

UNIVERSITÉ DU MAINE  
(FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES)

Florent.Calvayrac@univ-lemans.fr



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Opérateurs sur des champs scalaires et vectoriels</b>	<b>11</b>
2.1	Intégrales linéiques, surfaciques, et volumiques : circulation, flux, éléments de volume . . . . .	12
2.1.1	Intégrales linéiques . . . . .	12
2.1.2	Intégrales surfaciques . . . . .	12
2.1.3	Intégrales volumiques . . . . .	13
2.1.4	Courbes et surfaces fermées . . . . .	13
2.2	Systèmes de coordonnées . . . . .	13
2.2.1	Coordonnées curvilignes . . . . .	13
2.2.2	Rappels sur les coordonnées polaires, sphériques et cylindriques . . . .	16
2.2.3	Éléments de surface et volume . . . . .	18
2.3	Analyse vectorielle . . . . .	20
2.3.1	Différentielle . . . . .	21
2.3.2	Gradient . . . . .	21
2.3.3	Symbole nabla . . . . .	22
2.3.4	Divergence . . . . .	22
2.3.5	Rotationnel . . . . .	22
2.3.6	Laplacien . . . . .	24
2.3.7	Laplacien vecteur . . . . .	24
2.3.8	Systèmes de coordonnées non cartésiens . . . . .	24
2.3.9	Algèbre des opérateurs vectoriels . . . . .	24
2.4	Formule de Green-Ostrogradski . . . . .	24
2.5	Formule de Stokes . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Formes locales de l'électrostatique et de la magnéto-statique</b>	<b>27</b>
3.1	Rappels d'électrostatique et magnéto-statique . . . . .	27
3.1.1	Causes et effets, force de Lorentz . . . . .	27
3.1.2	Aspect relativiste du champ magnétique . . . . .	28
3.1.3	Distributions de charges et de courants . . . . .	28
3.1.4	Définition de l'intensité . . . . .	29
3.1.5	Force de Laplace . . . . .	31
3.1.6	loi de Coulomb et de Biot et Savart . . . . .	31
3.1.7	Courants ampériens . . . . .	33
3.1.8	Théorèmes de Gauss et d'Ampère . . . . .	34
3.1.9	Symétries et antisymétries des champs, lignes de champ . . . . .	35
3.2	Forme locale des théorèmes de Gauss et Ampère . . . . .	37
3.3	Équation de Poisson . . . . .	38
3.4	Flux du champ magnétique . . . . .	39

3.5	Potentiel vecteur . . . . .	39
3.6	Forme locale de la loi d'Ohm . . . . .	41
3.7	Conditions de passage et conducteurs parfaits . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Induction</b>	<b>45</b>
4.1	Force électromotrice . . . . .	45
4.2	Loi de Lenz-Faraday . . . . .	45
4.2.1	Variation du champ magnétique . . . . .	46
4.2.2	Variation de l'angle entre la surface et le champ . . . . .	46
4.2.3	Variation de la surface . . . . .	47
4.3	Force de Lorentz et induction : champ électromoteur . . . . .	47
4.4	Forme locale : équation de Maxwell-Faraday et champ de Neumann . . . . .	49
4.5	Auto- et mutuelle induction . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Équations de Maxwell</b>	<b>53</b>
5.1	Historique . . . . .	53
5.2	Équation de conservation de la charge . . . . .	53
5.3	Courant de déplacement . . . . .	54
5.4	Équations de Maxwell . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Ondes électromagnétiques</b>	<b>57</b>
6.1	Équation d'onde dans le vide . . . . .	57
6.2	Solutions générales . . . . .	58
6.3	Fréquence et longueur d'onde . . . . .	60
6.4	Structure des ondes électromagnétiques dans le vide . . . . .	61
6.5	Ondes planes ; expression de nabla . . . . .	61
6.6	Ondes sphériques . . . . .	63
<b>7</b>	<b>Aspects énergétiques des phénomènes électromagnétiques</b>	<b>65</b>
7.1	Énergie électrostatique et magnéto-statique . . . . .	65
7.1.1	Travail d'établissement d'une distribution de charges . . . . .	65
7.1.2	Travail d'établissement d'une distribution de courants statique . . . . .	66
7.1.3	Puissance du champ électromagnétique ; vecteur de Poynting . . . . .	68
7.1.4	Énergie transportée par une onde plane . . . . .	69
7.1.5	Énergie transportée par une onde sphérique . . . . .	70
<b>8</b>	<b>Champs électriques dans les milieux matériels</b>	<b>71</b>
8.1	Charges de polarisation et champ dépolarisant . . . . .	71
8.2	Approximation dipolaire électrique . . . . .	71
8.2.1	Cas de deux charges égales et opposées . . . . .	72
8.2.2	Cas du dipôle rigide . . . . .	73
8.3	Molécules polaires, polarisabilité . . . . .	73
8.4	Vecteur polarisation . . . . .	74
8.5	Charges de polarisation . . . . .	74
8.6	Vecteur excitation électrique . . . . .	75
8.7	Milieux diélectriques linéaires . . . . .	76
8.8	Approche microscopique des milieux diélectriques . . . . .	77
8.8.1	Méthode de Lorentz . . . . .	77
8.8.2	Polarisabilité d'un diélectrique . . . . .	78
8.9	Polarisation électrique en régime variable . . . . .	83
8.9.1	Notation complexe . . . . .	83

