theta)}{k_0 a \sin \theta}$$

caractère monopolaire → 1 si ka petit

→  $\hat{P}(r, \theta) < a/\lambda < \sqrt{S}/\lambda$  et  $\hat{P}(r, \theta) < i \omega \hat{W}_0$  (accélération)

enceinte



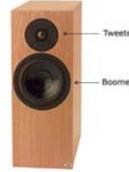
ka < a/lambda

f (Hz)	34	340	3400	aigu
lambda	10 m	1 m	10 cm	ordre du cm

[http://fr.audiofanzine.com/apprendre/glossaire/index\\_popup\\_id\\_mot\\_49.html](http://fr.audiofanzine.com/apprendre/glossaire/index_popup_id_mot_49.html)

Intégrale de Rayleigh (10/14)

$\hat{P}(r, \theta) < a/\lambda < \sqrt{S}/\lambda$  et  $\hat{P}(r, \theta) < i \omega \hat{W}_0 = -\omega^2 \xi$  (accélération) ka < a/lambda



	Grave	Medium	Aigu
f (Hz)	≈ 20-200	200-2000	> 2000
lambda	quelques m	quelques 10 cm	ordre du cm
HP	Boomer	Medium	Tweeter
a	> 10 cm	≈ 10 cm	≈ 1 cm
xi	quelques cm	quelques mm	quelques 100 microm

compensation par un grand déplacement

grand déplacement impossible

Intégrale de Rayleigh : courbes de directivité (11/14)

Intensité

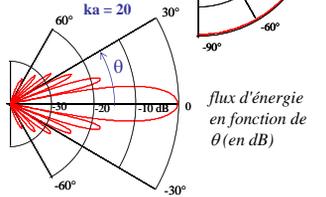
$$I_{r, \theta}(r) = \frac{\rho_0 c_0 k_0^2 a^4 \hat{W}_0^2}{r^2} \frac{2 J_1(k_0 a \sin \theta)}{k_0 a \sin \theta}$$

- ka petit (basses fréquences)

$\frac{2 J_1(k_0 a \sin \theta)}{k_0 a \sin \theta} \approx 1$  →  $\hat{P}(r, \theta) < \frac{e^{-i k_0 r}}{4 \pi r}$  caractère omnidirectionnel de l'enceinte (monopolaire)

- ka plus élevé (hautes fréquences)

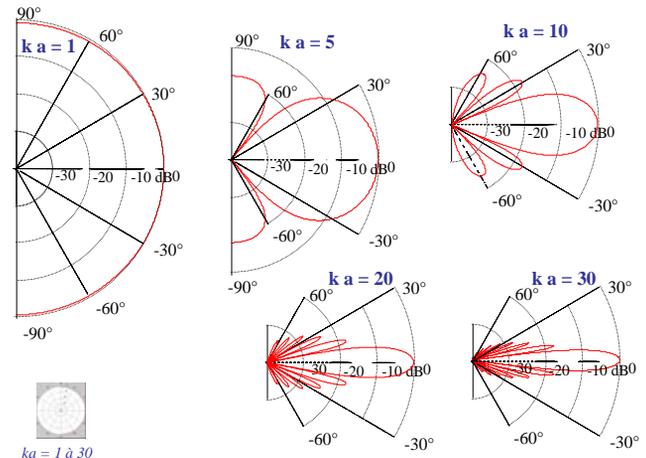
le facteur de directivité  $\frac{2 J_1(k_0 a \sin \theta)}{k_0 a \sin \theta}$  est d'autant plus variable en fonction de theta que ka est élevé.



flux d'énergie en fonction de theta (en dB)

→ l'amplitude du son dépend beaucoup de l'angle theta.

Intégrale de Rayleigh : courbes de directivité (12/14)



ka = 1 à 30

### Intégrale de Rayleigh (13/14)

• Impédance de rayonnement

$$\hat{Z}_{ray} = \frac{1}{\hat{W}_0} \iint_{\Omega} \hat{p}(r, \theta) d\sigma$$

image de la pression moyenne du champ acoustique normalisée ( $\hat{W}_0 = 1$ )

 impédance *mécanique*

force exercée sur le fluide

→ en  $z=0$   $\hat{Z}_{ray} = \pi a^2 \rho_0 c_0 \left[ 1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} + i \frac{S_1(2ka)}{ka} \right]$  *fonction de Struve*

→  $\frac{\hat{Z}_{ray}}{\pi a^2}$  : pression moyenne sur le piston  $\Omega$  pour une vitesse  $\hat{W}_0$  unitaire

•  $ka \rightarrow \infty, a \gg \lambda$   $\hat{Z}_{ray, \infty} \approx \pi a^2 \rho_0 c_0 \left( 1 + i \frac{2}{\pi k_0 a} \right) \approx \pi a^2 \rho_0 c_0$

surface de l'émetteur  $\gg \lambda^2$

→ cloison mitoyenne entre deux appartements rayonnement maximal...

### Intégrale de Rayleigh (14/14)

• Impédance de rayonnement (suite)

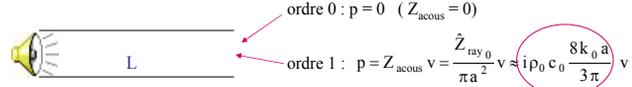
•  $ka \rightarrow 0, a \ll \lambda$   $\hat{Z}_{ray_0} \approx \pi a^2 \rho_0 c_0 \left[ \frac{1}{2} (k_0 a)^2 + i \frac{8k_0 a}{3\pi} \right] \approx i \pi a^2 \rho_0 c_0 \frac{8k_0 a}{3\pi}$

à l'ordre 0 : pression nulle

à l'ordre 1 : pression et vitesse en quadrature →  $I = \frac{1}{2} \Re(\hat{p} \hat{v}^*) < \Re(i \hat{v} \hat{v}^*) = 0$

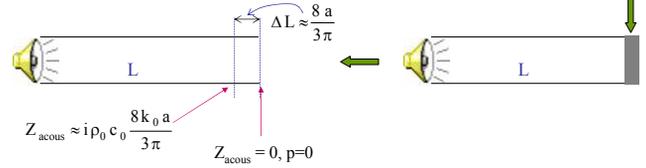
à l'ordre 2 : pression rayonnée non nulle, mais très faible

→ **Modélisation du rayonnement des tubes**

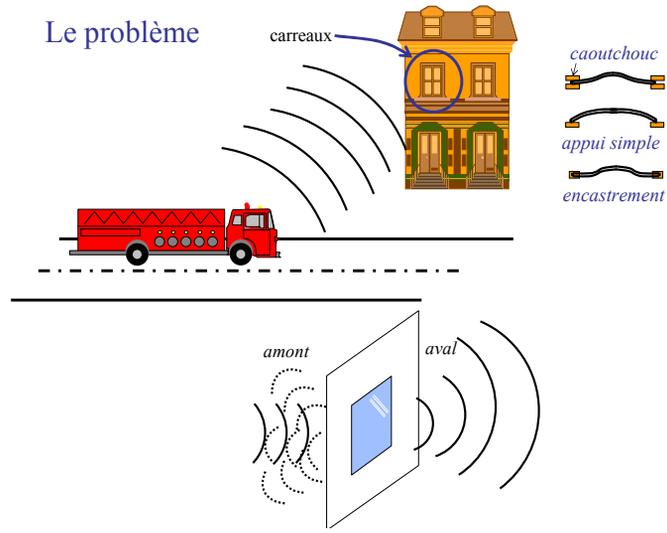


force =  $m \ddot{x} + R \dot{x} + k x = 0 \Leftrightarrow m \ddot{v} + R v + k \int v dt = 0$

terme réactif  $\approx$  masse



# Couplage fluide/structure : exemple de la transparence acoustique de paroi



**Amont (upstream) indice "u"**       $\Sigma = \text{plaque} + \text{paroi rigide infinie}$       **Aval (downstream) indice "d"**

$\hat{p}_u(x, y, z, t)$        $\hat{\xi}(x_0, y_0, t) = \hat{\xi}(x_0, y_0) e^{i\omega t}$        $\hat{p}_d(x, y, z, t)$

$z < 0$        $z = 0$        $z > 0$

**Etude du champ amont (indice "u")**  
 dû à la réflexion compte tenu de la surface vibrante = champ incident  $p_{inc}$  + champ réfléchi  $p_r$

**Etude de la plaque seule**

**Etude du champ aval (indice "d")**  
 créé par une surface vibrante

$\hat{p}_u(x, y, z) = \iint_{\Sigma} G_u \hat{F} d\sigma_0 + \iint_{\Sigma} G_u \frac{\partial \hat{p}_u}{\partial n_{0u}} d\sigma_0$

$\hat{\xi}(x_0, y_0) = \iint_{\Sigma} G_{pl} \hat{p}_{res} d\sigma$

$\hat{p}_d(x, y, z) = \iint_{\Sigma} G_d \frac{\partial \hat{p}_d}{\partial n_{0d}} d\sigma_0$

fonction de  $\hat{\xi}$       fonction de  $\hat{\xi}$

## Problème de la plaque (1/9)

Plaque rectangulaire de dimension  $a \times b$  en appui simple sur les bords (contour  $\mathcal{C}$ ), soumise à une force surfacique  $\hat{p}_{res}(x, y, t)$  résultant des forces de pression extérieure qui s'exercent sur la plaque.

**E** : module d'Young  
**v** : coefficient de Poisson  
**h** : épaisseur  
**M<sub>S</sub>** : masse surfacique

$\hat{\xi}(x, y, t)$  : déplacement transversal (suivant z) de la plaque

**Equation de propagation dans la plaque pour le mouvement de flexion simple**

$B \Delta \Delta \hat{\xi}(x, y, t) + R' \partial_t \hat{\xi}(x, y, t) + M_S \partial_{tt}^2 \hat{\xi}(x, y, t) = \hat{p}_{res}(x, y, t), \forall (x, y) \in \Sigma_{pl}, \forall t$

rigidité en flexion  $B = \frac{E h^3}{2(1-\nu^2)}$       double Laplacien  $\Delta \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$       amortissement interne de la plaque (modèle simplifié de Voigt)

## Problème de la plaque (2/9)

**Force résultante sur un élément de paroi  $d\Sigma_{pl}$**

$\hat{F}_{res} = [\hat{p}_u(x, y, 0; t) - \hat{p}_d(x, y, 0; t)] d\Sigma_{pl} \vec{e}_z$       quantité vectorielle

**Force surfacique résultante sur la paroi en  $z = 0$**

$\hat{p}_{res}(x, y, t) = \hat{p}_u(x, y, 0; t) - \hat{p}_d(x, y, 0; t)$

$\hat{p}_{res}$  a la dimension d'une pression mais représente une force par unité de surface, reliée aux pressions acoustiques  $\hat{p}_u$  et  $\hat{p}_d$  de part et d'autre de la plaque

## Problème de la plaque : mouvement harmonique (3/9)

**Mouvement harmonique de pulsation  $\omega$ , imposé par le champ acoustique incident  $\hat{p}_{inc}$**

$\hat{\xi}(x, y, t) = \hat{\xi}(x, y) e^{i\omega t}$        $\hat{p}_{res}(x, y, t) = \hat{p}_{res}(x, y) e^{i\omega t}$

