Modèle analytique de propagation dans une plaque fluide rugueuse, par décomposition modale

Catherine Potel [1], Michel Bruneau [1], Bruno Morvan [2], Jean-Louis Izbicki [2], Anne-Christine Hladky-Hennion [3], Claude Depollier [1]

[1] *Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM UMR-CNRS 6613), 72 085 Le Mans cedex 9 - France, courriels : catherine.potel@univ-lemans.fr , michel.bruneau@univ-lemans.fr*

[2] *Laboratoire d'Acoustique Ultrasonore et d'Electronique (LAUE UMR CNRS 6068), 76 610 Le Havre - France*

[3] *Institut d'Electronique, de Microélectronique et de Nanotechnologie, (IEMN UMR CNRS 8520), 59 046 Lille - France*

Résumé

Afin d'interpréter quantitativement la décroissance des modes de Lamb, modélisée par une approche analytique et observée de manière expérimentale dans des plaques solides comportant une interface rugueuse, une modélisation plus avancée est développée ici dans un cas beaucoup plus simple, celui d'une plaque fluide comportant une interface rugueuse.

Dans le modèle analytique proposé, la rugosité de l'interface est décrite par un opérateur d'impédance qui fait apparaître de manière explicite la densité spectrale de puissance du profil de rugosité, et le champ acoustique est développé sur les modes propres de la plaque. Le problème est résolu dans le domaine temporel, pour toute forme a priori possible de rugosité, en faisant usage du formalisme de Green. La solution apparaît sous la forme de la superposition d'un champ direct non perturbé (interfaces planes) provenant des sources d'énergie acoustique, et d'un facteur de couplages modaux, dû à la présence de rugosité. Cette source de couplage étant une source étendue, elle est représentée sous une forme intégrale qui ne permet pas l'obtention des coefficients de la décomposition modale par une simple inversion de matrice. La complexité du problème à résoudre traduit la complexité du phénomène de couplage non localisé. Le cas particulier du champ créé par une source monochromatique localisée dans une plaque dont les interfaces possèdent un profil de rugosité périodique est présenté à titre de premier exemple.

Introduction

Le problème de la rugosité des plaques est un problème important en termes de collage, et l'étude de la propagation ultrasonore dans des plaques comportant une interface rugueuse peut donner des informations sur la qualité de collage entre deux matériaux. Les ondes guidées, telles les ondes de Lamb qui sont naturellement guidées par la plaque, sont très utiles pour contrôler ce type de structure [1], et l'influence de la présence de rugosité sur la qualité du collage peut être étudiée [2,3].

Afin d'interpréter quantitativement la décroissance des modes de Lamb, modélisée par une approche analytique et observée de manière expérimentale dans des plaques solides comportant une interface rugueuse [4,5], une modélisation plus avancée est développée ici dans un cas beaucoup plus simple, celui d'une plaque fluide.

Etudes antérieures

Modèle théorique en milieu solide anisotrope

Afin d'étudier la propagation des ondes de Lamb, un modèle 3D analytique a été développé pour une plaque anisotrope dans le vide [4], présentant une seule interface rugueuse (figure 1), caractérisée par son épaisseur d, sa masse volumique ρ et par la matrice (6x6) des constantes élastiques $(c_{\alpha\beta})$.

Une méthode des perturbations permet d'exprimer l'équation de dispersion de la plaque rugueuse comme la somme de l'équation de dispersion de la plaque lisse et d'une perturbation due à la rugosité :

$$F\left(k_1,\omega\right) \approx F_0\left(k_1,\omega\right) + \delta F\left(k_1,\omega\right) = 0 \quad , \qquad (1)$$

où le nombre complexe k_1 est la projection du vecteur nombre d'onde sur l'axe x_1 orienté dans le sens de propagation. Pour une pulsation ω donnée, la solution de l'équation (1) est de la forme

$$k_1 = k_0 + \delta k_1 \quad , \qquad (2)$$

où k_0 est la solution (réelle) de l'équation de dispersion $F_0\left(k_1,\omega\right) = 0$ correspondant à l'équation classique de dispersion des modes de Lamb dans une plaque aux interfaces planes, et δk_1 est une petite perturbation complexe due à la rugosité. Les parties réelle et imaginaires du nombre d'onde k_1 sont reliées respectivement à la vitesse de phase et à l'atténuation de l'onde. Deux processus contribuent à la décroissance d'un mode de Lamb : le ***rayonnement d'un mode de Lamb sous forme d'ondes de volume, et un transfert d'énergie entre modes de Lamb***. L'atténuation du mode de Lamb considéré peut être interprété comme un ***phénomène de décohérence*** des ondes longitudinales et transversales, qui ne peuvent pas interférer de manière constructive à chaque interface de la plaque, afin de se recombiner et de donner des modes de Lamb.

