**Chez le même éditeur**

- Cours de mécanique générale
*D. Bellet*
- Mécanique des fluides
*P. Chassaing*
- Que savez-vous de l'outil mathématique ? (6 fascicules)
*Collectif*
- Résistance des matériaux
*G. Pluvinage, V. Sapunov*

**www.cepadues.com**

**CET OUVRAGE** est destiné aux étudiants qui possèdent des connaissances scientifiques dans le domaine des mathématiques et de la physique du niveau de la troisième année de licence ou de la première année d'école d'ingénieur (après deux années en classes préparatoires), et plus généralement à tout étudiant de master et ingénieur désireux d'acquérir les bases de la mécanique analytique.

Au terme de ces six chapitres de cours et d'exercices résolus, le lecteur doit être capable de déterminer lui-même sa stratégie de résolution d'un problème de mécanique et d'appliquer les méthodes présentées dans l'ouvrage à tout type de problème de mécanique : c'est du moins l'ambition de cet ouvrage. Reste que la présentation adoptée permet à l'étudiant, à partir d'un exemple élémentaire donné dès le premier chapitre, de mettre dès le début en pratique toutes les méthodes de résolution, la compréhension en profondeur des concepts étant assurée dans la suite de l'ouvrage.

Cette présentation, nourrie d'exemples et montrant la complémentarité historique entre les différentes approches (le formalisme classique des équations de Lagrange et le principe variationnel), est appliquée aux systèmes discrets et continus (déformables ou non) ; elle s'attache à assurer le lien entre les deux formulations et, par là, à conduire à une compréhension en profondeur des principes fondamentaux de la physique.

Le cours est complété par un chapitre d'exercices d'application, résolus de façon détaillée à l'aide d'au moins deux méthodes à chaque fois, et par plusieurs annexes comprenant notamment des tableaux résumés qui peuvent être vus comme un jeu de "diapositives" destinées à être projetées par un enseignant. Elles pourront aussi être vues comme un memento de cours au sens où les points clés (formules, idées) y sont consignés.

***Catherine Potel** est Professeur à l'Université du Maine depuis 2001, après avoir été Maître de Conférences à l'Université de Picardie Jules Verne. Elle mène depuis plusieurs années des travaux de recherche dans le domaine de l'acoustique et du Contrôle Non Destructif par ultrasons, d'abord au Laboratoire Roberval de l'Université de Technologie de Compiègne, puis au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine. Elle est actuellement responsable du Master Professionnel « Acoustique des Transports » de cette Université, qui bénéficie de la collaboration active de trois grands organismes français (RATP, LVA, CSTB).*

PAV. : 742
I.S.B.N. : 2-85428-742-3
9 782854 287424

Catherine Potel

Principes & applications de mécanique analytique

**Catherine Potel**

# Principes & applications de mécanique analytique

**• Cours, exercices corrigés, planches de synthèse •**

# TABLE DES MATIERES

**Préface, Avant-Propos** ..... **3**

**Chapitre I**
**INTRODUCTION A LA MECANIQUE ANALYTIQUE** ..... **9**

**1. Historique** ..... **9**
1.1. Cadre de la mécanique classique ..... 9
1.2. Le Principe Fondamental de la Dynamique ..... 9
1.3. L'aube du calcul de variations ..... 11

**2. Plan de l'ouvrage** ..... **14**
2.1. La mécanique classique ..... 14
2.2. La mécanique analytique ..... 14
2.3. Exemple d'un système à 1 degré de liberté : le système masse-ressort ..... 14
2.4. Plan de l'ouvrage ..... 20

**Chapitre II**
**VARIABLES DE SITUATION - LIAISONS** ..... **21**

**1. Coordonnées généralisées ou variables de situation** ..... **21**
1.1. Degrés de liberté d'une liaison ..... 21
1.2. Les coordonnées généralisées ..... 24

**2. Les conditions de liaison** ..... **25**
2.1. Liaisons unilatérales et bilatérales ..... 25
2.2. Liaison indépendante ou dépendante du temps ..... 27
2.3. Liaison de type holonôme ..... 28
2.4. Liaison de type non holonôme ..... 28
2.5. Liaison de type semi holonôme ..... 29
2.6. Un peu de grec ..... 30

