

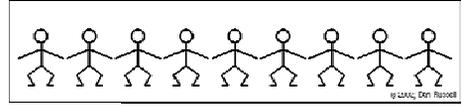
Chapitre 8

ONDES ELASTIQUES DANS LES SOLIDES ISOTROPES

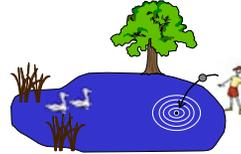
APPLICATION AU CONTROLE NON DESTRUCTIF PAR ULTRASONS

Onde mécanique (1/5)

- Une **onde mécanique** est un **mouvement oscillatoire** qui se transmet de proche en proche dans un milieu matériel, **par voisinage**, comme une **information**, un changement de position que l'on transmet à son voisin.

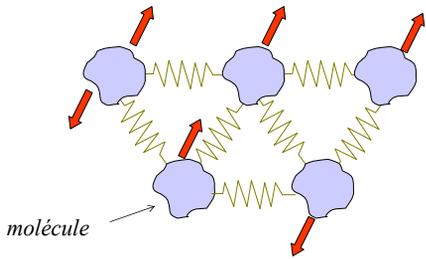


<http://www.kettering.edu/~drussell>
Animation courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University



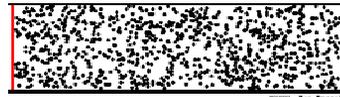
La particule d'eau au centre bouge et transmet son mouvement aux autres

Onde mécanique (2/5)



Représentation schématique de matière constituée de molécules (de masses données) en interactions élastiques.

Onde mécanique : onde de compression (3/5)



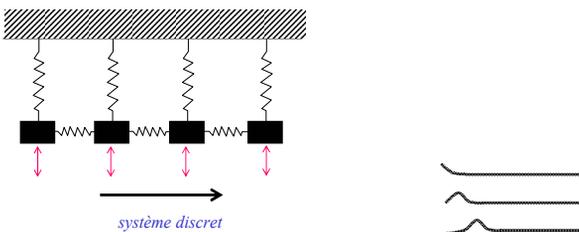
dans un gaz

<http://www.kettering.edu/~drussell>
Animation courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University



dans un ressort

Onde mécanique : onde de cisaillement (4/5)



système continu : propagation d'une impulsion le long d'un ressort. Les sections du ressort se déplacent de haut en bas à mesure que le pulse se déplace de la gauche vers la droite

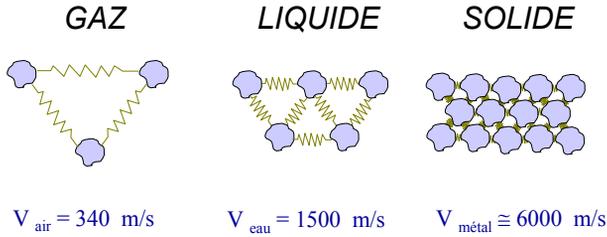
Onde mécanique : onde de flexion (5/5)



<http://www.kettering.edu/~drussell>
Animation courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University

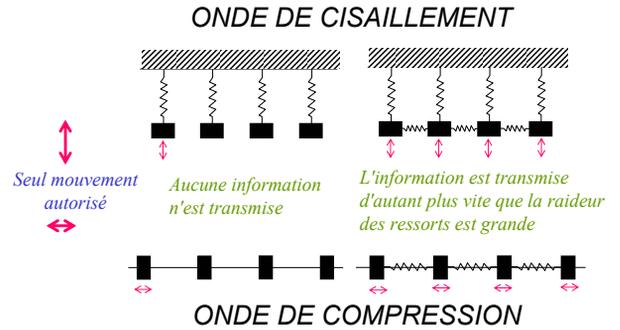
ondes de flexion dans une corde vibrante

Vitesse de propagation

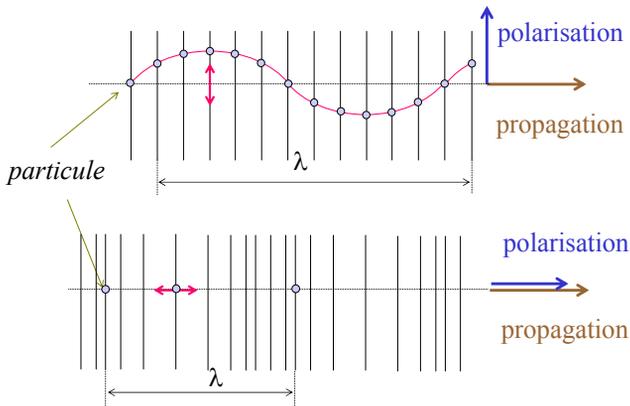


Aspect schématique des trois états fondamentaux de la matière et ordre de grandeur de la vitesse propagation des ondes de compression pour chacun d'eux

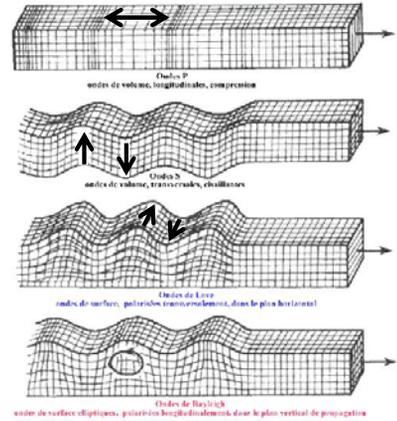
De la matière discontinue...



... à la matière continue

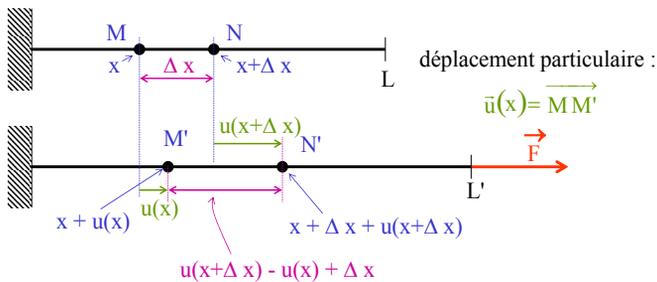


Différents types d'onde



<http://www.ens-lyon.fr/Planet-Terre/Infosciences/Geodynamique/Structure-interne/Sismologie/pendulum.html>

Allongement d'un fil extensible



variation relative de longueur du petit élément MN :

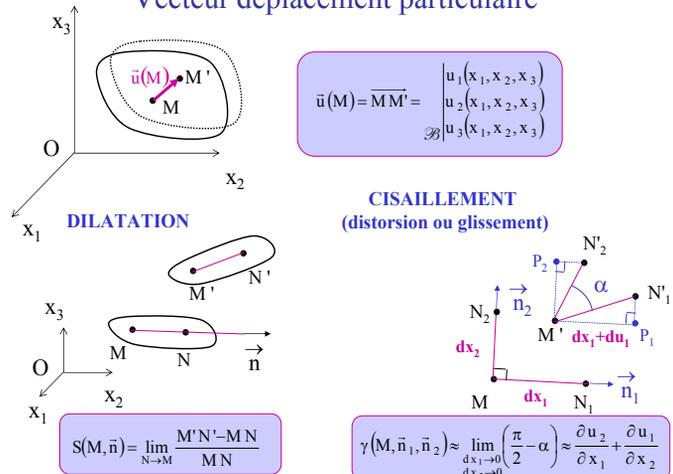
$$\frac{[u(x + \Delta x) - u(x) + \Delta x] - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$\Delta u = u(x + \Delta x) - u(x)$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{simple translation}$$

$$\Delta u \neq 0 \quad \text{déformation}$$

Vecteur déplacement particulaire



Déplacement

$\vec{u}(M) = \overline{MM'} = \begin{pmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$
 $\vec{u}(N) = \overline{NN'} = \begin{pmatrix} u_1 + d u_1 \\ u_2 + d u_2 \\ u_3 + d u_3 \end{pmatrix}$

$d u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} d x_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} d x_3 = (\overline{\text{grad}} u_1) \cdot d \overline{OM}$
 $d u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} d x_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} d x_3 = (\overline{\text{grad}} u_2) \cdot d \overline{OM}$
 $d u_3 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} d x_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} d x_3 = (\overline{\text{grad}} u_3) \cdot d \overline{OM}$

$\vec{d}\vec{u} = (\overline{\text{grad}} \vec{u}) \cdot d \overline{OM}$

$\vec{u}(N) = \vec{u}(M) + (\overline{\text{grad}} \vec{u}) \cdot d \overline{OM}$

Tenseur des déformations $\overline{\overline{S}}$

$d \vec{u} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} d x_1 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} d x_2 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} d x_3 = (\overline{\text{grad}} \vec{u}) \cdot d \vec{x}$ avec $\overline{\text{grad}} \vec{u} = \overline{\overline{S}} + \overline{\overline{\Omega}}$

$$\overline{\overline{S}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

symétrique

antisymétrique

$\vec{u}(N) = \vec{u}(M) + \overline{\overline{\Omega}} \cdot d \overline{OM} + \overline{\overline{S}} \cdot d \overline{OM}$
 $u_i(x_j + d x_j) = u_i(x_j) + S_{ij} d x_j + \Omega_{ij} d x_j$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Interprétation (1/3)

$\vec{u}(N) = \vec{u}(M) + \overline{\overline{\Omega}} \cdot d \overline{OM} + \overline{\overline{S}} \cdot d \overline{OM}$

- Si $\overline{\overline{\Omega}} = \vec{0}$ et $\overline{\overline{S}} = \vec{0}$ alors $\vec{u}(N) = \vec{u}(M)$
- Si $\vec{u}(M) = \vec{0}$ et $\overline{\overline{S}} = \vec{0}$ alors $\vec{u}(N) = \overline{\overline{\Omega}} \cdot d \overline{OM}$

$\vec{u}(N) = \begin{pmatrix} d u_1 \\ d u_2 \\ d u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d x_1 \\ d x_2 \\ d x_3 \end{pmatrix} = \omega_2 \wedge \begin{pmatrix} d x_1 \\ d x_2 \\ d x_3 \end{pmatrix} = \overline{\overline{\Omega}} \cdot \overline{MN}$

$\vec{u}(M) + \overline{\overline{\Omega}} \cdot d \overline{OM}$: déplacement du solide au sens mécanique simple rotation

- Si $\vec{u}(M) = \vec{0}$ et $\overline{\overline{\Omega}} = \vec{0}$ alors $\vec{u}(N) = \overline{\overline{S}} \cdot d \overline{OM}$ **déformation**

$$\vec{u}(N) = \underbrace{\vec{u}(M) + \overline{\overline{\Omega}} \cdot d \overline{OM}}_{\text{translation}} + \underbrace{\overline{\overline{S}} \cdot d \overline{OM}}_{\text{rotation}} + \underbrace{\overline{\overline{S}} \cdot d \overline{OM}}_{\text{déformation pure}}$$

mécanique

Interprétation (2/3) : déplacement local de deux points

$\vec{u}(N) = \vec{u}(M) + d \vec{u}_s + d \vec{u}_p$
 $\vec{d}\vec{u}$

translation + déformation + rotation
 translation + rotation
 translation + déformation

Interprétation (3/3)

$$\overline{\overline{S}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

S_{ii} : déformation dans la direction x_i
 S_{ij} : demi distorsion dans les directions x_i et x_j