L'équation de propagation dans la plaque

$B \Delta \Delta \hat{\xi}(x, y, t) + R' \partial_t \hat{\xi}(x, y, t) + M_S \partial_{tt}^2 \hat{\xi}(x, y, t) = \hat{p}_{res}(x, y, t), \forall (x, y) \in \Sigma_{pl}, \forall t$

s'écrit donc  $(\Delta \Delta + i\omega R - \chi^2) \hat{\xi}(x, y) = \hat{p}_{res}(x, y) / B, \forall (x, y) \in \Sigma_{pl}$  (1)

avec  $\chi = \omega \sqrt{M_S / B}$  et  $R = R' / B$

**Conditions aux frontières**

$\hat{\xi}(x, b) = 0$       plaque

$\hat{\xi}(0, y) = 0$       appui

$\hat{\xi}(a, y) = 0$       appui

$\hat{\xi}(x, 0) = 0$       appui

$\hat{\xi}(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \mathcal{C}$  (2)

$\mathcal{C} \mathcal{M}_x(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \mathcal{C}$  (3)

$\mathcal{C} \mathcal{M}_y(x, y) = 0, \forall (x, y) \in \mathcal{C}$

moments de flexion  $\begin{cases} \mathcal{C} \mathcal{M}_x = -B(\partial_{xx}^2 + \nu \partial_{yy}^2) \hat{\xi}(x, y) \\ \mathcal{C} \mathcal{M}_y = -B(\partial_{yy}^2 + \nu \partial_{xx}^2) \hat{\xi}(x, y) \end{cases}$

(1)+(2)+(3) : problème à résoudre pour exprimer le champ de déplacement  $\hat{\xi}(x, y)$

### Problème de la plaque : solution (4/9)

• Rappel du problème posé

$$(\Delta\Delta + i\omega R - \chi^2)\hat{\xi}(x,y) = \hat{P}_{res}(x,y)/B, \quad \forall (x,y) \in \Sigma_{pl} \quad (1)$$

$$\hat{\xi}(x,y) = 0, \quad \forall (x,y) \in \mathcal{C}, \quad (2)$$

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{t_x} = -B(\partial_{xx}^2 + \nu\partial_{yy}^2)\hat{\xi}(x,y) = 0, & \forall (x,y) \in \mathcal{C}, \\ \mathcal{M}_{t_y} = -B(\partial_{yy}^2 + \nu\partial_{xx}^2)\hat{\xi}(x,y) = 0, & \forall (x,y) \in \mathcal{C}. \end{cases} \quad (3)$$

• Solution cherchée sous forme d'une série de Fourier

$$\hat{\xi}(x,y) = \sum_m \sum_n \hat{b}_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$$

normalisation

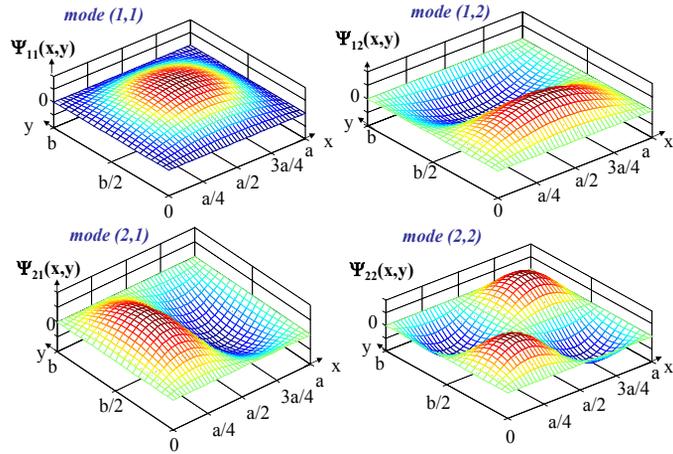
$$\hat{\xi}(x,y) = \sum_m \sum_n \hat{a}_{mn} \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$$

$\Psi_{mn}(x,y)$

$$\forall \hat{\xi}(x,y) \in \mathcal{C}, \exists \hat{a}_{mn}, \hat{\xi}(x,y) = \sum_m \sum_n \hat{a}_{mn} \Psi_{mn}(x,y)$$

$$\text{avec } \Psi_{mn}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$$

### Modes d'une plaque rectangulaire de dimensions (a x b)



### Série de Fourier (rappels) (1/4)

FOURIER Jean-Baptiste  
Joseph, français (1768-1830)

• Fonction périodique de période  $2\pi$

Si  $f(x)$  est une fonction périodique de période  $2\pi$ , continue et à dérivée continue, sauf éventuellement en un nombre fini de points (sur une période) qui sont des points de discontinuité de première espèce pour  $f$  ou pour  $f'$ , la série trigonométrique qui a pour coefficients

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

est convergente pour tout  $x$  et a pour somme  $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ .

En un point où  $f(x)$  est continue, la série trigonométrique a pour somme  $f(x)$  :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

*Remarque* : l'hypothèse de périodicité et la mention de la période ne sont pas essentielles en réalité, puisqu'une fonction définie sur un intervalle borné, quel qu'il soit, peut toujours être périodisée.

### Série de Fourier (rappels) (2/4)

• Fonction périodique de période  $T=2\pi/\omega$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)]$$

avec

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \, dx, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos(n\omega x) \, dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \sin(n\omega x) \, dx$$

• Calcul des coefficients  $a_n$  : démonstration

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos(p\omega x) \, dx &= \int_{x_0}^{x_0+T} \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)] \cos(p\omega x) \, dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+T} \cos(n\omega x) \cos(p\omega x) \, dx}_{I_p} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+T} \sin(n\omega x) \cos(p\omega x) \, dx}_{J_p} \\ \cos(n\omega x) \cos(p\omega x) &= \frac{1}{2} [\cos(n+p)\omega x + \cos(n-p)\omega x]; \quad \sin(n\omega x) \cos(p\omega x) = \frac{1}{2} [\sin(n+p)\omega x - \sin(n-p)\omega x] \end{aligned}$$

### Série de Fourier (rappels) (3/4)

• Calcul des coefficients  $a_n$  (suite)

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos(p\omega x) \, dx = I_p + J_p$$

$$I_p = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_{x_0}^{x_0+T} [\cos(n+p)\omega x + \cos(n-p)\omega x] \, dx$$

$$J_p = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \int_{x_0}^{x_0+T} [\sin(n+p)\omega x - \sin(n-p)\omega x] \, dx$$

**si  $n \neq p$**

$$\int_{x_0}^{x_0+T} [\cos(n+p)\omega x + \cos(n-p)\omega x] \, dx = \left[ \frac{\sin(n+p)\omega x}{(n+p)\omega} \right]_{x_0}^{x_0+T} + \left[ \frac{\sin(n-p)\omega x}{(n-p)\omega} \right]_{x_0}^{x_0+T} = 0$$

$$\int_{x_0}^{x_0+T} [\sin(n+p)\omega x - \sin(n-p)\omega x] \, dx = \left[ -\frac{\cos(n+p)\omega x}{(n+p)\omega} \right]_{x_0}^{x_0+T} - \left[ -\frac{\cos(n-p)\omega x}{(n-p)\omega} \right]_{x_0}^{x_0+T} = 0$$

**si  $n = p$**

$$\int_{x_0}^{x_0+T} [\cos(n+p)\omega x + \cos(n-p)\omega x] \, dx = \int_{x_0}^{x_0+T} [1 + \cos(2p\omega x)] \, dx = T$$

$$\int_{x_0}^{x_0+T} [\sin(n+p)\omega x - \sin(n-p)\omega x] \, dx = \int_{x_0}^{x_0+T} \sin(2p\omega x) \, dx = \left[ -\frac{\cos(2p\omega x)}{2p\omega} \right]_{x_0}^{x_0+T} = 0$$

$$\Rightarrow I_p = \frac{T}{2} a_p \quad \text{et} \quad J_p = 0$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos(p\omega x) \, dx = \frac{T}{2} a_p \quad \Rightarrow a_p = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \cos(p\omega x) \, dx$$

### Série de Fourier (rappels) (4/4)

• Calcul des coefficients  $b_n$  : démonstration

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \sin(p\omega x) \, dx &= \int_{x_0}^{x_0+T} \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)] \sin(p\omega x) \, dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+T} \cos(n\omega x) \sin(p\omega x) \, dx}_{K_p} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \underbrace{\int_{x_0}^{x_0+T} \sin(n\omega x) \sin(p\omega x) \, dx}_{L_p} \end{aligned}$$

$$\cos(n\omega x) \sin(p\omega x) = \frac{1}{2} [\sin(n+p)\omega x - \sin(n-p)\omega x]; \quad \sin(n\omega x) \sin(p\omega x) = \frac{1}{2} [\cos(n-p)\omega x - \cos(n+p)\omega x]$$

**si  $n \neq p$**

$$\int_{x_0}^{x_0+T} [\sin(n+p)\omega x + \sin(n-p)\omega x] \, dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{x_0}^{x_0+T} [\cos(n-p)\omega x - \cos(n+p)\omega x] \, dx = 0$$

**si  $n = p$**

$$\int_{x_0}^{x_0+T} [\sin(n+p)\omega x + \sin(n-p)\omega x] \, dx = \int_{x_0}^{x_0+T} \sin(2p\omega x) \, dx = 0$$

$$\int_{x_0}^{x_0+T} [\cos(n-p)\omega x - \cos(n+p)\omega x] \, dx = \int_{x_0}^{x_0+T} [1 - \cos(2n\omega x)] \, dx = T$$

$$\Rightarrow K_p = 0 \quad \text{et} \quad L_p = \frac{T}{2} b_p$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \sin(p\omega x) \, dx = \frac{T}{2} b_p \quad \Rightarrow b_p = \frac{2}{T} \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) \sin(p\omega x) \, dx$$

### Problème de la plaque : solution (5/9)

$$\forall \hat{\xi}(x,y) \in \mathcal{E}, \exists \hat{a}_{mn}, \hat{\xi}(x,y) = \sum_{m,n} \hat{a}_{mn} \Psi_{mn}(x,y)$$

avec  $\Psi_{mn}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$

- Report de la solution dans les conditions aux frontières

$$\begin{cases} \hat{\xi}(x,0) = 0 \text{ et } \hat{\xi}(x,b) = 0, \forall x \in [0,a], \\ \hat{\xi}(0,y) = 0 \text{ et } \hat{\xi}(a,y) = 0, \forall y \in [0,b], \end{cases} \quad (2)$$

$$\partial_{xx}^2 \hat{\xi}(x,y) = -\sum_{m,n} (m\pi/a)^2 \hat{a}_{mn} \Psi_{mn}(x,y)$$

$$\partial_{yy}^2 \hat{\xi}(x,y) = -\sum_{m,n} (n\pi/b)^2 \hat{a}_{mn} \Psi_{mn}(x,y)$$

$$\begin{cases} \mathcal{H}_x = -B(\partial_{xx}^2 + \nu \partial_{yy}^2) \hat{\xi}(x,y) = 0, \forall (x,y) \in \mathcal{E}, \\ \mathcal{H}_y = -B(\partial_{yy}^2 + \nu \partial_{xx}^2) \hat{\xi}(x,y) = 0, \forall (x,y) \in \mathcal{E}. \end{cases} \quad (3)$$

