

Florent.Calvayrac@univ-lemans.fr
Laboratoire PEC, Faculté des Sciences
Avenue Olivier Messiaen
72085 Le Mans Cedex

1 Effet Hall

On considère un barreau conducteur ayant la forme d'un parallélépipède d'arêtes parallèles à Ox, Oy, Oz . Les arêtes ont respectivement pour longueur a, b , et l . Le barreau est parcouru par un courant parallèle à Oz de densité \vec{j} uniforme. Le barreau est homogène et de conductivité σ .

1. (a) Calculer le courant total I parcourant l'échantillon.

Par définition l'intensité électrique du courant total vaut

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = jab$$

- (b) Évaluer en fonction de \vec{j} et σ le champ électrique dans le barreau. Calculer la différence de potentiel V entre les deux extrémités du barreau. En déduire la résistance R du barreau et commenter.

Dans les matériaux usuels (ni supra, ni semiconducteurs), on peut écrire la forme locale de la loi d'Ohm (loi phénoménologique valable dans les gammes usuelles de champ électrique et de fréquence) en notant \vec{E} le champ électrique

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Le courant étant parallèle à Oz

on a $\vec{E} = -\vec{grad}U$

avec U le potentiel électrique. Donc si on note V la différence de potentiel entre les deux extrémités du barreau comme \vec{j} est homogène, \vec{E} l'est aussi et on a

$$-\vec{grad}U = \frac{V}{l} \vec{e}_z = \frac{\vec{j}}{\sigma}$$

et

$$V = \frac{j l}{\sigma}$$

(on pouvait également écrire $V = U_A - U_B = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$)

or $j = \frac{I}{ab}$

donc

$$V = \frac{Il}{\sigma ab}$$

on retrouve la forme macroscopique de la loi d'Ohm

$$V = RI$$

avec

$$R = \frac{l}{\sigma ab}$$

σ est une propriété intrinsèque du matériau mais on voit que la résistance dépend de la forme géométrique du barreau : elle est proportionnelle à sa longueur et inversement proportionnelle à sa surface. De plus pour établir cette formule nous avons non seulement supposé une dépendance phénoménologique simple entre la cause (le champ électrique) et la conséquence (le flux de courant), comme en général l'a fait Onsager pour les phénomènes proches de l'équilibre, mais également une homogénéité du champ dans le barreau. Des lois similaires sont valables en transport de la chaleur ou des particules (lois de Fourier et de Fick respectivement) ou dans les phénomènes couplés (effets Peltier ou Seebeck).

- (c) Le courant est transporté par des charges mobiles de densité volumique ρ . Exprimer en fonction de \vec{j} et ρ la vitesse \vec{v} de ces charges.

Ici nous n'avons qu'une espèce de porteurs de charge (vraisemblablement des électrons) donc on peut écrire

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

par définition, sinon il faudrait sommer cette loi sur tous les porteurs de charge (présence d'ions différents en chimie par exemple).

2. On applique désormais au barreau un champ magnétique uniforme \vec{B} dirigé suivant Oy .

- (a) On considère une tranche du barreau d'épaisseur dz perpendiculaire à Oz . Exprimer la force que \vec{B} exerce sur la tranche du barreau.

Il s'exerce sur cette tranche de barreau la force de Laplace qui vaut

$$d\vec{F} = I d\vec{z} \wedge \vec{B}$$

or $\vec{B} = B\vec{e}_y$ et $d\vec{z} = dz\vec{e}_z$ donc

$$d\vec{F} = -IBdz\vec{e}_x$$

On pourrait mesurer le champ magnétique en mesurant cette force (par une balance de Cotton par exemple, avec une intensité de plusieurs ampères), ce qui a été traditionnellement fait avant de disposer de matériaux semiconducteurs à densité de porteurs de charge suffisamment élevée pour justifier l'emploi de l'effet Hall.

- (b) De même, exprimer la force $d\vec{F}$ s'exerçant sur un élément de volume $d\tau$ portant une charge dq en fonction de ces paramètres et de \vec{v} , puis en fonction de \vec{j} .

localement il s'exerce sur chaque porteur de charge dq la force de Lorentz

$$d\vec{F} = dq(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

soit en oubliant la composante « naturelle » suivant Oz (sinon il n'y aurait pas de courant)

$$d\vec{F} = dq \frac{\vec{j}}{\rho} \wedge \vec{B}$$

$$d\vec{F} = \rho d\tau \frac{\vec{j}}{\rho} \wedge \vec{B}$$

$$d\vec{F} = d\tau \vec{j} \wedge \vec{B}$$

or $\vec{j} = j\vec{e}_z$ et $\vec{B} = B\vec{e}_y$

donc

$$d\vec{F} = -d\tau j B \vec{e}_x$$

- (c) Le courant est maintenu parallèle à Oz en appliquant un champ électrique \vec{E}_2 créant une force opposée à $d\vec{F}$ s'exerçant sur les porteurs de charge. Exprimer \vec{E}_2

La force créée par \vec{E}_2 est également une force de Lorentz

$$d\vec{F}_2 = dq\vec{E}_2 = \rho d\tau \vec{E}_2$$

donc pour annuler la composante suivant \vec{e}_x de $d\vec{F}$ on trouve

$$d\vec{F}_2 = -d\vec{F} = d\tau j B \vec{e}_x$$

donc

$$\vec{E}_2 = \frac{jB}{\rho} \vec{e}_x$$

- (d) Calculer la différence de potentiel V_H créée par \vec{E}_2 entre les deux faces perpendiculaires à Ox . Montrer que cette tension V_H est de la forme

$$V_H = \frac{R_H I B}{b}$$

Exprimer R_H dite constante de Hall du matériau.

on a

$$V_H = \int_0^a \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \frac{jBa}{\rho}$$

or $I = jab$ donc

$$V_H = \frac{IB}{b\rho} = \frac{R_H I B}{b}$$

avec R_H constante de Hall du matériau égale à $\frac{1}{\rho}$

- (e) Application numérique : $b = 0,1$ mm, $B = 1$ T, $I = 10$ A. On mesure $V = 20$ μ V. Déterminer R_H et commenter.

$R_H = \frac{bV_H}{Ib} = 2 \cdot 10^{-10}$ U.S.I et $\rho = 5 \cdot 10^9$ C.m⁻³ ce qui est une valeur très élevée même pour un semi-conducteur moderne. On voit que même pour une intensité et un champ magnétique élevés la tension de Hall est très faible ce qui nécessite une électronique très sensible et un très bon blindage dans les teslamètres. Néanmoins cela implique une très bonne sensibilité (par rapport à des matériaux à densité de charges de porteurs moins élevée) et c'est la méthode standard de mesure des champs magnétiques, à l'aide de semi-conducteurs à forte densité de charge.

2 Rails de Laplace

Sur deux rails conducteurs parallèles situés dans un plan horizontal à une distance l l'un de l'autre glissent sans frottement deux fils rigides de masse m assujettis à rester perpendiculaire aux rails. L'ensemble est soumis à un champ magnétique vertical uniforme \vec{B} . Les deux rails ont une résistance négligeable ; les fils ont une résistance r .

1. Le premier fil est maintenu fixe et on déplace le deuxième à vitesse constante v' en exerçant une force F .

- (a) Écrire l'équation électrique régissant le circuit

La résistance totale du circuit vaut $2r$. La loi de Kirchoff s'écrit donc

$$e = 2ri$$

- (b) Exprimer la force électromotrice e qui apparaît,

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

Soit x la position du fil

$$\phi = Blx'$$

(si le circuit est orienté de façon à ce que sa normale soit colinéaire et de même sens que \vec{B})

donc

$$e = -Blv'$$

avec $v' = -\frac{dx'}{dt}$ vitesse du fil

- (c) Calculer le courant i produit et la puissance $P = ei$ dissipée.

comme

$$i = \frac{e}{2r}$$

$$i = -\frac{Blv'}{2r}$$

$$P = ei = \frac{(Blv')^2}{2r}$$

2. On laisse désormais le premier fil se mouvoir ; soit v sa vitesse, supposée nulle à $t = 0$. On négligera l'auto-induction.

- (a) Exprimer le nouveau courant i

Le flux de \vec{B} à travers la surface du circuit vaut désormais

$$\phi = Bl(x' - x)$$

si x est la position du premier fil

donc

$$i = \frac{e}{2r} = -\frac{1}{2r} \frac{d\phi}{dt} = -\frac{Bl(v' - v)}{2r}$$

- (b) En déduire la force supplémentaire F' agissant sur le deuxième fil et montrer qu'elle vaut en norme

$$F' = \frac{B^2 l^2 (v' - v)}{2r}$$

Il s'exerce sur le deuxième fil une force dite de Laplace qui vaut

$$\vec{F}' = \int i \vec{dl} \wedge \vec{B}$$

L'intégration sur le fil étant triviale on obtient le résultat demandé.

- (c) Ecrire l'équation du mouvement correspondante pour le premier fil et en déduire sa vitesse v à l'instant t en supposant $v = 0$ à $t = 0$. Commenter le résultat.