$\gamma(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = \lim_{d x_2 \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$

déformation supposée sans cisaillement

$V' \approx V \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \Rightarrow (V' - V) / V \approx \text{div} \vec{u} = \text{trace} \overline{\overline{S}}$

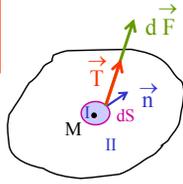
section droite (S), plan de coupe fictif (P), partie (E1) à gauche de la coupe, partie (E2) à droite de la coupe, solide (E)

$\vec{T}(M, \vec{n})$, $\vec{\sigma}$, \vec{n} , $d \vec{F}$, $d \vec{s}$

Tenseur des contraintes \bar{T} (1/2)

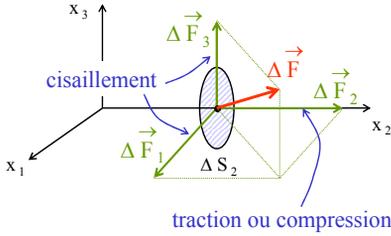
$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{dS} = \bar{T} \cdot \vec{n}$$

$$\mathcal{F}_i = T_{ik} n_k$$



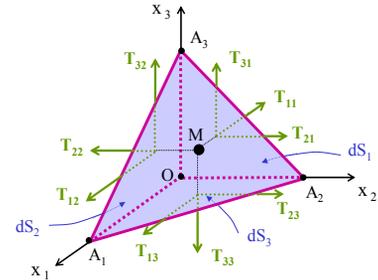
$$\bar{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

$$T_{ik} = \lim_{\Delta S_k \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta S_k} = T_{ki}$$

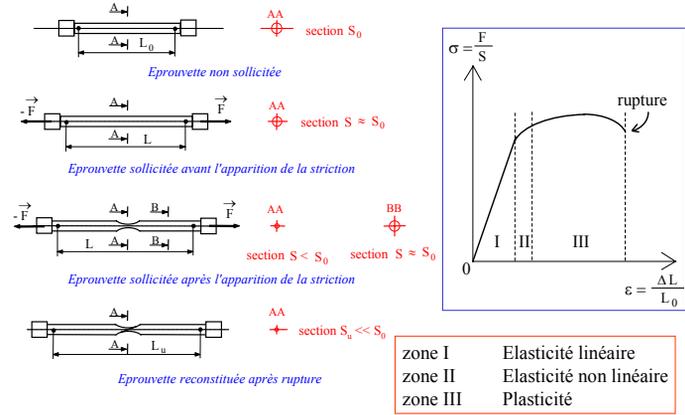


$$\vec{T}(M, \vec{e}_{x_2}) = \bar{T} \cdot \vec{e}_{x_2} = \begin{bmatrix} T_{12} \\ T_{22} \\ T_{32} \end{bmatrix}$$

Tenseur des contraintes \bar{T} (2/2)



Essai de traction



Loi de Hooke en milieu isotrope

- Contraintes normales :

$$T_{ii} = \lambda (S_{11} + S_{22} + S_{33}) + 2\mu S_{ii} \quad i \text{ étant fixé}$$

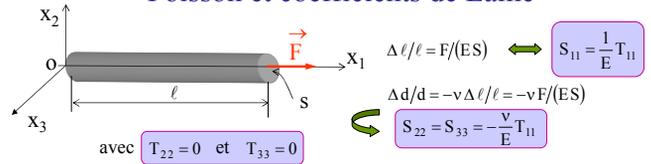
$$= \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

avec $S_{11} + S_{22} + S_{33} = \text{div } \vec{u} = \frac{\Delta V}{V}$ λ, μ : coefficients de Lamé

- Contraintes tangentielles :

$$T_{ij} = 2\mu S_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i \neq j$$

Relations entre module d'Young, coefficient de Poisson et coefficients de Lamé



- Loi de Hooke pour les contraintes normales :

$$T_{22} = \lambda (S_{11} + S_{22} + S_{33}) + 2\mu S_{22} \rightarrow T_{22} = \lambda \left(\frac{1}{E} - \frac{2\nu}{E} \right) T_{11} - \frac{2\mu\nu}{E} T_{11}$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

$$T_{11} = \lambda (S_{11} + S_{22} + S_{33}) + 2\mu S_{11} \rightarrow T_{11} = \lambda \left(\frac{1}{E} - \frac{2\nu}{E} \right) T_{11} + \frac{2\mu}{E} T_{11}$$

$$E = \lambda(1 - 2\nu) + 2\mu$$

Relations en solide isotrope

| | E, ν | E, μ | λ, μ | c ₁₁ , c ₁₂ |
|---|--------------------------------|------------------------------|--|--|
| λ | $\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ | $\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$ | λ | c ₁₂ |
| μ | $\frac{E}{2(1+\nu)}$ | μ | μ | $\frac{c_{11}-c_{12}}{2}$ |
| E | E | E | $\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ | $c_{11}-2\frac{c_{12}^2}{c_{11}+c_{12}}$ |
| B | $\frac{E}{3(1-2\nu)}$ | $\frac{\mu E}{3(3\mu-E)}$ | $\lambda+\frac{2}{3}\mu$ | $\frac{c_{11}+2c_{12}}{3}$ |
| ν | ν | $\frac{E-2\mu}{2\mu}$ | $\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ | $\frac{c_{12}}{c_{11}+c_{12}}$ |

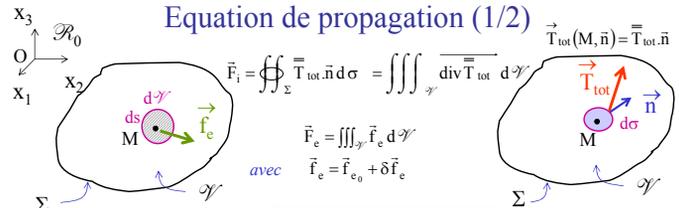
c₁₁, c₁₂ : constantes de rigidité (Pa)

E : Module de Young (Pa)

ν : Module de Poisson (sans unité)

B : Module d'élasticité volumique (Pa/m²)

λ, μ : Coefficients de Lamé (Pa)



- Résultante dynamique $\vec{d}(\mathcal{V}/\mathcal{R}_0) = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} d\mathcal{V}$
- Résultante des forces extérieures $\vec{R}(\text{ext} \rightarrow \mathcal{V}) = \iiint_{\mathcal{V}} (\vec{f}_e + \text{div} \vec{T}) d\mathcal{V}$

$$\text{avec } \text{div} \vec{T}_{tot} = \begin{pmatrix} \text{div}(\vec{T}_{tot}^t \cdot \vec{e}_{x_1}) \\ \text{div}(\vec{T}_{tot}^t \cdot \vec{e}_{x_2}) \\ \text{div}(\vec{T}_{tot}^t \cdot \vec{e}_{x_3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{1j}}{\partial x_j} \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{2j}}{\partial x_j} \\ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{3j}}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \right) \vec{e}_{x_i}$$

Equation de propagation (2/2)

- PFD pour les résultantes : $\vec{R}(\text{ext} \rightarrow \mathcal{V}) = \vec{d}(\mathcal{V}/\mathcal{R}_0), \forall \mathcal{V}$

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\vec{f}_e + \text{div} \vec{T}_{tot}) d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} d\mathcal{V}, \forall \mathcal{V} \implies \vec{f}_e + \text{div} \vec{T}_{tot} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$$

avec $\vec{f}_e = \vec{f}_{e_0} + \delta \vec{f}_e$

- A l'équilibre $\vec{f}_{e_0} + \text{div} \vec{T}_0 = \vec{0}$ changement de variable : $\vec{T} = \vec{T}_{tot} - \vec{T}_0$

variation de contrainte autour de la position d'équilibre

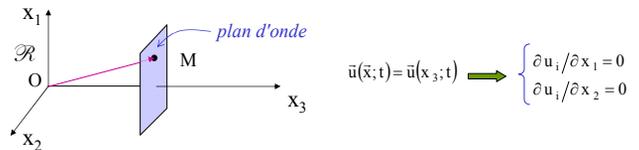
- Report dans l'équation de propagation $\vec{f}_{e_0} + \delta \vec{f}_e + \text{div}(\vec{T} + \vec{T}_0) = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}$

$$\implies \delta \vec{f}_e + \text{div} \vec{T} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \text{ en présence de sources}$$

$$\text{et } \text{div} \vec{T} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \text{ en dehors des sources}$$

$$\text{or } \text{div} \vec{T} = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \right) \vec{e}_{x_i} \implies \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, i=1,2,3$$

Solide isotrope (1/5) : découplage de l'équation de propagation



- Loi de Hooke

$$T_{ii} = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$T_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\begin{cases} T_{11} = \lambda \partial u_3 / \partial x_3 \\ T_{22} = \lambda \partial u_3 / \partial x_3 \\ T_{33} = (\lambda + 2\mu) \partial u_3 / \partial x_3 \end{cases} \text{ contraintes normales}$$

$$\begin{cases} T_{12} = 0 \\ T_{13} = \mu \partial u_1 / \partial x_3 \\ T_{23} = \mu \partial u_2 / \partial x_3 \end{cases} \text{ contraintes tangentielles}$$

Solide isotrope (2/5) : découplage de l'équation de propagation

- i = 3 $\rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{3j}}{\partial x_j} \implies \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}$ homogène à L²T⁻²

on pose $V_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \implies \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - \frac{1}{V_L^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = 0$ ondes de compression (longitudinales)

- i = 1 $\rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{1j}}{\partial x_j} \implies \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \left(\frac{\mu}{\rho} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}$ homogène à L²T⁻²

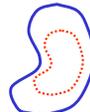
on pose $V_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \implies \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - \frac{1}{V_T^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0$ ondes de cisaillement (transversales)

- i = 2 $\rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{2j}}{\partial x_j} \implies \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}$

$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} - \frac{1}{V_T^2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0$ ondes de cisaillement (transversales)

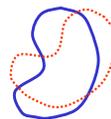
Solide isotrope (3/5) : déformations

Sans rotation, mais avec variation de volume $\text{rot } \vec{u}_L = \vec{0}$



potentiel scalaire ψ : $\vec{u}_L = \text{grad } \psi$

Avec rotation, mais sans variation de volume $\text{div } \vec{u}_T = \vec{0}$



potentiel vecteur χ : $\vec{u}_T = \text{rot } \chi$

déplacement particulière :

$$\vec{u} = \text{grad } \psi + \text{rot } \chi$$

$$= \vec{\nabla} \psi + \vec{\nabla} \wedge \chi$$

Solide isotrope (4/5) : ondes quelconques

● **Equation de propagation :** $\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{u}) + \mu \Delta \vec{u}$

avec $\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}} \Psi + \text{rot } \vec{\chi} = \vec{u}_L + \vec{u}_T$

● **Découplage de l'équation de propagation :**

onde de compression se propageant à la vitesse $v_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}}$

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_L}{\partial t^2} - v_L^2 \Delta \vec{u}_L = \vec{0}$$

onde de cisaillement se propageant à la vitesse $v_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{c_{11} - c_{12}}{2\rho}}$

$$\frac{\partial^2 \vec{u}_T}{\partial t^2} - v_T^2 \Delta \vec{u}_T = \vec{0}$$

● **Cas des ondes planes,** en relation avec une direction de propagation \vec{n}

onde de compression = onde longitudinale
onde de cisaillement = onde transversale