8.9.2	Polarisation par déformation en régime variable . . . . .	84
8.9.3	Application à l'optique . . . . .	86
8.10	Polarisation d'orientation en régime variable . . . . .	89
8.11	Courant de polarisation . . . . .	90
8.12	Puissance volumique moyenne dissipée dans un diélectrique isolant . . . . .	90
8.13	Conclusion : les trois types de polarisation . . . . .	91
<b>9</b>	<b>Milieux magnétiques</b>	<b>93</b>
9.1	Modélisation dipolaire . . . . .	93
9.1.1	Moment magnétique . . . . .	93
9.1.2	Potentiel vecteur créé par un dipôle magnétique . . . . .	93
9.2	Milieux magnétiques . . . . .	94
9.2.1	Sources microscopiques de l'aimantation . . . . .	94
9.3	Étude macroscopique des milieux magnétiques . . . . .	96
9.3.1	Courants d'aimantation volumiques et surfacique . . . . .	96
9.3.2	Équations de Maxwell dans les milieux . . . . .	97
9.3.3	Relations constitutives . . . . .	98
9.4	Étude microscopique des milieux magnétiques . . . . .	99
9.4.1	Diamagnétisme . . . . .	99
9.4.2	Paramagnétisme . . . . .	102
9.4.3	Paramagnétisme à champ moléculaire . . . . .	106
9.4.4	Ferromagnétisme . . . . .	107
9.4.5	Utilisation des matériaux ferromagnétiques . . . . .	110
<b>10</b>	<b>Formulaire</b>	<b>111</b>
<b>11</b>	<b>Conseils méthodologiques</b>	<b>113</b>
11.1	Généralités . . . . .	113
11.2	Pré-requis . . . . .	113
11.3	Conseils de rédaction . . . . .	113
11.4	Optimisation d'une note à un examen écrit ou oral . . . . .	114
11.5	Approche d'un problème d'électromagnétisme . . . . .	114



# Table des figures

2.1	Carte météorologique donnant les lignes d'égale pression (isobares) . . . . .	11
2.2	Lacet gauche . . . . .	14
2.3	Vecteur vitesse tangent au cercle de rayon $r$ parcouru à vitesse constante . . . . .	16
2.4	Coordonnées sphériques . . . . .	17
2.5	Coordonnées cylindriques . . . . .	17
2.6	Intégration sur la surface d'un carré en choisissant un sens de parcours . . . . .	18
2.7	Intégration sur la surface d'un cercle en choisissant un sens de parcours . . . . .	18
2.8	Exemple de cuvette de potentiel et du gradient correspondant . . . . .	21
2.9	Cartographie bidimensionnelle du champ créé par une charge localisée ; la divergence est non nulle dans la région occupée par la charge . . . . .	23
2.10	Cartographie du champ magnétique créé par une source de courant localisée ; le rotationnel est non nul à l'intérieur de la source . . . . .	23
2.11	Cube élémentaire employé pour la "démonstration" de la formule de Green-Ostrogradski ou théorème de la divergence . . . . .	25
3.1	Nuage de charges ponctuelles subissant une force de Lorentz . . . . .	27
3.2	Distribution de charges ponctuelles en mouvement créant une densité continue de charges et de courants . . . . .	28
3.3	Tube de courant élémentaire . . . . .	30
3.4	Force de Coulomb entre deux charges ponctuelles . . . . .	32
3.5	Boucle de courant créant un champ magnétique . . . . .	33
3.6	Principe des courants ampériens dans un barreau aimanté . . . . .	34
3.7	Symétrie de la force créée par une distribution surfacique de charge électrique . . . . .	36
3.8	Symétrie de la force créée par une distribution surfacique de courant électrique . . . . .	36
3.9	Lignes de champ magnétique créé par un fil infini . . . . .	37
3.10	Tube de lignes de champ magnétique de section variable . . . . .	39
3.11	Lignes de champ magnétique d'un barreau aimanté, matérialisées par de la poudre d'oxyde de fer (ferrite) . . . . .	40
3.12	Surface et parcours autour de la surface chargée séparant deux milieux employés pour la démonstration du théorème de Coulomb . . . . .	43
4.1	Force électromotrice $\mathcal{E}$ induite par un champ magnétique dans un circuit fermé . . . . .	45
5.1	Nœud électrique et loi des nœuds en régime permanent . . . . .	54
5.2	Schéma d'un condensateur plan . . . . .	55
6.1	Propagation spatio-temporelle des deux types de solution à l'équation d'onde . . . . .	59
6.2	Cadre permettant de trouver la direction d'un signal radio (radiogoniométrie) en détectant sa composante magnétique . . . . .	62
6.3	Structure d'onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement . . . . .	62

7.1	Circuit modèle employé pour le calcul de l'énergie magnétostatique . . . . .	67
-----	--	----



# Chapitre 1

## Introduction

Dans ce cours, nous allons voir comment Maxwell, en proposant un formalisme unifié de l'électrostatique et de la magnéto-statique, a établi un système d'équations corrigé qui lui a permis de prédire l'existence des ondes électromagnétiques et d'expliquer la nature de la lumière. Ceci a transformé profondément le monde : permettant de concevoir des machines électriques utilisables, des appareils de communication utilisant les ondes radio (TV, téléphone portable...). L'étude approfondie des équations de Maxwell a permis d'autre part l'apparition de la théorie de la relativité qui a bouleversé la physique au XXème siècle.