Pour le premier fil, le produit vectoriel donne un résultat opposé, et la relation fondamentale de la dynamique permet d'écrire en projection

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{B^2 l^2 (v' - v)}{2r}$$

cette équation différentielle linéaire à coefficients constants avec second membre se résoud en considérant l'équation sans second membre

$$\frac{2mr}{B^2 l^2} \frac{dv}{dt} = -v$$

dont une solution est

$$v = K e^{-t/\tau}$$

avec K constante à déterminer et $\tau = \frac{2mr}{B^2 l^2}$

la solution est somme de cette solution et d'une solution particulière (de la forme du second membre, ici une constante $C = v'$)

$$v = K e^{-t/\tau} + v'$$

comme $v = 0$ à $t = 0$

$$v = v'(1 - e^{-t/\tau})$$

- (d) Intégrer $v(t)$ entre $t = 0$ et $t = T$ pour T grand devant $\frac{2mr}{B^2 l^2}$; en déduire le déplacement $x(t) = \int_0^T v(t) dt$ en fonction de $x' = v'T$.

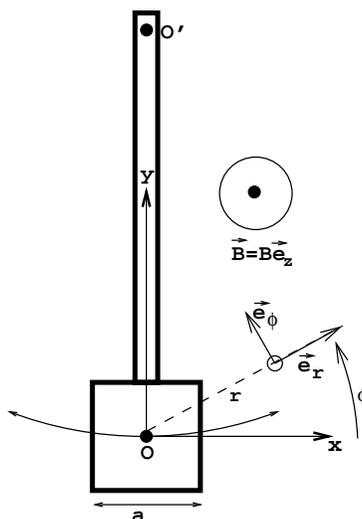
$$x(t) = \int_0^T v(t) dt = v'T + \tau e^{-T/\tau}$$

si T est grand devant τ le second terme est négligeable

$$x(t) = x'$$

et les deux barres se sont donc déplacées de la même longueur.

3 Freinage par courants de Foucault



On considère un petit cadre conducteur, de côté a , centré sur l'axe Oz , de forme carrée, attachée à l'extrémité d'un long pendule isolant supposé sans masse, de longueur l tournant autour de l'axe $O'z$. Le cadre conducteur est constitué d'un seul enroulement de fil de cuivre de conductivité σ .

Ce système baigne dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

1. **Détermination du potentiel vecteur.** On suppose que \vec{B} dérive du potentiel vecteur \vec{A} selon $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$, que le vecteur \vec{A} est orienté suivant \vec{e}_ϕ , et qu'il ne dépend que de la coordonnée r .

(a) En calculant la circulation de \vec{A} le long d'un cercle de rayon r centré en O , trouver l'expression de \vec{A} à l'aide du théorème de Stokes.

Le théorème de Stokes s'exprime sous la forme

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S}$$

comme on suppose que $\vec{A} = A\vec{e}_\phi$ (\vec{A} est un vrai vecteur et possède les symétries de ses causes)

on obtient

$$\int_0^{2\pi} A r d\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

puisque $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$; comme \vec{B} est constant et aligné suivant \vec{e}_z l'intégration est triviale et on a

$$2\pi r A = \pi r^2 B$$

soit

$$\vec{A} = \frac{Br}{2} \vec{e}_\phi$$

- (b) En passant en coordonnées cartésiennes, montrer que les coordonnées de \vec{A} sont par exemple :

$$A_x = -B \frac{y}{2}$$

$$A_y = B \frac{x}{2}$$

$$A_z = 0$$

Les coordonnées du vecteur \vec{e}_ϕ sont en projection

$$\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_x = -\sin \phi$$

$$\vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_y = \cos \phi$$

donc

$$A_x = -\frac{Br}{2} \sin \phi = -B \frac{y}{2}$$

$$A_y = \frac{Br}{2} \cos \phi = B \frac{x}{2}$$

$$A_z = 0$$

- (c) Vérifier que $\text{rot} \vec{A} = \vec{B}$

En prenant le produit vectoriel

$$\text{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

la seule composante non nulle est celle sur z et on obtient bien

$$B_z = \frac{B}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial -y}{\partial y} \right)$$

$$B_z = \frac{B}{2} (1 + 1)$$

2. **Champ variable** On suppose que le cadre est maintenu immobile mais que le champ magnétique varie suivant une loi $B(t) = B_0 \cos \omega t$.

- (a) Expliquer comment en pratique on peut créer un tel champ magnétique dépendant du temps.

On peut créer un champ magnétique constant sur une grande zone d'intérêt soit en se plaçant par exemple soit au centre d'un solénoïde de grande taille par rapport aux dimensions du dispositif, soit entre deux bobines de Helmholtz (bobines très fines, de diamètre égal à leur distance réciproque). Un champ variable est obtenu en alimentant les bobines par un courant alternatif sinusoïdal.

- (b) À l'aide de la loi de Lenz que l'on rappellera, calculer le flux de \vec{B} à travers la surface du cadre, puis la force électromotrice e induite dans le cadre. Quel effet néglige-t-on ce faisant ?

la loi de Lenz stipule que la force électromotrice e induite crée un courant donnant un champ magnétique opposé au champ inducteur.

Mathématiquement le flux de \vec{B} à travers la surface du cadre vaut

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B(t)a^2$$

en orientant la surface dans le même sens que le champ magnétique.

Donc

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega B_0 a^2 \sin \omega t$$

On néglige ce faisant les effets d'auto-induction dans le cadre ce qui est justifié puisqu'il n'y a qu'un enroulement.

- (c) Application numérique : $B_0 = 0.02 \text{ T}$, $\omega = 2\pi f$ avec $f = 50 \text{ s}^{-1}$, $a = 1 \text{ cm}$, calculer e .

On trouve $e_{\max} = 6,28 \cdot 10^{-4} \text{ V}$. Cette valeur est relativement faible, pour l'augmenter il faudrait augmenter le nombre d'enroulements du dispositif ou augmenter la fréquence ou la taille du cadre. En pratique dans un dispositif ménager de cuisson par induction il n'y a qu'une spire et on voit que la tension induite est sans danger (mais pour une forte conductivité du matériau on pourra avoir de très fortes intensités électriques).

- (d) Retrouver l'expression de e à l'aide du champ électromoteur de Neumann \vec{E}_m dont on rappellera l'expression et la valeur dans ce cas.

Le champ électromoteur de Neumann \vec{E}_m vaut en général

$$\vec{E}_m = \vec{v}_c \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

où \vec{v}_c est la vitesse du circuit (ici nulle).

En reprenant l'expression du potentiel vecteur \vec{A} on obtient

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \left(\frac{\partial B}{\partial t} \frac{y}{2}, -\frac{\partial B}{\partial t} \frac{x}{2}, 0 \right)$$

or par définition de la force électromotrice

$$e = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E_{mx} \left(\text{pris en } y = \frac{a}{2} \right) dx + \text{etc}$$

en calculant les quatre intégrales on trouve bien

$$e = \frac{\partial B}{\partial t} a^2$$

et le résultat précédent.

- (e) Calculer $\text{rot} \vec{E}_m$ et commenter le résultat.

Comme

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{E}_m = -\text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

On retrouve l'équation de Maxwell-Faraday.

3. **Chauffage par induction** On remplace le cadre par un cube homogène de cuivre de conductivité σ et de côté a , dont on suppose qu'il obéit à la loi d'Ohm. Ce cube est soumis au champ variable $\vec{B}(t)$.

(a) Rappeler la définition microscopique du courant \vec{j} régnant dans le cube.

Ici nous n'avons qu'une espèce de porteurs de charge (vraisemblablement des électrons) donc on peut écrire

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

par définition, sinon il faudrait sommer cette loi sur tous les porteurs de charge (présence d'ions différents en chimie par exemple).

(b) Exprimer ce courant en fonction de \vec{E}_m et σ .

en supposant la forme locale de la loi d'Ohm

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}_m$$

(c) Exprimer la puissance totale dissipée par effet Joule dans le cube de cuivre.

par définition

$$\mathcal{P} = \iiint \vec{F} \cdot \vec{v} d\tau$$

où \vec{F} est la force s'exerçant sur les porteurs de charge de vitesse \vec{v} contenus dans le volume élémentaire $d\tau$. Cette force est la force de Lorentz

$$\vec{F} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

manifestement le champ magnétique ne travaille pas et il reste

$$\mathcal{P} = \iiint \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

en employant la définition de la densité de courant microscopique rappelée plus haut.

Ici

$$\mathcal{P} = \iiint \sigma \vec{E}_m^2 d\tau$$

en employant la forme locale de la loi d'Ohm.

Or

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \left(\frac{\partial B}{\partial t} \frac{y}{2}, -\frac{\partial B}{\partial t} \frac{x}{2}, 0 \right)$$

donc

$$\vec{E}_m^2 = \frac{\partial B^2}{\partial t} \frac{x^2 + y^2}{2}$$

$$\vec{E}_m^2 = \omega^2 B_0^2 \sin^2 \omega t \frac{x^2 + y^2}{2}$$

et

$$\mathcal{P} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx dy dz \sigma \omega^2 B_0^2 \sin^2 \omega t \frac{x^2 + y^2}{2}$$

or

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx dy (x^2 + y^2) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx (x^2 + \frac{a^3}{12})$$

en effectuant par exemple l'intégrale sur y
puis

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx dy (x^2 + y^2) = \frac{a^4}{6}$$

en effectuant les deux intégrales restantes sur x .
Finalement l'intégration sur z étant triviale il reste

$$\mathcal{P} = \sigma \omega^2 B_0^2 \sin^2 \omega t \frac{a^5}{12}$$

On a donc bien un chauffage par induction du cube de cuivre d'autant plus important que le matériau est bon conducteur, que son volume est grand, ou que la fréquence du courant est importante ; d'où la limitation du courant alternatif aux faibles fréquences pour limiter ces pertes.