Solide isotrope (5/5) : ondes monochromatiques

● Equations d'onde $\Delta \psi - \frac{1}{v_L^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$ et $\Delta \vec{\chi} - \frac{1}{v_T^2} \frac{\partial^2 \vec{\chi}}{\partial t^2} = \vec{0}$

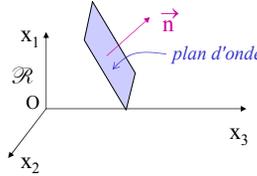
● $\hat{\psi}(\vec{x}; t) = \hat{\Psi}(\vec{x}) e^{+i\omega t}$ et $\hat{\vec{\chi}}(\vec{x}; t) = \hat{\vec{X}}(\vec{x}) e^{+i\omega t}$

→ $\Delta \hat{\Psi} - \frac{1}{v_L^2} \frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial t^2} = 0$ et $\Delta \hat{\vec{X}} - \frac{1}{v_T^2} \frac{\partial^2 \hat{\vec{X}}}{\partial t^2} = \vec{0}$

● Equations de Helmholtz $\Delta \hat{\Psi} + k_L^2 \hat{\Psi} = 0$ et $\Delta \hat{\vec{X}} + k_T^2 \hat{\vec{X}} = \vec{0}$

avec $k_L = \omega/v_L$ et $k_T = \omega/v_T$

● Ondes planes monochromatiques

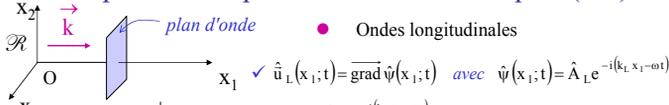


$\vec{k}_L = k_L \vec{n}$ et $\vec{k}_T = k_T \vec{n}$

$\hat{\psi}(\vec{x}) = \hat{A}_L e^{-i(\vec{k}_L \cdot \vec{x} - \omega t)}$

$\hat{\vec{\chi}}(\vec{x}) = \hat{A}_T e^{-i(\vec{k}_T \cdot \vec{x} - \omega t)}$

Exemple : ondes planes monochromatiques (1/2)



● Ondes longitudinales

✓ $\hat{u}_L(x_1; t) = \text{grad } \hat{\psi}(x_1; t)$ avec $\hat{\psi}(x_1; t) = \hat{A}_L e^{-i(k_L x_1 - \omega t)}$

→ $\hat{u}_L(x_1; t) = \begin{cases} \hat{u}_{L1} = \partial \hat{\psi} / \partial x_1 = -i k_L \hat{A}_L e^{-i(k_L x_1 - \omega t)} \\ \hat{u}_{L2} = \partial \hat{\psi} / \partial x_2 = 0 \\ \hat{u}_{L3} = \partial \hat{\psi} / \partial x_3 = 0 \end{cases}$

→ $\vec{u}_L(x_1; t) = \mathcal{R}e \left[\hat{u}_L(x_1; t) \right] = k_L |\hat{A}_L| \sin(\omega t - k_L x_1 + \alpha_L) \vec{e}_{x_1}$ avec $\hat{A}_L = |\hat{A}_L| e^{i\alpha_L}$

✓ $\hat{T}_L = \overline{\vec{T}} \cdot \vec{e}_{x_1} = \hat{T}_{11} \vec{e}_{x_1} + \hat{T}_{21} \vec{e}_{x_2} + \hat{T}_{31} \vec{e}_{x_3}$
avec $\hat{T}_{11} = (\lambda + 2\mu) \partial \hat{u}_{L1} / \partial x_1 = -(\lambda + 2\mu) k_L^2 \hat{A}_L e^{-i(k_L x_1 - \omega t)}$
 $\hat{T}_{21} = \mu \partial \hat{u}_{L2} / \partial x_1 = 0$ et $\hat{T}_{31} = \mu \partial \hat{u}_{L3} / \partial x_1 = 0$

→ $\hat{T}_L = \hat{T}_{11} \vec{e}_{x_1} = -(\lambda + 2\mu) k_L^2 \hat{A}_L e^{-i(k_L x_1 - \omega t)} \vec{e}_{x_1}$

→ $\vec{T}_L = \mathcal{R}e \left[\hat{T}_L \right] = -(\lambda + 2\mu) k_L^2 |\hat{A}_L| \cos(\omega t - k_L x_1 + \alpha_L) \vec{e}_{x_1} // \vec{n} = \vec{e}_{x_1}$

→ mouvement de compression / détente

Exemple : ondes planes monochromatiques (2/2)

● Ondes transversales

✓ $\hat{u}_T(x_1; t) = \text{rot } \hat{\vec{\chi}}(x_1; t)$ avec $\hat{\vec{\chi}}(x_1; t) = \hat{A}_T e^{-i(k_T x_1 - \omega t)}$

$\hat{u}_T(x_1; t) = \begin{cases} \partial \hat{\chi}_3 / \partial x_1 \\ \partial \hat{\chi}_2 / \partial x_3 \end{cases} \hat{\chi}_1 = \begin{cases} \partial \hat{\chi}_3 / \partial x_2 - \partial \hat{\chi}_2 / \partial x_3 \\ \partial \hat{\chi}_1 / \partial x_3 - \partial \hat{\chi}_3 / \partial x_1 \\ \partial \hat{\chi}_2 / \partial x_1 - \partial \hat{\chi}_1 / \partial x_2 \end{cases} \begin{cases} 0 \\ -\partial \hat{\chi}_3 / \partial x_1 \\ \partial \hat{\chi}_2 / \partial x_1 \end{cases} \begin{cases} \hat{u}_{T1} = 0 \\ \hat{u}_{T2} = i k_T \hat{A}_T e^{-i(k_T x_1 - \omega t)} \\ \hat{u}_{T3} = -i k_T \hat{A}_T e^{-i(k_T x_1 - \omega t)} \end{cases}$

→ $\vec{u}_T(x_1; t) = \mathcal{R}e \left[\hat{u}_T(x_1; t) \right] = -k_T |\hat{A}_T| \sin(\omega t - k_T x_1 + \alpha_T) \vec{e}_{x_2} + k_T |\hat{A}_T| \sin(\omega t - k_T x_1 + \alpha_T) \vec{e}_{x_3}$ avec $\hat{A}_T = |\hat{A}_T| e^{i\alpha_T}$

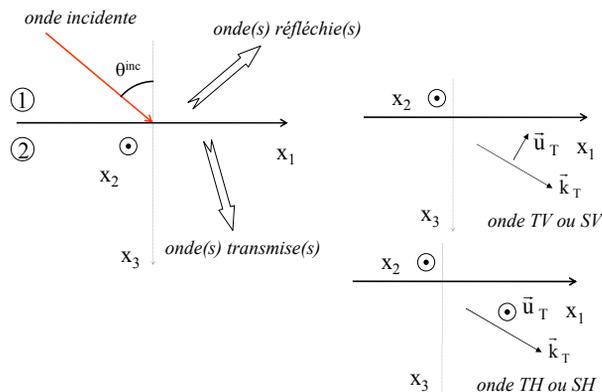
✓ $\hat{T}_T = \overline{\vec{T}} \cdot \vec{e}_{x_1} = \hat{T}_{11} \vec{e}_{x_1} + \hat{T}_{21} \vec{e}_{x_2} + \hat{T}_{31} \vec{e}_{x_3}$
avec $\hat{T}_{11} = (\lambda + 2\mu) \partial \hat{u}_{T1} / \partial x_1 = 0$; $\hat{T}_{21} = \mu \partial \hat{u}_{T2} / \partial x_1 = \mu k_T^2 \hat{A}_T e^{-i(k_T x_1 - \omega t)}$
et $\hat{T}_{31} = \mu \partial \hat{u}_{T3} / \partial x_1 = -\mu k_T^2 \hat{A}_T e^{-i(k_T x_1 - \omega t)}$

→ $\hat{T}_T = \hat{T}_{21} \vec{e}_{x_2} + \hat{T}_{31} \vec{e}_{x_3} = \mu k_T^2 \hat{A}_T e^{-i(k_T x_1 - \omega t)} \vec{e}_{x_2} - \mu k_T^2 \hat{A}_T e^{-i(k_T x_1 - \omega t)} \vec{e}_{x_3}$

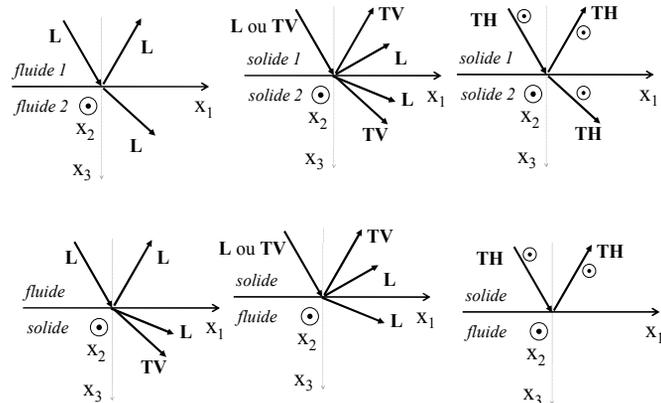
→ $\vec{T}_T = \mathcal{R}e \left[\hat{T}_T \right] = \mu k_T^2 |\hat{A}_T| \cos(\omega t - k_L x_1 + \alpha_T) \vec{e}_{x_2} - \mu k_T^2 |\hat{A}_T| \cos(\omega t - k_L x_1 + \alpha_T) \vec{e}_{x_3}$

// (O x2 x3) ⊥ $\vec{n} = \vec{e}_{x_1}$ → mouvement de cisaillement

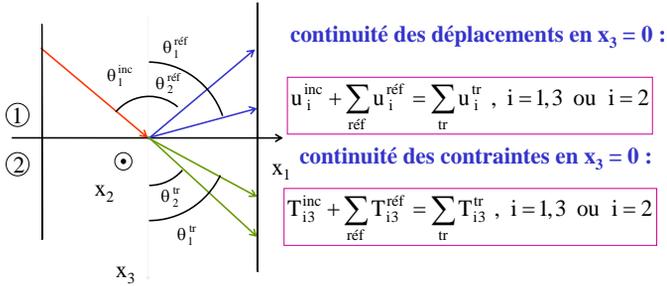
Réflexion et réfraction (1/3)



Réflexion et réfraction (2/3)



Réflexion et réfraction (3/3)



continuité des déplacements en $x_3 = 0$:

$$u_i^{inc} + \sum_{ref} u_i^{ref} = \sum_{tr} u_i^{tr}, \quad i=1,3 \text{ ou } i=2$$

continuité des contraintes en $x_3 = 0$:

$$T_{i3}^{inc} + \sum_{ref} T_{i3}^{ref} = \sum_{tr} T_{i3}^{tr}, \quad i=1,3 \text{ ou } i=2$$

contraintes s'exerçant sur un élément de surface à l'interface

$$\vec{T} = \vec{T} \cdot \vec{e}_{x_3} = \begin{cases} T_{13} = T_5 \\ T_{23} = T_4 \\ T_{33} = T_3 \end{cases}$$

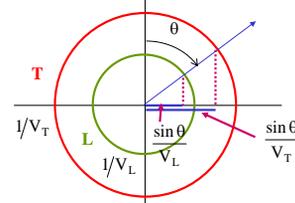
Visualisation de la loi de Snell-Descartes : surface des lenteurs

Lieu des extrémités du vecteur lenteur \vec{m} , tracé à partir d'un point fixe O, lorsque la direction de propagation \vec{r} varie.

