

MÉCANIQUE QUANTIQUE
TRAVAUX DIRIGÉS Nos. 7 (Durée: 2* 1 h)

Système à deux niveaux

Généralités

On considère un système physique de Hamiltonien \widehat{H}_0 possédant deux états propres $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$ d'énergies E_1 et E_2 . On rajoute une perturbation extérieure \widehat{W} à \widehat{H}_0 .

1. Donner la représentation matricielle de \widehat{W} et de $\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{W}$ dans la base $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$. On notera les éléments de matrice correspondants W_{ij} et H_{ij} .
2. $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$ sont ils des états stationnaires de \widehat{H} ?
3. Calculer les vecteurs propres $|\psi_+\rangle, |\psi_-\rangle$ et valeurs propres de H dans la base $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ On exprimera *a priori* les coordonnées de $|\psi_+\rangle$ et $|\psi_-\rangle$ sous la forme :

$$|\psi_+\rangle = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} |\phi_1\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} |\phi_2\rangle$$

$$|\psi_-\rangle = -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi/2} |\phi_1\rangle + \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi/2} |\phi_2\rangle$$

et on donnera θ et ϕ

4. En inversant ces formules, donner $|\phi_1\rangle(t)$. En déduire la probabilité de trouver le système dans l'état $|\phi_2\rangle$ à l'instant t . (Formule de Rabi)

Maser ammoniac

On modélise la molécule d'ammoniac NH_3 par une pyramide dont N occupe un des sommets ; pour des raisons de symétrie on peut supposer que le Hamiltonien du système peut être ramené à une fonction simple de x , distance entre le plan défini par les trois atomes d'hydrogène et l'atome d'azote.

L'énergie potentielle est prise comme un puits infini symétrique de largeur $2a$ au milieu duquel se trouve une barrière de hauteur V_0 située entre $-a + b/2$ et $a - b/2$.

Le système est assimilé à une particule fictive de masse m .

1. Donner l'allure des premières fonctions propres et énergies propres de ce système de hamiltonien \widehat{H}_0 .
2. Détailler particulièrement le cas des quatre niveaux d'énergie la plus basse

3. Dans le cas $V_0 \rightarrow \infty$, on suppose qu'à $t = 0$ le système est dans une superposition à part égale des deux premiers niveaux. On ajoute alors une perturbation \widehat{W} dont la matrice est antidiagonale dans la base des deux premiers niveaux, avec des coefficients égaux à $-A$. Reprendre le calcul des fonctions propres, comparer à la question précédente à l'aide des résultats généraux établis plus haut. Donner la probabilité d'être dans l'un des deux états au temps t .
4. On considère désormais un opérateur \widehat{D} diagonal dans la base des deux premiers niveaux, de valeurs propres $+\eta$ et $-\eta$. Diagonaliser $\widehat{H}_0 + \widehat{W} + E \times \widehat{D}$ où E est un réel. On notera les fonctions propres $|\psi_+ \rangle$ et $|\psi_- \rangle$. Calculer les valeurs moyennes de \widehat{D} dans ces deux états.

Remarques : \widehat{D} correspond à l'opérateur « dipolaire électrique » et E à un champ électrique extérieur. E permet donc de sélectionner les molécules d'ammoniac qui sont plutôt dans un des deux états .