- (d) On assimile le champ électrique \vec{E} au champ électromoteur \vec{E}_m . Exprimer le courant de déplacement \vec{j}_D dont on rappellera l'expression.
par définition le courant de déplacement vaut

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_m}{\partial t}$$

en faisant la substitution demandée.
or

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \left(\frac{\partial B}{\partial t} \frac{y}{2}, -\frac{\partial B}{\partial t} \frac{x}{2}, 0 \right)$$

donc

$$j_D \approx \epsilon_0 B_0 \omega^2 a$$

en prenant les valeurs maxima.

- (e) Calculer le rapport des amplitudes de \vec{j}_D et de \vec{j} et commenter le résultat.
Donnée : $\sigma = 10^8$ U.S.I.
on obtient

$$\frac{j_D}{j} \approx \frac{\epsilon_0 B_0 \omega^2 a}{\sigma E}$$
$$\frac{j_D}{j} \approx \frac{\epsilon_0 B_0 \omega^2 a}{\sigma B_0 \omega a}$$

$$\frac{j_D}{j} \approx \frac{\epsilon_0 \omega}{\sigma}$$

$$\frac{j_D}{j} \approx 10^{-17} \omega$$

Le courant de déplacement est donc négligeable sauf pour les très grandes fréquences (lumière...)

4. **Circuit mobile et champ fixe** On suppose désormais que le champ \vec{B} est constant mais que le cube de cuivre supposé indéformable est mobile, de vitesse \vec{v} que l'on supposera parallèle à Ox pour les petites oscillations du pendule.

- (a) Donner l'expression du champ électromoteur de Neumann \vec{E}_m dans ce cas.
Le champ électromoteur de Neumann \vec{E}_m vaut en général

$$\vec{E}_m = \vec{v}_c \wedge \vec{B} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

où \vec{v}_c est la vitesse du circuit ; ici \vec{A} ne varie pas dans le temps.

- (b) Rappeler l'expression microscopique de la force de Laplace.
localement cette force sur un élément de volume $d\tau$ vaut

$$d\vec{F} = d\tau \vec{j} \wedge \vec{B}$$

- (c) En déduire la force $d\vec{F}$ s'exerçant sur un élément de volume $d\tau$ du cadre à l'aide de la force de Laplace, puis la force totale s'exerçant sur le cube.
en introduisant la forme locale de la loi d'Ohm

$$d\vec{F} = d\tau \sigma \vec{E}_m \wedge \vec{B}$$

*or $\vec{E}_m = \vec{v}_c \wedge \vec{B}$
donc*

$$d\vec{F} = -d\tau \sigma \vec{v}_c B^2$$

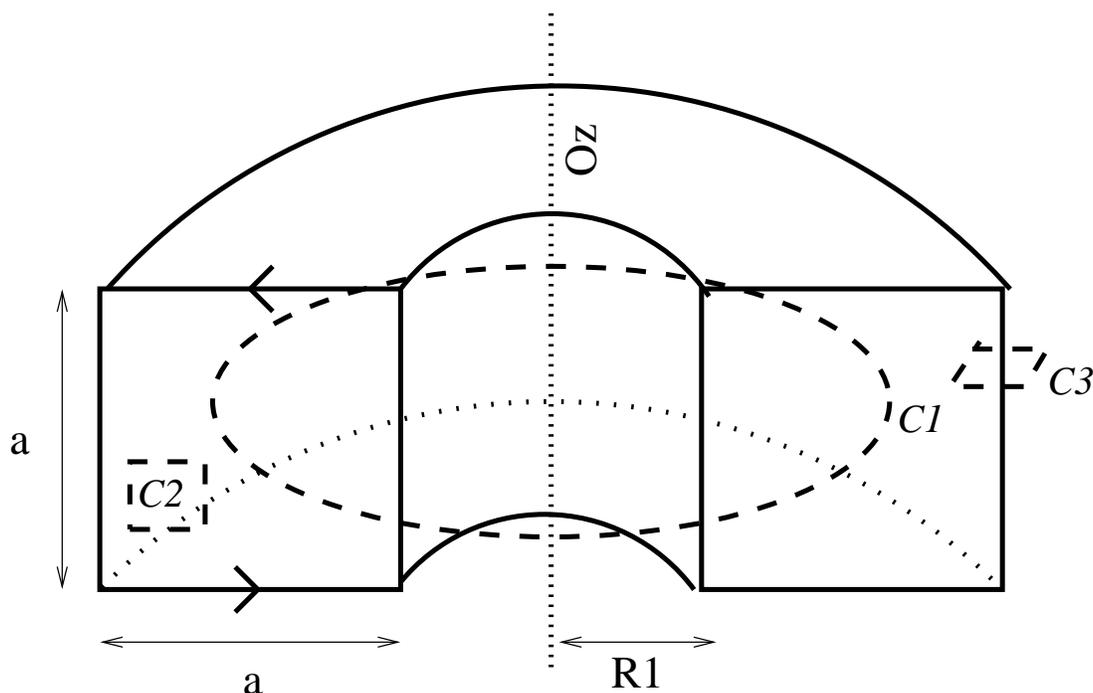
et en intégrant sur le cube

$$\vec{F} = -a^3 \sigma \vec{v}_c B^2$$

- (d) Commenter le phénomène physique ; qu'advient-il des oscillations du pendule supposé sans frottement ?

On voit qu'en présence de champ magnétique même fixe il apparaît par induction une force toujours opposée au sens du mouvement. Le pendule va donc s'arrêter rapidement. Ce principe est utilisé dans les ralentisseurs de véhicules lourds par exemple.

4 Détermination de champs et de discontinuités



On considère un système très employé en pratique dans les petites réalisations électroniques, constitué d'un solénoïde toroïdal représenté en coupe par un plan médian sur la figure ci-dessus, de section carrée de côté a , possédant la symétrie de révolution autour de l'axe Oz , constitué de N enroulements de fil parcouru par un courant I . On se place en coordonnées cylindriques (r, ϕ, z) usuelles.

1. De quelles coordonnées le champ magnétique \vec{B} créé par le courant I dépend-il *a priori* ?

Le système possédant la symétrie de révolution autour de z le champ magnétique ne peut pas dépendre de ϕ . Il ne dépend donc que de r et de z .

2. Par des considérations de symétrie, donner de même les lignes du champ \vec{B} et son orientation.

Le champ magnétique est contenu dans les plans d'antisymétrie de ses causes et il est orthogonal aux plans de symétrie de ses causes. Ici tout plan contenant l'axe Oz est un plan de symétrie pour le courant, par conséquent \vec{B} est forcément contenu dans un plan orthogonal à Oz qui se trouve bien être un plan d'antisymétrie du courant. Vu la question précédente on en déduit que les lignes de champ de \vec{B} sont des cercles d'axe Oz .

3. À l'aide du théorème d'Ampère que l'on rappellera, et que l'on appliquera sur un cercle C_1 de rayon r centré sur l'axe Oz et contenu dans un plan orthogonal à celui-ci, établir alors que le champ à l'intérieur du solénoïde a pour norme

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

Le théorème d'Ampère dit que la circulation du champ magnétique le long d'un circuit de contrôle quelconque C est proportionnelle au flux des courants traversant toute surface S enserrée par ce même circuit

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_S I = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Ici il est naturel de prendre une ligne de champ comme circuit de contrôle ; sur une ligne de champ \vec{B} est constant et sort de l'intégrale. Nous obtenons donc pour un cercle de rayon r centré en O et orthogonal à Oz , à l'intérieur du dispositif (à N spires)

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 N I \\ 2\pi r B &= \mu_0 N I \end{aligned}$$

d'où la formule demandée.

4. Établir de même que le champ \vec{B} est nul en dehors du solénoïde.

De même en dehors du dispositif les intensités électriques se compensent et le flux total des courants est nul. Vu que le théorème d'Ampère est valable quel que soit le contour C employé il faut que \vec{B} soit nul pour que ce théorème soit vérifié.

5. Calculer le rotationnel de \vec{B} dans ces deux cas ; commenter le résultat obtenu en faisant le lien avec la forme locale du théorème d'Ampère que l'on rappellera.

En magnétostatique la forme locale du théorème d'Ampère s'obtient par une application de la formule de Stokes qui donne

$$\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

En dehors du dispositif il n'y a pas de courant et \vec{B} est nul ; la formule est donc vérifiée.