Vecteur lenteur : $\vec{m} = \frac{\vec{n}}{V}$

Milieu isotrope : 2 vitesses pour une direction de propagation mêmes vitesses dans toutes les directions

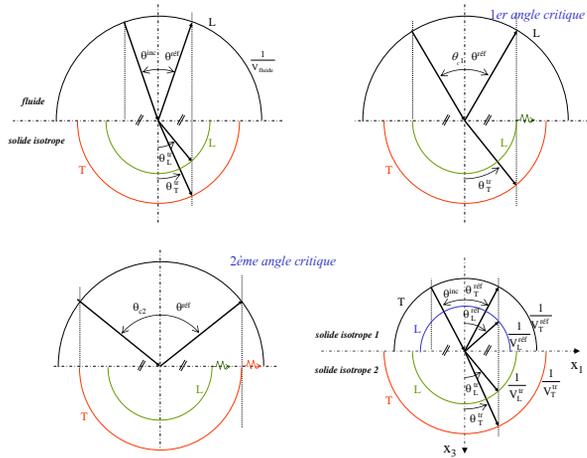
surfaces des lenteurs = sphères



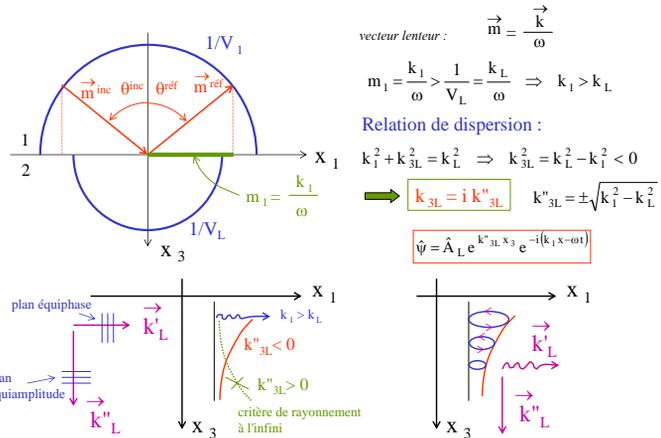
Loi de Snell-Descartes :

$$\frac{\sin \theta_1}{V_1} = \frac{\sin \theta_2}{V_2}$$

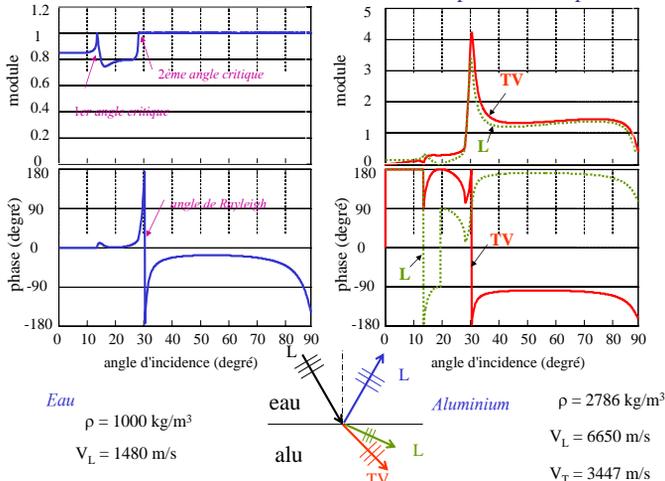
Milieux isotropes : angles critiques - ondes évanescentes



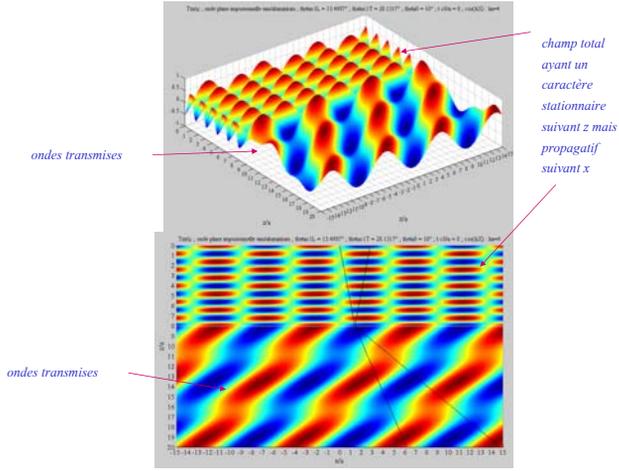
Milieu isotrope : ondes évanescentes



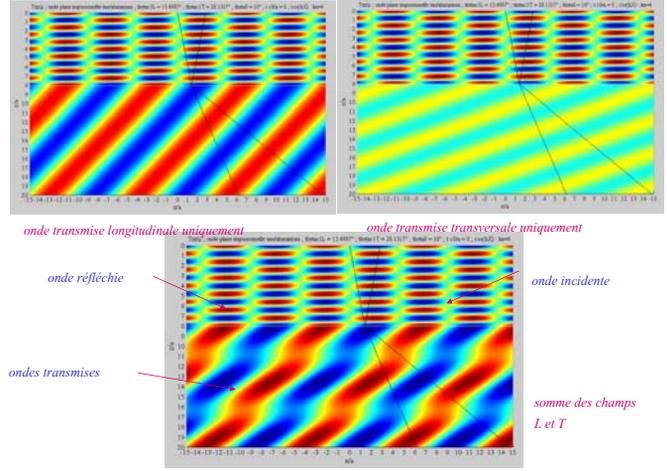
Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude de déplacement



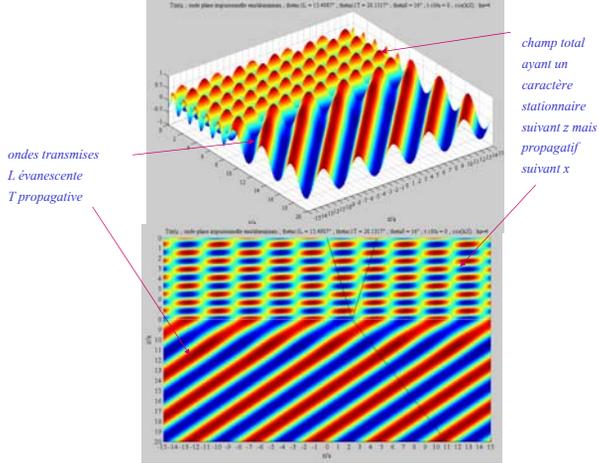
Exemple (T_{zz}/μ) : $f(X) = \cos(kX)$, $ka = 4$, $\theta < \theta_{cL}$



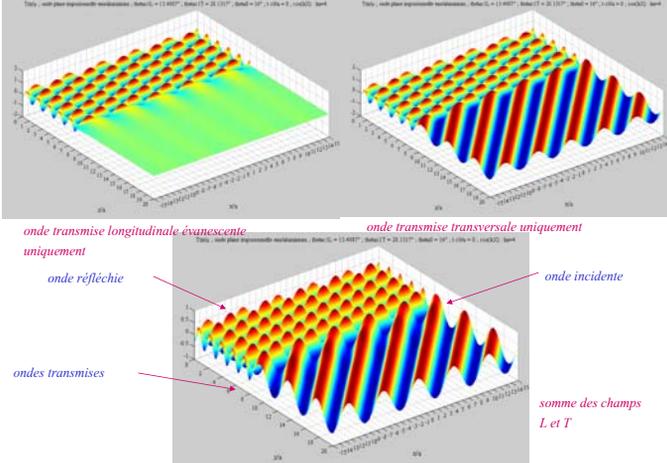
Exemple (T_{zz}/μ) : $f(X) = \cos(kX)$, $ka = 4$, $\theta < \theta_{cL}$



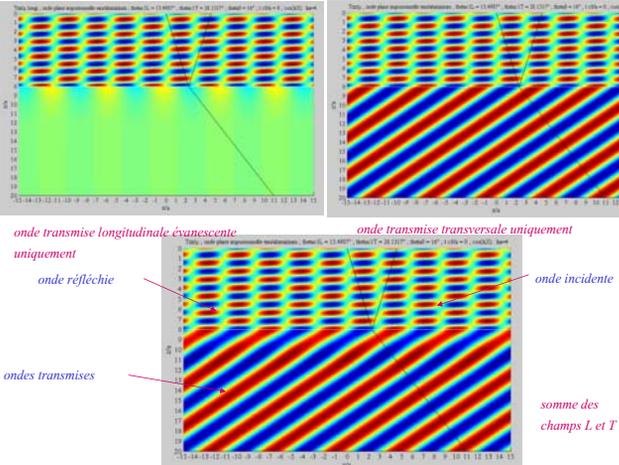
Exemple (T_{zz}/μ) : $f(X) = \cos(kX)$, $ka = 4$, $\theta_{cL} < \theta < \theta_{cT}$



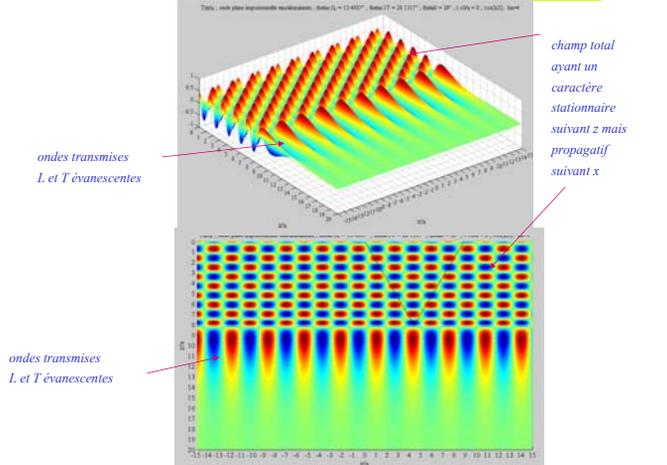
Exemple (T_{zz}/μ) : $f(X) = \cos(kX)$, $ka = 4$, $\theta_{cL} < \theta < \theta_{cT}$



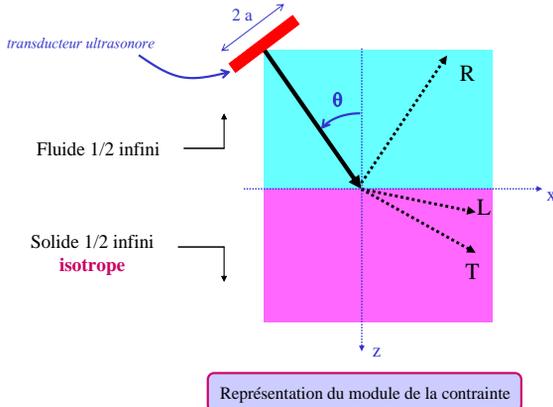
Exemple (T_{zz}/μ) : $f(X) = \cos(kX)$, $ka = 4$, $\theta_{cL} < \theta < \theta_{cT}$