FIG. 1.1 – Quelques applications de l'électromagnétisme

Le passage de la théorie intégrale de l'électrostatique et de la magnéto-statique telle que vous la connaissez du cours de première année (théorèmes de Gauss et d'Ampère par exemple) nécessite cependant l'introduction de quelques notions mathématiques. Nous verrons que ce formalisme permet d'exprimer sur le même pied électrostatique, magnéto-statique, et induction, et pour assurer la cohérence du système d'équations obtenu amène à introduire le terme correctif qui permet la prédiction des ondes électromagnétiques qui fut ensuite, une trentaine d'années après, confirmée expérimentalement par Hertz en 1882.

En effet, historiquement, l'électrostatique était connue depuis l'époque antique ("Elektron" signifie laine en grec) et avait été formulée quantitativement par Coulomb au dix-huitième siècle en s'inspirant des travaux antérieurs de Newton sur la gravitation qui se présente avec des équations similaires en carré de la distance. La magnéto-statique semble être arrivée en

Europe à la fin du Moyen-Âge en s'inspirant des travaux des Chinois sur les boussoles faites d'aimants naturels, et a été formulée quantitativement par Biot, Savart et Ampère après que Oersted eut montré dans sa célèbre expérience d'action d'une pile sur une boussole que les distributions de courants pouvaient créer des champs magnétiques à l'instar des aimants. Ceci a contrario a amené Faraday à montrer qu'une variation de champ magnétique pouvait également induire un courant. Toutes ces théories étaient formulées en coordonnées cartésiennes avec des formalismes différents, ce qui donnait une bonne quinzaine d'équations absolument illisibles. Nous allons voir comment une formulation opératorielle de la théorie des champs classiques simplifie ce formalisme et permet la prédiction de l'existence des ondes électromagnétiques.

Cette façon d'unifier des théories en apparence non reliées et d'obtenir des prédictions surprenantes a ensuite été le modèle de la science du vingtième siècle, donnant par exemple l'électrodynamique quantique, unification de la mécanique quantique et de l'électromagnétisme avec des aspects de relativité restreinte, la théorie électrofaible unification de l'électrodynamique quantique et de la théorie de l'interaction faible dans les noyaux, et enfin le modèle standard unification avec l'interaction forte. Une "grande unification" ou théorie du tout (unification avec la relativité générale et la gravitation) est encore en cours de développement au moment où ces lignes sont écrites (2008) malgré des pistes prometteuses.

## Chapitre 2

# Opérateurs sur des champs scalaires et vectoriels

En physique, vous n'avez surtout rencontré jusqu'à présent que des objets représentés par un nombre fini de grandeurs scalaires réelles : par exemple les trois coordonnées spatiales d'un mobile, pouvant certes prendre une infinité de valeurs, mais en nombre fini.

Dans ce cours, nous allons travailler sur des objets appelés des champs, consistant en un ou plusieurs scalaires dépendant de coordonnées spatiales. S'il n'y a qu'un réel dépendant de l'espace on parlera d'un champ scalaire ; si on considère un triplet de réels dépendant de la position, on parlera d'un champ vectoriel. Pour ce qui nous concerne, ces champs seront typiquement le potentiel et le champ électrique, ou le champ magnétique, mais ces concepts sont universellement employés en physique.

Par exemple, en mécanique des fluides, formellement assez proche de l'électromagnétisme, on étudie les variations spatiales du champ de pression, de vitesse du fluide, voire de sa température comme en météorologie par exemple.

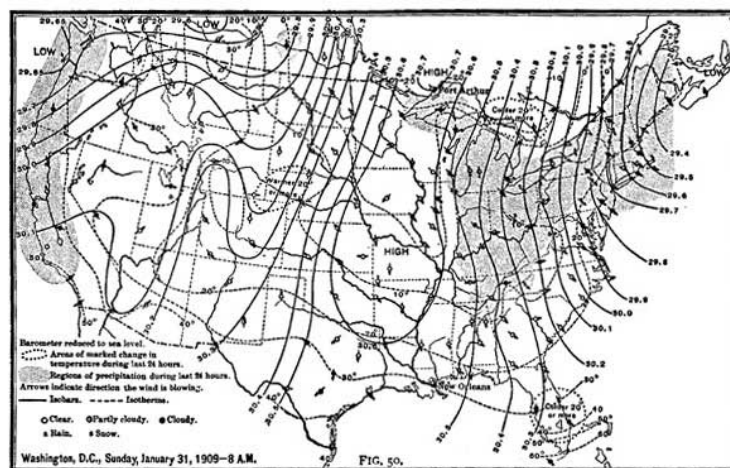


FIG. 2.1 – Carte météorologique donnant les lignes d'égale pression (isobares)

Par la suite, comme ce cours est avant tout un cours de physique, sauf si cela est explicitement précisé, nous allons supposer que les champs sont suffisamment réguliers pour pouvoir être intégrés ou dérivés par rapport aux coordonnées spatiales et temporelles comme cela nous arrange lorsque nous en aurons besoin.

Nous pouvons alors définir des opérateurs différentiels ou intégraux permettant de passer d'un champ à un autre, ou à des grandeurs réelles intégrales. Le lecteur intéressé par davantage

de rigueur mathématique est invité à se référer à un cours traitant de ces sujets en tant que tels, le but ici étant simplement de fournir des outils de travail pour les chapitres suivants.

