Préparation à l'Agrégation Interne de Physique
Devoir d'électromagnétisme

Florent.Calvayrac@univ-lemans.fr
Laboratoire PEC, Faculté des Sciences
Avenue Olivier Messiaen
72085 Le Mans Cedex

1 Effet Hall

On considère un barreau conducteur ayant la forme d'un parallélépipède d'arêtes parallèles à Ox,Oy,Oz. Les arêtes ont respectivement pour longueur a,b, et l. Le barreau est parcouru par un courant parallèle à Oz de densité $\vec{j}$ uniforme. Le barreau est homogène et de conductivité σ.

1. (a) Calculer le courant total I parcourant l'échantillon.
   (b) Évaluer en fonction de $\vec{j}$ et σ le champ électrique dans le barreau. Calculer la différence de potentiel V entre les deux extrémités du barreau. En déduire la résistance R du barreau et commenter.
   (c) Le courant est transporté par des charges mobiles de densité volumique ρ. Exprimer en fonction de $\vec{j}$ et ρ la vitesse $\vec{v}$ de ces charges.

2. On applique désormais au barreau un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ dirigé suivant Oy.
   (a) On considère une tranche du barreau d'épaisseur dz perpendiculaire à Oz. Exprimer la force que $\vec{B}$ exerce sur la tranche du barreau.
   (b) De même, exprimer la force $d\vec{F}$ s'exerçant sur un élément de volume $d\tau$ portant une charge dq en fonction de ces paramètres et de $\vec{v}$, puis en fonction de $\vec{j}$.
   (c) Le courant est maintenu parallèle à Oz en appliquant un champ électrique $\vec{E_2}$ créant une force opposée à $d\vec{F}$ s'exerçant sur les porteurs de charge. Exprimer $\vec{E_2}$
   (d) Calculer la différence de potentiel V_H créée par $\vec{E_2}$ entre les deux faces perpendiculaires à Ox. Montrer que cette tension V_H est de la forme

   $$V_H = \frac{R_H I B}{b}$$

   Exprimer R_H dite constante de Hall du matériau.
   (e) Application numérique : $b = 0,1$ mm, $B = 1$ T, $I = 10A$. On mesure $V = 20$ μV. Déterminer R_H et commenter.

2 Rails de Laplace

Sur deux rails conducteurs parallèles situés dans un plan horizontal à une distance l l'un de l'autre glissent sans frottement deux fils rigides de masse m assujettis à rester perpendiculaire aux rails. L'ensemble est soumis à un champ magnétique vertical uniforme $\vec{B}$. Les deux rails ont une résistance négligeable ; les fils ont une résistance r.

1. Le premier fil est maintenu fixe et on déplace le deuxième à vitesse constante v' en exerçant une force F.

   (a) Écrire l'équation électrique régissant le circuit

   (b) Exprimer la force électromotrice e qui apparaît,

   (c) Calculer le courant i produit et la puissance $P = ei$ dissipée.

2. On laisse désormais le premier fil se mouvoir ; soit v sa vitesse, supposée nulle à$t = 0$. On négligera l'auto -induction.

   (a) Exprimer le nouveau courant i

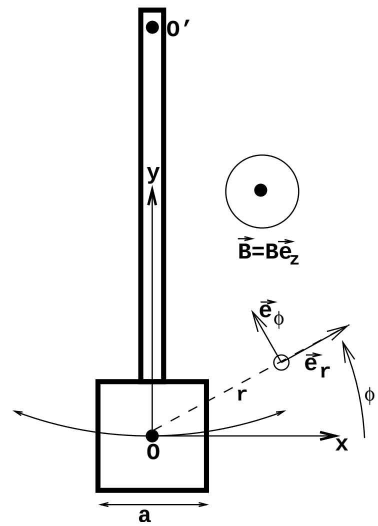
   (b) En déduire la force supplémentaire F' agissant sur le deuxième fil et montrer qu'elle vaut en norme

   $$F' = \frac{B^2 l^2 (v' - v)}{2r}$$

   (c) Ecrire l'équation du mouvement correspondante pour le premier fil et en déduire sa vitesse v à l'instant t en supposant $v = 0$ à $t = 0$. Commenter le résultat.

   (d) Intégrer $v(t)$ entre $t = 0$ et $t = T$ pour T grand devant $\frac{2mr}{B^2 l^2}$; en déduire le déplacement $x(t) = \int_0^T v(t)dt$ en fonction de $x' = v'T$.