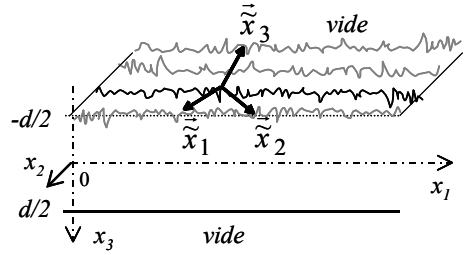

Figure 1 : géométrie du problème pour une plaque anisotrope.

Comparaison avec les résultats expérimentaux

Des études expérimentales ont été menées sur une plaque en verre grenaillée. Pour une longueur d'onde spatiale donnée du profil rugueux, les résultats donnés par le modèle analytique et les résultats expérimentaux présentent un bon accord, mais seulement pour certains modes, ce qui en limite d'autant plus la portée que les profils rugueux comportent ***différentes longueurs d'onde spatiales***.

Simulation par éléments finis dans une plaque fluide

Afin de visualiser le phénomène de décohérence, le problème simplifié d'une plaque "fluide" présentant un profil de rugosité périodique (figure 2) a été étudié de façon numérique (par éléments finis). Cette simulation numérique a montré de manière générale que, lorsque la longueur d'onde d'un mode de Lamb est proche de la longueur d'onde spatiale du profil, des ondes rétrodiffusées apparaissent ; une relation simple de phonon entre le signal incident, le mode converti et le phonon relié à la rugosité se trouve vérifiée, comme dans le cas élastique [6].

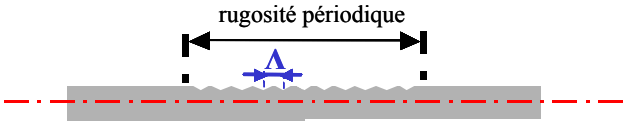

Figure 2 : plaque fluide présentant un profil de rugosité périodique, de période spatiale Λ

Modèle analytique de plaque fluide : décomposition en ondes modales

Afin de mettre en évidence les phénomènes de transfert d'énergie entre modes, un modèle analytique a été développé pour la pression acoustique dans une plaque fluide en présence de rugosité en parois. La plaque fluide est caractérisée par son épaisseur d, sa masse volumique ρ_0, et la célérité du son c_0. Les frontières $x_3 = d$ et $x_3 = 0$ sont des parois parfaitement rigides présentant une petite variation $h(x_1, x_3)$ qui peut être localement exprimée comme un opérateur temporel $\hat{b}(x_1, x_3; t)$ agissant sur la pression acoustique, et dépendant des coordonnées spatiales.

Le problème

Les équations fondamentales du problème s'écrivent :

$$\boxed{\begin{cases} \bullet \left(\Delta - \frac{1}{c_0^2}\partial_{tt}^2\right)\hat{p}(x_1,x_3;t) = -\hat{f}(x_1,x_3;t), & (3\text{-a}) \\ \qquad 0 \le x_3 \le d, \forall x_1, & \\ \bullet \left[\partial_n + \hat{b}(x_1,x_3;t)\right]\hat{p}(x_1,x_3;t) = \hat{u}(x_1,x_3;t), & (3\text{-b}) \\ \qquad x_3 = 0 \ et \ x_3 = d, x_1 \ge 0, & \\ \bullet \ Condition \ de \ rayonnement \ de \ Sommerfeld & (3\text{-c}) \\ \qquad quand \ x_1 \to \pm\infty, & \end{cases}}$$

où ∂_{tt}^2 et ∂_n désignent respectivement $\partial^2/\partial t^2$ et $\partial/\partial n$, $\vec{n}$ étant la normale aux frontières planes, $\hat{p}(\vec{r};t)$ est la pression complexe au point $\vec{r}$ au temps t, $\hat{f}$ et $\hat{u}$ sont respectivement les sources de volume et de surface, $\hat{b}(x_1, x_3; t)$ est un opérateur temporel qui modélise les effets de la rugosité ($\hat{b} = 0$ pour un mur plan parfaitement rigide).