## 2.1 Intégrales linéiques, surfaciques, et volumiques : circulation, flux, éléments de volume

### 2.1.1 Intégrales linéiques

Nous pouvons ainsi intégrer un champ le long d'une courbe donnée pour obtenir une valeur intégrale. Par exemple, si  $\mu(r)$  est la masse linéique d'un fil, en intégrant le long du fil entre deux points  $A$  et  $B$  nous pouvons obtenir la masse  $m$  du fil

$$m = \int_A^B \mu(r) dr$$

Remarquons que si la masse linéique est constante nous pouvons la sortir de l'intégrale et nous obtenons le résultat intuitif

$$m = \mu L$$

où  $L = \int_A^B dr$  est la longueur du fil.

En général si nous considérons un champ vectoriel  $\vec{A}(\vec{r})$  l'intégrale du champ le long d'une courbe donnée  $C$  sera appelée circulation  $C$  du champ le long de la courbe

$$C = \int_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Ceci doit par exemple vous rappeler la définition du travail d'une force vue en première année. Notons que le produit scalaire est important pour bien obtenir un résultat qui soit un nombre réel; d'autre part, si le champ est toujours perpendiculaire à l'élément de la courbe (voir le cours de géométrie des courbes correspondant) le résultat sera nul.



FIG. 2.2 – Le travail nécessaire pour amener un mobile d'un point  $A$  à un point  $B$  est égal à la circulation de la force sur le parcours

### 2.1.2 Intégrales surfaciques

De la même façon il est possible d'intégrer un champ vectoriel sur une surface donnée à condition qu'elle ait des propriétés de régularité convenables, ce que nous supposons être vrai.

Ainsi si nous considérons un champ vectoriel  $\vec{A}(\vec{r})$  l'intégrale du champ sur une surface donnée  $S$  sera appelée flux  $\Phi$  du champ à travers la surface

$$\Phi = \iint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}(\vec{r})$$

Ceci doit par exemple vous rappeler la définition du travail d'une force vue en première année. Comme pour la circulation, notons que le produit scalaire est important pour obtenir un résultat qui soit un nombre réel. On peut voir ce flux comme en mécanique des fluides, dans l'exemple d'une rivière, la quantité d'eau passant à travers une surface donnée de forme quelconque si on considère comme grandeur  $\vec{A}(\vec{r})$  la vitesse du fluide multipliée par sa masse volumique, exemple que nous reprendrons plus tard.

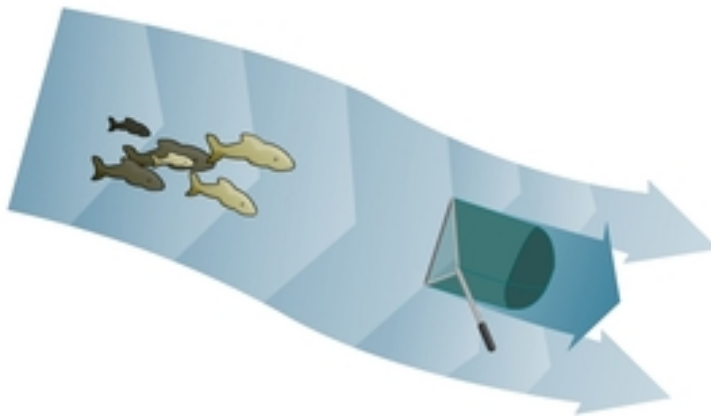


FIG. 2.3 – Le débit de l'eau à travers la surface est égal au flux de la vitesse multiplié par la densité

Notons également que la présence d'un produit scalaire est importante : ainsi, dans l'exemple précédent, si on choisit une surface perpendiculaire au sens du courant, le flux est évidemment nul.

### 2.1.3 Intégrales volumiques

En généralisant toujours, il est possible d'intégrer un champ quelconque sur un volume donné  $\mathcal{V}$ .

Par exemple, pour un corps de masse volumique ou densité  $\rho(\vec{r})$  (pouvant varier avec la position) la masse totale du corps contenue dans le volume  $\mathcal{V}$  vaut

$$M = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Remarquons (ce qui arrive fréquemment en physique) que si la densité est constante elle sort de l'intégrale et nous arrivons simplement à

$$M = \rho \mathcal{V}$$

résultat connu depuis longtemps.

Nous donnons un peu plus bas les éléments de volume, longueur et de surface et la méthode de calcul de ces intégrales.

### 2.1.4 Courbes et surfaces fermées

Dans le cas d'une intégration sur une courbe ou une surface fermée (au sens topologique, "sans trous") il est de tradition de remplacer les bornes de l'intégration par un rond en travers du symbole intégrale.

Par exemple, la circulation  $C$  d'un champ sur une courbe fermée  $C$  sera notée

$$C = \oint_C \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

le flux  $\Phi$  d'un champ sur une surface fermée  $S$  (enserrant un volume)

$$\Phi = \oiint_S \vec{A}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}(\vec{r})$$

## 2.2 Systèmes de coordonnées

La méthode de calcul des intégrales linéiques, surfaciques ou volumiques dépend du système de coordonnées employées. Le système le plus général est celui des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  mais on verra que suivant les symétries du système on aura intérêt à employer d'autres systèmes de coordonnées comme les cylindriques ou les sphériques.