3 Freinage par courants de Foucault



On considère un petit cadre conducteur, de côté a, centré sur l'axe Oz, de forme carrée, attachée à l'extrémité d'un long pendule isolant supposé sans masse, de longueur l tournant autour de l'axe $0'z$. Le cadre conducteur est constitué d'un seul enroulement de fil de cuivre de conductivité σ.

Ce système baigne dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

1. **Détermination du potentiel vecteur**. On suppose que $\vec{B}$ dérive du potentiel vecteur $\vec{A}$ selon $\vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{A}$, que le vecteur $\vec{A}$ est orienté suivant $\vec{e}_\phi$, et qu'il ne dépend que de la coordonnée r.

   (a) En calculant la circulation de $\vec{A}$ le long d'un cercle de rayon r centré en O, trouver l'expression de $\vec{A}$ à l'aide du théorème de Stokes.

   (b) En passant en coordonnées cartésiennes, montrer que les coordonnées de $\vec{A}$ sont par exemple :

$$A_x = -B\frac{y}{2}$$

$$A_y = B\frac{x}{2}$$

$$A_z = 0.0$$

   (c) Vérifier que $\vec{\mathrm{rot}}\vec{A} = \vec{B}$

2. **Champ variable** On suppose que le cadre est maintenu immobile mais que le champ magnétique varie suivant une loi $B(t) = B_0 \cos \omega t$.

   (a) Expliquer comment en pratique on peut créer un tel champ magnétique dépendant du temps.

   (b) À l'aide de la loi de Lenz que l'on rappelera, calculer le flux de $\vec{B}$ à travers la surface du cadre, puis la force électromotrice e induite dans le cadre. Quel effet néglige-t-on ce faisant ?

(c) Application numérique : $B_0 = 0.02$ T, $\omega = 2\pi f$ avec $f = 50$ s $^{-1}$, $a = 1$ cm, calculer e.

(d) Retrouver l'expression de e à l'aide du champ électromoteur de Neumann $\vec{E_m}$ dont on rappellera l'expression et la valeur dans ce cas.

(e) Calculer $\vec{\mathrm{rot}}\vec{E_m}$ et commenter le résultat.

3. **Chauffage par induction** On remplace le cadre par un cube homogène de cuivre de conductivité σ et de côté a, dont on suppose qu'il obéit à la loi d'Ohm. Ce cube est soumis au champ variable $\vec{B}(t)$.

   (a) Rappeler la définition microscopique du courant $\vec{j}$ régnant dans le cube.

   (b) Exprimer ce courant en fonction de $\vec{E_m}$ et σ.

   (c) Exprimer la puissance totale dissipée par effet Joule dans le cube de cuivre.

   (d) On assimile le champ électrique $\vec{E}$ au champ électromoteur $\vec{E_m}$. Exprimer le courant de déplacement $\vec{j}_D$ dont on rappelera l'expression.

   (e) Calculer le rapport des amplitudes de $\vec{j}_D$ et de $\vec{j}$ et commenter le résultat. Donnée : $\sigma = 10^8$ U.S.I.

4. **Circuit mobile et champ fixe** On suppose désormais que le champ $\vec{B}$ est constant mais que le cube de cuivre supposé indéformable est mobile, de vitesse $\vec{v}$ que l'on supposera parallèle à Ox pour les petites oscillations du pendule.