**Chapitre III**
**EQUATIONS DE LAGRANGE** ..... **31**

**1. Introduction au principe des travaux (ou puissances) virtuel(le)s** ..... **31**
1.1. Hypothèses et notations ..... 31
1.2. Equivalence de la relation fondamentale de la dynamique vectorielle et de sa multiplication scalaire par un vecteur arbitraire ..... 32
1.3. Particularisation du champ de vecteurs arbitraire ..... 33
1.4. Le principe de d'Alembert ..... 34
1.5. Interprétation physique du champ de vecteurs arbitraire ..... 35
1.6. Principe des travaux virtuels ..... 36
1.7. Principe des puissances virtuelles ..... 36

**2. Les équations de Lagrange** ..... **37**
2.1. Indépendance des coordonnées généralisées et de leurs dérivées ..... 37
2.2. Calcul d'une vitesse virtuelle ..... 38
2.3. Quelques relations préliminaires ..... 39
2.4. Calcul de la puissance virtuelle des quantités d'accélération ..... 40
2.5. Calcul de la puissance virtuelle des forces extérieures et intérieures au système ..... 41
2.6. Equations de Lagrange ..... 48
2.7. Lois de conservation ..... 49

**Chapitre IV**
**MISE EN OEUVRE DES EQUATIONS DE LAGRANGE - MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE ..... 52**

**1. Equations de Lagrange pour les systèmes non holonomes ..... 53**
1.1. Introduction sur un exemple : le problème du cerceau ..... 53
1.2. Champ de vitesses virtuel non compatible avec la condition de liaison non holonôme ..... 58
1.3. Méthode des multiplicateurs de Lagrange ..... 61
1.4. Commentaires ..... 65

**2. Exemple d'application ..... 68**
2.1. Mouvement libre de la roue dans le plan vertical ..... 69
2.2. Roue en contact ponctuel sur un axe horizontal. Champ de vitesses virtuel compatible avec la condition de contact ..... 73
2.3. Roue en contact ponctuel sur un axe horizontal. Champ de vitesses virtuel ne respectant plus la condition de contact ..... 75
2.4. Roue en contact ponctuel sur un axe horizontal : contact sans glissement ..... 77

**Chapitre V**
**PRINCIPE VARIATIONNEL DE HAMILTON ..... 81**

**1. Eléments de calcul variationnel ..... 81**
1.1. Etat d'un système ..... 81
1.2. Introduction au calcul variationnel ..... 82
1.3. Enoncé du Principe Variationnel de Hamilton (principe de moindre action) ..... 86

**2. Condition de stationnarité : équation d'Euler ..... 87**
2.1. Propriétés de l'opérateur variations δ ..... 88
2.2. Equation d'Euler ..... 89
2.3. Généralisation à n coordonnées ..... 90
2.4. Solution de problèmes d'optimisation (exemples géométriques simples) ..... 90

**3. Principe Variationnel de Hamilton et équations de Lagrange : cas des systèmes de solides rigides ..... 93**
3.1. Cas où les liaisons sont holonômes et où toutes les forces dérivent d'une fonction de force ..... 93
3.2. Cas où les liaisons sont holonômes et où toutes les forces ne dérivent pas d'une fonction de force ..... 93
3.3. Cas où le système vérifie p conditions non holonômes et où toutes les forces ne dérivent pas d'une fonction de force ..... 94

**4. Principe Variationnel de Hamilton et équations de Lagrange : introduction au cas des systèmes déformables ..... 95**
4.1. Lagrangien dépendant de dérivées spatiales d'ordre 1 ..... 95
4.2. Lagrangien dépendant de dérivées spatiales d'ordre 1 et 2 ..... 109

**Chapitre VI**
**EXERCICES RESOLUS ..... 115**

**1. Particule sur un cylindre ..... 115**
1.1. Application du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) au point M .....116
1.2. Application du Principe des Puissances Virtuelles.....117
1.3. Application du Principe Variationnel de Hamilton .....120