### 2.2.1 Coordonnées curvilignes

Dans le cas d'une intégration le long d'une courbe (calcul d'une circulation) entre deux points  $A$  et  $B$ , si cette courbe est paramétrée par trois fonctions  $C_x(t), C_y(t), C_z(t)$

en fonction d'un paramètre quelconque  $t$  (par exemple le temps définissant la position d'un mobile) l'élément de longueur correspond à la direction du vecteur tangent à la courbe exprimé en fonction de l'abscisse curviligne  $s(t)$ . Cette dernière, correspondant à la distance parcourue par le mobile par exemple, est obtenue par

$$s = \int_A^t \|\vec{T}(t')\| dt'$$

où  $\vec{T}$  est le vecteur tangent à la courbe

$$T_x(t) = \frac{dC_x}{dt}(t)$$

$$T_y(t) = \frac{dC_y}{dt}(t)$$

$$T_z(t) = \frac{dC_z}{dt}(t)$$

(dans le cas du mobile le vecteur vitesse).

Pour résumer, il faut donc dans l'ordre calculer le vecteur vitesse, sa norme, intégrer ce résultat pour obtenir l'abscisse curviligne  $s$ , prendre la réciproque (si elle existe) de la formule obtenue pour trouver  $t$  en fonction de  $s$ , et enfin ré-exprimer  $\vec{T}$  en fonction de  $s$  puis le normaliser.

En pratique on rencontrera surtout deux cas : la droite pour laquelle par exemple

$$C_x(t) = at$$

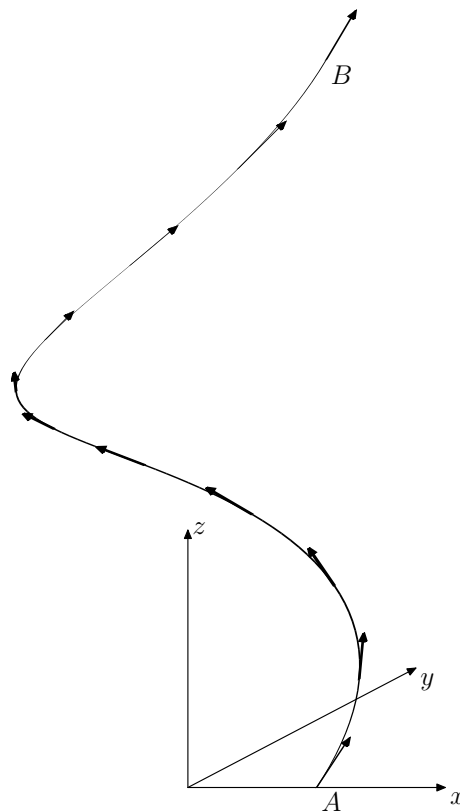


FIG. 2.4 – Lacet gauche

$$C_y(t) = 0$$

$$C_z(t) = 0$$

puisque nous pouvons orienter arbitrairement notre système de coordonnées en l'absence d'autres contraintes  
on obtient donc

$$T_x(t) = \frac{dC_x}{dt}(t) = a$$

$$T_y(t) = \frac{dC_y}{dt}(t) = 0$$

$$T_z(t) = \frac{dC_z}{dt}(t) = 0$$

puis

$$s = \int_A^t \|\vec{T}(t')\| dt'$$

donc trivialement

$$s = at$$

$$t = \frac{s}{a}$$

et enfin

$$T_x(s) = \frac{dC_x}{ds}(s) = \frac{dC_x}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{a}{a} = 1$$

$$T_y(s) = \frac{dC_y}{ds}(s) = 0$$

$$T_z(s) = \frac{dC_z}{ds}(s) = 0$$

donc ce vecteur est bien normalisé à 1 et sa direction est celle que nous attendions.

Dans le cas du cercle en deux dimensions on peut prendre

$$C_x(t) = r \cos \omega t$$

$$C_y(t) = r \sin \omega t$$

$$C_z(t) = 0$$

on obtient donc

$$T_x(t) = \frac{dC_x}{dt}(t) = -r\omega \sin \omega t$$

$$T_y(t) = \frac{dC_y}{dt}(t) = r\omega \cos \omega t$$

$$T_z(t) = \frac{dC_z}{dt}(t) = 0$$

puis

$$s = \int_A^t \|\vec{T}(t')\| dt'$$

donc

$$s = \int_A^t \sqrt{r^2 \omega^2 \sin^2 \omega t' + r^2 \omega^2 \cos^2 \omega t'} dt'$$

$$s = r\omega t$$

$$t = \frac{s}{\omega r}$$

et enfin

$$T_x(s) = \frac{dC_x}{ds}(s) = \frac{dC_x}{dt} \frac{dt}{ds} = -\sin \frac{s}{r}$$

$$T_y(s) = \frac{dC_y}{ds}(s) = \cos \frac{s}{r}$$

$$T_z(s) = \frac{dC_z}{ds}(s) = 0$$

donc là encore ce vecteur est bien normalisé à 1 et sa direction orthoradiale est celle que nous attendions.

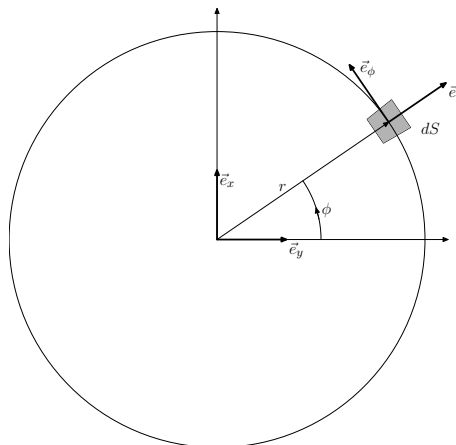


FIG. 2.5 – Vecteur vitesse tangent au cercle de rayon  $r$  parcouru à vitesse constante



### 2.2.2 Rappels sur les coordonnées polaires, sphériques et cylindriques

Le paragraphe précédent nous montre que dans le cas du cercle, il peut être avantageux de travailler dans d'autres systèmes de coordonnées que les cartésiennes orthonormées directes traditionnelles. En fait, nous verrons que les coordonnées cartésiennes servent surtout en physique à traiter les cas généraux, les cas mono-dimensionnels, ou à établir des relations, mais souvent les problèmes étudiés présentent des symétries telles qu'il vaudra mieux se placer en coordonnées de type polaire.