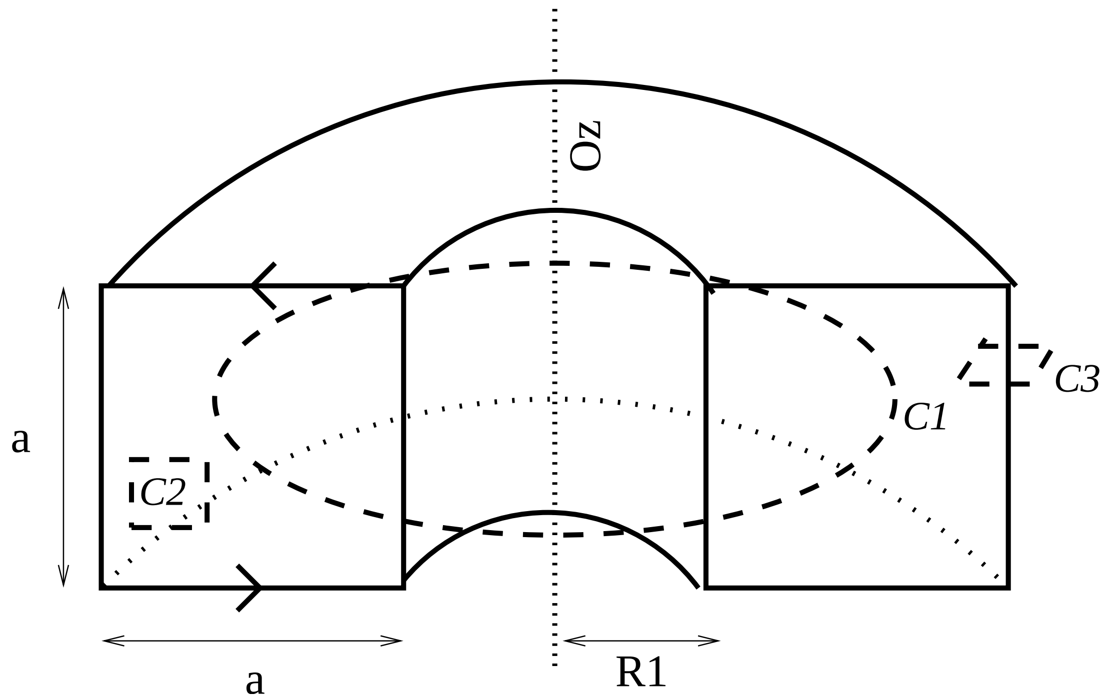
   (a) Donner l'expression du champ électromoteur de Neumann $\vec{E_m}$ dans ce cas.

   (b) Rappeler l'expression microscopique de la force de Laplace.

   (c) En déduire la force $d\vec{F}$ s'exerçant sur un élément de volume $d\tau$ du cadre à l'aide de la force de Laplace, puis la force totale s'exerçant sur le cube.

   (d) Commenter le phénomène physique ; qu'advient-il des oscillations du pendule supposé sans frottement ?

4 Détermination de champs et de discontinuités



On considère un système très employé en pratique dans les petites réalisations électroniques, constitué d'un solénoïde toroïdal représenté en coupe par un plan médian sur la figure ci-dessus, , de section carrée de côté a, possédant la symétrie de révolution autour de l'axe Oz, constitué de N enroulements de fil parcouru par un courant I. On se place en coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) usuelles.

1. De quelles coordonnées le champ magnétique $\vec{B}$ créé par le courant I dépend-il *a priori* ?

2. Par des considérations de symétrie, donner de même les lignes du champ $\vec{B}$ et son orientation.

3. À l'aide du théorème d'Ampère que l'on rappelera, et que l'on appliquera sur un cercle C_1 de rayon r centré sur l'axe Oz et contenu dans un plan orthogonal à celui-ci, établir alors que le champ à l'intérieur du solénoïde a pour norme
$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

4. Établir de même que le champ $\vec{B}$ est nul en dehors du solénoïde.

5. Calculer le rotationnel de $\vec{B}$ dans ces deux cas ; commenter le résultat obtenu en faisant le lien avec la forme locale du théorème d'Ampère que l'on rappelera.

6. **Détermination du potentiel vecteur à l'intérieur du solénoïde**. On suppose que $\vec{B}$ dérive du potentiel vecteur $\vec{A}$ selon $\vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}\vec{A}$, que le vecteur $\vec{A}$ est orienté suivant $\vec{e}_z$, et qu'il ne dépend que de la coordonnée r.

(a) À l'aide de l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques, calculer A_z par intégration directe.

(b) En calculant la circulation de $\vec{A}$ le long d'un carré C_2 de côté c situé entre R et $R+c$ contenu dans le solénoïde et dans un plan contenant Oz (par exemple le plan de la figure) , puis le flux de $\vec{B}$ à travers ce même carré, vérifier le théorème de Stokes que l'on rappelera.

7. **Discontinuité du champ** On se place près de la surface du solénoïde.

   (a) Rappeler la valeur de la discontinuité du champ entre l'intérieur et l'extérieur du solénoïde.

   (b) Établir l'expression de la densité de courant surfacique $\vec{\jmath}_s$ et vérifier la validité de ces expressions à l'aide de $\vec{B}$ établies plus haut.