### Problème de la plaque : solution (6/9)

$$\forall \hat{\xi}(x,y) \in \mathcal{E}, \exists \hat{a}_{mn}, \hat{\xi}(x,y) = \sum_{m,n} \hat{a}_{mn} \Psi_{mn}(x,y)$$

avec  $\Psi_{mn}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$

- Report de la solution dans l'équation de propagation

$$(\Delta\Delta + i\omega R - \chi^2) \hat{\xi}(x,y) = \hat{P}_{res}(x,y)/B, \forall (x,y) \in \Sigma_{pl} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Delta \hat{\xi}(x,y) &= \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \hat{\xi}(x,y) \\ &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \sum_{m,n} \hat{a}_{mn} \left[ (m\pi/a)^4 + 2(m\pi/a)^2 (n\pi/b)^2 + (n\pi/b)^4 \right] \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \\ &= \frac{2}{\sqrt{ab}} \sum_{m,n} \hat{a}_{mn} \left[ (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 \right]^2 \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta\Delta \hat{\xi}(x,y) = \sum_{m,n} \chi_{mn}^2 \hat{a}_{mn} \Psi_{mn}(x,y) \quad \text{avec} \quad \chi_{mn} = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$$

$$(1) \Leftrightarrow \sum_{m,n} \hat{a}_{mn} \left[ (\chi_{mn}^2 - \chi^2) + i\omega R \right] \Psi_{mn}(x,y) = \hat{P}_{res}(x,y)/B$$

### Problème de la plaque : coefficients du développement (7/9)

$$\sum_{m,n} \hat{a}_{mn} \left[ (\chi_{mn}^2 - \chi^2) + i\omega R \right] \Psi_{mn}(x,y) = \hat{P}_{res}(x,y)/B$$

- Calcul des coefficients  $\hat{a}_{mn}$

Multiplication par  $\Psi_{pq}(x,y)$  et intégration sur la surface  $\Sigma$

$$\sum_{m,n} \hat{a}_{mn} \left[ (\chi_{mn}^2 - \chi^2) + i\omega R \right] \iint_{\Sigma} \Psi_{mn}(x,y) \Psi_{pq}(x,y) d\sigma = \iint_{\Sigma} \hat{P}_{res}(x,y)/B \Psi_{pq}(x,y) d\sigma$$

$$\Rightarrow \hat{a}_{pq} \left[ (\chi_{pq}^2 - \chi^2) + i\omega R \right] = \iint_{\Sigma_{pl}} \hat{P}_{res}(x_0, y_0) \Psi_{pq}(x_0, y_0) / B \, dx_0 \, dy_0$$

$\delta_{mp} \delta_{nq}$   
relation d'orthogonalité : non nul si  $m=p$  et  $n=q$

$$\hat{a}_{pq} = \frac{\langle \Psi_{pq} | \hat{P}_{res}/B \rangle}{(\chi_{pq}^2 - \chi^2) + i\omega R} \quad \text{et} \quad \hat{\xi}(x,y) = \sum_{m,n} \hat{a}_{mn} \Psi_{mn}(x,y)$$

$\langle \Psi_{pq} | \hat{P}_{res}/B \rangle$  produit scalaire

$$\hat{\xi}(x,y) = \sum_{m,n} \sum_{p,q} \frac{\Psi_{mn}(x,y)}{(\chi_{mn}^2 - \chi^2) + i\omega R} \iint_{\Sigma_{pl}} \hat{P}_{res}(x_0, y_0) \Psi_{mn}(x_0, y_0) / B \, dx_0 \, dy_0$$

### Problème de la plaque : interprétation (8/9)

$$\hat{\xi}(x,y) = \sum_{m,n} \hat{a}_{mn} \Psi_{mn}(x,y)$$

- Chaque mode (m,n) représente une contribution (associée à ce mode) à la distribution spatiale du champ.
- Le champ de déplacement résultant est une **superposition des champs modaux**  $\Psi_{mn}(x,y)$ , dans laquelle tous les modes n'ont pas le même poids, le poids étant donné, pour chaque mode (m,n), par le coefficient associé  $\hat{a}_{mn}$ .

Amplitude de la contribution du mode (m,n) au champ de déplacement

$$\hat{a}_{mn} = \frac{\langle \Psi_{mn} | \hat{P}_{res}/B \rangle}{(\chi_{mn}^2 - \chi^2) + i\omega R}$$

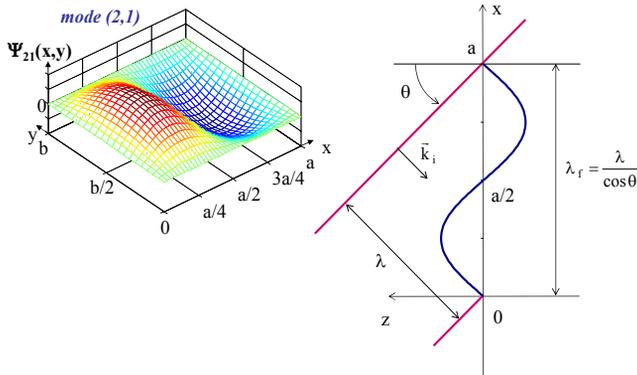
Echange d'énergie entre les champs acoustiques (en particulier source de vibration pour la plaque)  $\hat{P}_{res}$  à l'origine de la contribution du mode (m,n) au champ vibratoire

Résonance si  $\chi \approx \chi_{mn}$  (R petit)  
↔ oscillateur classique  
→ il reste  $\frac{1}{i\omega R} \propto Q$

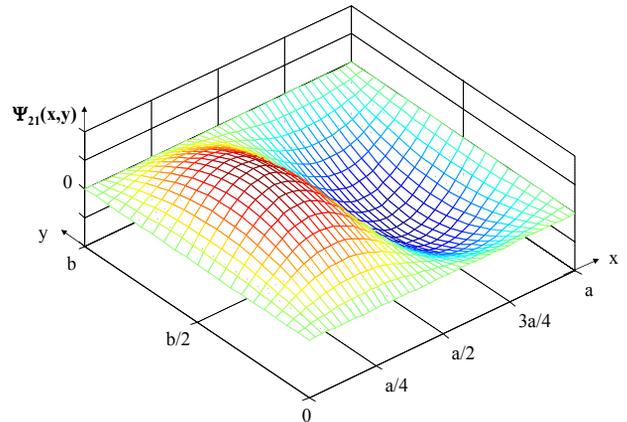
facteur de qualité  
acuité de la résonance

### Problème de la plaque : interprétation (9/9)

Exemple d'une onde plane incidente sur une plaque vibrant sur le mode (2,1)



### Mode (2,1) d'une plaque rectangulaire de dimensions (a x b)



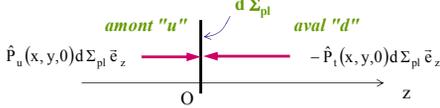
### Couplage fluide/structure

- Déplacement transversal de la plaque

$$\hat{\xi}(x, y) = \sum_m \sum_n \frac{\Psi_{mn}(x, y)}{(\chi_{mn}^2 - \chi^2) + i\omega R} \iint_{\Sigma_{pl}} \hat{p}_{res}(x_0, y_0) \Psi_{mn}(x_0, y_0) / B \, dx_0 \, dy_0$$

- Force surfacique résultante sur la paroi en  $z = 0$

$$\hat{P}_{res}(x, y, 0) = \hat{P}_u(x, y, 0) - \hat{P}_t(x, y, 0)$$



$$\hat{P}_u = 2\hat{P}_{inc} - \hat{P}_t$$

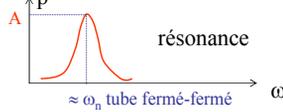
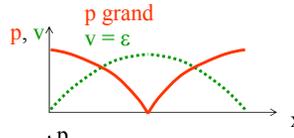
(cf infra)

- Couplage

$$\begin{aligned} \hat{\xi}(x, y) &\text{ dépend de } \hat{P}_t(x, y, 0) \\ \hat{P}_t(x, y, 0) &\text{ dépend de } \hat{\xi}(x, y) \end{aligned}$$

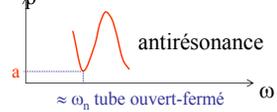
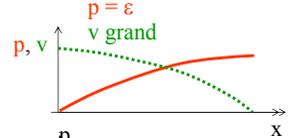
### Exemple de système couplé : haut-parleur / résonateur

$\omega$  tel que  $L = \lambda/2$   
(mode propre tube fermé-fermé)



- beaucoup de bruit
- très faible déplacement de la membrane du HP

$\omega$  tel que  $L = \lambda/4$   
(mode propre tube ouvert-fermé)



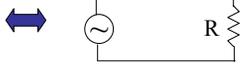
- très peu de bruit
- très grand déplacement de la membrane du HP

#### grande résistance



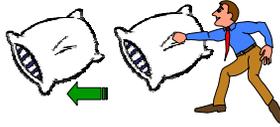
déplacement éventuellement faible

grand transfert d'énergie possible



énergie dissipée en chaleur

#### aucune résistance



grand déplacement

très faible transfert d'énergie

Autre exemple



énergie accumulée et restituée : bilan nul



Ces exemples, donnés à titre d'illustration, procèdent par analogies : il ne faut donc les prendre que pour ce qu'elles valent.

### Problème aux valeurs propres pour la plaque (1/2)

- Problème posé

$$(\Delta\Lambda + i\omega R - \chi^2)\hat{\xi}(x, y) = \hat{P}_{res}(x, y)/B, \quad \forall (x, y) \in \Sigma_{pl} \quad (1)$$

$$\hat{\xi}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{E}, \quad (2)$$

$$\begin{cases} \mathcal{O} \mathcal{L}_x = -B(\partial_{xx}^2 + \nu \partial_{yy}^2)\hat{\xi}(x, y) = 0, & \forall (x, y) \in \mathcal{E}, \\ \mathcal{O} \mathcal{L}_y = -B(\partial_{yy}^2 + \nu \partial_{xx}^2)\hat{\xi}(x, y) = 0, & \forall (x, y) \in \mathcal{E}. \end{cases} \quad (3)$$

- Problème aux valeurs propres associé

$$(\Delta\Lambda - \chi_{mn}^2)\Psi_{mn}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \Sigma_{pl} \quad (4)$$

$$\Psi_{mn}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{E}, \quad (5)$$

$$\begin{cases} \mathcal{O} \mathcal{L}_x = -B(\partial_{xx}^2 + \nu \partial_{yy}^2)\Psi_{mn}(x, y) = 0, & \forall (x, y) \in \mathcal{E}, \\ \mathcal{O} \mathcal{L}_y = -B(\partial_{yy}^2 + \nu \partial_{xx}^2)\Psi_{mn}(x, y) = 0, & \forall (x, y) \in \mathcal{E}. \end{cases} \quad (6)$$

- Solution développée sur les fonctions propres

$$\hat{\xi}(x, y) = \sum_m \sum_n \hat{a}_{mn} \Psi_{mn}(x, y) \quad \text{avec} \quad \Psi_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \quad (7)$$

### Problème aux valeurs propres pour la plaque (2/2)

- Report de  $\Psi_{mn}$  dans l'équation de propagation libre dans la plaque

$$(\Delta\Lambda - \chi_{mn}^2)\Psi_{mn}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \Sigma_{pl} \quad (4)$$

avec  $\Delta\Delta\Psi_{mn}(x, y) = \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \Psi_{mn}(x, y)$

$$= \frac{2}{\sqrt{ab}} \left[ (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 \right]^2 \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$$

$$(4) \iff \left\{ \left[ (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2 \right]^2 - \chi_{mn}^2 \right\} \Psi_{mn}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \Sigma_{pl}$$

$$\implies \chi_{mn} = (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$$

- Modes propres

$\Psi_{mn}(x, y)$  : fonctions propres  
 $\chi_{mn}$  : valeurs propres

$$\Psi_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b)$$

### Complétude

- Soit  $\mathcal{E}$ , l'ensemble des fonctions  $\hat{f}(x, y)$  définies sur  $\Sigma_{pl}$  satisfaisant notamment aux conditions aux frontières.