À deux dimensions on repère un point  $M$  par sa distance  $r$  à l'origine  $O$  et par l'angle  $\phi$  que fait le vecteur  $\vec{OM}$  avec le vecteur  $\vec{e}_x$  d'une base cartésienne de référence.

Dans ce cas on a  $\vec{OM} = r\vec{e}_r$  où  $\vec{e}_r$  est dit vecteur radial, et le vecteur  $\vec{e}_\phi$  obtenu après une rotation de  $+\frac{\pi}{2}$  qui lui est orthogonal est dit vecteur orthoradial, c'est celui que nous avons trouvé par le calcul comme élément de longueur à la question précédente.

On obtient ainsi par exemple dans ce système de coordonnées la longueur  $L$  (ou périmètre) du cercle par intégration. Le paramètre valant  $\phi$  on trouve

$$C_x(t) = r \cos \phi$$

$$C_y(t) = r \sin \phi$$

$$C_z(t) = 0$$

et

$$L = \int_0^{2\pi} \|\vec{T}(\phi)\| d\phi$$

donc comme au paragraphe précédent (en plus simple)

$$T_x(t) = \frac{dC_x}{d\phi}(\phi) = -r \sin \phi$$

$$T_y(t) = \frac{dC_y}{d\phi}(\phi) = r \cos \phi$$

$$T_z(t) = \frac{dC_z}{d\phi}(\phi) = 0$$

puis

$$L = \int_0^{2\pi} \|\vec{T}(\phi)\| d\phi$$

donc

$$L = 2\pi r$$

résultat que nous attendions.

Dans la suite nous noterons  $d\vec{l} = \vec{T}d\phi$ .

Il y a deux façons de passer à trois dimensions : soit on reprend la coordonnée  $z$  des cartésiennes et on obtient le système de coordonnées appelées cylindriques,  $\rho$  notant désormais la distance à l'origine de la projection  $M'$  de  $M$  sur le plan  $xOy$ , soit on introduit l'angle  $\theta$  (colatitude) du vecteur  $\vec{OM}$  avec le vecteur  $\vec{e}_z$  et l'on obtient les coordonnées dites sphériques. Le nom de ces différents systèmes de coordonnées doit vous donner une idée du type de situation où elles sont le plus pertinentes. Par exemple sur Terre on repère les mobiles par leur altitude (correspondant à  $r$ ) et par leur latitude et longitude.

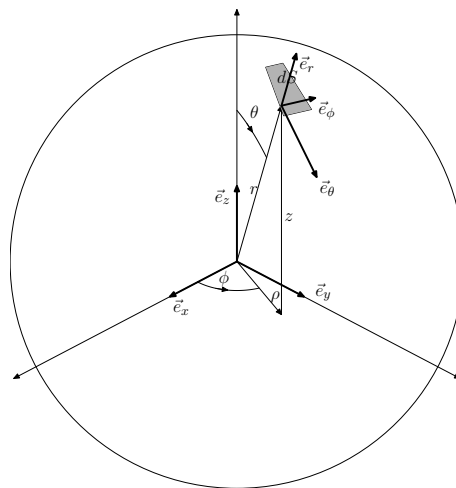


FIG. 2.6 – Coordonnées sphériques

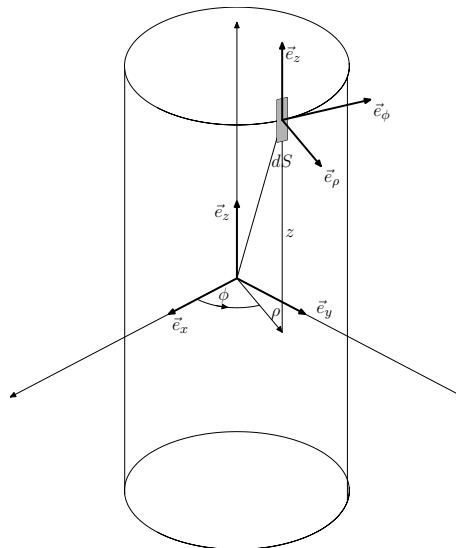


FIG. 2.7 – Coordonnées cylindriques

### 2.2.3 Éléments de surface et volume

Dans le paragraphe précédent nous avons vu comment trouver l'élément de longueur dans un système de coordonnées arbitraires curvilignes. Ceci nous a permis de calculer des circulations.

De même pour calculer des flux ou des intégrales volumiques il nous faut transformer les coordonnées cartésiennes dans les nouveaux systèmes de coordonnées.