Exemple (T_{zz}/μ) : $f(X) = \cos(kX)$, $ka = 4$, $\theta > \theta_{cT}$

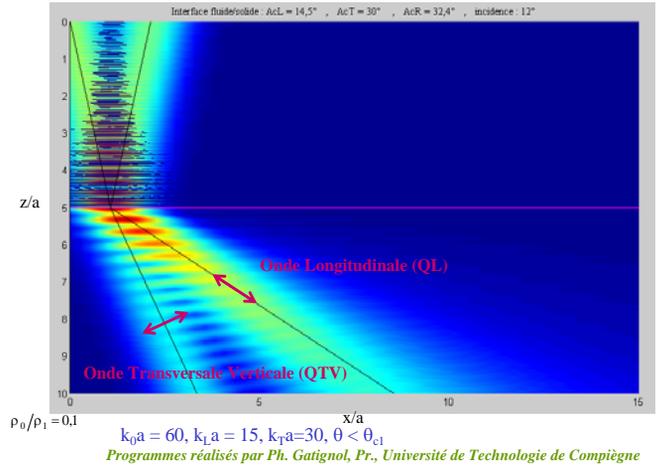


Faisceau gaussien incident sur une interface fluide/solide

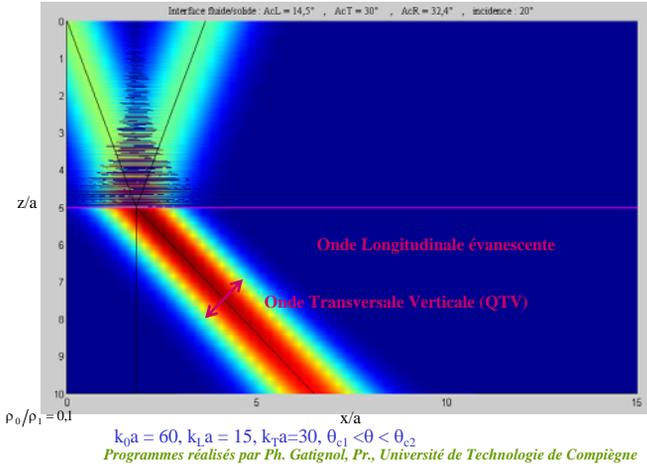


Programmes réalisés par Ph. Gatignol, Pr., Université de Technologie de Compiègne

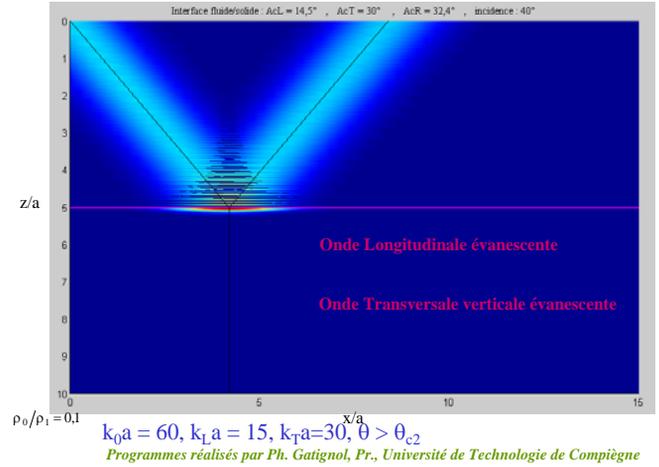
Avant le premier angle critique



Entre les deux angles critiques



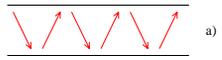
Après les deux angles critiques



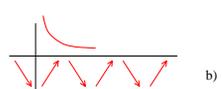
Ondes modales (1/3)

ondes guidées

Vide/ paroi rigide / impédance réactive



Vide/ paroi rigide / impédance réactive



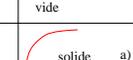
Ondes d'Osborne et Hart

onde de Lamb

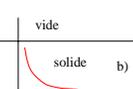


ondes de surface

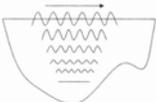
vide



vide



- onde de Rayleigh a)
- onde anti-modale b)

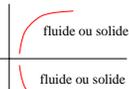


ondes d'interface

fluide ou solide



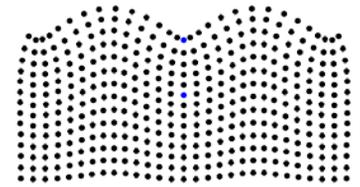
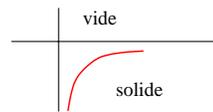
fluide ou solide



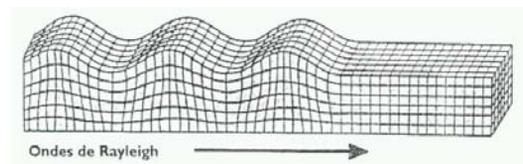
- onde de Scholte, onde de Stoneley, onde de Rayleigh-Cezawa, etc... a)
- onde anti-modale b)



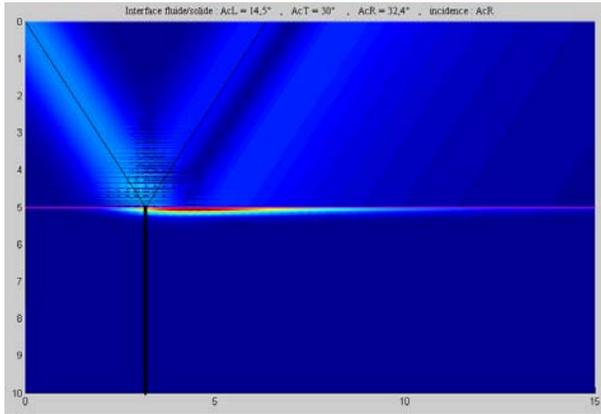
Ondes modales (2/3) : onde de Rayleigh



http://www.kettering.edu/~d_russell ©1999, Daniel A. Russell
Animation courtesy of Dr. Dan Russell, Kettering University

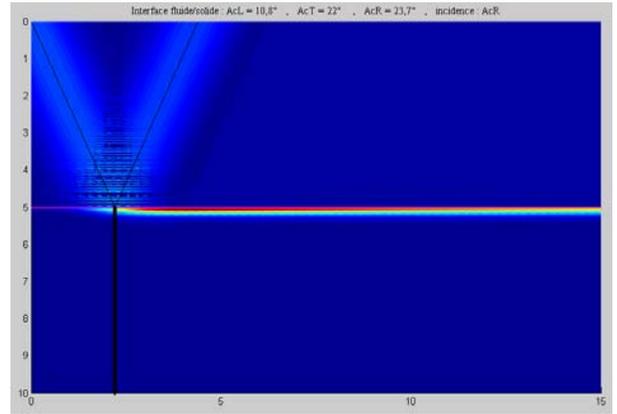


$k_0 a = 60, k_L a = 15, k_T a = 30, \theta = \theta_{\text{Rayleigh}}$



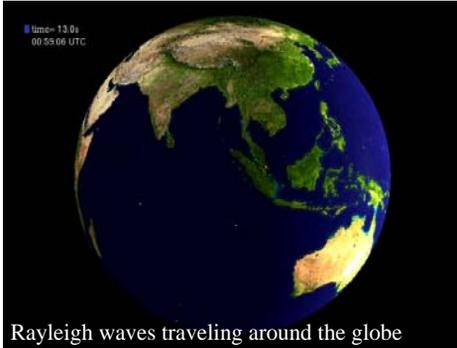
Programmes réalisés par Ph. Gatignol, Pr., Université de Technologie de Compiègne

$k_0 a = 80, k_L a = 15, k_T a = 30, \theta = \theta_{\text{Rayleigh}}$



Programmes réalisés par Ph. Gatignol, Pr., Université de Technologie de Compiègne

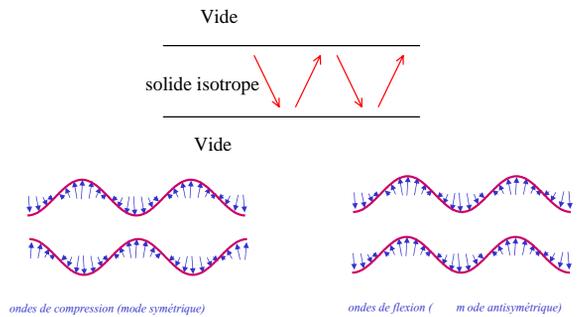
Tremblement de terre Sumatra-Andama (2004)



Courtesy <http://www.sciencemag.org/cgi/content/full/308/5725/1133/DC1>

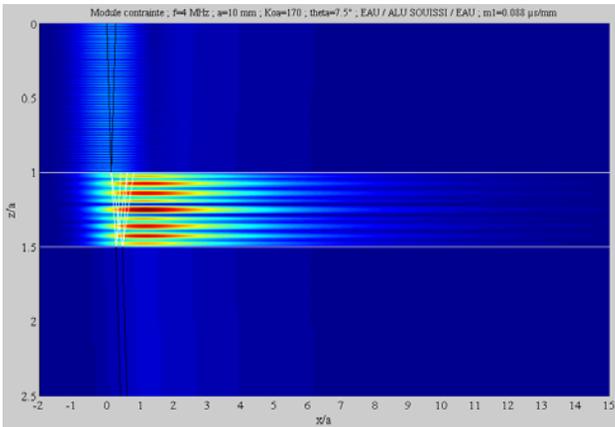
Charles J. Ammon, Chen Ji, Hong-Kie Thio, David Robinson, Sidao Ni, Vala Hjorleifsdottir, Hiroo Kanamori, Thorne Lay, Shamita Das, Don Helmberger, Gene Ichinose, Jascha Polet, David Wald : The animation was made with the help of Santiago Lombeyda at the Center for Advanced Computing Research, Caltech

Ondes modales (3/3) : les ondes de Lamb



distribution du champ de déplacement particulaire vectoriel à la surface de la plaque et son effet sur la forme de la plaque

Eau / Aluminium / Eau ; $ka=170$; $H=5$ mm ; avant le 1er angle critique

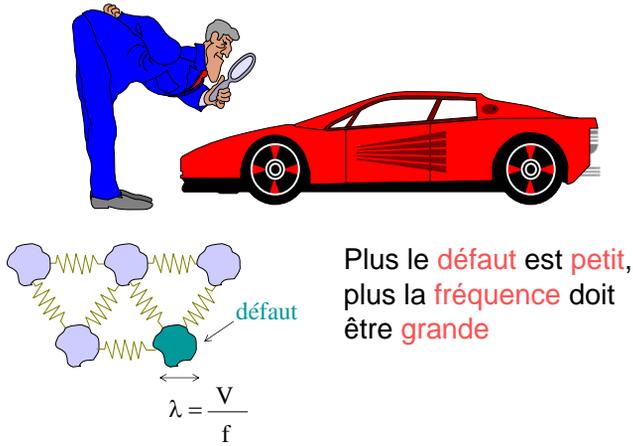


Mode de Lamb

Contrôle des matériaux

- **But :** Connaître l'existence de **défauts** dans une pièce
- **2 types :**
 - ◆ **Contrôle Destructif**
⇒ pièce non réutilisable
 - ◆ **Contrôle Non Destructif (CND)**
⇒ pièce réutilisable
- **Différents CND :**
 - ◆ Courants de Foucault
 - ◆ Rayons X, Rayons γ
 - ◆ **Ultrasons**
 - ☞ peu coûteux
 - ☞ accès à une seule face de la pièce
 - ☞ détection de défauts situés en **profondeur**

CND par ultrasons



CONTRÔLE NON DESTRUCTIF

Présence ou non de défauts



Compréhension des phénomènes de propagation
Détermination des propriétés élastiques (ou viscoélastiques)