À l'intérieur du dispositif

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r} \vec{e}_\phi$$

seule la composante B_ϕ est donc non nulle et seule la dérivée selon r de cette composante sera non nulle a priori.

$$\begin{aligned} \vec{rot} \vec{B} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r B_\phi)}{\partial r} \vec{e}_z \\ \vec{rot} \vec{B} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(r \frac{\mu_0 I N}{2\pi r})}{\partial r} \vec{e}_z \\ \vec{rot} \vec{B} &= \frac{1}{r} \frac{\partial(\frac{\mu_0 I N}{2\pi})}{\partial r} \vec{e}_z \\ \vec{rot} \vec{B} &= \vec{0} \end{aligned}$$

ce qui est normal car à l'intérieur (strictement) du dispositif il n'y a pas non plus de courants.

6. **Détermination du potentiel vecteur à l'intérieur du solénoïde.** On suppose que \vec{B} dérive du potentiel vecteur \vec{A} selon $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$, que le vecteur \vec{A} est orienté suivant \vec{e}_z , et qu'il ne dépend que de la coordonnée r .

(a) À l'aide de l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques, calculer A_z par intégration directe.

Par symétrie \vec{A} ne dépend lui non plus que de r et de z à l'intérieur de la bobine. De plus il est contenu dans les plans de symétrie de ses causes (ici, le courant) : il est donc parallèle à Oz .

En reprenant l'expression du rotationnel pour la seule composante non nulle de \vec{B} suivant \vec{e}_ϕ on obtient

$$\frac{\partial(A_r)}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r}$$

La dépendance en z de A_r se réduit donc à une constante que nous pouvons prendre nulle et pour A_z on obtient

$$-\frac{\partial(A_z)}{\partial r} = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r}$$

$$A_z = -\frac{\mu_0 I N}{2\pi} \ln r + K$$

avec K constante.

(b) En calculant la circulation de \vec{A} le long d'un carré C_2 de côté c situé entre R et $R + c$ contenu dans le solénoïde et dans un plan contenant Oz (par exemple le plan de la figure), puis le flux de \vec{B} à travers ce même carré, vérifier le théorème de Stokes que l'on rappellera.

Calculons la circulation de \vec{A} le long du circuit donné ; seuls les côtés parallèles à Oz donneront une circulation non nulle.

$$\oint_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} = - \int_0^c dz \frac{\mu_0 I N}{2\pi} \ln R + \int_0^c dz \frac{\mu_0 I N}{2\pi} \ln(R + c)$$

$$\oint_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{l} = c \frac{\mu_0 I N}{2\pi} (\ln(R + c) - \ln(R))$$

en orientant le circuit dans le sens trigonométrique sur la figure donnée.

Calculons le flux de \vec{B} à travers ce même circuit ; $d\vec{S}$ sera colinéaire à \vec{e}_ϕ et opposé en sens ; il y aura une dépendance triviale en z mais non triviale en r .

$$\iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \int_R^{R+c} dr \int_0^c dz \frac{\mu_0 I N}{2\pi r}$$

$$\iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \int_R^{R+c} dr c \frac{\mu_0 I N}{2\pi r}$$

$$\iint_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = c \frac{\mu_0 I N}{2\pi} (\ln(R + c) - \ln(R))$$

et on retrouve bien le même résultat comme l'on s'y attendait avec le théorème de Stokes

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot}\vec{A} \cdot d\vec{S}$$

7. **Discontinuité du champ** On se place près de la surface du solénoïde.

- (a) Rappeler la valeur de la discontinuité du champ entre l'intérieur et l'extérieur du solénoïde.

Entre l'intérieur et l'extérieur du solénoïde l'on attend une discontinuité de la composante tangentielle du champ

$$\vec{B}_{2t} - \vec{B}_{1t} = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$$

où \vec{n} est le vecteur normal à la surface, ici \vec{e}_r , avec continuité de la composante normale.

- (b) Établir l'expression de la densité de courant surfacique \vec{j}_s et vérifier la validité de ces expressions à l'aide de \vec{B} établies plus haut.

Ici le courant surfacique est tel que

$$NI = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int \vec{j}_s \cdot d\vec{l}$$

en intégrant sur la plus grande dimension du dispositif (ici sa circonférence). Si nous considérons que le dispositif a une petite épaisseur e en se plaçant au bord extérieur

$$NI = j_s 2\pi R e = j_s e$$

donc

$$j_s = \frac{NI}{2\pi R} \vec{e}_z$$

près du bord extérieur

comme le champ est nul à l'extérieur et qu'il vaut $\mu_0 \frac{NI}{2\pi R} \vec{e}_\phi$ à l'intérieur, en calculant $\vec{e}_z \wedge \vec{n}$ on retrouve bien l'expression de la discontinuité.

- (c) Redémontrer l'expression de la discontinuité de la composante tangentielle du champ \vec{B} à l'aide d'un petit parcours carré C_3 de côté dl orthogonal à la surface du solénoïde et à l'axe Oz .

Voir le cours le calcul est direct

- (d) De même, à l'aide d'une petite boîte parallélépipédique de base C_3 retrouver l'expression de la discontinuité de la composante normale de \vec{B} .

Voir le cours : penser à employer $\text{div} \vec{B} = 0$

8. Application numérique : $I = 3A$, $N = 100$ spires, $a = 3mm$, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ USI, $r_1 = 5mm$, calculer la valeur maximale du champ magnétique dans le solénoïde.

La valeur maximale est obtenue au centre (donc pour r_1). Attention à tout convertir en mètres. On obtient une valeur de 12 mT.

Donnée : en coordonnées cylindriques, le rotationnel d'un vecteur \vec{A} (dont les trois coordonnées (A_r, A_ϕ, A_z) dépendent chacune de (r, ϕ, z) vaut

$$\text{rot} \vec{A} = \vec{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \vec{e}_\phi \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \right)$$

5 Exploration du champ d'un solénoïde

On considère une petite bobine à n spires, de rayon $r \ll R$, située à l'intérieur d'un solénoïde de rayon R , de longueur L , à N spires et parcouru par un courant I constant. Cette bobine, initialement à la position z_0 de l'axe, est assujettie à se mouvoir parallèlement à l'axe en un mouvement sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude $a \ll L$. Que vaut la force électromotrice aux bornes de la bobine ?

(Le champ généré par le solénoïde sera pris égal à $\mu_0 \frac{N}{2L} I (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$ où θ_1 et θ_2 sont les angles sous lesquels la bobine voit les faces de sortie)

Si la bobine est assujettie ainsi à se mouvoir on peut écrire sa position sous la forme

$$z = z_0 + a \sin \omega t$$

donc le flux correspondant dans la petite bobine vaut

$$\Phi = n\pi r^2 B(z)$$

et par la loi de Lenz la force électromotrice induite vaut

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -n\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -na\pi r^2 \frac{\partial B}{\partial z} \omega \cos \omega t$$

On voit ainsi que grâce au mouvement (régulier et connu) de la bobine on peut explorer les variations du champ magnétique ; cette méthode était employée avant l'apparition des sondes à effet Hall.

Ici

$$B(z) = \mu_0 \frac{N}{2L} I \left\{ \left[1 + \left(\frac{2R}{L-2z} \right)^{-2} \right]^{-\frac{1}{2}} + \left[1 + \left(\frac{2R}{L+2z} \right)^{-2} \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

et

$$e = 2na\mu_0 \frac{N}{LR} I \pi^2 r^2 \omega \cos \omega t \left\{ \left[1 + \left(\frac{L-2z}{2R} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} + \left[1 + \left(\frac{L+2z}{2R} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \right\}$$

6 Ferromagnétisme

Une bobine est constituée par un fil de cuivre enroulé en couches minces successives réparties entre deux cylindres de rayon $r = a$ et $r = 2a$ de longueur l . Il y a n tours de fil par unité de longueur dans les deux sens. On suppose que $l \gg a$ et que la bobine est parcourue par un courant I .

1. Le cylindre intérieur est supposé vide. Donner $B(r)$. En déduire l'inductance propre L .

Si la bobine est infinie on a

$$B = \mu_0 n^2 I a$$

à l'intérieur en reprenant l'expression du champ d'un solénoïde à $n^2 a$ spires par unité de longueur.

Pour $r > a$ où r est la distance à l'axe seuls contribuent les éléments de r à $2a$ soit

$$B(r) = \int_r^{2a} dB$$

$$B(r) = \int_r^{2a} \mu_0 n (n dr I)$$

$$B(r) = \mu_0 n^2 (2a - r) I$$

L'inductance propre L est définie par

$$\Phi = LI$$

où Φ est le flux total à travers la bobine du champ magnétique \vec{B} créé par le courant I

Mais ici au vu de la suite du problème il est plus commode de calculer l'énergie magnétique totale

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau$$

et d'en déduire L .

On trouve donc

$$W_m = \frac{(\mu_0 n^2 a I)^2}{2\mu_0} \pi a^2 l + \frac{(\mu_0 n^2 a I)^2}{2\mu_0} \int_a^{2a} (2a - r)^2 2\pi r dr l$$

$$W_m = \frac{11\pi}{12} \mu_0 n^4 a^4 l I^2$$

et

$$L = \frac{11\pi}{6} \mu_0 n^4 a^4 l$$

2. Le cylindre contient désormais une substance ferromagnétique linéaire de perméabilité magnétique relative $\mu_r = 10^4$.