Ainsi pour calculer la surface  $S$  d'un carré de côté  $a$  en cartésiennes (sans doute le cas le plus simple)

on écrit en général en se plaçant dans un système de coordonnées approprié

$$S = \int_{x=0}^{x=a} \int_{y=0}^{y=a} dx dy$$

et en choisissant par exemple d'intégrer d'abord sur  $y$

$$S = \int_{x=0}^{x=a} dx \int_{y=0}^{y=a} dy$$

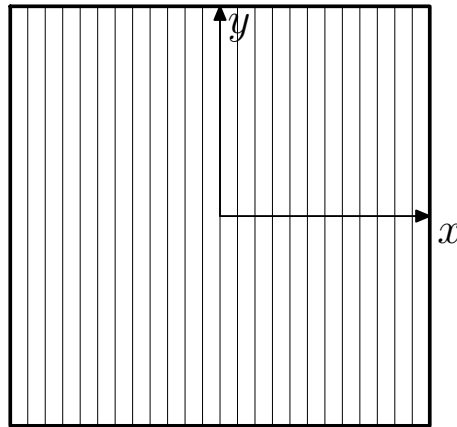


FIG. 2.8 – Intégration sur la surface d'un carré en choisissant un sens de parcours

$$S = a^2$$

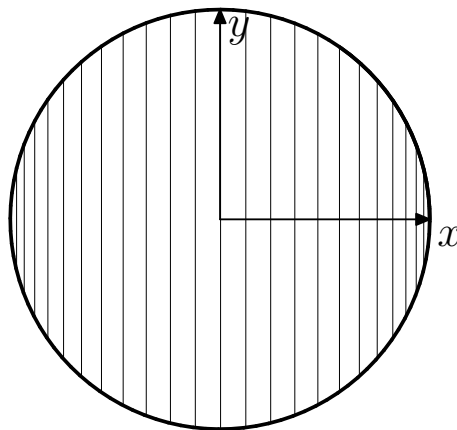


FIG. 2.9 – Intégration sur la surface d'un cercle en choisissant un sens de parcours

Par contre si nous envisageons de même de calculer la surface d'un cercle de rayon  $r$  la situation se complique fortement car si nous choisissons d'intégrer par exemple d'abord sur  $y$  les bornes d'intégration varient avec la position  $x$

$$S = \int_{x=-r}^{x=r} dx \int_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{y=\sqrt{r^2-x^2}} dy$$

$$S = \int_{x=-r}^{x=r} 2\sqrt{r^2-x^2} dx$$

en faisant le changement de variable  $x = r \cos \theta$

$$dx = -r \sin \theta$$

$$S = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} 2r^2 \sin^2 \theta d\theta$$

en linéarisant  $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$  on a

$$S = r^2(\theta - \sin 2\theta) \Big|_0^\pi$$

$$S = \pi r^2$$

Reconnaissons que cette méthode est un peu compliquée et qu'elle nous a obligés de toute façon à introduire une variable trigonométrique.

Si désormais nous passons en coordonnées polaires  $(r, \phi)$  pour le cercle

$$S = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{r'=0}^{r'=r} dS$$

On peut montrer mathématiquement que l'élément de surface  $dS$  est égal au déterminant de la matrice dite jacobienne, formée des dérivées des anciennes coordonnées par rapport aux nouvelles. Ce déterminant est égal à la norme du produit vectoriel des dérivées partielles des fonctions paramétrisant la surface.

Ainsi comme

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi$$

$$dS = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} d\phi dr = rd\phi dr$$

graphiquement on peut voir cet élément comme un petit carré tangent au cercle de dimensions longitudinales  $dr$  suivant  $\vec{e}_r$  et  $rd\phi$  suivant  $\vec{e}_\phi$

finale

$$S = \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{r'=0}^{r'=r} rd\phi dr = 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^r = \pi r^2$$

**Notons bien que dans tous les cas l'élément de surface  $dS$  est bien homogène à une surface car par exemple  $dr$  est homogène à une longueur.**

**Notons également que vectoriellement l'élément de surface  $\vec{dS}$  est normal à la surface  $S$  et de préférence, par convention, orienté vers l'extérieur de la surface s'il y en a un pour une surface fermée. Pour une surface ouverte dans l'espace direct, la règle du tire-bouchon (de droitier) donne à partir d'un choix du sens de parcours du périmètre de la surface l'orientation algébrique de celle-ci. En pratique nous ne rencontrerons jamais ce problème.**

De même si nous passons au calcul de volumes, sauf sur les parallélépipèdes l'intégration en cartésiennes peut être très pénible si nous extrapolons à une dimension supplémentaire les difficultés que nous avons eues dans l'exemple précédent.

Par contre dans les systèmes de coordonnées adaptées à la forme de l'objet l'intégration sera plus aisée. Retenons l'expression de l'élément de volume en cartésiennes

$$dV = dx dy dz$$

la procédure de calcul d'une intégrale volumique étant la même que pour le calcul d'une intégrale surfacique : intégration entre les bornes définissant l'objet suivant trois directions successives.

En cylindriques on déduit facilement l'élément de volume du cas bidimensionnel des coordonnées polaires

$$dV = r dr d\phi dz$$

(cube élémentaire de hauteur  $dz$ )

par contre en sphériques il faut de nouveau calculer le déterminant de la matrice jacobienne des dérivées partielles et on trouve

$$dV = \sin \theta r^2 dr d\theta d\phi$$

En effet sur la sphère la taille d'un cercle contenu dans un plan orthogonal à  $Oz$  (plan horizontal) diminue avec la latitude.