EVALUATION NON DESTRUCTIVE

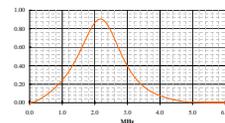
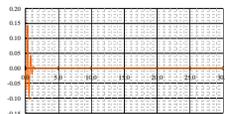
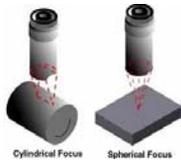
Différents types de transducteurs

● Transducteurs

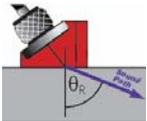


<http://www.ndt-ed.org>

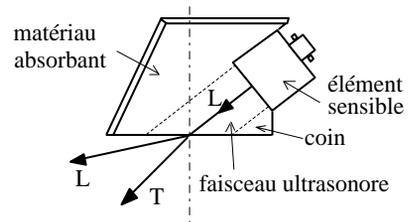
● Transducteurs à immersion focalisés



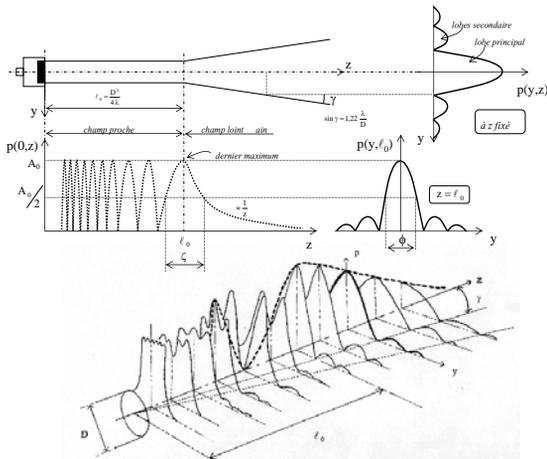
● Transducteurs d'angle



Transducteur ultrasonore d'angle

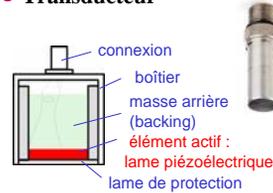


Champ ultrasonore généré par un transducteur ultrasonore plan

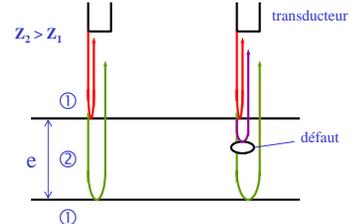


Principes du CND par ultrasons

● Transducteur

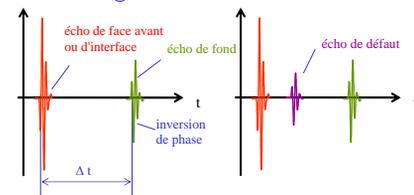


● Echographie ultrasonore

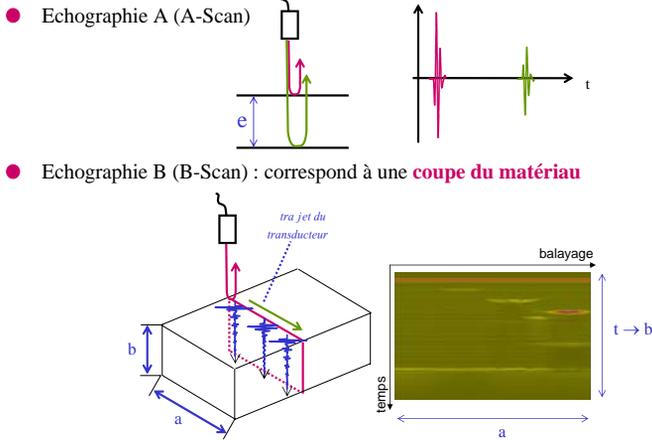


Transforme un signal électrique en une vibration mécanique et inversement

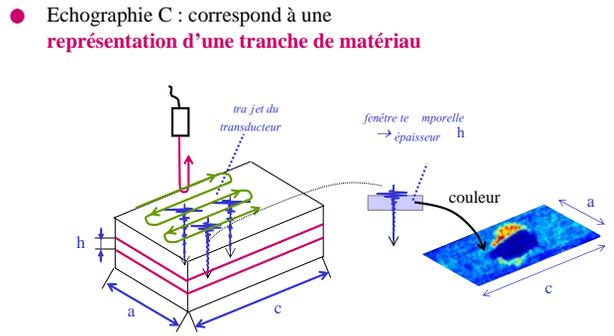
$$\Delta t = \frac{2e}{V}$$



Echographie A - Echographie B



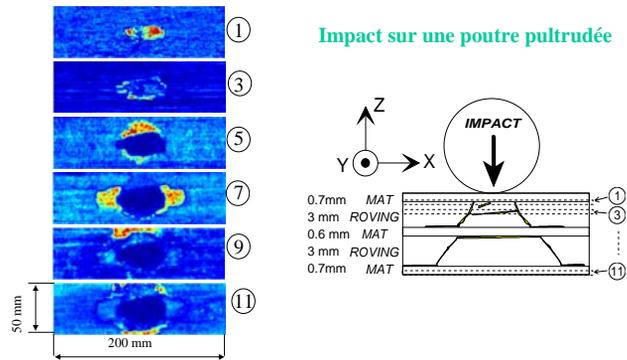
Echographie C (C-Scan)



Echographie C sur pièce de monnaie

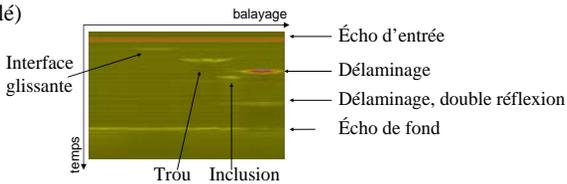


Echographie C sur poutre impactée



Modèle hybride

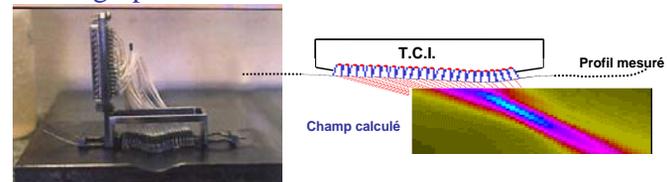
Défauts de différents types pris en compte – **Exemple** (Bscan simulé)



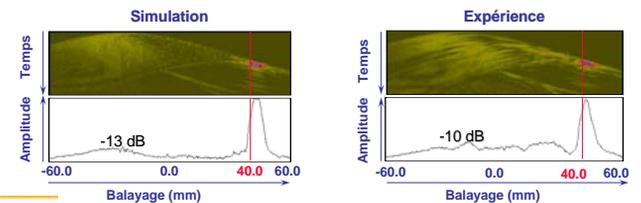
Comparaison simulation / expérience



Echographie B avec transducteur multi-éléments

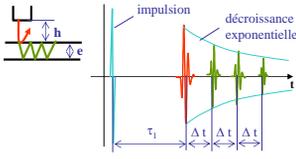


Transducteur multi-éléments flexible au contact (T.C.I., CEA)

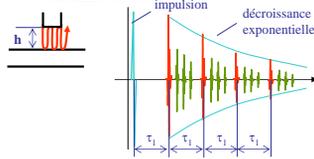


Précautions de réglage (1/2)

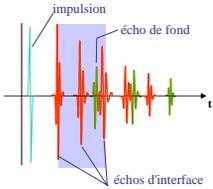
- Multiples réflexions dans une pièce



- Multiples réflexions dans la colonne d'eau



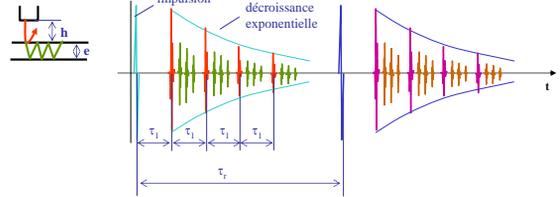
- Conséquences d'un mauvais réglage de la colonne d'eau



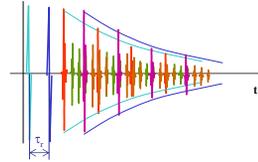
intercalage d'un écho de fond entre les échos d'interface, qui pourrait être confondu avec un écho de défaut.

Précautions de réglage (2/2)

- Réglage de la fréquence de récurrence

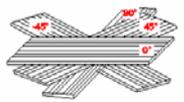
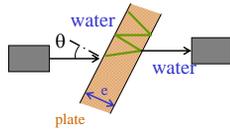
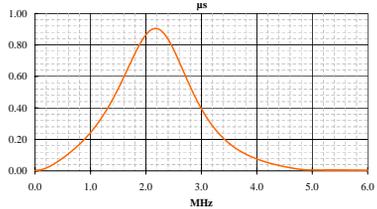
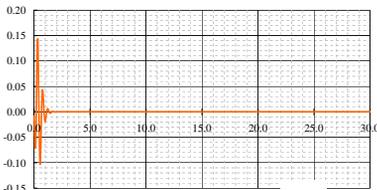


- Conséquences d'un mauvais réglage de la fréquence de récurrence



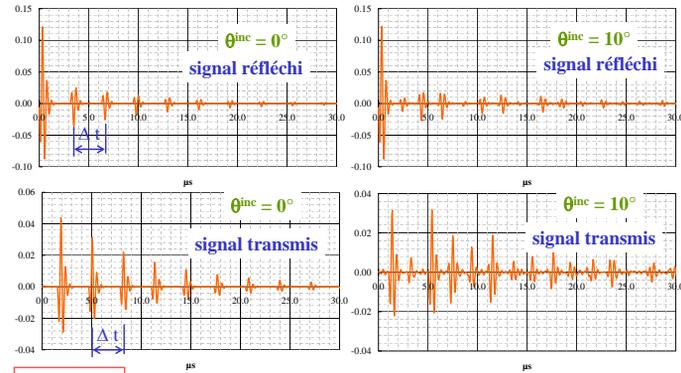
intercalage d'échos d'interface ou de fond de la seconde récurrence entre les échos d'interface de la première récurrence, qui pourraient être confondus avec un écho de défaut.