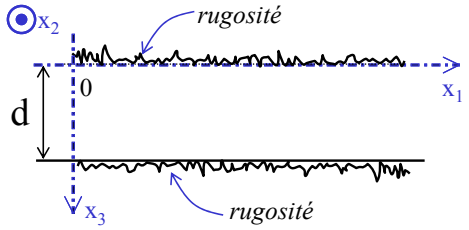

Figure 3 : plaque fluide entre deux frontières rugueuses.

Le problème transversal 1D aux valeurs propres, associé au problème (3), pour des conditions de Neumann aux frontières, s'écrit

$$\begin{cases} \left(\partial_{x_3x_3}^2 + k_m^2\right)\psi_m(x_3) = 0, \ 0 \le x_3 \le d, & (4\text{-a}) \\ \partial_{x_3}\psi_m(x_3) = 0, \ x_3 = 0 \ et \ x_3 = d, & (4\text{-b}) \end{cases}$$

où les valeurs propres k_m et les fonctions propres (orthonormées) ψ_m sont données respectivement par

$$k_m = m\pi/d, \ m \in \mathbb{N} \qquad (5\text{-a})$$

et $$\psi_m(x_3) = \sqrt{(2-\delta_{m0})/d}\cos(k_m x_3) \ . \qquad (5\text{-b})$$

Le champ de pression $\hat{p}(x_1, x_3; t)$ peut donc être développé sur ces modes propres

$$\hat{p}(x_1,x_3;t) = \sum_m \hat{a}_m(x_1;t)\psi_m(x_3), \qquad (6)$$

où les coefficients $\hat{a}_m$ sont donnés par

$$\hat{a}_m(x_1;t) = \int_0^d \hat{p}(x_1,x_3;t)\psi_m(x_3)dx_3 \ , \qquad (7)$$

noté $\langle m | \hat{p}(x_1, x_3; t)\rangle$ dans la suite.

L'usage du théorème de Green à une dimension permet d'écrire l'équation (4-a) sous la forme

$$\boxed{\begin{aligned} &\left(\frac{1}{c_0^2}\partial_{tt}^2 - \partial_{x_1x_1}^2 + \hat{k}_m^2(x_1;t)\right)\hat{a}_m(x_1;t) \\ &\qquad = \hat{\sigma}_m(x_1;t) - \hat{c}_m(x_1;t), \end{aligned}} \qquad (8)$$

où $\hat{\sigma}_m(x_1;t)$ représente le transfert d'énergie entre les sources et le mode propre m,

$$\hat{\sigma}_m(x_1;t) = \langle m | \hat{f}(x_1,x_3;t)\rangle + \hat{u}(x_1,d;t)\psi_m(d) + \hat{u}(x_1,0;t)\psi_m(0), \qquad (9\text{-a})$$

$\hat{c}_m(x_1;t)$ le ***couplage de modes*** dû à la rugosité donné par

$$\hat{c}_m(x_1;t) = \sum_{\mu \ne m}\left[\hat{\gamma}_{\mu m}(x_1,d;t) + \hat{\gamma}_{\mu m}(x_1,0;t)\right]\hat{a}_\mu(x_1;t), \qquad (9\text{-b})$$

avec

$$\hat{\gamma}_{\mu m}(x_1,x_3;t)=\left[\hat{b}(x_1,x_3;t)\psi_\mu(x_3)\right]\psi_m(x_3), x_3=0 \text{ ou } d, \quad (9\text{-c})$$

l'opérateur temporel de couplage, et où $\hat{k}_m(x_1;t)$ dépend du nombre d'onde k_m et de la perturbation provenant de la rugosité :

$$\hat{k}_m^2(x_1;t)=k_m^2+\hat{\gamma}_{mm}(x_1,d;t)+\hat{\gamma}_{mm}(x_1,0;t) \quad . \quad (10)$$

Notons que si la paroi en $x_3=d$ est parfaitement rigide (sans rugosité), alors $\hat{\gamma}_{\mu m}(x_1,d;t)=0$.