   (c) Redémontrer l'expression de la discontinuité de la composante tangentielle du champ $\vec{B}$ à l'aide d'un petit parcours carré C_3 de côté dl orthogonal à la surface du solénoïde et à l'axe Oz.

   (d) De même, à l'aide d'une petite boîte parallélépidédique de base $\mathcal{C}_{\ni}$ retrouver l'expression de la discontinuité de la composante normale de $\vec{B}$.

8. Application numérique : $I = 3$A, $N = 100$ spires, $a = 3$mm, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ USI, $r_1 = 5mm$, calculer la valeur maximale du champ magnétique dans le solénoïde.

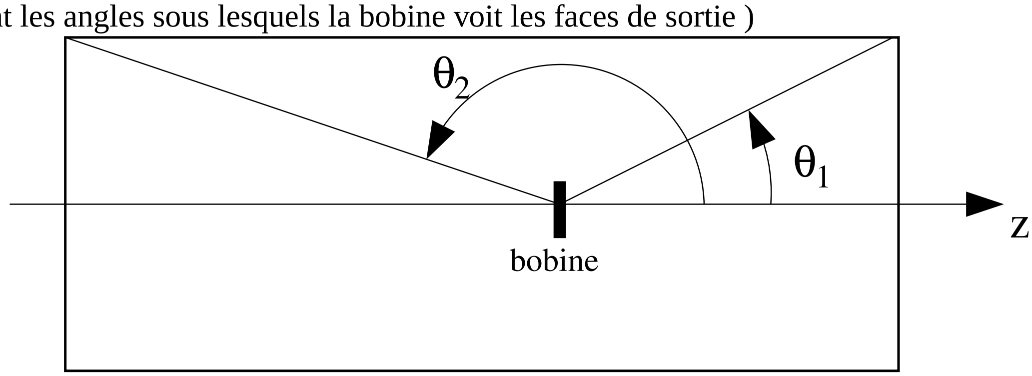
Donnée : en coordonnées cylindiques, le rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$ (dont les trois cooordonnées (A_r, A_ϕ, A_z)dépendent chacune de $(r$,ϕ,$z)$ vaut

$$\vec{rot}\vec{A} = \vec{e}_r\left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\phi\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \vec{e}_z\left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)\right)$$

5 Exploration du champ d'un solénoïde

On considère une petite bobine à n spires, de rayon $r \ll R$, située à l'intérieur d'un solénoïde de rayon R, de longueur L, à N spires et parcouru par un courant I constant. Cette bobine, initialement à la position z_0 de l'axe, est assujettie à se mouvoir parallèlement à l'axe en un mouvement sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude $a \ll L$. Que vaut la force électromotrice aux bornes de la bobine ?

(Le champ généré par le solénoïde sera pris égal à $\mu_0 \frac{N}{2L} I(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$ où θ_1 et θ_2 sont les angles sous lesquels la bobine voit les faces de sortie)



solénoide

6 Ferromagnétisme

Une bobine est constituée par un fil de cuivre enroulé en couches minces successives réparties entre deux cylindres de rayon $r = a$ et $r = 2a$ de longueur l. Il y a n tours de fil par unité de longueur dans les deux sens. On suppose que $l \gg a$ et que la bobine est parcourue par un courant I.

1. Le cylindre intérieur est supposé vide. Donner $B(r)$. En déduire l'inductance propre L.

2. Le cylindre contient désormais une substance ferromagnétique linéaire de perméabilité magnétique relative $\mu_r = 10^4$.

   (a) Donner $H = H(r)$ et $B = B(r)$.

   (b) Que vaut la nouvelle auto-inductance $L^\star$?

   (c) La substance présente en fait un cycle d'hystérésis étroit, dont l'aire sur le graphe H, B vaut $S = kI_e^2$ où I_e est la valeur efficace du courant supposé alternatif sinusoïdal à tout instant. On suppose que $L^\star$ garde la valeur trouvée à la question précédente. Donner un schéma équivalent à la bobine sous la forme d'une auto-inductance parfaite et d'une résistance r en série.

7 Pression électromagnétique

Soit une onde électromagnétique plane monochromatique progressive de pulsation ω, se propageant dans le vide. Le champ électrique s'écrit

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - k\cos\alpha x - k\sin\alpha y)\vec{u}_z$$

1. Quel est le vecteur de propagation $\vec{k}$ de l'onde ? L'exprimer en fonction de ω, c et $\vec{u}$, vecteur unitaire dans le sens de propagation de l'onde.