Exemple de signal d'excitation



0°/45°/90°/135° carbon-epoxy plate

Plaque d'aluminium plongée dans l'eau (simulation en ondes planes)

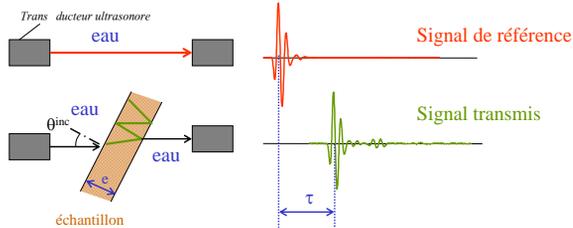


$$V_L = \frac{2e}{\Delta t} \quad e = 10 \text{ mm}; \lambda_L = 2.8 \text{ mm}; \lambda_T = 1.4 \text{ mm}$$

$$V_L = 6340.4 \text{ m/s} \quad V_T = 3138.9 \text{ m/s}$$

1er angle critique = 13.5°
2ème angle critique = 28°

Mesures de vitesses (1/2)

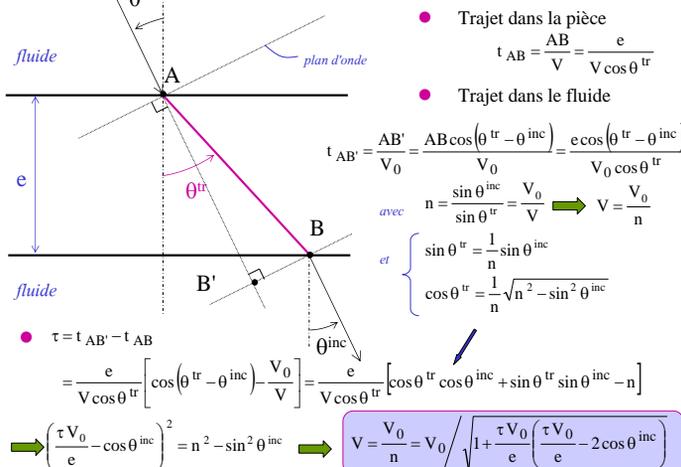


Vitesse de propagation d'une onde dans le matériau, pour une direction donnée

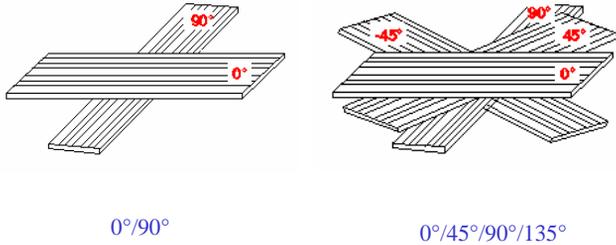
$$V = \frac{V_{\text{eau}}}{\sqrt{1 + \frac{\tau V_{\text{eau}}}{e} \left(\frac{\tau V_{\text{eau}}}{e} - 2 \cos \theta \right)}}$$

Constantes élastiques réelles

Mesures de vitesses (2/2)



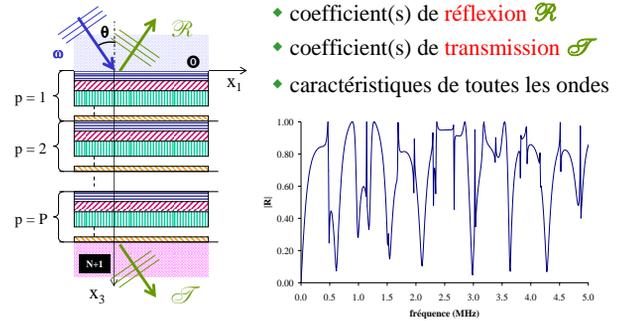
Matériaux composites (1/2) : exemple des composites de type carbone-époxyde



0°/90°

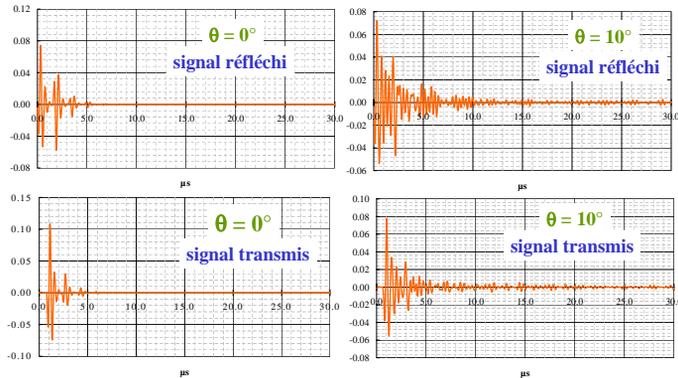
0°/45°/90°/135°

Matériaux composites (2/2) : exemple des composites de type carbone-époxyde



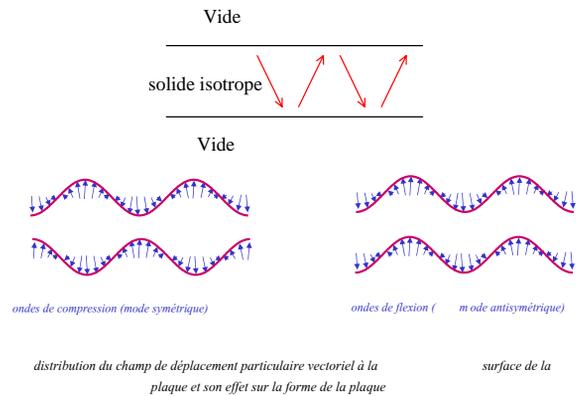
0°/45°/90°/135°
P=5 ; $\theta = 10^\circ$

Plaque composite plongée dans l'eau (simulation en ondes planes)

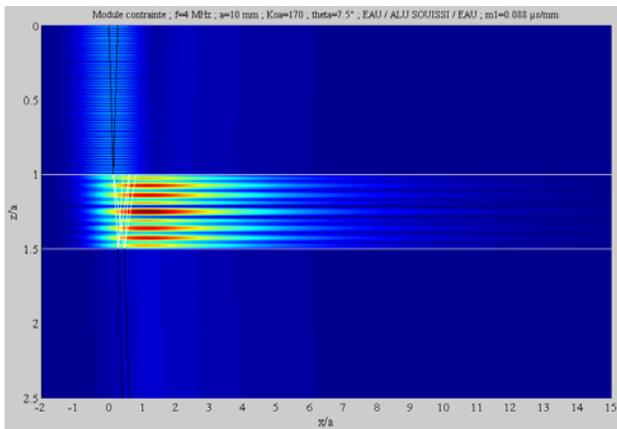


0°/45°/90°/135° ; P=5 ; carbone/époxyde

Les ondes de Lamb

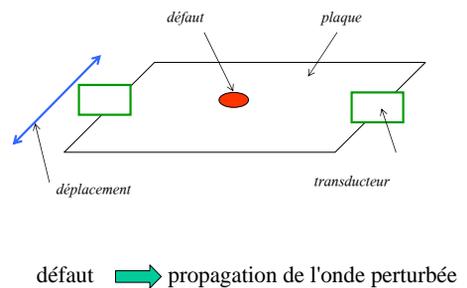


Eau / Aluminium / Eau ; $ka=170$; $H=5$ mm ; avant le 1er angle critique

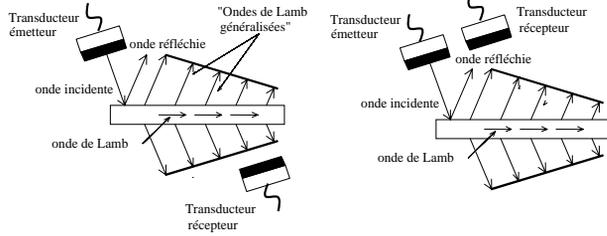


Mode de Lamb

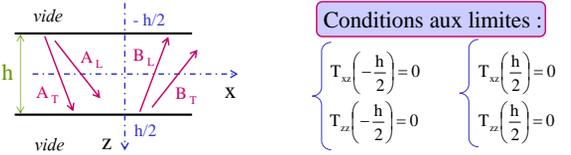
Utilisation des ondes de Lamb en CND : recherche de défauts



Cartographies en ondes de Lamb



Ondes de Lamb en milieu isotrope



Conditions aux limites :

$$\begin{cases} T_{xz}(-\frac{h}{2}) = 0 \\ T_{zz}(-\frac{h}{2}) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} T_{xz}(\frac{h}{2}) = 0 \\ T_{zz}(\frac{h}{2}) = 0 \end{cases}$$

système homogène d'ordre 4

$$\begin{pmatrix} A_L + A_T & B_L + B_T \\ A_L + A_T & B_L + B_T \\ A_L + A_T & B_L + B_T \\ A_L + A_T & B_L + B_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_L \\ A_T \\ B_L \\ B_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{déterminant } (4 \times 4) = 0$$

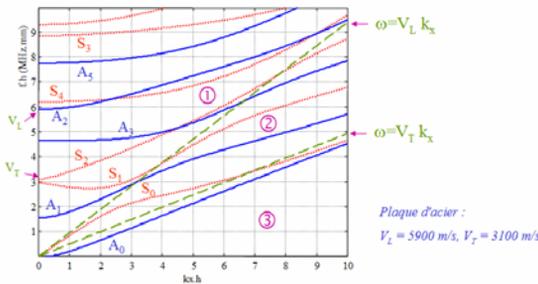
$$\left[4k_x^2 k_{z_L} k_{z_T} \cos\left(k_{z_L} \frac{h}{2}\right) \sin\left(k_{z_T} \frac{h}{2}\right) + (2k_x^2 - k_T^2) \cos\left(k_{z_T} \frac{h}{2}\right) \sin\left(k_{z_L} \frac{h}{2}\right) \right] \cdot$$

modes antisymétriques

$$\left[4k_x^2 k_{z_L} k_{z_T} \cos\left(k_{z_L} \frac{h}{2}\right) \sin\left(k_{z_T} \frac{h}{2}\right) + (2k_x^2 - k_T^2) \cos\left(k_{z_T} \frac{h}{2}\right) \sin\left(k_{z_L} \frac{h}{2}\right) \right] = 0$$

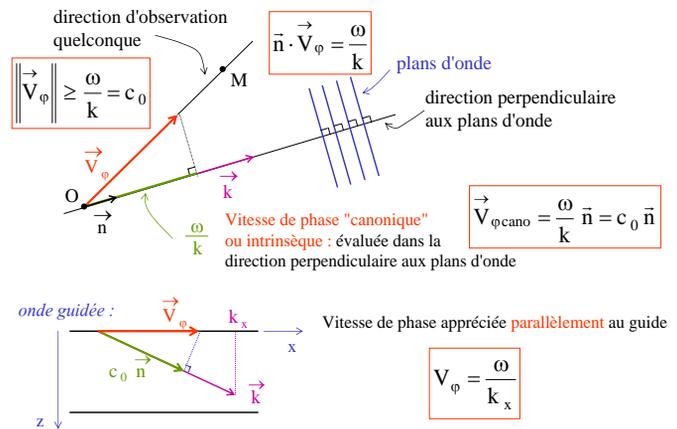
modes symétriques

Courbes de dispersion des ondes de Lamb plan ($k_x \cdot h$, $f \cdot h$) ou ($k_x \cdot h / (2\pi)$, $\omega h / (2\pi)$)

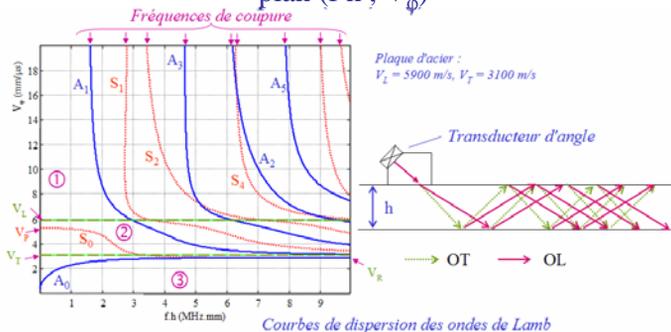


- ① k_{zL} et k_{zT} réels OL et OT propagatives
- ② k_{zL} imaginaire pur et k_{zT} réel OL évanescente et OT propagative
- ③ k_{zL} et k_{zT} imaginaires purs OL et OT évanescentes

Vitesse de phase (rappel)