La solution pour une source monochromatique

Une source unique monochromatique (pulsation ω) est placée en $x_1=0$ et est supposée ne pas perturber la propagation vers les x_1 croissants ou décroissants ; son action est représentée par

$$\hat{f}(x_1,x_3;t)=\delta(x_1)\hat{Q}(x_3)e^{i\omega t} \quad , \quad (11\text{-a})$$

ce qui suppose

$$\hat{u}(x_1,x_3;t)=0 \ , x_3=0 \text{ et } x_3=d \quad . \quad (11\text{-b})$$

Les opérateurs $\hat{b}(x_1,x_3;t)$ et $\hat{k}_m^2(x_1;t)$ deviennent alors des fonctions notées respectivement $\hat{B}_\omega(x_1,x_3)$ et $\hat{K}_m^2(x_1)$.

Le report de l'équation (11) dans l'équation (8) conduit à

$$\boxed{\left(\partial_{x_1x_1}^2+\chi_m^2(x_1)\right)\hat{A}_m(x_1)=-\delta(x_1)\hat{S}_m+\hat{C}_m(x_1)} \quad , \quad (12\text{-a})$$

où

$$\hat{a}_m(x_1;t)=\hat{A}_m(x_1)e^{i\omega t} \quad , \quad (12\text{-b})$$

$$\chi_m^2(x_1)=k_0^2-\hat{K}_m^2(x_1) \quad , \quad (12\text{-c})$$

$$\hat{K}_m^2(x_1)=k_m^2+\hat{\Gamma}_{mm}(x_1) \quad , \quad (12\text{-d})$$

$$\hat{S}_m=\left\langle m\middle|\hat{Q}(x_3)\right\rangle \quad , \quad (12\text{-e})$$

$$\hat{C}_m(x_1)=\sum_{\mu\neq m}\hat{\Gamma}_{\mu m}(x_1)\hat{A}_\mu(x_1) \quad , \quad (12\text{-f})$$

$$\hat{\Gamma}_{\mu m}(x_1)=\left[\hat{B}_\omega(x_1,d)\psi_\mu(d)\right]\psi_m(d) + \left[\hat{B}_\omega(x_1,0)\psi_\mu(0)\right]\psi_m(0). \quad (12\text{-g})$$

Le terme $\hat{C}_m(x_1)$ représente le ***couplage de modes*** dû à la rugosité.

En faisant usage des relations (12-c) et (12-d), le nombre $\chi_m(x_1)$ peut se mettre sous la forme

$$\chi_m^2(x_1)=\kappa_m^2-\hat{\Gamma}_{mm}(x_1) \quad , \quad (13\text{-a})$$

où

$$\kappa_m^2=k_0^2-k_m^2 \quad \text{avec } k_0=\omega/c_0 \quad , \quad (13\text{-b})$$

où le terme $\hat{\Gamma}_{mm}(x_1)$ est supposé traduire une petite perturbation et où κ_m^2 est indépendant de x_1.

Le report de la relation (13-a) dans l'équation de propagation (12-a) conduit à

$$\boxed{\left(\partial_{x_1x_1}^2+\kappa_m^2\right)\hat{A}_m(x_1)=-\delta(x_1)\hat{S}_m+\hat{\Gamma}_{mm}(x_1)\hat{A}_m(x_1) + \sum_{\mu\neq m}\hat{\Gamma}_{\mu m}(x_1)\hat{A}_\mu(x_1).} \quad (14)$$

Approximations successives

La solution est recherchée sous forme d'approximations successives de l'équation (14), et exprimée à chaque étape sous forme de solution intégrale, en faisant usage de la fonction de Green 1D [7]

$$G_m(x_1,x'_0)=\frac{e^{-i\kappa_m|x_1-x'_0|}}{2i\kappa_m} \quad , \quad \kappa_m\neq 0 \quad . \quad (15)$$

- <u>A l'ordre 0</u>

$$\boxed{\hat{A}_m^{(0)}(x_1)=\hat{S}_m G_m(x_1,0)} \quad , \quad (15)$$

où le terme source $\hat{S}_m$ est nul pour les modes qui ne sont pas générés par la source.