- (a) Donner $H = H(r)$ et $B = B(r)$.

Par définition on obtient

$$H = n^2 I (2a - r)$$

d'où

$$B = \mu_0 n^2 I (2a - r)$$

dans les spires ($a < r < 2a$)

et

$$H = n^2 I a$$

$$B = \mu_r \mu_0 n^2 I 2a$$

pour $r < a$.

- (b) Que vaut la nouvelle auto-inductance L^* ?
en passant par l'énergie magnétique

$$W_m^* = \frac{1}{2}L^*I^2 = \iiint \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}d\tau$$

$$W_m^* = \frac{\pi}{2}\mu_0 n^4 a^4 l \left(\mu_r + \frac{5}{6}\right) I^2$$

comme μ_r est grand devant $5/6$ on trouve

$$\frac{L^*}{L} = \frac{6}{11}\mu_r = 5450$$

On a donc une très forte augmentation de l'inductance (mais non directement proportionnelle à μ_r comme on aurait pu s'y attendre.)

- (c) La substance présente en fait un cycle d'hystérésis étroit, dont l'aire sur le graphe H, B vaut $S = kI_e^2$ où I_e est la valeur efficace du courant supposé alternatif sinusoïdal à tout instant. On suppose que L^* garde la valeur trouvée à la question précédente. Donner un schéma équivalent à la bobine sous la forme d'une auto-inductance parfaite et d'une résistance r en série.

Sur une période l'énergie dissipée vaut

$$W_d = S\pi a^2 l$$

soit une puissance moyenne de

$$P_d = \frac{1}{2}\omega k I_e^2 a^2 l$$

et une résistance équivalente de

$$r = \frac{1}{2}k\omega a^2 l$$

et la valeur de l'inductance calculée précédemment

7 Pression électromagnétique

Soit une onde électromagnétique plane monochromatique progressive de pulsation ω , se propageant dans le vide. Le champ électrique s'écrit

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - k \cos \alpha x - k \sin \alpha y) \vec{u}_z$$

1. Quel est le vecteur de propagation \vec{k} de l'onde ? L'exprimer en fonction de ω , c et \vec{u} , vecteur unitaire dans le sens de propagation de l'onde.

En général le champ électrique associé à une onde plane progressive monochromatique (OPPM) s'écrit

$$\vec{E}_i = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) \vec{u}_z$$

où \vec{r} est le vecteur position du point de l'espace considéré et où l'espace est convenablement orienté par rapport à la polarisation de l'onde supposée rectiligne.

Par conséquent les composantes du vecteur position sont évidemment $(k \cos \alpha, k \sin \alpha, 0)$ ou $k\vec{u}$ ou encore $\frac{\omega}{c}\vec{u}$.

2. En utilisant la relation de Maxwell-Faraday éventuellement simplifiée pour les ondes planes monochromatiques calculer le champ magnétique \vec{B}_i associé à \vec{E}_i (on notera $\vec{u}' = \vec{u} \wedge \vec{u}_z$).

la relation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot} \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t}$$

se simplifie pour une OPPM en

$$-i\vec{k} \wedge \vec{E}_i = -i\omega \vec{B}_i$$

Vu la question précédente $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$.

donc avec les notations de l'énoncé, \vec{E}_i étant aligné suivant \vec{u}_z

$$\frac{\vec{u}' E_i}{c} = \vec{B}_i$$

avec $\vec{u}' = (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0)$

3. Représenter les trois vecteurs \vec{k}, \vec{E}_i et \vec{B}_i et commenter.

Ces trois vecteurs (dans l'ordre) forment donc un trièdre direct.

4. Exprimer la valeur moyenne du vecteur de Poynting. Quelle est la puissance surfacique moyenne à travers une surface perpendiculaire à la direction de propagation ?

Par définition

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i}{\mu_0}$$

en substituant

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{u}' E_i}{c\mu_0}$$

$$\vec{\Pi} = E_i^2 \frac{\vec{u}_z \wedge \vec{u}'}{c\mu_0}$$

$$\vec{\Pi} = E_0^2 \cos^2(\omega t - k \cos \alpha x - k \sin \alpha y) \frac{\vec{u}}{c\mu_0}$$

La valeur moyenne d'un cosinus carré vaut 1/2 et on sait que $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$

donc

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} E_0^2 c \epsilon_0 \vec{u}$$

Or la puissance moyenne P_s à travers une surface perpendiculaire à la direction de propagation est égale au flux du vecteur de Poynting moyen

$$P_s = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \frac{d\vec{S}}{dS} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2$$

5. Pour les $x > 0$ on place un miroir métallique parfait M de normale \vec{e}_x et de conductivité quasi-infinie. On note \vec{E}_r et \vec{B}_r les champs réfléchis. L'onde se réfléchit suivant les lois de Descartes.

Montrer que le champ électrique est nul à l'intérieur du miroir métallique parfait.

La loi d'Ohm sous sa forme locale stipule que $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ donc si la conductivité σ tend vers l'infini il faut que le champ électrique tende vers 0 dans le volume du conducteur pour avoir un courant fini. Par Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère par exemple on en déduit également que le champ magnétique y est nul

6. Quelles sont les relations de passage vérifiées par les champs électriques puis magnétiques totaux (incidents plus réfléchis) en $x = 0$? Représenter ces champs.

Le théorème de Coulomb nous dit qu'il y a continuité de la composante tangentielle du champ électrique à la traversée d'une surface et discontinuité de la composante normale d'une valeur $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$. De même pour le champ magnétique dont la composante normale est continue et la composante tangentielle discontinue de $\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}$ où σ représente la densité de charges surfaciques et \vec{j}_s la densité de courant surfacique. Vu que les champs sont nuls dans le conducteur, pour la composante normale du champ électrique nous obtenons

$$\vec{E}_{in} + \vec{E}_{rn} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

et pour la tangentielle

$$\vec{E}_{it} + \vec{E}_{rt} = 0$$

Or le champ électrique incident est purement tangentiel donc σ est nul et le champ réfléchi est en opposition de phase avec le champ incident (ce qu'on peut vérifier en optique avec un dispositif interférentiel approprié tels les miroirs de Lloyd).

Par conséquent

$$\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) \vec{u}_z$$

avec $\vec{k}_r = (-k \cos \alpha, k \sin \alpha, 0)$ vecteur d'onde de l'onde réfléchie (on ne change pas de milieu)

et

$$\vec{B}_r = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) \vec{u}''$$

avec $\vec{u}'' = (\sin \alpha, \cos \alpha, 0)$ en employant le même raisonnement que précédemment.

La composante tangentielle du champ magnétique est suivant y . On a ainsi en projection sur cet axe

$$B_{iy}(x=0) = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k \sin \alpha y) \cos \alpha$$

$$B_{ry}(x=0) = -\frac{E_0}{c} \cos(\omega t - k \sin \alpha y) \cos \alpha$$

et

$$B_{iy}(x=0) + B_{ry}(x=0) - 0 = \mu_0 (\vec{j}_s \wedge (-\vec{u}_x)) \cdot \vec{u}_y$$

7. Déterminer la densité superficielle de charge σ et de courant \vec{j}_s dans le plan $x = 0$.
Pour σ voir la question précédente, pour le courant on obtient

$$B_{iy}(x=0) + B_{ry}(x=0) - 0 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge (-\vec{u}_x) \cdot \vec{u}_y$$

$$2E_0 c \epsilon_0 \cos(\omega t - k \sin \alpha y) \cos \alpha \vec{e}_z = \vec{j}_s$$

8. On considère un élément dS de la surface du miroir. Calculer à partir de l'expression microscopique de la loi de Laplace la force magnétique $d\vec{f}_m$ agissant sur dS . En déduire la pression électromagnétique (force par unité de surface) et sa moyenne.
La loi de Laplace donne

$$d\vec{f}_m = \vec{j}_s dS \wedge \frac{(\vec{B}_i + \vec{B}_r)}{2}$$

En effet le champ magnétique en surface est moitié de celui qui règne dans le vide (voir par exemple la version totalement rigoureuse du théorème de Gauss ou de celui d'Ampère).

La composante normale de \vec{B}_{total} étant continue et nulle dans le conducteur, la somme des deux vecteurs incidents se réduit à la composante tangentielle suivant \vec{u}_y . Le produit vectoriel donne alors une composante suivant \vec{u}_x :

$$d\vec{f}_m = \vec{j}_s dS \wedge \frac{(\vec{B}_i + \vec{B}_r)}{2}$$

$$d\vec{f}_m = 2\epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \alpha \cos^2(\omega t - k \sin \alpha y) dS \vec{u}_x$$

d'où par unité de surface une pression moyenne

$$\langle p_{em} \rangle = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2 \alpha = 2 \frac{P_s}{c} \cos^2 \alpha$$

en fonction de la puissance moyenne surfacique. Cet effet (la pression de radiation) prédit par Maxwell et établi rigoureusement par Poynting en 1903 est par exemple responsable de la double queue des comètes au voisinage du soleil : l'une, radiale, éjectée par cette pression, l'autre tangente à la trajectoire elliptique. De même on peut prévoir que toutes les particules de taille inférieure au micron seront insensibles à la gravité du soleil par rapport à cette pression et seront éjectées loin du système solaire. Les voiles solaires tireront avantage de l'effet. Il est à noter que le radiomètre de Crookes est basé sur un principe totalement différent (différence de pression entre une face noire et une face blanche). Enfin, dans les bombes à hydrogène, il semblerait que ce soit la pression de radiation X créée par l'"allumette" sous la forme d'une bombe à fission qui comprime le mélange deutérium-tritium au delà de la densité critique pour vaincre la répulsion coulombienne des noyaux et obtenir l'ignition de la fusion. Cet effet est actuellement simulé par des lasers de forte fluence.