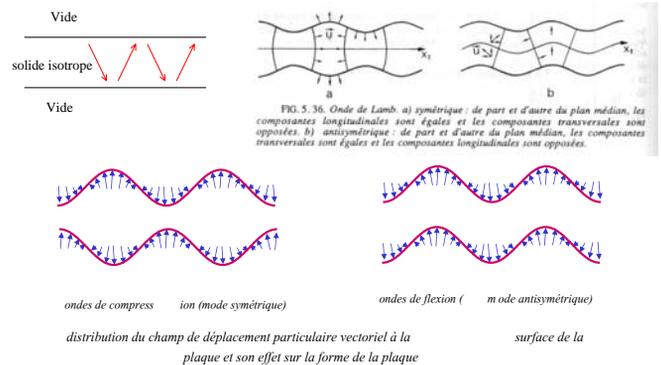


Courbes de dispersion des ondes de Lamb plan ($f \cdot h$, V_ϕ)



- ① k_{zL} et k_{zT} réels OL et OT propagatives
- ② k_{zL} imaginaire pur et k_{zT} réel OL évanescente et OT propagative
- ③ k_{zL} et k_{zT} imaginaires purs OL et OT évanescentes

Déplacements des ondes de Lamb (1/2)

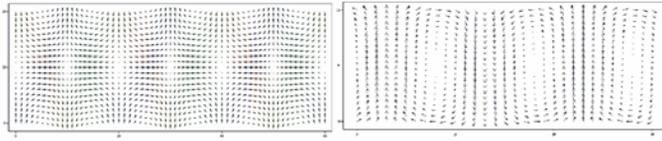


figures extraites de :
D. Royer et E. Dieulesaint, "Ondes élastiques dans les solides", tome 1 : propagation libre et guidée, Masson, (1996)
J.L. Rose, "Ultrasonic waves in solid media", Cambridge Univ. Press, 1999

Déplacements des ondes de Lamb (2/2)



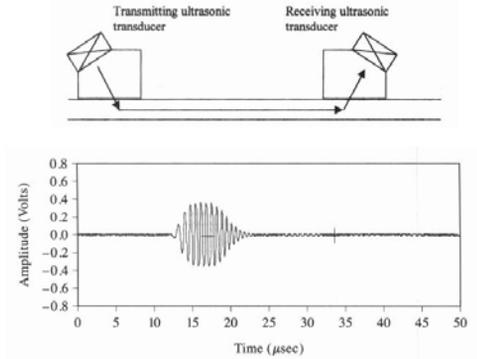
ondes de compression (mode symétrique) ondes de flexion (mode antisymétrique)
distribution du champ de déplacement particulière vectoriel à la surface de la plaque et son effet sur la forme de la plaque



mode S_0 mode A_0

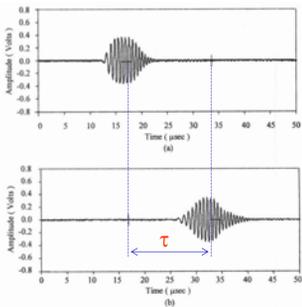
animations réalisées par Patrick Lancelu, Université de Compiègne
http://www.utc.fr/~lancelu/links_CT04.html

Montage expérimental



figures extraites de : J.L. Rose, "Ultrasonic waves in solid media", Cambridge Univ. Press, 1999

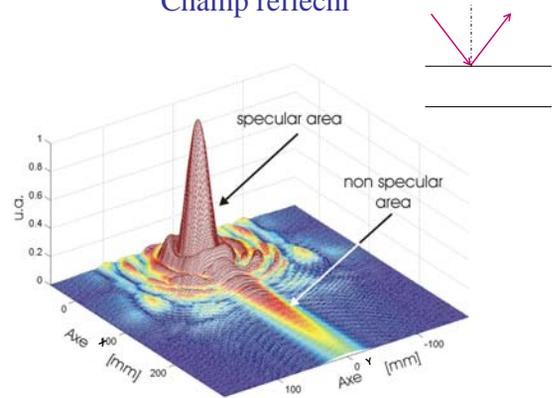
Mesure de la vitesse de groupe



Plaque d'aluminium
Mode S_0 , $f_h = 1.434 \text{ MHz}\cdot\text{mm}$
 $x = 76.2 \text{ mm}$
 $\tau = 15.875 \mu\text{s} \implies V_g = 4800 \text{ m/s}$

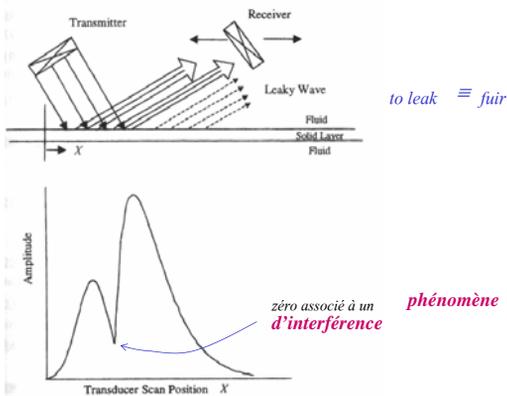
figures extraites de : J.L. Rose, "Ultrasonic waves in solid media", Cambridge Univ. Press, 1999

Champ réfléchi



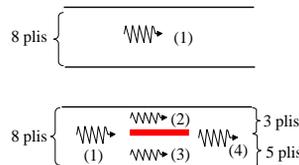
plaque en carbone/époxyde unidirectionnelle
 $\theta = 9.8^\circ$, $f = 1.35 \text{ MHz}$; $e = 0.59 \text{ mm}$

Réflexion non spéculaire

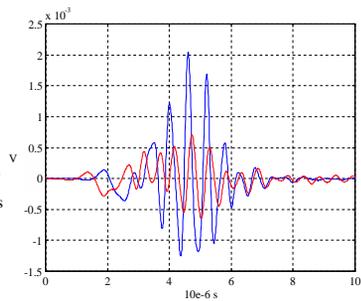


figures extraites de : J.L. Rose, "Ultrasonic waves in solid media", Cambridge Univ. Press, 1999

Détection de défaut par ondes de Lamb (1/6)

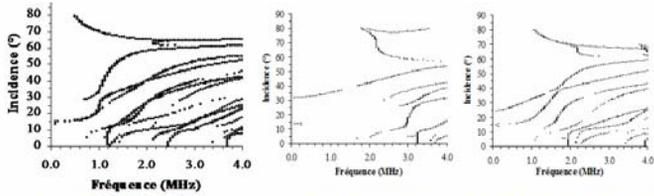


plaques en carbone/époxyde : défaut entre le 5ème et le 4ème pli



$(0^\circ/45^\circ/90^\circ/135^\circ)$ en carbone/époxyde, composite à 8 plis en symétrie mi-rotonde, incidence de 10.3° , fréquence de 2 MHz .
bleu : plaque saine
rouge : plaque avec défaut

Détection de défaut par ondes de Lamb (2/6)



8 plis $[0^\circ/45^\circ/90^\circ/135^\circ]_{2s}$

3 plis $0^\circ/45^\circ/90^\circ$

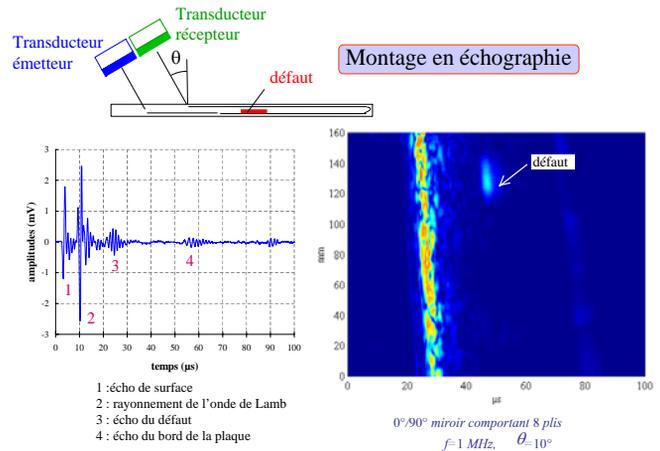
5 plis $135^\circ/135^\circ/90^\circ/45^\circ/0^\circ$



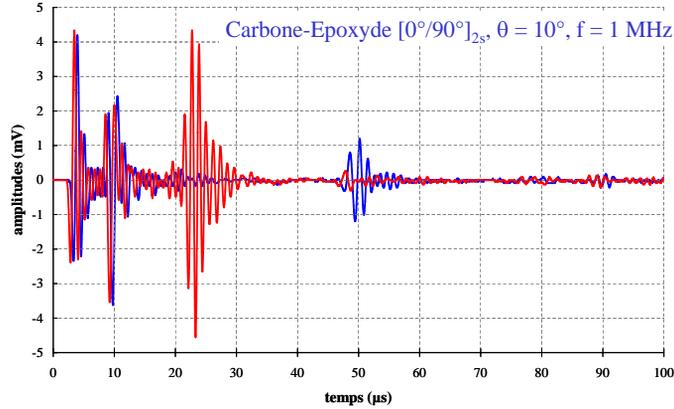
Conversion du mode (1) en (2) et (3) puis (4)
 Si mode (2) ou mode (3) proches du mode (1) alors mode (4) \approx mode (1) \rightarrow défaut non détecté
 Si mode (2) ou mode (3) différents du mode (1) alors mode (4) \neq mode (1) \rightarrow défaut détecté

Défaut entre le 3ème et le 4ème pli

Détection de défaut par ondes de Lamb (3/6) : cartographie en ondes de Lamb

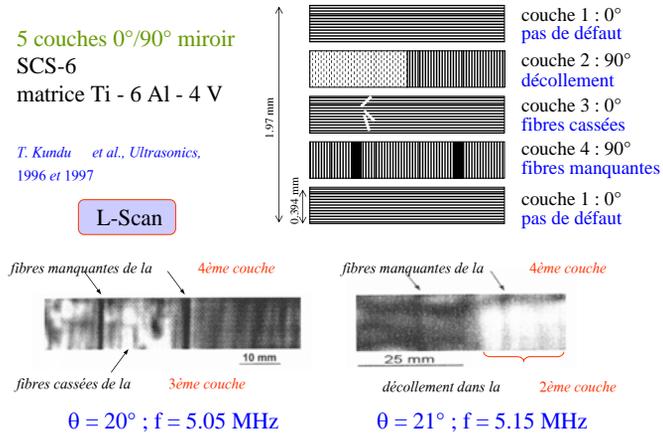


Détection de défaut par ondes de Lamb (4/6)

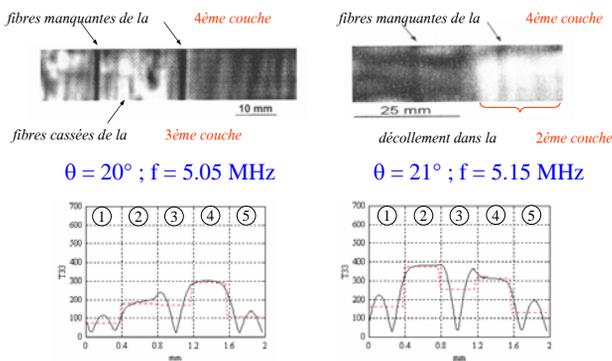


bleu : plaque sans défaut rouge : plaque avec défaut

Détection de défaut (5/6) : cartographie en ondes de Lamb



Détection de défaut (6/6) : cartographie en ondes de Lamb



répartition de la contrainte normale en fonction de l'épaisseur

Transparents basés sur

C. POTEL, M. BRUNEAU, *Acoustique Générale - équations différentielles et intégrales, solutions en milieux fluide et solide, applications*, Ed. Ellipse collection Technosup, 352 pages, ISBN 2-7298-2805-2, 2006

