Licence de Physique - Module PHY310aa
Corrigé du TD 1 Rappels de mécanique classique

1. (a) **Équations de Lagrange:**

   Le Lagrangien vaut par définition $L = T - V$ avec $T(q_i, \dot{q}_i, t)$ énergie cinétique du système, $(q_i, \dot{q}_i)$ représentant les N coordonnées généralisées du système et $V(q_i, \dot{q}_i, t)$ son énergie potentielle.

   Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent sous la forme de N équations du second ordre

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = 0$$

   (b) **Principe de moindre action de Maupertuis:**

   L'action S qui vaut

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

   est extrémale autour de la trajectoire réellement suivie par le système entre les instants t_1 et t_2, soit $\delta S = 0$. Les équations de Euler-Lagrange en découlent.

   On tire de celles-ci sachant que

$$L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

   pour le système considéré

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0$$

   et on retrouve bien les équations de Newton. La formulation lagrangienne est surtout avantageuse pour les systèmes à grand nombre de degrés de liberté.

   La mécanique quantique moderne (au delà des formulations semi-classiques de Bohr, Einstein, Sommerfeld) est issue de la remarque de de Broglie sur la ressemblance entre le principe de Maupertuis (en mécanique) et du principe de Fermat (sur l'extrémalité du chemin optique). En associant une onde à une particule et réciproquement il a alors été possible d'obtenir l'équation de Schrödinger comme équation eikonale de la fonction d'onde.

2. **Équations de Hamilton:**

   (a) Définition du Hamiltonien:

   On effectue une transformée de Laplace du Lagrangien (comme ce qui est fait par exemple en thermodynamique pour passer de l'énergie totale U à l'énergie libre F) afin, en introduisant une nouvelle variable p_i d'obtenir un système d'équations du premier ordre, donc plus faciles à résoudre.

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

avec

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

on obtient

$$H = T + V$$

qui s'identifie dans les cas simples (sans dépendances explicites en temps) avec l'énergie mécanique du système.

(b) Équations de Hamilton

Des équations de Euler-Lagrange on tire ainsi un système de $2N$ équations du premier ordre

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

ici

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

comme $H = p\dot{x} - L$ et $p = \frac{\partial L}{\dot{x}} = m\dot{x}$

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$$

et les équations de Hamilton s'écrivent

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

On retrouve bien les équations de Newton usuelles.

3. **Particule dans un champ électrique et magnétique**

(a) Équations de Hamilton

On suppose que $\vec{B} = (0,0,B)$ est aligné suivant Oz et que le potentiel vecteur vaut donc $\vec{A} = (0, A_y(x,y,z), 0)$

On donne le Hamiltonien en

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 + V(x,y,z,t)$$

avec e charge électrique de la particule et $V = eU$ où U est le potentiel électrique.

en développant

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p}.\vec{p} - 2e\vec{p}\vec{A} + e^2\vec{A}.\vec{A}\right)^2 + eU(x,y,z,t)$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - 2e(p_xA_x + p_yA_y + p_zA_z) + e^2(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)\right)^2 + eU(x,y,z,t)$$

et en appliquant les équations de Hamilton

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m} - \frac{e}{m}A_x$$

$$p_x = m\dot{x} + eA_x$$

et ainsi de suite pour y,z. On constate que l'expression usuelle de l'impulsion a changé ; elle diffère en général de la quantité de mouvement.

$$\vec{p} = m\vec{v} + e\vec{A}$$

Ceci dit en l'absence de champ magnétique on retrouve bien l'expression usuelle.

pour l'autre équation de Hamilton

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

comme

$$p_x = m\dot{x} + eA_x$$

et de même pour y et z

on obtient

$$\dot{p}_x = \frac{e}{2m}\left(-2(m\dot{x}+eA_x)\frac{\partial A_x}{\partial x} - 2(m\dot{y}+eA_y)\frac{\partial A_y}{\partial x} - 2(m\dot{z}+eA_z)\frac{\partial A_z}{\partial x} + 2e(A_x\frac{\partial A_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial A_y}{\partial x} + A_z\frac{\partial A_z}{\partial x})\right) - \frac{e\partial U}{\partial x}$$

après simplification

$$\dot{p}_x = e\left(-\frac{\partial U}{\partial x} - \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} - \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial x} - \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)$$

par ailleurs en dérivant la première équation obtenue

$$\dot{p}_x = \frac{d}{dt}(m\dot{x} + eA_x)$$

or

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \dot{x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial A_y}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

en utilisant la dérivée convective (voir le cours de mécanique des fluides). En exprimant $m\ddot{x}$ on reconnaît le champ électromoteur de Neumann

$$\vec{E_m} = -\vec{\text{grad}}\vec{U} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

En remarquant que $\vec{B} = \vec{\text{rot}}\vec{A}$, en faisant le même calcul sur y et z les termes restants, après simplification, nous redonnent bien la force de Lorentz

$$\vec{f} = m(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z}) = e\left(\vec{E_m} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right)$$

Il faut donc retenir en mécanique quantique cette expression modifiée du Hamiltonien en présence d'un champ magnétique (effet Zeeman, etc).

(b) dans le cas simple considéré on retrouve bien

$$m\dot{x} = p_x - eA_x$$