8 Couche anti-reflet

On divise l'espace en trois zones par trois plans parallèles à Oxy situés en $z = 0$ et $z = e$. Un verre d'indice $N > 1$ se trouve en $z > e$. Une couche d'indice n se situe en $0 < z < e$. La zone $z < 0$ est vide.

Une OPPM (onde plane progressive monochromatique) de $k > 0$ et de pulsation ω se propage dans le vide. On la repère par l'indice 1. Elle est polarisée rectilignement suivant Ox . Il se produit une succession de réflexions et de transmissions. On notera les ondes correspondantes par les indices 2 3 4 et 5. On note de plus la vitesse de phase $v_j = \frac{c}{n_j}$.

1. Quelle est la relation entre k et ω dans le vide ? Dans un milieu d'indice n_j réel ?

Dans le vide on a $k = \frac{\omega}{c}$ avec c célérité de la lumière dans le vide. Dans un milieu d'indice n_j la célérité de l'onde diminue de ce même facteur donc $k_j = n_j k$.

2. Donner \vec{B}_i pour une OPPM connaissant \vec{E}_i .

la relation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot} \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

se simplifie pour une OPPM en

$$\mp i k \wedge \vec{E}_i = -i \omega \vec{B}$$

suivant le sens de propagation de l'onde (respectivement vers les z croissants ou décroissants), soit encore ici

$$\vec{B}_i = \pm \frac{k_j}{\omega} E_i \vec{u}_y$$

$$\vec{B}_i = \pm \frac{n_j}{c} E_i \vec{u}_y$$

3. Écrire l'expression générale de tous les champs \vec{E}_i et \vec{B}_i .

En vertu de la question précédente

$$\vec{E}_1 = E_{01} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x \quad \vec{B}_1 = \frac{E_{01}}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$$

$$\vec{E}_2 = E_{02} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_x \quad \vec{B}_2 = -\frac{E_{02}}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{u}_y$$

$$\vec{E}_3 = E_{03} e^{i(\omega t - nkz)} \vec{u}_x \quad \vec{B}_3 = \frac{n E_{03}}{c} e^{i(\omega t - nkz)} \vec{u}_y$$

$$\vec{E}_4 = E_{04} e^{i(\omega t + nkz)} \vec{u}_x \quad \vec{B}_4 = -\frac{n E_{04}}{c} e^{i(\omega t + nkz)} \vec{u}_y$$

$$\vec{E}_5 = E_{05} e^{i(\omega t - Nkz)} \vec{u}_x \quad \vec{B}_5 = \frac{N E_{05}}{c} e^{i(\omega t - Nkz)} \vec{u}_y$$

en remarquant bien que les E_{0i} peuvent être complexes.

4. Écrire les conditions de passage en fonction de $\phi = nke$ et $\Phi = Nke$. Les milieux ne présentent pas de propriétés magnétiques. On veut éliminer la réflexion dans le vide. Donner deux expressions de $r = \frac{E_{04}}{E_{03}}$ dans ce cas. Expliciter les conditions sur n et N pour qu'il y ait compatibilité.

On a continuité des composantes tangentielles des champs totaux électriques et magnétiques à chaque traversée de surface (en $z = 0$ et $z = e$).

On obtient donc quel que soit le temps

$$\begin{aligned} E_{01} + E_{02} &= E_{03} + E_{04} \\ E_{03}e^{-i\phi} + E_{04}e^{i\phi} &= E_{05}e^{-i\Phi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{01} - E_{02} &= n(E_{03} - E_{04}) \\ n(E_{03}e^{-i\phi} - E_{04}e^{i\phi}) &= NE_{05}e^{-i\Phi} \end{aligned}$$

Si on veut éliminer la réflexion dans le vide $E_{02} = 0$.

En divisant les premières et troisièmes équations par E_{03} on obtient

$$\begin{aligned} \frac{E_{01}}{E_{03}} &= 1 + r \\ \frac{E_{01}}{E_{03}} &= n(1 - r) \end{aligned}$$

soit

$$r = \frac{n - 1}{n + 1}$$

on peut vérifier que si $n = 1$ on n'a pas de réflexion.

En faisant de même sur les deuxièmes et quatrièmes équations on obtient

$$\begin{aligned} e^{-i\phi} + re^{i\phi} &= \frac{E_{05}}{E_{03}}e^{-i\Phi} \\ n(e^{-i\phi} - re^{i\phi}) &= N\frac{E_{05}}{E_{03}}e^{-i\Phi} \end{aligned}$$

soit

$$r = \frac{n/N - 1}{n/N + 1}e^{-2i\phi}$$

pour que les deux expressions de r soient compatibles il faut

$$e^{-2i\phi} = \pm 1$$

soit

$2nke = p\pi$ avec p entier et $e = p\lambda_0/4n$.

Dans le cas $+1$ on obtient $n = n/N$ donc soit $n = 0$ (absurde) soit $N = 1$ (perte de généralité). Dans le cas -1 on obtient $n = \sqrt{N}$. On peut préciser la condition sur e qui est $e = (p' + \frac{1}{2})\frac{\lambda_0}{2n}$ avec p' entier.

5. AN : $N = 1,5$ $\lambda_0 = 0,6 \mu\text{m}$ donner n et e minimales.

L'application numérique donne $n = 1,22$ et $e = 0,12 \mu\text{m}$.

On peut noter que les couches anti-reflets sont extrêmement fines : c'est pour cette raison qu'il faut essayer les lentilles d'appareils optiques de précision ou de lunettes avec le plus grand soin car il est très facile de détruire cette couche

6. En pratique $n = 1,35$ au moins. Calculer le facteur de réflexion $R = \left(\frac{N-n^2}{N+n^2}\right)^2$ correspondant. Comparer à l'absence de couche. Que se passe-t-il si on associe cinq lentilles ainsi traitées ?

On trouve $R = 9,42 \cdot 10^{-3}$ ce qui est petit même si on n'a pas exactement annulé la réflexion. En l'absence de couche $R = \left(\frac{N-1}{N+1}\right)^2$ et l'on trouve $R = 0,04$: on a donc diminué la réflexion d'un facteur 4 grâce à la couche. Si on associe cinq lentilles comme dans un objectif de type zoom d'appareil photographique le facteur de transmission total sera $(1-R)^5$ soit 0,90 en présence de couches contre 0,66 sans elles. L'effet des couches est donc amplifié et leur présence est cruciale pour récupérer le maximum de lumière en sortie.

On peut noter que ce phénomène est tout à fait analogue à celui observé en mécanique quantique lorsqu'une particule traverse des marches de potentiel.

7. Exprimer les valeurs moyennes des vecteurs de Poynting R_1 et R_5 . En déduire le facteur de transmission en énergie. Calculer le vecteur de Poynting total dans chaque zone. Remarques ?

Par définition

$$\langle \vec{R}_i \rangle = \frac{1}{2} \Re \frac{\vec{E}_i \wedge \vec{B}_i^*}{\mu_0}$$

donc ici

$$\langle \vec{R}_i \rangle = \pm n_j \frac{|E_{O_i}|^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z$$

Le facteur de transmission en énergie vaut

$$T_{15} = N \frac{|E_{O_5}|^2}{|E_{O_1}|^2} = N \left(\frac{n+1}{n+N} \right)^2$$

D'autre part en reprenant les relations de continuité et les résultats déjà obtenus

$$(n+1)E_{O_1} = 2nE_{O_3}$$

donc E_{O_3} puis E_{O_4} sont réels

par conséquent en calculant le vecteur de Poynting total il suffit d'additionner les vecteurs de Poynting \vec{R}_3 et \vec{R}_4 .

9 Guide d'ondes

On considère quatre plans de métal parfait situés en $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$, délimitant un guide d'ondes.

On étudie $\vec{E} = f(y) \cos(\omega t - k_g z) \vec{u}_x$

On pose $k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}$

1. Donner une équation sur $f(y)$

en régime sinusoïdal forcé l'équation d'onde dans le vide

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

donne après apparition de l'équation de Helmholtz

$$f''(y) - k_g^2 f(y) + \frac{\omega^2}{c^2} f(y) = 0$$

pour la composante suivant x et après simplification par $\cos(\omega t - k_g z)$.