- <u>A l'ordre 1</u>

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{A}_m^{(1)}(x_1)&=\hat{S}_m G_m(x_1,0)\\ &-\int_{-\infty}^{+\infty}G_m(x_1,x'_1)\hat{\Gamma}_{mm}(x'_1)\hat{S}_m G_m(x'_1,0)dx'_1\\ &-\sum_{\mu_1\neq m}\int_{-\infty}^{+\infty}G_m(x_1,x'_1)\hat{\Gamma}_{\mu_1 m}(x'_1)\hat{S}_{\mu_1}G_{\mu_1}(x'_1,0)dx'_1.\end{aligned}} \quad (16)$$

Cas d'un profil de rugosité traduit par une répartition de "petites cavités"

En première approche, le profil rugueux est supposé constitué d'une répartition de "petites cavités" aux interfaces $x_3=0$ et $x_3=d$ (figure 4).

Dans chaque cavité (volume V_0), la variation de pression $\hat{p}_c$ est supposée uniforme et créée par le déplacement ξ_c de la surface S_0 séparant la cavité de la plaque fluide (figure 5). La pression $\hat{p}_c$ dans la petite cavité peut être exprimée en fonction du rapport S_0/V_0 et du déplacement ξ_c de la surface S_0 :

$$\hat{p}_c=-\rho_0 c_0^2\frac{S_0}{V_0}\xi_c \quad . \quad (17)$$

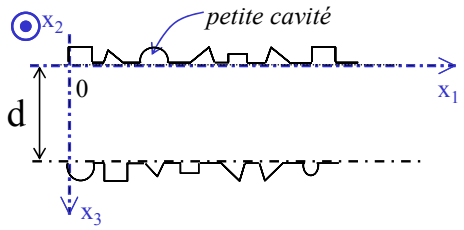

Figure 4 : plaque fluide présentant un profil de rugosité traduit par une répartition de "petites cavités"

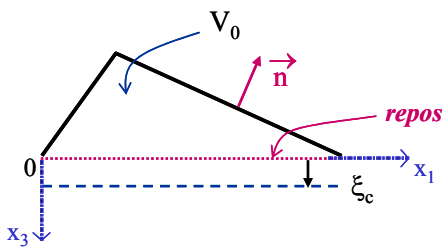

Figure 5 : exemple de géométrie de petite cavité

L'utilisation de l'équation d'Euler et de la relation (17) conduit finalement à l'expression de l'opérateur complexe de couplage $\hat{b}(x_1,x_3;t)$:

$$\boxed{\hat{b}(x_1,x_3;t)=\frac{1}{c_0^2}\frac{V_0}{S_0}\partial_{tt}^2} \quad . \tag{18}$$

Quand les sources sont monochromatiques (pulsation ω), l'opérateur $\hat{b}(x_1,x_3;t)$ devient une fonction $\hat{B}_\omega(x_1,x_3)$:

$$\hat{B}_\omega(x_1,x_3)=-k_0^2\frac{V_0}{S_0} \quad \text{avec} \quad k_0=\omega/c_0 \quad . \tag{19}$$

Notant $\tilde{h}(x_1,x_3)=V_0/S_0$ (profondeur équivalente de cavité rectangulaire), la fonction $\hat{B}_\omega(x_1,x_3)$ devient

$$\hat{B}_\omega(x_1,x_3)=-k_0^2\,\tilde{h}(x_1,x_3) \quad , \tag{20}$$

ce qui représente la réaction de chaque point des surfaces $x_3=0$ et $x_3=d$, et fait apparaître la densité spectrale de puissance du profil. Notons que si la hauteur équivalente $\tilde{h}(x_1,d)$ est nulle en $x_3=d$ (mur plan parfaitement rigide), l'opérateur $\hat{B}_\omega(x_1,d)$ est bien nul.

Couplages de modes dans le cas d'une répartition régulière de "petites cavités"

De manière à obtenir un résultat analytique simple qui permette d'évaluer le niveau de couplage de modes possible, le profil de rugosité est maintenant supposé périodique et régulier, sur une seule face comme indiqué sur la figure 6, les cavités restant néanmoins de formes quelconques mais possédant le même paramètre $\tilde{h}$.