$$\hat{f}(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathcal{E}, \quad \begin{cases} \mathcal{O} \mathcal{L}_x = -B(\partial_{xx}^2 + \nu \partial_{yy}^2)\hat{f}(x, y) = 0, & \forall (x, y) \in \mathcal{E}, \\ \mathcal{O} \mathcal{L}_y = -B(\partial_{yy}^2 + \nu \partial_{xx}^2)\hat{f}(x, y) = 0, & \forall (x, y) \in \mathcal{E}. \end{cases}$$

- Soit  $\mathcal{F}$ , l'ensemble des fonctions  $\Psi_{mn}(x, y)$  définies sur  $\Sigma_{pl}$  orthonormées, solutions du système d'équations

$$\begin{cases} (\Delta\Lambda - \chi_{mn}^2)\Psi_{mn}(x, y) = 0, & \forall (x, y) \in \Sigma_{pl} \\ \Psi_{mn}(x, y) = 0, & \forall (x, y) \in \mathcal{E}, \\ \mathcal{O} \mathcal{L}_x = -B(\partial_{xx}^2 + \nu \partial_{yy}^2)\Psi_{mn}(x, y) = 0, & \forall (x, y) \in \mathcal{E}, \\ \mathcal{O} \mathcal{L}_y = -B(\partial_{yy}^2 + \nu \partial_{xx}^2)\Psi_{mn}(x, y) = 0, & \forall (x, y) \in \mathcal{E}. \end{cases}$$

$\mathcal{F}$  étant une famille complète, orthonormée, sur l'ensemble  $\mathcal{E}$ , les fonctions  $\hat{\xi}(x, y)$  peuvent être développées, de manière unique, sur les fonctions propres  $\Psi_{mn}(x, y)$  :

$$\forall \hat{\xi}(x, y) \in \mathcal{E}, \exists \hat{a}_{mn}, \hat{\xi}(x, y) = \sum_m \sum_n \hat{a}_{mn} \Psi_{mn}(x, y)$$

Par définition, les fonctions propres  $\Psi_{mn}(x, y)$  sont dites **orthonormées** si le produit scalaire est tel que

$$\langle \Psi_{mn} | \Psi_{pq} \rangle = \iint_{\Sigma_{pl}} \Psi_{mn}(x_0, y_0) \Psi_{pq}(x_0, y_0) \, dx_0 \, dy_0 = \delta_{mn,pq}$$

$$\delta_{mn,pq} = 0 \text{ si } m \neq p \text{ et } n \neq q ; \delta_{mn,pq} = 1 \text{ si } m = p \text{ et } n = q$$

### Conditions aux limites sur une paroi d'impédance complexe

- Condition aux frontières**  $\hat{P}(M; \omega) = \hat{Z}_w(M; \omega) \hat{V}(M; \omega) \cdot \vec{n}$  (1)
   
 $\vec{n}$  : normale sortante du milieu considéré  $\hat{Z}_w(M; \omega)$  : admittance de surface du matériau, normalisée par l'impédance caractéristique du fluide  $\rho_0 c_0$ 
  
 $\hat{Z}_w(M; \omega)$  ou  $\hat{\beta}(M; \omega)$  avec  $\hat{P}(M; t) = \hat{P}(M; \omega) e^{i\omega t}$  et  $\hat{V}(M; t) = \hat{V}(M; \omega) e^{i\omega t}$
- Projection sur  $\vec{n}$  de l'équation d'Euler**  $[\rho_0 \partial_t \hat{V}(M; t)] \cdot \vec{n} = -[\text{grad} \hat{P}(M; t)] \cdot \vec{n}$ 
  
*c.à.d.*  $\rho_0 i \omega \hat{V}(M; \omega) \cdot \vec{n} = -\partial_n \hat{P}(M; \omega)$   $\iff \hat{V}(M; \omega) \cdot \vec{n} = \frac{-1}{i \rho_0 \omega} \partial_n \hat{P}(M; \omega)$  (2)
   
 (1)  $\implies \partial_n \hat{P}(M; \omega) + i \frac{\rho_0 \omega}{\hat{Z}_w(M; \omega)} \hat{P}(M; \omega) = 0$  d'où  $\partial_n \hat{P}(M; \omega) + i k_0 \hat{\beta}(M; \omega) \hat{P}(M; \omega) = 0$ 
  
 (2)  $\implies \partial_n \hat{P}(M; \omega) + i k_0 \hat{\beta}(M; \omega) \hat{P}(M; \omega) = 0$ 
  
 avec  $\hat{\beta}(M; \omega) = \frac{\rho_0 c_0}{\hat{Z}_w(M; \omega)}$
- Paroi rigide (condition de Neuman)**  $\hat{Z}_w(M; \omega) \rightarrow \infty$   $\implies \partial_n \hat{P}(M; \omega) = 0$ 
  
 $\hat{\beta}(M; \omega) = 0$
- Paroi sans réaction et non dissipative (condition de Dirichlet)**  $\hat{Z}_w(M; \omega) = 0$   $\implies \hat{P}(M; \omega) = 0$ 
  
 $\hat{\beta}(M; \omega) \rightarrow \infty$

### Formulation intégrale du problème amont "u"

- Champ de pression amont**

$$\hat{P}_u(x, y, z) = \iiint_{\mathcal{V}_c} G_u(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \hat{F}(x_0, y_0, z_0) d\mathcal{V}_c + \iint_{\Sigma} \left( G_u(x, y, z; x_0, y_0, 0) \partial_{n_{0u}} \hat{P}_u(x_0, y_0, 0) - \hat{P}_u(x_0, y_0, 0) \partial_{n_{0u}} [G_u(x, y, z; x_0, y_0, 0)] \right) d\sigma_0$$
- Conditions aux frontières**

$$\begin{cases} \hat{V}_z(x_0, y_0, 0) = \hat{W}(x_0, y_0) = i\omega \hat{\Xi}(x_0, y_0) & \text{sur la plaque,} \\ \hat{V}_z(x_0, y_0, 0) = 0 & \text{sur la paroi, en dehors de la plaque,} \end{cases}$$
  
*ou*  $\partial_{n_{0u}} \hat{P}_u(x_0, y_0, 0) = -i\rho_0 \omega \hat{V}_z(x_0, y_0, 0)$

$\hat{P}_u(x, y, z)$  sur la plaque
   
 $\begin{cases} \partial_{n_{0u}} \hat{P}_u(x_0, y_0, 0) = \rho_0 \omega^2 \hat{\Xi}(x_0, y_0) \\ \partial_{n_{0u}} \hat{P}_u(x_0, y_0, 0) = 0 \end{cases}$  sur la paroi, en dehors de la plaque

### Fonction de Green du problème amont "u"

*Plus de paroi rigide mais  $\partial_{n_{0u}} G_u = 0$*

$G_u(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} + \frac{e^{-ikR'}}{4\pi R'}$ ,  $\forall z \leq 0$ 
  
 $G_u(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|} + \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'_0|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'_0|}$

En  $z_0 = 0$  ( $\vec{r}_0 = \vec{r}'_0$ )
   
 $G_u(x, y, z; x_0, y_0, 0) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ik\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}}$

$\hat{P}_r(x, y, z) = \iint_{\Sigma} \left( G_u(x, y, z; x_0, y_0, 0) \partial_{n_{0u}} \hat{P}_u(x_0, y_0, 0) - \hat{P}_u(x_0, y_0, 0) \partial_{n_{0u}} [G_u(x, y, z; x_0, y_0, 0)] \right) d\sigma_0$ 
  
 avec  $\begin{cases} \partial_{n_{0u}} \hat{P}_u(x_0, y_0, 0) = \rho_0 \omega^2 \hat{\Xi}(x_0, y_0) & \text{sur la plaque} \\ \partial_{n_{0u}} \hat{P}_u(x_0, y_0, 0) = 0 & \text{sur la paroi, en dehors de la plaque} \end{cases}$

$\implies \hat{P}_r(x, y, z) = \rho_0 \omega^2 \iint_{\Sigma_{pl}} \left( G_u(x, y, z; x_0, y_0, 0) \hat{\Xi}(x_0, y_0) \right) d\sigma_0$

### Champ de pression amont (1/2)

$$\hat{P}_u(x, y, z) = \iint_{\Sigma} G_u(x, y, z; x_0, y_0, z_0) \hat{F}(x_0, y_0, z_0) d\mathcal{V}_c + \iint_{\Sigma} \left( G_u(x, y, z; x_0, y_0, 0) \partial_{n_{0u}} \hat{P}_u(x_0, y_0, 0) - \hat{P}_u(x_0, y_0, 0) \partial_{n_{0u}} [G_u(x, y, z; x_0, y_0, 0)] \right) d\sigma_0$$

avec  $G_u(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|} + \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'_0|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'_0|}$

$\hat{P}_u(x, y, z) = \hat{P}_{inc}(x, y, z) + \hat{P}'_r(x, y, z) + \hat{P}''_r(x, y, z)$

- $\hat{P}_{inc}(x, y, z) = \iint_{\mathcal{V}_c} \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|} \hat{F}(x_0, y_0, z_0) d\mathcal{V}_c$  *champ incident supposé connu*
- $\hat{P}'_r(x, y, z) = \iint_{\mathcal{V}_{im}} \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'_0|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'_0|} \hat{F}(x_0, y_0, z_0) d\mathcal{V}_c$  *champ réfléchi par la paroi z=0 supposée parfaitement réfléchissante et parfaitement rigide en tout point (en l'absence de vibrations de la plaque)*
- $\hat{P}''_r(x, y, z) = \rho_0 \omega^2 \iint_{\Sigma_{pl}} G_u(x, y, z; x_0, y_0, 0) \hat{\Xi}(x_0, y_0) d\sigma_0$  *champ acoustique créé par la surface active  $\Sigma_{pl}$*

*opposé du champ transmis  $\hat{P}_t$  créé par le champ vibratoire de la plaque*

### Champ de pression amont (2/2)

- $\hat{P}_u(x, y, z) = \hat{P}_{inc}(x, y, z) + \hat{P}'_r(x, y, z) + \hat{P}''_r(x, y, z)$
- Au niveau de la paroi, en  $z_0 = 0$**  ( $\vec{r}_0 = \vec{r}'_0$ )
   
 $G_u(x, y, z; x_0, y_0, 0) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ik\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}}$ 
  
 $\implies \hat{P}'_r(x, y, 0) = \hat{P}_{inc}(x, y, 0)$ 
  
 $\implies \hat{P}_u(x, y, 0) = 2\hat{P}_{inc}(x, y, 0) + \hat{P}''_r(x, y, 0)$

### Formulation intégrale du problème aval "d"

- Champ de pression aval**

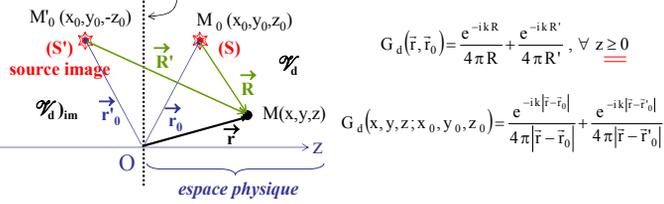
$$\hat{P}_d(x, y, z) = \iint_{\Sigma} G_d(x, y, z; x_0, y_0, 0) \partial_{n_{0d}} \hat{P}_d(x_0, y_0, 0) - \hat{P}_d(x_0, y_0, 0) \partial_{n_{0d}} [G_d(x, y, z; x_0, y_0, 0)] d\sigma_0$$
- Conditions aux frontières**

$$\begin{cases} \hat{V}_z(x_0, y_0, 0) = \hat{W}(x_0, y_0) = i\omega \hat{\Xi}(x_0, y_0) & \text{sur la plaque,} \\ \hat{V}_z(x_0, y_0, 0) = 0 & \text{sur la paroi, en dehors de la plaque,} \end{cases}$$
  