2. En utlisant la relation de Maxwell-Faraday éventuellement simplifiée pour les ondes planes monochromatiques calculer le champ magnétique $\vec{B}_i$ associé à $\vec{E}_i$ (on notera $\vec{u}' = \vec{u} \wedge \vec{u}_z$).

3. Représenter les trois vecteurs $\vec{k}$,$\vec{E}_i$ et $\vec{B}_i$ et commenter.

4. Exprimer la valeur moyenne du vecteur de Poynting. Quelle est la puissance surfacique moyenne à travers une surface perpendiculaire à la direction de propagation ?

5. Pour les $x > 0$ on place un miroir métallique parfait M de normale $\vec{e}_x$ et de conductivité quasi-infinie. On note $\vec{E}_r$ et $\vec{B}_r$ les champs réfléchis. L'onde se réfléchit suivant les lois de Descartes.

   Montrer que le champ électrique est nul à l'intérieur du miroir métallique parfait.

6. Quelles sont les relations de passage vérifiées par les champs électriques puis magnétiques totaux (incidents plus réfléchis) en $x = 0$? Représenter ces champs.

7. Déterminer la densité superficielle de charge σ et de courant $\vec{j}_s$ dans le plan $x = 0$.

8. On considère un élémént dS de la surface du miroir. Calculer à partir de l'expression microscopique de la loi de Laplace la force magnétique $d\vec{f}_m$ agissant sur dS. En déduire la pression électromagnétique (force par unité de surface) et sa moyenne.

8 Couche anti-reflet

On divise l'espace en trois zones par trois plans parallèles à Oxy situés en $z = 0$ et $z = e$. Un verre d'indice $N > 1$ se trouve en $z > e$. Une couche d'indice n se situe en $0 < z < e$. La zone $z < 0$ est vide.

Une OPPM (onde plane progressive monochromatique) de $k > 0$ et de pulsation ω se propage dans le vide. On la repère par l'indice 1. Elle est polarisée rectilignement suivant Ox. Il se produit une succession de réflexions et de transmissions. On notera les ondes correspondantes par les indices 2 3 4 et 5. On note de plus la vitesse de phase $v_j = \frac{c}{n_j}$.

1. Quelle est la relation enre k et ω dans le vide ? Dans un milieu d'indice n_j réel ?

2. Donner $\vec{B}_i$ pour une OPPM connaissant $\vec{E}_i$.

3. Écrire l'expression générale de tous les champs $\vec{E}_i$ et $\vec{B}_i$.

4. Écrire les conditions de passage en fonction de $\phi = nke$ et $\Phi = Nke$. Les milieux ne présentent pas de propriétés magnétiques. On veut éliminer la réflexion dans le vide. Donner deux expressions de $r = \frac{E_{04}}{E_{03}}$ dans ce cas. Expliciter les conditions sur n et N pour qu'il y ait compatibilité.

5. AN : $N = 1{,}5$ $\lambda_0 = 0{,}6$ μm donner n et e minimales.

6. En pratique $n = 1{,}35$ au moins. Calculer le facteur de réflexion $R = \left(\frac{N-n^2}{N+n^2}\right)^2$ correspondant. Comparer à l'absence de couche. Que se passe-t-il si on associe cinq lentilles ainsi traitées ?

7. Exprimer les valeurs moyennes des vecteurs de Poynting R_1 et R_5. En déduire le facteur de transmission en énergie. Calculer le vecteur de Poynting total dans chaque zone. Remarques ?

9 Guide d'ondes

On considère quatre plans de métal parfait situés en $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, délimitant un guide d'ondes.

On étudie $\vec{E} = f(y)\cos(\omega t - k_g z)\vec{u}_x$

On pose $k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}$

1. Donner une équation sur $f(y)$

2. Avec les conditions aux limites (C.L) sur y trouver $f(y)$. Que se passe-t-il suivant la direction x et sur les plaques ?

3. Trouver $\vec{B}$ et commenter de même.

4. Exprimer k_g puis λ_g. Montrer qu'il existe une fréquence de coupure. A.N: $f_c = 2,5$ GHz,, trouver b.

5. Trouver les vitesses de phase et de groupe

6. Exprimer la valeur moyenne du vecteur de Poynting

7. Donner la densité volumique d'énergie électromagnétique

8. Que vaut la vitesse de propagation de l'énergie ?

9. Que se passe-t-il si les plaques ont une conductivité finie ?

10 Ondes dans un plasma

Soit un plasma formé

1. d'ions positifs de charge $+|e|$, de masse M et de vitesse $\vec{V}$
2. d'électrons de charge $-|e|$ de masse m et de vitesse $\vec{v}$

Ces constituants sont supposés immobiles, ne pas interagir pas entre eux (plasma très dilué) et on néglige la pesanteur.