2. Avec les conditions aux limites (C.L) sur y trouver $f(y)$. Que se passe-t-il suivant la direction x et sur les plaques ? *Le champ étant nul dans un conducteur parfait, en appliquant le théorème de Coulomb pour les conditions de passage on en déduit $f(0) = f(b) = 0$. Par conséquent la solution générale de l'équation différentielle sur f étant*

$$f(y) = A \sin(ky + \phi)$$

avec

$$k^2 = k_g^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$$

(si k est imaginaire le sinus se transforme en sinus hyperbolique).

il vient évidemment $\phi = 0$ (d'où l'intérêt de choisir a priori une forme en sinus pour la solution, comme en mécanique quantique pour une particule piégée dans un puits de profondeur infinie, ou pour une corde de guitare pincée aux deux bouts) et donc

$$kb = n\pi$$

avec n entier relatif non nul.

On voit que \vec{E} est normal aux parois suivant la direction x ; par conséquent les conditions de passage nous disent qu'il apparaît une densité surfacique de charge sur ces parois.

3. Trouver \vec{B} et commenter de même.

Appliquons l'équation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ce qui nous donne les composantes de \vec{B} après intégration temporelle :

$$\begin{aligned} B_x &= 0 \\ B_y &= \frac{k_g}{\omega} E_0^n \sin \frac{n\pi y}{b} \cos(\omega t - k_g z) \\ B_z &= \frac{n\pi}{b\omega} E_0^n \cos \frac{n\pi y}{b} \sin(\omega t - k_g z) \end{aligned}$$

On a donc une onde qui est transversale électrique mais non transversale magnétique. Il apparaîtra des courants de surface sur les parois.

4. Exprimer k_g puis λ_g . Montrer qu'il existe une fréquence de coupure. A.N: $f_c = 2,5$ GHz, trouver b .

on a d'après la deuxième question

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 = \frac{n^2\pi^2}{b^2}$$

en supposant la solution en sinus. Par conséquent

$$k_g = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{\omega b}\right)^2}$$

et

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{\omega b}\right)^2}}$$

avec $\lambda_0 = c/f$

On voit qu'il apparaît une pulsation de coupure dans la relation de dispersion telle que

$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{n\pi c}{b}$$

donc la fréquence de coupure vaut

$$f_c = \frac{c}{2b}$$

pour $n = 1$.

L'application numérique (pour les micro-ondes de fours domestiques) donne $b = 6$ cm.

5. Trouver les vitesses de phase et de groupe
par définition

$$v_\phi = \frac{\omega}{k_g} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{nf_c}{f}\right)^2}}$$

cette vitesse est supérieure à c mais ce n'est pas inquiétant car la vitesse de phase ne caractérise pas la vitesse de propagation de l'information contrairement à la vitesse de groupe.

par définition

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_g} = c\sqrt{1 - \left(\frac{nf_c}{f}\right)^2}$$

cette vitesse est bien inférieure à c .

6. Exprimer la valeur moyenne du vecteur de Poynting

le vecteur de Poynting vaut

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

il a donc pour composantes

$$\begin{aligned}\Pi_x &= 0 \\ \Pi_y &= -\frac{n\pi}{\mu_0 b \omega} E_0^2 \sin \frac{n\pi y}{b} \cos(\omega t - k_g z) \cos \frac{n\pi y}{b} \sin(\omega t - k_g z) \\ \Pi_z &= \frac{k_g}{\mu_0 \omega} E_0^2 \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \cos^2(\omega t - k_g z)\end{aligned}$$

et sa valeur moyenne vaut donc

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{k_g}{2\mu_0 \omega} E_0^2 \sin^2 \frac{n\pi y}{b} \vec{u}_z$$

car la valeur moyenne suivant y est nulle.

7. Donner la densité volumique d'énergie électromagnétique

On peut montrer que cette densité u vaut

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2$$

soit ici

$$u = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4} \left(1 - \frac{c^2 k_g^2}{\omega^2} \cos \frac{2\pi n y}{b}\right)$$

8. Que vaut la vitesse de propagation de l'énergie ?

Soit v_e la vitesse de propagation de l'énergie suivant z . L'énergie totale contenue dans une tranche $dz = v_e dt$ vaut

$$dE = P dt = \iint dz \langle u \rangle dx dy$$

où la puissance P est donnée par le flux à travers la surface (x, y) de la moyenne du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$.

De là on tire que $v_e = v_g$.

9. Que se passe-t-il si les plaques ont une conductivité finie ?

Dans ce cas il y aura des pertes par effet ohmique dans les parois : la cavité aura une réponse fréquentielle plus diffuse, et de l'énergie de chaque mode sera perdue .

10 Ondes dans un plasma

Soit un plasma formé

1. d'ions positifs de charge $+|e|$, de masse M et de vitesse \vec{V}
2. d'électrons de charge $-|e|$ de masse m et de vitesse \vec{v}

Ces constituants sont supposés immobiles, ne pas interagir pas entre eux (plasma très dilué) et on néglige la pesanteur.

On considère une OPPM

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$$

et on se place en régime sinusoïdal forcé.

1. Peut-on négliger l'effet du champ magnétique sur les particules chargées ?

Le rapport des deux composantes de la force de Lorentz vaut

$$r = \frac{|\vec{v} \wedge \vec{B}|}{|\vec{E}|}$$

$$r \approx v \frac{|\vec{B}|}{|\vec{E}|}$$

$$r \approx \frac{v}{c}$$

Dans le cadre non relativiste l'approximation est donc justifiée

2. Donner \vec{V} et \vec{v} en fonction de \vec{E} et en déduire la densité de courant \vec{j} . Montrer que la contribution des ions est négligeable. Donner \vec{j} en fonction de ϵ_0 , ω , ω_p et \vec{E} en posant $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}}$ (pulsation de plasma).

le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = e\vec{E}$$

$$M \frac{d\vec{V}}{dt} = e\vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$$

En toute rigueur il faudrait écrire la dérivée particulière

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V}$$

mais en régime sinusoïdal forcé par l'OPPM il reste

$$-iM\omega\vec{V} = e\vec{E}_0 e^{-i(\omega t - kz)}$$

donc

$$\vec{V} = \frac{ie}{M\omega}\vec{E}$$

de même pour les électrons

$$\vec{v} = -\frac{ie}{m\omega}\vec{E}$$

et finalement la densité de courant vaut

$$\begin{aligned}\vec{j} &= Ne\vec{V} - Ne\vec{v} \\ \vec{j} &= \frac{iNe^2}{\omega}\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)\vec{E}\end{aligned}$$

Les ions étant bien plus lourds que les électrons (au moins d'un facteur 2000) il vient

$$\vec{j} = i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega}\vec{E}$$

3. Montrer que la densité volumique de charges ρ est nulle. Quelle en est la conséquence sur le champ électrique ?

écrivons l'équation de conservation de la charge

$$\text{div}\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

en régime forcé il vient

$$i\epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \text{div}\vec{E} - i\omega\rho = 0$$

soit

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

en vertu de la forme locale du théorème de Gauss. Comme a priori $\omega \neq \omega_p$ il faut bien que ρ soit nul.

4. Établir l'équation de dispersion donnant k^2 en fonction de ω , ω_p et c . Représenter $k(\omega)$. En déduire que l'on a un diélectrique parfait.

la relation de Maxwell-Faraday

$$\vec{r}\text{ot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

se simplifie pour une OPPM en

$$-i\vec{k} \wedge \vec{E} = -i\omega\vec{B}$$

De même la relation de Maxwell-Ampère

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

donne

$$i\vec{k} \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \right) = \mu_0 i \epsilon_0 \frac{\omega_p^2}{\omega} \vec{E} - i \frac{\omega}{c^2} \vec{E}$$

$$\left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{E} \vec{k}}{\omega} \right) - \frac{k^2}{\omega} \vec{E} = \frac{1}{c^2 \omega} (\omega_p^2 - \omega^2) \vec{E}$$

et, comme $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

(relation de dispersion).

5. Si $\omega < \omega_p$ y-a-t-il propagation ? pour $\omega < \omega_p$ k est donc imaginaire pur et l'on a une onde évanescente.
6. Si $\omega > \omega_p$ donner la vitesse de phase v_ϕ et la vitesse de groupe v_g .

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

Ce résultat est supérieur à c mais ce n'est pas contradictoire avec les théories d'Einstein de la relativité car la vitesse de phase ne caractérise pas la vitesse de transmission de l'information (contrairement à la vitesse de groupe).

d'autre part

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

donc

$$2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2}$$

et

$$v_g = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{v_\phi}$$

ce résultat est donc évidemment inférieur à c .

7. On définit l'indice n par $v_\phi = \frac{c}{n}$. A.N : On suppose que l'ionosphère peut être étudiée dans le présent cadre. On constate que les ondes radio de fréquence inférieure à 9 MHz ne sont pas transmises. En déduire N et commenter. Comparer le cas de stations de radio émettant sur 1376 m et 2,85 m.

On a donc

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

et en vertu de la relation de dispersion (ou des formules de Fresnel), on peut avoir réflexion totale pour $\omega < \omega_p$.

On en déduit $N = 10^{12} e^-/m^3$ à partir de l'expression de ω_p . Le plasma est donc très dilué : c'est normal à très haute altitude. Les deux stations de radio correspondent à des fréquences de 218 kHz (grandes ondes) et 105,5 MHz (modulation de fréquence, ondes ultra-courtes). Les ondes de la première seront réfléchies sur l'ionosphère puis sur le sol et pourront ainsi se propager (avec déformation) sur des milliers de kilomètres ; celle de la deuxième ne porteront pas plus loin que l'horizon, mais seront reçues avec une meilleure qualité en l'absence de réflexions et permettront un réseau de radios ou de télévisions locales par exemple.