*ou*  $\partial_{n_{0d}} \hat{P}_d(x_0, y_0, 0) = i\rho_0 \omega \hat{V}_z(x_0, y_0, 0)$

$\hat{P}_d(x, y, z)$  sur la plaque
   
 $\begin{cases} \partial_{n_{0d}} \hat{P}_d(x_0, y_0, 0) = -\rho_0 \omega^2 \hat{\Xi}(x_0, y_0) \\ \partial_{n_{0d}} \hat{P}_d(x_0, y_0, 0) = 0 \end{cases}$  sur la paroi, en dehors de la plaque

### Fonction de Green du problème aval "d"

Plus de paroi rigide mais  $\partial_{n_0d} G_d=0$



$$G_d(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} + \frac{e^{-ikR'}}{4\pi R'}, \quad \forall z \geq 0$$

$$G_d(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|} + \frac{e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}'_0|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'_0|}$$

En  $z_0 = 0$  ( $\vec{r}_0 = \vec{r}'_0$ )

$$G_d(x, y, z; x_0, y_0, 0) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-ik\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z^2}}$$

au niveau de la paroi, la fonction de Green relative au champ acoustique dans le fluide

$$G_a(x, y, z; x_0, y_0, 0) = G_d(x, y, z; x_0, y_0, 0) = G_u(x, y, z; x_0, y_0, 0)$$

### Champ de pression aval "d"

$$\hat{P}_t(x, y, z) = \iint_{\Sigma_{pl}} G_d(x, y, z; x_0, y_0, 0) \partial_{n_0d} \hat{P}_t(x_0, y_0, 0) - \hat{P}_t(x_0, y_0, 0) \partial_{n_0d} [G_d(x, y, z; x_0, y_0, 0)] d\sigma_0$$

avec  $\begin{cases} \partial_{n_0d} \hat{P}_t(x_0, y_0, 0) = -\rho_0 \omega^2 \hat{\xi}(x_0, y_0) & \text{sur la plaque} \\ \partial_{n_0d} \hat{P}_t(x_0, y_0, 0) = 0 & \text{sur la paroi, en dehors de la plaque} \end{cases} = 0$

$$\hat{P}_t(x, y, z) = -\rho_0 \omega^2 \iint_{\Sigma_{pl}} G_a(x, y, z; x_0, y_0, 0) \hat{\xi}(x_0, y_0) d\sigma_0$$

or  $\hat{P}_r(x, y, z) = \rho_0 \omega^2 \iint_{\Sigma_{pl}} G_a(x, y, z; x_0, y_0, 0) \hat{\xi}(x_0, y_0) d\sigma_0$

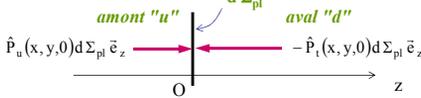
$$\hat{P}_t(x, y, z) = -\hat{P}_r(x, y, z)$$

### Force surfacique résultante sur la paroi (en $z = 0$ )

- Pression du champ amont  $\hat{P}_u(x, y, 0) = 2\hat{P}_{inc}(x, y, 0) + \hat{P}_r(x, y, 0)$
- Pression du champ aval  $\hat{P}_t(x, y, z) = -\hat{P}_r(x, y, z) \Rightarrow \hat{P}_t(x, y, 0) = -\hat{P}_r(x, y, 0)$

$$\hat{P}_u(x, y, 0) = 2\hat{P}_{inc}(x, y, 0) - \hat{P}_t(x, y, 0)$$

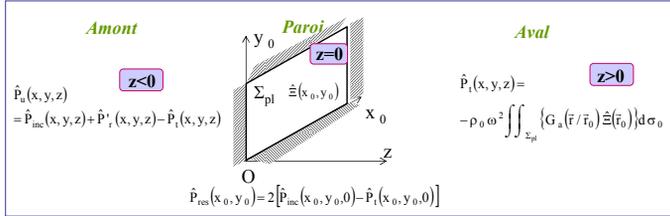
- Force résultante sur un élément de paroi  $d\Sigma_{pl}$   $\hat{F}_{res} = [\hat{P}_u(x, y, 0) - \hat{P}_t(x, y, 0)] d\Sigma_{pl} \vec{e}_z$   
 $= [2\hat{P}_{inc}(x, y, 0) - 2\hat{P}_t(x, y, 0)] d\Sigma_{pl} \vec{e}_z$



- Force surfacique résultante sur la paroi en  $z = 0$

$$\hat{F}_{res}(x, y) = 2[\hat{P}_{inc}(x, y, 0) - \hat{P}_t(x, y, 0)]$$

### Equations intégrales couplées



2 inconnues :  $\hat{P}_t(x, y, z)$  et  $\hat{\xi}(x, y)$  ; système de **deux équations intégrales couplées**

$$\hat{\xi}(x, y) = \sum_m \sum_n \hat{a}_{mn} \Psi_{mn}(x, y) \quad \text{avec} \quad \hat{a}_{mn} = \frac{\langle \Psi_{mn} | \hat{F}_{res} / B \rangle}{(\chi_{mn}^2 - \chi^2) + i\omega R}$$

$$c.à.d. \quad \hat{a}_{mn} = \frac{\iint_{\Sigma_{pl}} 2[\hat{P}_{inc}(x_0, y_0, 0) - \hat{P}_t(x_0, y_0, 0)] \Psi_{mn}(x_0, y_0) dx_0 dy_0}{B[(\chi_{mn}^2 - \chi^2) + i\omega R]}$$

$$et \quad \hat{P}_t(x, y, z) = -\rho_0 \omega^2 \iint_{\Sigma_{pl}} G_a(x, y, z; x_0, y_0, 0) \hat{\xi}(x_0, y_0) dx_0 dy_0$$

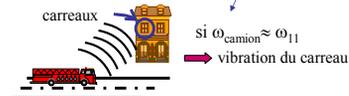
### Interprétation physique

Perturbation apportée par le champ acoustique dans le fluide créé au point  $(x_0, y_0)$  par la contribution du mode  $(\mu, \nu)$  au mouvement vibratoire de l'élément de surface  $dx_1 dy_1$  situé au point  $(x_1, y_1)$ , à la contribution du mode  $(m, n)$  au mouvement vibratoire de l'élément  $dx_0 dy_0 \equiv$  réaction sur  $|mn\rangle$  en  $(x_0, y_0)$  du champ acoustique  $|2G_a|_{\mu\nu}$  en cet endroit, créé en  $(x_1, y_1)$  et inversement.

$$\hat{a}_{mn} = \frac{\langle 2\hat{P}_{inc} | mn \rangle + \rho_0 \omega^2 \sum_{\mu, \nu} \hat{a}_{\mu\nu} \langle \mu\nu | 2G_a | mn \rangle}{B[(\chi_{mn}^2 - \chi^2) + i\omega R] - \rho_0 \omega^2 \langle mn | 2G_a | mn \rangle}$$

Résonance si  $\chi \approx \chi_{mn}$  oscillateur classique

La contribution du mode  $(m, n)$  au rayonnement se traduit par une réaction sur ce mode et par une perte d'énergie de ce mode : le mode  $(m, n)$  rayonne un champ acoustique qui atténue sa contribution au champ vibratoire.



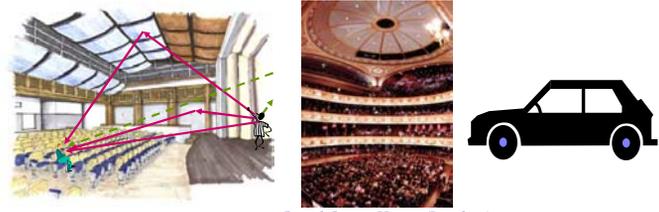
### Produits scalaires

$$\langle \hat{F}_{res} | \Psi_{mn} \rangle = \langle \hat{F}_{res} | mn \rangle = \iint_{\Sigma_{pl}} \hat{P}_{res}(x_0, y_0) \Psi_{mn}(x_0, y_0) dx_0 dy_0$$

$$\langle \mu\nu | 2G_a | mn \rangle = \iint_{\Sigma_{pl}} \left\{ \iint_{\Sigma_{pl}} [2G_a(x_0, y_0, 0; x_1, y_1, 0) \Psi_{\mu\nu}(x_1, y_1)] dx_1 dy_1 \right\} \Psi_{mn}(x_0, y_0) dx_0 dy_0$$

# L'acoustique des espaces clos

## Acoustique des espaces clos (1/18)

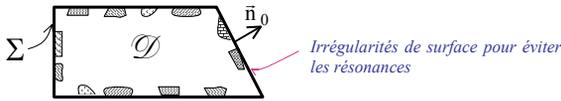


Royal Opera House (Londres)

- **But : répondre à un certain nombre de questions posées par l'acoustique des salles**
  - ✓ pourquoi éviter les parois parallèles ?
  - ✓ pourquoi utiliser une répartition d'impédance non homogène ?
  - ✓ l'expression "le son ne passe pas la rampe" a-t-elle un sens ?
  - ✓ quel est le principe du "contrôle actif" ?
  - ✓ qu'est-ce qu'un flutter-écho, etc. ?
- **Comment ?** En étudiant un cas d'école simple (forme simple avec "accidents") pour en extraire les idées physique simples

## Acoustique des espaces clos (2/18)

• **Forme retenue :**



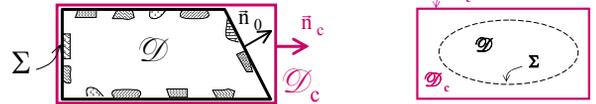
Irrégularités de surface pour éviter les résonances

- ✓  $\mathcal{D}$  : cavité, auditorium, habitacle de voiture, ...
- ✓ Irrégularités de surface :
  - irrégularités géométriques (exemple de parois non parallèles)
  - répartition d'admittances  $\beta$  non uniforme

→ uniformisation du champ
- ✓ Sources  $\hat{F}$  et  $\hat{U}$  étendues → formulation intégrale
- **Comment ?** En étudiant un cas d'école simple (forme simple avec accidents) pour en extraire les idées physique simples

## Acoustique des espaces clos (3/18)

• **Géométrie "compatible" :**



- ✓ Fonction de Green aussi adaptée que possible au problème considéré
  - la plus simple (la moins adaptée) :  $e^{-ikr}/r$ 
    - rôle considérable de  $\iint_{\Sigma_c} (G \partial_{n_0} \hat{p} - \hat{p} \partial_{n_0} G) d\sigma_0$
  - la plus adaptée minimise le rôle de  $\iint_{\Sigma_c} (G \partial_{n_0} \hat{p} - \hat{p} \partial_{n_0} G) d\sigma_0$  (on ne lui attribue plus qu'un rôle de correction)
- ✓ Choix d'un domaine dit "**compatible**"  $\mathcal{D}_c$  (englobant le domaine réel) et choix d'impédances pour réussir à calculer une fonction de Green (ex : admittance  $\zeta$  donnée en  $x=0$  (simple intermédiaire de calcul))



numériquement ou analytiquement finalement "pas si loin de la réalité"...

