Effet Compton – Longueur d'onde de De Broglie

1. Effet Compton

a.

L'énergie est supposée grande devant l'énergie de liaison de l'atome, on peut donc appliquer la mécanique classique (mais avec les corrections relativistes si la vitesse est grande devant celle de la lumière)

b. Equations de conservation

Conservation de l'énergie : $E_\nu = E'_\nu + E_e$ (1)

Conservation de la quantité de mouvement : $\vec{p}_\nu = \vec{p}'_\nu + \vec{p}_e$ (2)

$$\vec{p}_e = \vec{p}_\nu - \vec{p}'_\nu \quad (3)$$

c. Détermination de l'expression de E_e .

$E_\nu = h\nu \qquad E'_\nu = h\nu' \qquad E_e = W_e - m_e c^2$

$(p_e c)^2 + \left(m_e c^2\right)^2 = W_e{}^2$ (4)

On met (3) au carré et on multiplie par c² : $p_e^2 c^2 = p_\nu^2 c^2 + p'^2_\nu c^2 - 2\,p_\nu p'_\nu \cos\theta$ (5)

On a $E_\nu = p_\nu c$ et $E'_\nu = p'_\nu c$

Donc (5) donne :

$$p_e^2 c^2 = E_\nu^2 + E'^2_\nu - 2\,E_\nu E'_\nu \cos\theta \quad (6)$$

En utilisant (4) on a :

$$W_e{}^2 - m_e^2 c^4 = E_\nu^2 + E'^2_\nu - 2\,E_\nu E'_\nu \cos\theta \quad (7)$$

$$E_e = W_e - m_e c^2 \quad \rightarrow \quad W_e^2 = \left(E_e + m_e c^2\right)^2 = E_e^2 + 2E_e m_e c^2 + m_e^2 c^4 \; (8)$$

En injectant (8) dans (7) on a :

$$E_e^2 + 2E_e m_e c^2 + \cancel{m_e^2 c^4} - \cancel{m_e^2 c^4} = E_\nu^2 + E'^2_\nu - 2\,E_\nu E'_\nu \cos\theta \quad (9)$$

$$E_\nu = E'_\nu + E_e \quad \rightarrow \quad E'^2_\nu = \left(E_\nu - E_e\right)^2 = E_\nu^2 - 2E_\nu E_e + E_e^2 \quad (10)$$

La combinaison de (9) et (10) donne :

$$E_e^2 + 2E_e m_e c^2 = E_\nu^2 + E_\nu^2 - 2E_\nu E_e + E_e^2 - 2\,E_\nu E'_\nu \cos\theta \; (11)$$

Or d'après (1) on a : $E'_\nu = E_\nu - E_e$

Donc (11) devient :

$$E_e^2 + 2E_e m_e c^2 = 2E_\nu^2 - 2\,E_\nu E_e + E_e^2 - 2E_\nu\left(E_\nu - E_e\right)\cos\theta$$

Soit encore :

$$E_e^2 + 2E_e m_e c^2 = 2E_\nu^2 - 2\,E_\nu E_e + E_e^2 - 2E_\nu E_\nu\cos\theta + 2E_\nu E_e\cos\theta$$

$$2E_e m_e c^2 = 2E_\nu^2 - 2\,E_\nu E_e - 2E_\nu^2\cos\theta + 2E_\nu E_e\cos\theta \quad (12)$$

On déduit de (12) l'expression de E_e :

$$E_e\left(m_e c^2 + E_\nu - E_\nu\cos\theta\right) = E_\nu^2\left(1-\cos\theta\right)$$

$$\Rightarrow \quad E_e\left(m_e c^2 + E_\nu\left(1-\cos\theta\right)\right) = E_\nu^2\left(1-\cos\theta\right)$$

$$\boxed{E_e = \frac{E_\nu^2\left(1-\cos\theta\right)}{E_\nu\left(1-\cos\theta\right) + m_e c^2} \quad (13)}$$

d. Détermination de l'expression de E'ν

Pour déterminer l'expression de E'_ν, on utilise (1) et (13) :

$$E_\nu = E'_\nu + E_e \qquad \rightarrow \quad E_e = E_\nu - E'_\nu$$

$$E_e = \frac{E_\nu^2\left(1-\cos\theta\right)}{E_\nu\left(1-\cos\theta\right) + m_e c^2} \qquad \rightarrow \quad E_\nu - E'_\nu = \frac{E_\nu^2\left(1-\cos\theta\right)}{E_\nu\left(1-\cos\theta\right) + m_e c^2}$$