On considère une OPPM

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$$

et on se place en régime sinusoïdal forcé.

1. Peut-on négliger l'effet du champ magnétique sur les particules chargées ?
2. Donner $\vec{V}$ et $\vec{v}$ en fonction de $\vec{E}$ et en déduire la densité de courant $\vec{j}$. Montrer que la contribution des ions est négligeable. Donner $\vec{j}$ en fonction de ε_0, ω, ω_p et $\vec{E}$ en posant $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}$ (pulsation de plasma).
3. Montrer que la densité volumique de charges ρ est nulle. Quelle en est la conséquence sur le champ électrique ?
4. Établir l'équation de dispersion donnant k^2 en fonction de ω, ω_p et c. Représenter $k(\omega)$. En déduire que l'on a un diélectrique parfait.
5. Si $\omega < \omega_p$ y-a-t-il propagation ?
6. Si $\omega > \omega_p$ donner la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g.
7. On définit l'indice n par $v_\phi = \frac{c}{n}$. A.N : On suppose que l'ionosphère peut être étudiée dans le présent cadre. On constate que les ondes radio de fréquence inférieure à 9 MHz ne sont pas transmises. En déduire N (densité du plasma) et commenter. Comparer le cas de stations de radio émettant sur 1376 m et 2,85 m.

11 Plasma chaud

On considère que la densité des électrons $n_e(\vec{r})$ et des ions de densité $n_i(\vec{r})$ sont données par des facteurs de Boltzmann :

$$n_i = n_0\, e^{\dfrac{eV_e}{k_bT}} \quad n_e = n_0\, e^{\dfrac{-eV_e}{k_bT}}$$

où T est la température thermodynamique du système et k_b la constante de Boltzmann.

1. En écrivant le théorème de Gauss entre deux sphères séparées par une faible épaisseur dr, trouver une équation différentielle pour le potentiel électrique V_e en l'absence d'onde électromagnétique extérieure. Commenter la forme de cette équation.
2. Linéariser puis résoudre cette équation en supposant $k_bT \gg eV_e$. Commenter le résultat.

12 Rayonnement dipolaire

On considère un électron de vitesse au loin $\vec{v}_0$ et de paramètre d'impact d, dévié par un proton fixe situé en O.

Rappels

1. En coordonnées polaires (ρ, θ) la trajectoire de l'électron est une hyperbole

$$\rho = \frac{q}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

de paramètre $q = \left(\frac{v_0}{c}\right)^2 \left(\frac{d^2}{\delta}\right)$ et d'excentricité $\varepsilon^2 = 1 + \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \left(\frac{v_0}{c}\right)^4$ en posant $\delta = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}$.

On suppose $\frac{v_0}{c} = 10^{-2}$ de telle sorte que la déviation soit importante. Alors $\frac{d}{\delta} = 10^4$ $\varepsilon = \sqrt{2}$ et l'hyperbole a des asymptotes pour $\theta_M = \pm\frac{3\pi}{4}$.

L'ensemble électron-proton constitue un dipôle rayonnant.

2. Le champ rayonné par un dipôle vaut

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi rc}\vec{u}_r \wedge \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})$$

Questions

1. Établir la puissance $P(R,t)$ rayonnée à travers une sphère de grand rayon R
2. Définir $\vec{p}$; exprimer $\ddot{\vec{p}}$ en fonction de ρ et des autres paramètres. En déduire que

$$P(R,t) = \frac{2}{3}\frac{mc^3\delta^3}{\rho^4}$$

3. Montrer que si $R \gg d$ l'énergie totale rayonnée par la charge vaut

$$E_R = \int_{-\infty}^{+\infty} P(R,t)\, dt$$

4. Exprimer K, rapport de E_R et de l'énergie cinétique initiale en fonction de $\frac{\delta}{d}$, $\frac{c}{v_0}$ et de

$$I = \int_{-\theta_M}^{+\theta_M} (1+\varepsilon\cos\theta)^2\, d\theta$$

5. Calculer I K et conclure.