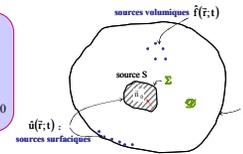
## Rappel : cas où la fonction de Green satisfait aux mêmes conditions aux frontières que $\hat{P}$

- **Problème**  $\begin{cases} (\Delta + k^2) \hat{P}(\vec{r}; \omega) = -\hat{F}(\vec{r}; \omega), & \vec{r} \in \mathcal{D} & (1) \\ [\partial_{n_0} + ik_0 \beta(\vec{r}; \omega)] \hat{P}(\vec{r}; \omega) = \hat{U}(\vec{r}; \omega), & \vec{r} \in \Sigma & (2) \end{cases}$
  - **Problème élémentaire**  $\begin{cases} (\Delta + k^2) G(\vec{r}/\vec{r}_0) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), & \vec{r} \in \mathcal{D} & (8) \\ [\partial_{n_0} + ik_0 \beta(\vec{r}; \omega)] G(\vec{r}/\vec{r}_0) = 0, & \vec{r} \in \Sigma & (9) \end{cases}$
  - **Formulation intégrale**
- obligation : problème réel (8)      choix de conditions aux frontières (9)
- $$\hat{P}(\vec{r}; \omega) = \iiint_{\mathcal{D}} G(\vec{r}, \vec{r}_0) \hat{F}(\vec{r}_0; \omega) d\mathcal{V}_0 + \iint_{\Sigma} \{G(\vec{r}, \vec{r}_0) \partial_{n_0} \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) - \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) \partial_{n_0} G(\vec{r}, \vec{r}_0)\} d\sigma_0 \quad (7)$$
- $$\begin{cases} G(2) \Rightarrow G \partial_{n_0} \hat{P} = G(\hat{U} - ik_0 \beta \hat{P}) & \Rightarrow G \partial_{n_0} \hat{P} - \hat{P} \partial_{n_0} G = G \hat{U} \\ \hat{P}(9) \Rightarrow \hat{P} \partial_{n_0} G = \hat{P}(-ik_0 \beta G) & \Rightarrow \iint_{\Sigma} (G \partial_{n_0} \hat{P} - \hat{P} \partial_{n_0} G) d\sigma_0 = \iint_{\Sigma} G \hat{U} d\sigma_0 \quad (9) \end{cases}$$

(9) dans (7) : →

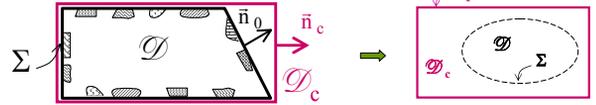
$$\hat{P}(\vec{r}; \omega) = \iiint_{\mathcal{D}} G(\vec{r}, \vec{r}_0) \hat{F}(\vec{r}_0; \omega) d\mathcal{V}_0 + \iint_{\Sigma} G(\vec{r}, \vec{r}_0) \hat{U}(\vec{r}_0; \omega) d\sigma_0$$

simple ajout des sources



## Acoustique des espaces clos (4/18)

• **Géométrie "compatible" (suite) :**



- ✓ La plupart du temps, impossibilité de calculer la **fonction de Green** satisfaisant aux conditions aux frontières du domaine réel

$$\hat{P}(\vec{r}; \omega) = \iiint_{\mathcal{D}} G(\vec{r}/\vec{r}_0) \hat{F}(\vec{r}_0; \omega) d\mathcal{V}_0 + \iint_{\Sigma} \{G(\vec{r}/\vec{r}_0) \partial_{n_0} \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) - \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) \partial_{n_0} G(\vec{r}/\vec{r}_0)\} d\sigma_0$$

correction par rapport au champ obtenu sur un domaine  $\mathcal{D}_c$  (si  $G$  satisfait à des conditions aux frontières pas trop "éloignées" des conditions aux frontières réelles)

$$G(\vec{r}/\vec{r}_0) = \sum_m \frac{\psi_m(\vec{r}_0)}{k_m^2 - k_0^2} \psi_m(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \mathcal{D}_c \quad \text{ou} \quad \begin{cases} (\Delta + k_m^2) \psi_m(\vec{r}) = 0, & \vec{r} \in \mathcal{D}_c \\ [\partial_{n_0} + ik_0 \zeta(\vec{r}; \omega)] \psi_m(\vec{r}) = 0, & \vec{r} \in \Sigma_c \end{cases}$$

problème aux valeurs propres

### Acoustique des espaces clos (5/18)

- **Fonction de Green dans un espace compatible, avec conditions aux frontières distinctes des conditions aux frontières réelles**

✓ Parois parfaitement réfléchissantes ( $\zeta = 0$ )

$$\psi_m(\vec{r}) = \psi_{m_x, m_y, m_z}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2-\delta_{m_x,0}}{L_x}} \sqrt{\frac{2-\delta_{m_y,0}}{L_y}} \sqrt{\frac{2-\delta_{m_z,0}}{L_z}} \cos\left(\frac{m_x \pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{m_y \pi}{L_y} y\right) \cos\left(\frac{m_z \pi}{L_z} z\right)$$

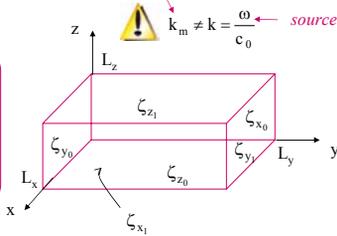
$$k_m^2 = k_{m_x, m_y, m_z}^2 = \left(\frac{m_x \pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m_y \pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{m_z \pi}{L_z}\right)^2 \quad \text{géométrie de la cavité}$$

✓ Parois impédantes ( $\zeta \neq 0$  et "petit")

$$\psi_m(\vec{r}) = \psi_{m_x, m_y, m_z}(\vec{r}) = C_{m_x}(x) C_{m_y}(y) C_{m_z}(z)$$

$$C_{m_x}(x) \approx \sqrt{\frac{2-\delta_{m_x,0}}{L_x}} \cos\left(\chi_{m_x} x - i\zeta_{x_0} \frac{k_0}{\chi_{m_x}}\right)$$

$$\chi_{m_x}^2 \approx \left(\frac{m_x \pi}{L_x}\right)^2 + i(2-\delta_{m_x,0}) \frac{k_0}{L_x} (\zeta_{x_0} + \zeta_{x_1})$$



### Acoustique des espaces clos (6/18)

- **Fonction de Green et fonctions propres dans le cas où le domaine  $\mathcal{D}_c$  est un parallélépipède rectangle aux parois parfaitement réfléchissantes ( $\zeta = 0$ )**

$$G(\vec{r}/\vec{r}_0) = \sum_m \frac{\psi_m(\vec{r}_0)}{k_m^2 - k_0^2} \psi_m(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \mathcal{D}_c$$

$$\psi_m(\vec{r}) = \psi_{m_x, m_y, m_z}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2-\delta_{m_x,0}}{L_x}} \sqrt{\frac{2-\delta_{m_y,0}}{L_y}} \sqrt{\frac{2-\delta_{m_z,0}}{L_z}} \cos\left(\frac{m_x \pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{m_y \pi}{L_y} y\right) \cos\left(\frac{m_z \pi}{L_z} z\right)$$

$$k_m^2 = k_{m_x, m_y, m_z}^2 = \left(\frac{m_x \pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m_y \pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{m_z \pi}{L_z}\right)^2$$

✓  $m_x=0, m_y=0, m_z=0 \Rightarrow k_m=0$

- > mode à fréquence propre nulle (rappel : on entend la fréquence  $\omega$  de la source)
- > mode prépondérant pour les très basses fréquences ( $\omega \ll \text{Inf}(\omega_{100}, \omega_{010}, \omega_{001}, \dots)$ )
- > la contribution de ce mode correspond à une répartition uniforme de pression dans la cavité ( $\psi_{000}$  n'est pas fonction de  $\vec{r}$ )

### Acoustique des espaces clos (7/18)

- **Fonction de Green et fonctions propres dans le cas où le domaine  $\mathcal{D}_c$  est un parallélépipède rectangle aux parois parfaitement réfléchissantes ( $\zeta = 0$ )**

$$G(\vec{r}/\vec{r}_0) = \sum_m \frac{\psi_m(\vec{r}_0)}{k_m^2 - k_0^2} \psi_m(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \mathcal{D}_c$$

$$\psi_m(\vec{r}) = \psi_{m_x, m_y, m_z}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2-\delta_{m_x,0}}{L_x}} \sqrt{\frac{2-\delta_{m_y,0}}{L_y}} \sqrt{\frac{2-\delta_{m_z,0}}{L_z}} \cos\left(\frac{m_x \pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{m_y \pi}{L_y} y\right) \cos\left(\frac{m_z \pi}{L_z} z\right)$$

$$k_m^2 = k_{m_x, m_y, m_z}^2 = \left(\frac{m_x \pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m_y \pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{m_z \pi}{L_z}\right)^2$$

✓  $m_x=1, m_y=0, m_z=0 \Rightarrow$  contribution en  $\cos\left(\frac{\pi}{L_x} x\right)$



- > ne dépend ni de y, ni de z (mode axial)
  - >  $\sum$  : structure spatiale du champ = superposition des structures spatiales de tous les modes
  - > si ce mode (1,0,0) est le seul dans la cavité, pression nulle au milieu et maximale sur les côtés...
  - > source ponctuelle en  $\vec{r}_0$ :  $\psi_m(\vec{r}_0) \Rightarrow$  si  $\vec{r}_0$  est au centre, pas de transfert d'énergie de la source (ponctuelle) vers ce mode (évitte de déclencher un mode)
- $\Rightarrow$  par allégorie, "le son ne passe pas la rampe"

### Acoustique des espaces clos : plan d'étude (8/18)

- 1) Problème dans le domaine de Fourier      2) Problème élémentaire, fonction de Green

$$\begin{cases} (\Delta + k^2) \hat{P}(\vec{r}; \omega) = -\hat{F}(\vec{r}; \omega), & \vec{r} \in \mathcal{D} \\ [\partial_{n_0} + i k_0 \beta(\vec{r}; \omega)] \hat{P}(\vec{r}; \omega) = \hat{U}(\vec{r}; \omega), & \vec{r} \in \Sigma \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\Delta + k^2) G(\vec{r}/\vec{r}_0) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0), & \vec{r} \in \mathcal{D}_c \\ [\partial_{n_c} + i k_0 \zeta(\vec{r}; \omega)] G(\vec{r}/\vec{r}_0) = 0, & \vec{r} \in \Sigma_c \end{cases}$$

- 3) Problème aux valeurs propres associé      4) Fonction de Green

$$\begin{cases} (\Delta + k^2) \psi_m(\vec{r}) = 0, & \vec{r} \in \mathcal{D}_c \\ [\partial_{n_c} + i k_0 \zeta(\vec{r}; \omega)] \psi_m(\vec{r}) = 0, & \vec{r} \in \Sigma_c \end{cases}$$

$$G(\vec{r}/\vec{r}_0) = \sum_m \frac{\psi_m(\vec{r}_0)}{k_m^2 - k_0^2} \psi_m(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \mathcal{D}_c$$

- 5) Problème avec équation intégrale **!** sur  $\mathcal{D}$  et non sur  $\mathcal{D}_c$

$$\hat{P}(\vec{r}; \omega) = \iint_{\mathcal{D}} G(\vec{r}/\vec{r}_0) \hat{F}(\vec{r}_0; \omega) d\mathcal{D}_0 + \iint_{\Sigma} \left\{ G(\vec{r}/\vec{r}_0) \partial_{n_0} \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) - \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) \partial_{n_0} [G(\vec{r}/\vec{r}_0)] \right\} d\sigma_0$$

$$[\partial_{n_0} + i k_0 \beta(\vec{r}; \omega)] \hat{P}(\vec{r}; \omega) = \hat{U}(\vec{r}; \omega), \quad \vec{r} \in \Sigma$$