**2. Système articulé..... 122**

**3. Masselotte sur une rainure et liée à un ressort..... 126**
3.1. Champ de vitesses virtuel ne respectant pas la condition holonôme de contact .....126
3.2. Champ de vitesses virtuel respectant la condition de contact : utilisation des multiplicateurs de Lagrange .....128

**4. Equilibre d'un tronc d'arbre en montagne..... 130**
4.1. Champ de vitesses virtuel respectant la condition de contact au point A.....131
4.2. Champ de vitesses virtuel ne respectant pas la condition de contact au point A .....133

**5. Cerceau d'enfant ..... 136**
5.1. Analyse du système .....139
5.2. Application du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD).....140
5.3. Application du Théorème de l'Energie Cinétique (TEC) .....146
5.4. Application du Principe des Puissances Virtuelles pour un champ de vitesses virtuel respectant la condition de contact au point A .....149
5.5. Application du Principe des Puissances Virtuelles pour un champ de vitesses virtuel ne respectant pas la condition de contact au point A .....152
5.6. Introduction d'un multiplicateur de Lagrange .....157

**6. Toupie symétrique (mouvement de Lagrange-Poisson) ..... 160**
6.1. Utilisation du Principe des Puissances Virtuelles.....161
6.2. Utilisation du Principe Variationnel de Hamilton .....164

**7. Pendule simple - Utilisation d'une condition d'inextensibilité pour introduire les multiplicateurs de Lagrange ..... 168**
7.1. Utilisation des coordonnées cartésiennes .....168
7.2. Utilisation des coordonnées polaires .....171

**8. Mouvement transversal d'une corde flexible tendue (corde vibrante) ..... 174**
8.1. Abscisse curviligne.....175
8.2. Application du Principe Fondamental de la Dynamique à un élément de corde .....176
8.3. Application du Principe Variationnel de Hamilton .....178
8.4. Prise en compte de la viscosité de l'air .....182

**9. Barre en traction-compression encastrée à une extrémité et avec masse à l'autre ..... 183**

**CONCLUSION ..... 187**

**Annexe A1. LES ANGLES D'EULER ..... 188**

**Annexe A2**
**FONCTION DE FORCE, ENERGIE POTENTIELLE..... 190**

**1 Champ de forces ..... 190**

**2 Fonction de force ..... 190**

**3 Energie potentielle ..... 191**

**4 Puissance et travail élémentaire ..... 192**

**5 Rappels sur la notion de gradient ..... 193**
6.1. Définitions de base .....193
6.2. Pour aller plus loin.....193

**Annexe A3**
**APPLICATION DU PRINCIPE VARIATIONNEL DE HAMILTON AUX LIGNES ELECTRIQUES (exemple)..... 197**

**Annexe A4**
**ELASTICITE LINEAIRE, ENERGIE POTENTIELLE DE DEFORMATION ..... 200**

**1. Tenseur des contraintes et des déformations ..... 200**
1.1. Tenseur des déformations.....200
1.2. Tenseur des contraintes .....206

**2. Comportement linéaire d'un solide élastique ..... 212**
2.1. Introduction : essai de traction.....212
2.2. Généralisation : loi de Hooke en milieu anisotrope.....213
2.3. Loi de Hooke en milieu isotrope .....214

**3. Equations générales du mouvement : énergie potentielle de déformation ..... 215**
3.1. Lagrangien total du système correspondant aux déformations du domaine.....215
3.2. Coefficients de puissance des forces ne dérivant pas d'une fonction de force dans le domaine $\mathscr{D}$ .....216
3.3. Principe Variationnel de Hamilton .....216
3.4. Energie potentielle élastique.....220

**Annexe A5. FORMULES DE GREEN ..... 222**

**1. Formule de Green 2D ..... 222**
**2. Formule de Green 3D ..... 224**

**Annexe A6. TABLEAUX-RESUMES ..... 227**

**1. Chapitre I ..... 227**
**2. Chapitre II ..... 231**
**3. Chapitre III ..... 237**
**4. Chapitre IV ..... 254**
**5. Chapitre V ..... 260**
**6. Eléments d'inertie de quelques solides homogènes usuels ..... 280**

**BIBLIOGRAPHIE ..... 282**

**INDEX ALPHABETIQUE..... 283**