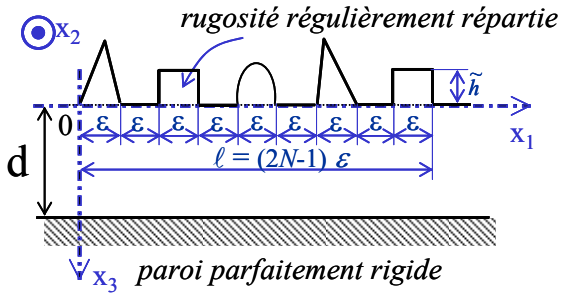

Figure 6 : plaque fluide présentant un profil de rugosité périodique (au sens où chacune des N cavités possède le même $\tilde{h}$)

De surcroît, les sources acoustiques sont supposées ne générer que le mode plan fondamental ($m=0$), le premier mode supérieur ($\mu=1$) étant le seul mode créé par couplage dû à la rugosité car la fréquence retenue est telle que tous les autres modes supérieurs sont évanescents (facteur r_μ, éq.(21-b)). Le rapport des amplitudes du mode ($\mu=1$) à l'ordre 1 sur l'amplitude du mode ($m=0$) à l'ordre 0, pour un capteur situé en aval de la rugosité, prend alors la forme simple

$$\left|\frac{\hat{A}_{\mu=1}^{(1)}(x_1)}{\hat{A}_{m=0}^{(0)}(x_1)}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\tilde{h}/d}{r_\mu(r_m-r_\mu)}\frac{1-\cos\left[2N k_0(r_m-r_\mu)\varepsilon\right]}{1+\cos\left[k_0(r_m-r_\mu)\varepsilon\right]} \quad , \tag{21-a}$$

$$\text{avec} \quad r_\mu^2=1-\left(\frac{\mu\pi/d}{k_0}\right)^2 \quad \text{et} \quad x_1>(2N-1)\varepsilon \quad . \tag{21-b}$$

Ce rapport (21-a) fait apparaître la fonction de diffraction du réseau avec une amplitude proportionnelle au paramètre $\tilde{h}/d$. Pour un rapport $\tilde{h}/d=4.10^{-3}$ et un nombre d'onde donné par $\frac{\pi/d}{k_0}=\frac{2}{3}$ (mode $\mu=1$ propagatif, modes 2 et suivants évanescents), et pour $N=20$ cavités et une largeur de cavité $\varepsilon=0{,}4\,mm$, le rapport des amplitudes (21-a) est donné par la valeur typique $\left|\hat{A}_1^{(1)}(x_1)/\hat{A}_0^{(0)}(x_1)\right|\approx 10^{-2}$.

Etant donné la structure spatiale de ce mode et son amplitude relative, sa détection peut être envisagée et par suite une évaluation directe du paramètre $\tilde{h}/d$.

References

[1] Chimenti D.E., Lobkis O.I., Ultrasonics, **36**, 155-162 (1998).

[2] Ogilvy J.A., "Theory of wave scattering from random rough surface", Institute of Publishing Bristol, 1992.

[3] Maradudin A.A., Mills D.L., Annals of Physics, **100**, 262-309 (1976).

[4] Potel C., Leduc D., Morvan B., Pareige P., Depollier C., Izbicki J.L., "Propagation of Lamb waves in anisotropic rough plates : a perturbation method", 7ème Congrès Français d'Acoustique joint with 30th Deutsche Jahrestagung für Akustik, Collected papers on CD-ROM ISBN 2-9521105-3-0, 22-25 mars 2004, Strasbourg, 147-148.

[5] Leduc D., Morvan B., Pareige P., Izbicki J.L., "Measurement of the effects of rough surfaces on Lamb waves propagation", NDT&E international, **37** (3), 207-211 (2004).

[6] Leduc D., Hladky-Hennion A.-C., Morvan B., Izbicki J.L., Pareige P., "Propagation of Lamb waves in a plate with a periodic grating: interpretation by phonon", J. Acoust. Soc. Am., **118** (4) 2234-2239 (2005).

[7] Bruneau M., *Manuel d'Acoustique Fondamentale*, Hermès Ed., Paris (1998).