### Acoustique des espaces clos : résolution pour $\zeta=0$ (9/18)

$$\hat{P}(\vec{r}; \omega) = \iint_{\mathcal{D}} G(\vec{r}/\vec{r}_0) \hat{F}(\vec{r}_0; \omega) d\mathcal{D}_0 + \iint_{\Sigma} \left\{ G(\vec{r}/\vec{r}_0) \partial_{n_0} \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) - \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) \partial_{n_0} [G(\vec{r}/\vec{r}_0)] \right\} d\sigma_0, \quad \vec{r} \in \mathcal{D}$$

$\Delta \neq \partial_{n_c} G(\vec{r}/\vec{r}_0) = 0$

$$\partial_{n_0} \hat{P}(\vec{r}; \omega) = -i k_0 \beta(\vec{r}; \omega) \hat{P}(\vec{r}; \omega) + \hat{U}(\vec{r}; \omega), \quad \vec{r} \in \Sigma$$

$$\Rightarrow \hat{P}(\vec{r}; \omega) = \iint_{\mathcal{D}} G(\vec{r}/\vec{r}_0) \hat{F}(\vec{r}_0; \omega) d\mathcal{D}_0$$

$$+ \iint_{\Sigma} \left\{ G(\vec{r}/\vec{r}_0) [-i k_0 \beta(\vec{r}; \omega) \hat{P}(\vec{r}; \omega) + \hat{U}(\vec{r}; \omega)] - \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) \partial_{n_0} [G(\vec{r}/\vec{r}_0)] \right\} d\sigma_0, \quad \vec{r} \in \mathcal{D}$$

or  $G(\vec{r}/\vec{r}_0) = \sum_m \frac{\psi_m(\vec{r}_0)}{k_m^2 - k_0^2} \psi_m(\vec{r}), \quad \vec{r} \in \mathcal{D}_c$

$$\hat{P}(\vec{r}; \omega) = \sum_m \psi_m(\vec{r}) \left\{ \frac{1}{k_m^2 - k_0^2} \iint_{\mathcal{D}} \psi_m(\vec{r}_0) \hat{F}(\vec{r}_0; \omega) d\mathcal{D}_0 + \iint_{\Sigma} \left\{ \psi_m(\vec{r}_0) [-i k_0 \beta(\vec{r}; \omega) \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) + \hat{U}(\vec{r}_0; \omega)] - \hat{P}(\vec{r}_0; \omega) \partial_{n_0} [\psi_m(\vec{r}_0)] \right\} d\sigma_0 \right\}, \quad \vec{r} \in \mathcal{D}$$

seul terme dépendant de  $\vec{r}$   $\hat{A}_m$  indépendant de  $\vec{r}$

### Acoustique des espaces clos : résolution pour $\zeta=0$ (9/18)

- **Notations**

$$\langle m | \hat{F} \rangle_{\mathcal{D}} = \iiint_{\mathcal{D}} \psi_m(\vec{r}_0) \hat{F}(\vec{r}_0) d\vec{r}_0 \quad \langle m | \hat{U} \rangle_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \psi_m(\vec{r}_0) \hat{U}(\vec{r}_0) d\vec{r}_0$$

$$\langle \mu | \mathcal{O} | m \rangle_{\Sigma} = \iint_{\Sigma} \psi_{\mu}(\vec{r}_0) \mathcal{O} \psi_m(\vec{r}_0) d\vec{r}_0 \quad \text{opérateur : } \mathcal{O} = i k_0 \hat{\beta} \text{ ou } \partial_{n_0}$$

- **Coefficient  $\hat{A}_m$  du développement modal**

$$\hat{A}_m = \frac{1}{k_m^2 - k_0^2} \left\{ \langle m | \hat{F} \rangle_{\mathcal{D}} + \iint_{\Sigma} \left\{ \psi_m(\vec{r}_0) (-i k_0 \hat{\beta}) \left[ \sum_{\mu} \hat{A}_{\mu} \psi_{\mu}(\vec{r}_0) \right] + \psi_m(\vec{r}_0) \hat{U}(\vec{r}_0; \omega) - \sum_{\mu} \hat{A}_{\mu} \psi_{\mu}(\vec{r}_0) \partial_{n_0} [\psi_m(\vec{r}_0)] \right\} d\sigma_0 \right\}$$

$$\hat{A}_m = \frac{1}{k_m^2 - k_0^2} \left\{ \langle m | \hat{F} \rangle_{\mathcal{D}} + \langle m | \hat{U} \rangle_{\Sigma} - \sum_{\mu} \hat{A}_{\mu} \langle \mu | (i k_0 \hat{\beta} + \partial_{n_0}) | m \rangle_{\Sigma} \right\}$$

avec  $\langle \mu | i k_0 \hat{\beta} | m \rangle_{\Sigma} = \langle m | i k_0 \hat{\beta} | \mu \rangle_{\Sigma}$  MAIS  $\langle \mu | \partial_{n_0} | m \rangle_{\Sigma} \neq \langle m | \partial_{n_0} | \mu \rangle_{\Sigma}$

### Acoustique des espaces clos : résolution pour $\zeta=0$ (10/18)

- Coefficient  $\hat{A}_m$  du développement modal

$$\hat{A}_m = \frac{1}{k_m^2 - k^2} \left\{ \langle m | \hat{F} \rangle_{\mathcal{V}} + \langle m | \hat{U} \rangle_{\Sigma} - \sum_{\mu} \hat{A}_{\mu} \langle \mu | (i k_0 \hat{\beta} + \partial_{n_0}) m \rangle_{\Sigma} \right\}$$

avec  $\sum_{\mu} \hat{A}_{\mu} \langle \mu | (i k_0 \hat{\beta} + \partial_{n_0}) m \rangle_{\Sigma} = \sum_{\mu \neq m} \hat{A}_{\mu} \langle \mu | (i k_0 \hat{\beta} + \partial_{n_0}) m \rangle_{\Sigma} + \hat{A}_m \langle m | (i k_0 \hat{\beta} + \partial_{n_0}) m \rangle_{\Sigma}$

$$\hat{A}_m = \frac{\langle m | \hat{F} \rangle_{\mathcal{V}} + \langle m | \hat{U} \rangle_{\Sigma} - \sum_{\mu \neq m} \hat{A}_{\mu} \langle \mu | (i k_0 \hat{\beta} + \partial_{n_0}) m \rangle_{\Sigma}}{k_m^2 - k^2 + \langle m | (i k_0 \hat{\beta} + \partial_{n_0}) m \rangle_{\Sigma}} = \frac{\hat{S}_m(\omega) - \sum_{\mu \neq m} \hat{C}_{\mu m}(\hat{\beta}, \Sigma) \hat{A}_{\mu}}{\hat{\Omega}_m^2 - \omega^2}$$

avec  $\hat{P}(\vec{r}; \omega) = \sum_m \hat{A}_m \psi_m(\vec{r})$  ← la structure spatiale est celle des modes superposés

et 
$$\psi_m(\vec{r}) = \sqrt{\frac{2 - \delta_{m,0}}{L_x}} \sqrt{\frac{2 - \delta_{m,0}}{L_y}} \sqrt{\frac{2 - \delta_{m,0}}{L_z}} \cos\left(\frac{m_x \pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{m_y \pi}{L_y} y\right) \cos\left(\frac{m_z \pi}{L_z} z\right)$$

$$k_m^2 = \left(\frac{m_x \pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{m_y \pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{m_z \pi}{L_z}\right)^2$$

### Acoustique des espaces clos : interprétation (11/18)

Transfert d'énergie des sources  $\hat{F}$  et  $\hat{U}$  pour créer la contribution du mode  $m$  au champ acoustique. Si la fonction source  $\hat{F}$  est "orthogonale" au mode  $m$ , pas de transfert d'énergie de cette source au mode  $m$ .

Couplage du mode  $\mu$  avec le mode  $m$  (échange d'énergie entre les modes) d'autant plus important que l'intégrale  $\langle \mu | (i k_0 \hat{\beta} + \partial_{n_0}) m \rangle_{\Sigma}$  est importante.

- Si  $\beta$  est non uniforme et si défauts géométriques, cette intégrale devient relativement importante : distribution de l'énergie par les modes.
- Si  $\beta$  uniforme sur chaque paroi et si géométrie compatible,  $\langle \mu | (i k_0 \hat{\beta} + \partial_{n_0}) m \rangle_{\Sigma} \approx k_0 \beta \langle \mu | m \rangle_{\Sigma} \approx \delta_{\mu m} \approx 0$ , peu ou pas de couplage de mode.

sources en phase

géométrie de la cavité

source  $(\omega)$  + milieu  $(c_0)$

absorbant a un effet si  $\psi_m$  non nul à cet endroit

irrégularité de géométrie permet de limiter l'effet d'un mode

Résonance si  $k \approx k_m$

oscillateur classique

à la résonance

facteur de qualité

### Acoustique des espaces clos : interprétation (12/18)

- source ponctuelle émettant un signal harmonique jusqu'à l'époque  $t = 0$  ; couplages de modes négligés (supposés très faibles)

Rappel (source harmonique) : 
$$\hat{A}_m = \frac{\hat{S}_m(\omega) - \sum_{\mu \neq m} \hat{C}_{\mu m}(\hat{\beta}, \Sigma) \hat{A}_{\mu}}{\hat{\Omega}_m^2 - \omega^2} \approx \frac{\hat{S}_m(\omega)}{\hat{\Omega}_m^2 - \omega^2}$$

avec  $\hat{\Omega}_m \approx \omega_m + i \gamma_m$  et  $\gamma_m \propto \text{Im} \left( \langle m | (i k_0 \hat{\beta} + \partial_{n_0}) m \rangle_{\Sigma} \right)$  traduit l'absorption de l'énergie du mode considéré par les parois

$\hat{S}_m(t) = H(-t) \hat{\sigma}_m e^{i \omega_s t}$

$$\begin{cases} t \leq 0, & p(\vec{r}; t) = \sum_m \frac{\hat{\sigma}_m}{\hat{\Omega}_m^2 - \omega_s^2} \cos(\omega_s t + \varphi_m) \psi_m(\vec{r}) \\ t \geq 0, & p(\vec{r}; t) = \sum_m \frac{\hat{\sigma}_m}{\hat{\Omega}_m^2 - \omega_s^2} e^{-\gamma_m t} \cos(\omega_m t + \varphi_m) \psi_m(\vec{r}) \end{cases}$$

- ✓  $t \leq 0$  : on entend l'unique fréquence  $\omega_s$
- ✓  $t > 0$  : chaque mode oscille dans le temps à sa fréquence propre (on entend toutes les fréquences  $\omega_m$ )
  - après extinction de la source, ce sont les modes de fréquences très voisines de  $\omega_s$  qui ont la plus grande amplitude, et que l'on entend principalement.
  - on entend tous les  $\omega_m$ , mais la mémoire de  $\omega_s$  est contenue dans  $\hat{\Omega}_m^2 - \omega_s^2$ .