D'où
$$E'_\nu = E_\nu - \frac{E_\nu^2\left(1-\cos\theta\right)}{E_\nu\left(1-\cos\theta\right) + m_e c^2} = \frac{E_\nu\left(E_\nu\left(1-\cos\theta\right) + m_e c^2\right) - E_\nu^2\left(1-\cos\theta\right)}{E_\nu\left(1-\cos\theta\right) + m_e c^2} = \frac{E_\nu m_e c^2}{E_\nu\left(1-\cos\theta\right) + m_e c^2}$$

Finalement :
$$\boxed{E'_\nu = \frac{E_\nu}{1 + \dfrac{E_\nu\left(1-\cos\theta\right)}{m_e c^2}}}$$

e. Détermination de la longueur d'onde du photon diffusée

$$\lambda' = \frac{hc}{E'_\nu} = \frac{hc}{\dfrac{E_\nu}{1 + \dfrac{E_\nu\left(1-\cos\theta\right)}{m_e c^2}}} = \left[1 + \frac{E_\nu\left(1-\cos\theta\right)}{m_e c^2}\right] * \frac{hc}{E_\nu} = \lambda + \frac{hc\left(1-\cos\theta\right)}{m_e c^2}$$

Soit encore :

$$\lambda' = \lambda + \frac{2h}{m_e c}\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \lambda + 2\lambda_c \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

avec $\lambda_{é}^{C} = \dfrac{h}{m_e c}$: longueur d'onde de Compton de l'électron

AN : $\lambda_c = 2.42.10^{10}\text{cm}$ *****

f) Une énergie très supérieure à l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène correspond à une longueur d'onde située dans l'UV lointain ou dans les rayons X ou Gamma. Dans ces conditions on peut supposer que les électrons de valence dans la matière (dont l'énergie est de l'ordre de 10 eV) sont libres puisque leur énergie de liaison est très faible devant celle du photon incident. Dans le cas contraire il faudrait traiter un problème complet incluant l'effet électrostatique des noyaux.

2. Longueur d'onde dite de De Broglie

a. Energie de la particule

$$E = \frac{p^2}{2m} = 3 * \frac{1}{2}kT = \frac{3}{2}kT$$

b. Longueur d'onde de De Broglie

Relation de De Broglie : $\lambda = \frac{h}{p}$

D'après a. / on a : $p = \sqrt{2me}$

D'où : $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}}$

AN pour T=300K : $\lambda = \frac{6.62.10^{34}}{\sqrt{3 * 1.67.10^{-27} * 1.38.10^{-23} * 300}} = 1.45.10^{-10}\text{m} = 1.45\text{A}^{\circ}$

c. Gaz d'Argon

On assimile l'Argon à un gaz parfait :

$PV = nRT$

Conditions normale de température et de pression : $T = 300\text{ K} \quad P = 1\text{atm} = 10^5\text{ Pa}$ une mole occupe 25.10^{-3} m^3 et contient $6{,}02.10^{23}$ atomes. Chaque atome occupe donc un volume total $\frac{4}{3}\pi R^3$ soit $4{,}15.10^{-26}$ m^3, et on en déduit une distance entre atomes de l'ordre de grandeur $R=10^{-9}$ m environ. La longueur d'onde thermique de de Broglie valant dans ces conditions $2{,}3.10^{-11}$ m , on en déduit que ce n'est pas la peine d'appliquer la mécanique quantique à un tel système (corrections trop petites) et l'on justifie la théorie cinétique classique des gaz. Par contre, pour un système léger comme l'hydrogène voire même pour des électrons, ou si l'on va vers les basses températures, la longueur d'onde de de Broglie devient comparable aux distances moyennes entre atomes, et l'on observe des phénomènes quantiques (condensation de Bose Einstein par exemple, superfluidité…)

Pile atomique :

Pour une énergie E de 5 MeV on trouve $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$ = 1,28.10^(-14) m soit une longueur d'onde proche des dimensions des noyaux (et un neutron quasi-ponctuel) ce qui correspond à une température de 3,86.10^10 K (comme au cœur du soleil)
Après modération à 0,04 eV par une série de collisions inélastiques on trouve une longueur d'onde de 1,43.10^(-10)m soit une longueur d'onde proche des dimensions des atomes (ce qui augmente la probabilité pour les neutrons de frapper une cible et d'être absorbés, et ainsi d'entretenir la réaction nucléaire ou du moins de chauffer le dispositif, ce qui est voulu) et une température de 309 K (d'où le nom de neutrons « thermiques »).
Pour avoir une longueur d'onde de l'ordre de la dimension de la pile il faudrait refroidir encore les neutrons d'un facteur astronomiquement grand. La mécanique quantique ne se manifeste pas à notre échelle sauf pour les photons (lasers) et des phénomènes collectifs comme le magnétisme, ou la condensation de Bose-Einstein.