MÉCANIQUE QUANTIQUE
TRAVAUX DIRIGÉS Nos. 9 (Durée : 1 h)

Effet Hall

Effet Hall On considère un électron de charge $-|e|$ astreint à se mouvoir sur une surface bidimensionnelle dans laquelle règne une champ électrique $\vec{E}$ suivant (Ox) et une induction magnétique de potentiel vecteur $\vec{A} = (0, Bx, 0)$.

1. Donner le Hamiltonien auquel est soumis l'électron.
   L'électron est soumis à $H = \frac{1}{2m_e}(\vec{p} - q_e\vec{A})^2 + q_eV$ *avec* $q_e = -|e|$ *et* $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$
   Comme ici $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$ *et* $\vec{A} = (0, Bx, 0)$ *ce Hamiltonien devient*
   $H = \frac{1}{2m_e}(\vec{p} + |e|Bx\vec{u_x})^2 + |e|E_x x$
2. L'électron a un vecteur d'onde $\vec{k} = (k_x, k_y)$. k_x et k_y ne sont pas nuls *a priori*. Cependant, le Hamiltonien dépend-il de y ? En déduire la forme de la fonction d'onde $\psi(x, y)$ de l'électron.
   L'électron est contraint à se trouver dans le plan Oxy. De plus, le Hamiltonien précédent ne dépend pas de y. En vertu d'un raisonnement analogue à celui fait pour une particule dans une boîte rectangulaire tridimensionnelle, on peut séparer les dépendances spatiales des variables dans l'équation de Schrödinger indépendante du temps $\widehat{H}\psi = E\psi$ *et écrire*

   $$\psi(x, y) = e^{-ik_y y}\phi(x)$$

3. Que devient alors l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour l'électron ?
   En utilisant $\widehat{p_y} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y}$ *et en substituant ce résultat dans* $\widehat{H}\psi = E\psi$ *un peu d'algèbre montre alors que cette équation devient*

   $$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2}{2m}(-k_y^2) + \frac{1}{2m}e^2B^2x^2 + \frac{1}{2m}\hbar 2eBxk_y + eE_x x\right]\phi(x) = E\phi(x)$$

   Reconnaissons un binôme du second degré dans lequel nous mettrons $(eB)^2$ *en facteur :*

   $$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{e^2B^2}{2m}(x - \frac{\hbar}{eB}k_y)^2 + eE_x x\right]\phi(x) = E\phi(x)$$

   Soit encore, en posant $\omega_c = \frac{eB}{m}$ *et* $l_c^2 = \frac{\hbar}{eB}$

   $$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega_c^2(x - l_c^2k_y)^2 + eE_x x_e\right]\phi(x) = E\phi(x)$$

   Développons et regroupons avec le terme en $eE_x x$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega_c^2 x^2 + m\omega_c^2(\frac{eE_x}{m\omega_c^2} - l_c^2 k_y)x\right]\phi(x) = E\phi(x)$$

soit

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega_c^2(x - (l_c^2 k_y - \frac{eE_x}{m\omega_c^2}))^2 - K^2\right]\phi(x) = E\phi(x)$$

avec $K^2 = \frac{1}{2}m\omega_c^2(l_c^2 k_y - \frac{eE_x}{m\omega_c^2})$

4. Mettre cette équation sous la forme de celle de l'oscillateur harmonique.
On reconnaît donc un oscillateur harmonique centré en $l_c^2 k_y - \frac{eE_x}{m\omega_c^2}$ *dont les énergies sont décalées de* K^2.
Les niveaux correspondants sont appelés niveaux de Landau.