### Acoustique des espaces clos : interprétation (13/18)

- source ponctuelle "explosive" à l'époque  $t = 0$  (dirac)

$\hat{S}_m(t) = \hat{\sigma}_m \delta(t)$

$$\begin{cases} t \leq 0, & p(\vec{r}; t) = 0 \\ t \geq 0, & p(\vec{r}; t) = \sum_m \frac{-\hat{\sigma}_m}{2i \Omega_m} e^{-\gamma_m t} \cos(\omega_m t + \varphi_m) \psi_m(\vec{r}) \end{cases}$$

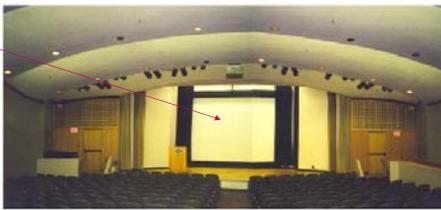
Curtain Open (flutter echo)

- ✓ plus de résonance autour des fréquences de source
- ✓ énergie transmise à tous les modes : tous les modes sont générés
- ✓ aucun mode n'est particulièrement privilégiée (en raison de la largeur "infinie" du spectre de fréquence de la source), seuls étant éventuellement absents les modes pour lesquels  $\hat{\sigma}_m = 0$  (transfert d'énergie source-mode nul, soit, pour une source ponctuelle,  $\psi_m(\vec{r}_0) = 0$ ).

### Acoustique des espaces clos : interprétation (14/18)

écran sur un mur parfaitement réfléchissant

McKinnon Theater, Kettering University, Flint, MI



mur parfaitement réfléchissant



400 places



### Acoustique des espaces clos : interprétation (15/18)

- flutter écho

Curtain Open (flutter echo)

échos successifs

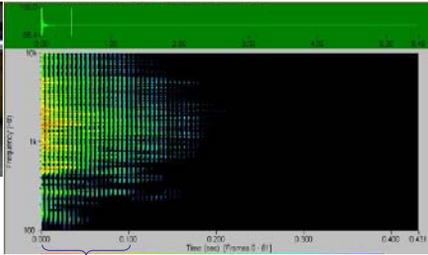
Curtain closed (no flutter echo)

McKinnon Theater, Kettering University, Flint, MI

<http://www.kettering.edu/acad/scimath/physics/acoustics/McKinnon/McKinnon.html>  
Animation courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University

### Acoustique des espaces clos : interprétation (16/18)

- flutter écho entre sol et plafond



vitesse d'écoute normale  
 vitesse d'écoute divisée par deux

(1 strie = passage devant le microphone)  
 $\approx 17$  stries en 0.1 s  $\rightarrow \approx 170$  stries en 1 s  
 $\rightarrow 170 * d$  (ou  $2d$ ) = 340  $d = 2$  m

[http://www.allchurchsound.com/ACS/R\\_D/kitchen/](http://www.allchurchsound.com/ACS/R_D/kitchen/)

### Acoustique des espaces clos : interprétation (17/18)

- flutter écho



tambour\_sans\_traitement



tambour avec traitement



[http://www.allchurchsound.com/ACS/R\\_D/nov42001tests/](http://www.allchurchsound.com/ACS/R_D/nov42001tests/)

### Acoustique des espaces clos : interprétation (18/18)

- flutter écho



clap\_sans\_traitement



clap\_avec\_traitement



[http://www.allchurchsound.com/ACS/R\\_D/nov42001tests/](http://www.allchurchsound.com/ACS/R_D/nov42001tests/)

### Analyse modale d'une cymbale (1/5)

● **Le problème : source ponctuelle "explosive" à l'époque t = 0 (dirac)**

- ✓ Espace clos "cylindrique"
- ✓ Analogie avec un espace clos parallélépipédique :



$$\hat{S}_m(t) = \hat{\sigma}_m \delta(t)$$

$$\begin{cases} t \leq 0, & p(\vec{r}; t) = 0 \\ t \geq 0, & p(\vec{r}; t) = \sum_m \left| -\frac{\hat{\sigma}_m}{2i\Omega_m} \right| e^{-\gamma_m t} \cos(\omega_m t + \phi_m) \psi_m(\vec{r}) \end{cases}$$

- ✓ plus de résonance autour des fréquences de source
- ✓ énergie transmise à tous les modes : tous les modes sont générés
- ✓ aucun mode n'est particulièrement privilégié (en raison de la largeur "infinie" du spectre de fréquence de la source), seuls étant éventuellement absents les modes pour lesquels  $\hat{\sigma}_m = 0$  (transfert d'énergie source-mode nulle, soit, pour une source ponctuelle,  $\psi_m(\vec{r}_0) = 0$ ).

● **But de l'analyse**

- ✓ Montrer l'importance du transfert d'énergie source-mode
  - ♦ suivant l'étendue spatiale de la source
  - ♦ suivant la position spatiale de la source

### Analyse modale d'une cymbale (3/5)

● **Influence de l'étendue spatiale de la source**



baguette "quasi-ponctuelle"  
sons plus riches en aigus

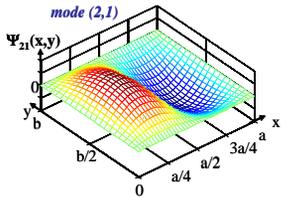


baguette non ponctuelle  
sons beaucoup moins riches en aigus (les sons graves dominant)



Analogie avec l'exemple d'une onde plane incidente sur une plaque vibrant sur le mode (2,1)

$$\hat{A}_m \propto \langle m | \hat{F} \rangle_{\mathcal{D}} = \int_0^a \hat{F}(x) \psi_m(x) dx = \hat{F} \int_0^a \psi_m(x) dx = 0$$

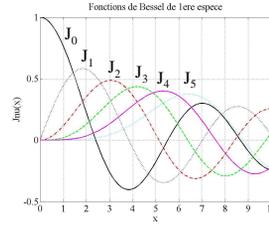


### Analyse modale d'une cymbale (2/5)

● **Les modes propres**

- ✓ En toute première approximation (épaisseur non constante, disque non plan, plaque et non membrane), les modes sont tels que

$$J_\nu(k_w a) = 0, \quad k_w = k_0$$



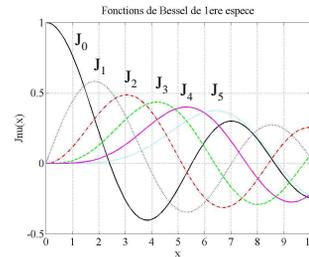
- ✓ Raisonnement très qualitatif ==> analogie avec un espace clos parallélépipédique de géométrie cartésienne valable
- ✓ Plus la fréquence est élevée, plus la longueur d'onde spatiale est petite

### Analyse modale d'une cymbale (4/5)

● **Influence de la position du point d'impact (1/2)**

- source ponctuelle en  $\vec{r}_0$ :  $\psi_m(\vec{r}_0) \rightarrow$  si  $\vec{r}_0$  est tel que  $\psi_m(\vec{r}_0) = 0$  pas de transfert d'énergie de la source (ponctuelle) vers ce mode (évite de déclencher un mode)  
Se souvenir de l'allégorie, "le son ne passe pas la rampe"

$$\hat{A}_m \propto \langle m | \hat{F} \rangle_{\mathcal{D}}$$



### Analyse modale d'une cymbale (5/5)

● **Influence de la position du point d'impact (2/2)**



baguette non ponctuelle



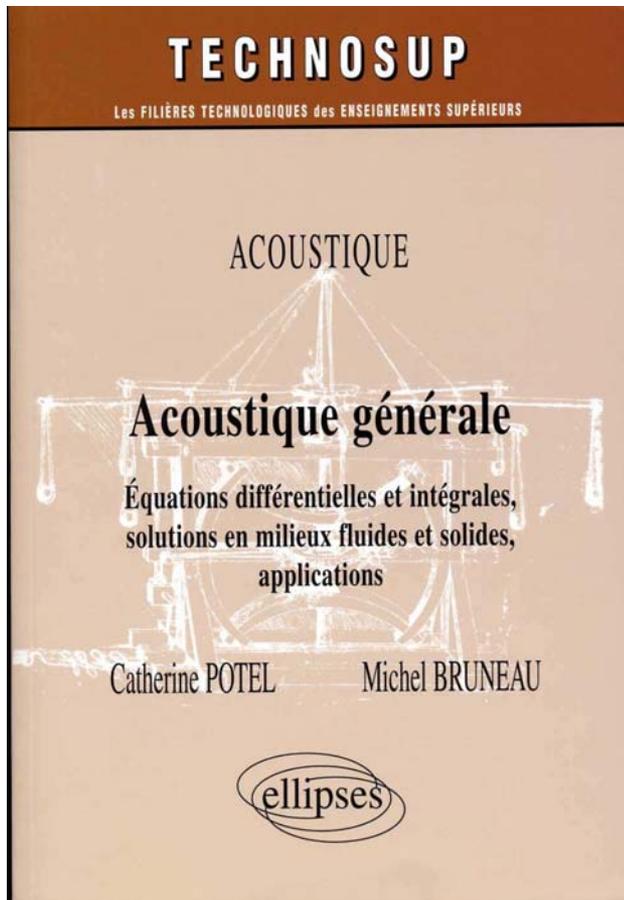
baguette "quasi-ponctuelle"



Avec la participation active de Michel et Anne-Marie Bruneau...

Transparents basés sur

C. POTEL, M. BRUNEAU, *Acoustique Générale - équations différentielles et intégrales, solutions en milieux fluide et solide, applications*, Ed. Ellipse collection Technosup, 352 pages, ISBN 2-7298-2805-2, 2006



La collection TECHNOSUP dirigée par Claude Chêze est une sélection d'ouvrages dans toutes les disciplines, pour les filières technologiques des enseignements supérieurs.

Niveau A **Approche** (éléments, résumés ou travaux dirigés) *IUT - BTS - 1<sup>er</sup> cycle*  
Niveau B **Bases** (cours avec exercices et problèmes résolus) *IUP - Licence*  
Niveau C **Compléments** (approfondissement, spécialisation) *Écoles d'ingénieurs, Master*

*L'ouvrage : niveaux B (Licence) et C (Master, Ecoles d'ingénieurs)*

L'ouvrage fournit avec minutie les bases de l'acoustique classique, tout en présentant régulièrement un ensemble d'applications relevant de la pratique de l'acoustique. Il est construit pour être compréhensible sans avoir recours à d'autres documents. Son contenu est lié à l'acoustique en milieux fluides simples, puis en milieux solides homogènes. Les hypothèses sous-jacentes sont régulièrement précisées et les méthodes exposées conservent le plus souvent un caractère analytique.

Pour couvrir le domaine de l'acoustique fondamentale, l'ouvrage traite successivement : les ondes acoustiques, l'environnement sonore et la perception des sons, les équations générales, les solutions fondamentales dans les systèmes de coordonnées courants, les problèmes aux limites et leur formulation intégrale, la propagation en milieu solide homogène (avec application au contrôle non destructif par ultrasons). Il s'achève sur des annexes qui apportent des éclairages sur les éléments mathématiques utiles et sur certaines notions délicates (impédance, vitesses de phase et de groupe...).

*Les auteurs :*

Catherine Potel est Professeur des universités à l'Université du Maine, où elle est responsable du Master professionnel Acoustique des transports. Elle mène des travaux de recherche dans le domaine de l'évaluation et du contrôle non destructifs par ultrasons.

Michel Bruneau est Professeur émérite à l'Université du Maine, où il a dirigé le 3<sup>e</sup> cycle d'acoustique et dont il a créé le Laboratoire d'acoustique associé au CNRS. Il mène des recherches dans le domaine des fluides dissipatifs confinés. Il a assuré diverses responsabilités scientifiques nationales.

*Illustration de couverture : Dessin de Léonard de Vinci.*



9 782729 828059

ISBN 2-7298-2805-2