11 Plasma chaud

On considère que la densité des électrons $n_e(\vec{r})$ et des ions de densité $n_i(\vec{r})$ sont données par des facteurs de Boltzmann :

$$n_i = n_0 e^{\frac{eV_e}{k_b T}} \quad n_e = n_0 e^{-\frac{eV_e}{k_b T}}$$

où T est la température thermodynamique du système et k_b la constante de Boltzmann.

1. En écrivant le théorème de Gauss entre deux sphères séparées par une faible épaisseur dr , trouver une équation différentielle pour le potentiel électrique V_e en l'absence d'onde électromagnétique extérieure. Commenter la forme de cette équation.

Le théorème de Gauss s'écrit, pour une surface quelconque S enserrant un volume V contenant une quantité totale de charges ΣQ_{int}

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma Q_{int}}{\epsilon_0} = \iiint_V \rho d\tau$$

où \vec{E} est le champ électrique, ici radial et ne dépendant que de r par symétrie. La densité de charges ρ vaut $|e|(n_i - n_e)$ où $|e|$ est la charge élémentaire de l'électron (négative).

Entre les sphères de rayon r et $r + dr$ il reste donc

$$\begin{aligned} 4\pi((r + dr)^2 E(r + dr) - r^2 E(r)) &= \frac{|e|(n_i - n_e)4\pi r^2 dr}{\epsilon_0} \\ r^2(E + dE) + 2rdr(E + drdE) - r^2 E &= \frac{2|e|n_0}{\epsilon_0} \sinh \frac{eV_e}{k_b T} r^2 dr \\ r^2 \frac{dE}{dr} + 2rE &= r^2 \frac{2|e|n_0}{\epsilon_0} \sinh \frac{eV_e}{k_b T} \end{aligned}$$

en négligeant les termes d'ordre 2 ou supérieur et en introduisant la forme des densités donnée dans l'énoncé.

Or $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$ donc $E(r) = -\frac{dV}{dr}$ et il vient

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dV}{dr} = -\frac{2|e|n_0}{\epsilon_0} \sinh \frac{eV_e}{k_b T}$$

nous constatons que nous retombons sur l'équation de Poisson en sphériques

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

2. Linéariser puis résoudre cette équation en supposant $k_b T \gg eV_e$. Commenter le résultat.

Dans ce cas on peut assimiler $\sinh x$ à x et il reste

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rV) = \frac{2e^2 n_0}{\epsilon_0 k_b T} V$$

en posant $U = rV$ (comme dans la recherche de la solution de propagation d'une onde sphérique) il vient

$$\frac{d^2 U}{dr^2} = \frac{2e^2 n_0}{\epsilon_0 k_b T} U$$

$$\frac{d^2 U}{dr^2} = \frac{1}{l^2} U$$

avec $l = \sqrt{\epsilon_0 k_b T 2e^2 n_0}$ et finalement

$$V = \frac{C}{r} e^{-r/l}$$

12 Rayonnement dipolaire

On considère un électron de vitesse au loin \vec{v}_0 et de paramètre d'impact d , dévié par un proton fixe situé en O .

Rappels

1. En coordonnées polaires (ρ, θ) la trajectoire de l'électron est une hyperbole

$$\rho = \frac{q}{1 + \epsilon \cos \theta}$$

de paramètre $q = \left(\frac{v_0}{c}\right)^2 \left(\frac{d^2}{\delta}\right)$ et d'excentricité $\epsilon^2 = 1 + \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \left(\frac{v_0}{c}\right)^4$ en posant $\delta = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}$.

On suppose $\frac{v_0}{c} = 10^{-2}$ de telle sorte que la déviation soit importante. Alors $\frac{d}{\delta} = 10^4$ $\epsilon = \sqrt{2}$ et l'hyperbole a des asymptotes pour $\theta_M = \pm \frac{3\pi}{4}$.

L'ensemble électron-proton constitue un dipôle rayonnant.

2. Le champ rayonné par un dipôle vaut

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \vec{u}_r \wedge \ddot{\vec{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

Questions

1. Établir la puissance $P(R, t)$ rayonnée à travers une sphère de grand rayon R
Cette puissance est égale au flux du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\vec{\Pi} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \\ \vec{\Pi} &= c \frac{(\vec{B} \wedge \vec{u}_r) \wedge \vec{B}}{\mu_0} \\ \vec{\Pi} &= \frac{c}{\mu_0} B^2 \vec{u}_r\end{aligned}$$

puis

$$d^2 P = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = dS \frac{\mu_0}{16\pi^2 r^2 c} (\vec{u}_r \wedge \ddot{\vec{p}})^2$$

en remplaçant \vec{B} par son expression puis en simplifiant.

Or si nous notons θ' l'angle entre $\ddot{\vec{p}}$ et \vec{u}_r il vient

$$(\vec{u}_r \wedge \ddot{\vec{p}})^2 = \ddot{p}^2 \sin^2 \theta'$$

donc la puissance totale rayonnée vaut

$$\begin{aligned}P(R, t) &= \iint d^2 P = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta'=0}^{\pi} \Pi 4\pi r^2 \sin^3 \theta' d\theta' d\phi \\ P(R, t) &= \int_{\theta'=0}^{\pi} \frac{\mu_0}{8\pi c} \ddot{p}^2 \sin^3 \theta' d\theta' \\ P(R, t) &= \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p}^2 \left(t - \frac{R}{c}\right)\end{aligned}$$

en notant que l'intégrale sur θ' vaut 4/3 (résultat classique).

2. Définir \vec{p} ; exprimer $\ddot{\vec{p}}$ en fonction de ρ et des autres paramètres. En déduire que

$$P(R, t) = \frac{2}{3} \frac{m c^3 \delta^3}{\rho^4}$$

Ici la charge rayonnante se trouve à un vecteur distance $\vec{\rho}$ de l'origine le vecteur dipôle vaut donc

$$\vec{p} = -e\vec{\rho}$$

Si le rayonnement est suffisamment faible pour ne pas perturber la trajectoire de l'électron on a

$$\ddot{\vec{p}} = -e\ddot{\vec{\rho}} = -\frac{e^3}{4\pi\epsilon_0 m \rho^2} \vec{u}_\rho$$

en vertu des équations de Newton (ou du principe fondamental de la dynamique), l'électron étant uniquement soumis à une force radiale, la force de Coulomb.

Donc

$$\ddot{p} = \frac{e^6}{16\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 \rho^4}$$

et

$$P(R, t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \frac{e^6}{16\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 \rho^4}$$

et on a bien

$$P(R, t) = \frac{2}{3} \frac{mc^3 \delta^3}{\rho^4}$$

3. Montrer que si $R \gg d$ l'énergie totale rayonnée par la charge vaut

$$E_R = \int_{-\infty}^{+\infty} P(R, t) dt$$

si $R \gg d$ on est bien dans les conditions où localement sur la sphère l'onde rayonnée est quasiment plane.

4. Exprimer K , rapport de E_R et de l'énergie cinétique initiale en fonction de $\frac{\delta}{d}$, $\frac{c}{v_0}$ et de

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \epsilon \cos \theta)^2 d\theta$$

$$K = \frac{E_R}{mv_0^2} = \frac{4c^3 \delta^3}{3v_0^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho^4} dt$$

Or en appliquant la loi des aires (3ème loi de Kepler) $\rho^2 \dot{\theta}$ est une constante qui vaut à grande distance $v_0 d$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho^4} dt &= \frac{1}{v_0 d} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho^2} d\theta \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\rho^4} dt &= \frac{1}{v_0^2 d^2} \int_{-\theta_M}^{+\theta_M} (1 + \epsilon \cos \theta)^2 d\theta \end{aligned}$$

donc

$$K = \frac{4}{3} \left(\frac{\delta}{d}\right)^5 \left(\frac{c}{v_0}\right)^7 I$$

5. Calculer I K et conclure.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3\pi/4}^{+3\pi/4} (1 + \sqrt{2} \cos \theta)^2 d\theta \\ I &= \int_{-3\pi/4}^{+3\pi/4} (1 + 2 \cos^2 \theta + 2\sqrt{2} \cos \theta) d\theta \\ I &= 3\pi + 4 \end{aligned}$$

et finalement $K = 1,7 \cdot 10^{-5}$. L'énergie rayonnée est donc comme supposé très faible par rapport au phénomène de diffusion coulombienne. Cependant pour un électron en orbite autour d'un proton ce rayonnement dit "de freinage" (Bremsstrahlung) devrait conduire l'électron, au bout d'un certain temps, à se rapprocher du proton...c'est l'objection qui avait été émise au modèle de Bohr et qui a été levée par la mécanique quantique moderne (qui prouve qu'il n'y a pas de niveau inférieur au fondamental). Ce phénomène est mis à l'œuvre dans les synchrotrons pour générer un rayonnement UV ou X très intense.