On en déduit l'élément de surface de la sphère dans ces coordonnées

$$dS = \sin \theta r^2 d\theta d\phi$$

ou vectoriellement

$$\vec{dS} = \sin \theta r^2 d\theta d\phi \vec{e}_r$$

et grâce à ces deux relations nous pouvons retrouver surface  $S$  et volume  $V$  d'une sphère

$$S = \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \sin \theta r^2 dr d\theta d\phi$$

$$S = 4\pi r^2$$

$$V = \int_{\theta=-\pi}^{\theta=\pi} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_{r'=0}^{r'=r} \sin \theta r^2 dr d\theta d\phi$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

résultats que nous connaissions depuis longtemps en principe.

## 2.3 Analyse vectorielle

Après avoir vu comment il était possible d'intégrer des champs suivant une ligne, une surface ou un volume nous allons voir comment il est possible de leur appliquer des opérateurs différentiels.

### 2.3.1 Différentielle

Rappelons tout d'abord ce que l'on entend en physique par différentielle  $df$  d'un champ scalaire  $f(x, y, z)$  (par exemple le potentiel électrique  $V$ ).

Il s'agit d'un nouveau champ  $df$  qui fait correspondre à trois nouveaux réels  $dx, dy, dz$  la valeur

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

où les  $\partial$  dénotent les dérivées partielles de  $f$  par rapport à chacune des variables  $x, y, z$ , calculées en ces mêmes points  $x, y, z$ .

Par exemple si  $f = x + y^2 + z^3$  alors

$$df = dx + 2y dy + 3z^2 dz$$

Ce champ correspond au premier ordre à la variation de  $f$  autour du point de coordonnées  $x, y, z$  si ces mêmes coordonnées s'accroissent de  $dx, dy, dz$  respectivement.

Si on a affaire à un extremum du champ  $df$  est nul. Seules les dérivées secondes pourront cependant nous dire si nous n'avons pas affaire à un point selle, col, à un maximum ou un minimum local.

### 2.3.2 Gradient

On peut facilement résumer le sens de variation du champ  $f$  en introduisant un vecteur  $\vec{\text{grad}}f(x,y,z)$  dit gradient de la fonction et tel que

$$df = \vec{\text{grad}}f \cdot d\vec{l}$$

avec  $d\vec{l} = (dx, dy, dz)$  l'élément de longueur au point  $x, y, z$ .

Ainsi  $\vec{\text{grad}}f$  a pour coordonnées  $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$

Remarquons que la "flèche du gradient" nous donne le sens de variation de la fonction  $f$ , à l'opposé des puits de potentiel par exemple

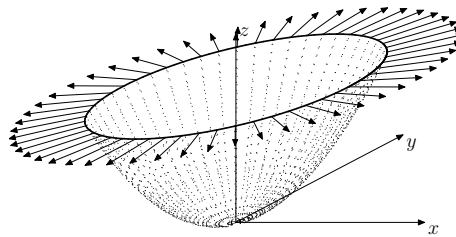


FIG. 2.10 – Exemple de cuvette de potentiel et du gradient correspondant

Remarquons également que si nous calculons la circulation  $C$  du gradient le long d'une courbe  $C$  entre deux points  $A$  et  $B$  nous trouvons

$$C = \int_A^B \vec{\text{grad}}f \cdot d\vec{l} = \int_A^B df = f(B) - f(A)$$

résultat à rapprocher de celui obtenu en mécanique sur le travail d'une force conservative (dérivant d'un potentiel). Ainsi la gravité dérive du potentiel  $V = mgz$  par  $\vec{P} = -\vec{\text{grad}}V = -mg\vec{e}_z$  et "pointe vers le bas"  $k$ ; son travail ne dépend pas du chemin parcouru.

De même pour le champ électrique qui dérive du potentiel selon

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$$

### 2.3.3 Symbole nabla

Pour simplifier ces écritures il est de tradition d'introduire le symbole dit "nabla" noté  $\vec{\nabla}$  qui est simplement un moyen mnémotechnique pour retrouver les expressions des opérateurs vectoriels.

Le "vecteur nabla" a ainsi pour coordonnées

$$\vec{\nabla} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

et le gradient du champ  $f$  vaut ainsi

$$\vec{\text{grad}}f = \vec{\nabla}f$$

L'introduction du symbole nabla va nous permettre de manipuler plus facilement les dérivées partielles d'un champ vectoriel (pour le moment nous n'avons considéré, dans le cas du gradient, qu'un champ scalaire).

### 2.3.4 Divergence

Ainsi, si nous considérons un champ vectoriel tridimensionnel  $\vec{E}$  (typiquement, le champ électrique ou le champ magnétique) nous pouvons calculer une quantité appelée divergence du champ définie par

$$\operatorname{div}\vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

La divergence comme son nom l'indique nous permettra de savoir, si elle est non nulle, à quel endroit le champ "diverge" : par exemple, le champ électrique créé par une charge localisée n'a une divergence non nulle que dans la région de l'espace occupée par la charge.

En mécanique des fluides, cela correspondrait par exemple à un point d'injection de fluide.

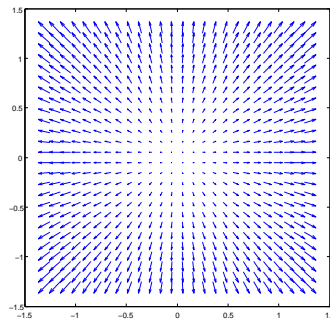


FIG. 2.11 – Cartographie bidimensionnelle du champ créé par une charge localisée ; la divergence est non nulle dans la région occupée par la charge

### 2.3.5 Rotationnel

Dans le paragraphe précédent, nous n'avons envisagé que les dérivées partielles de chaque composante du champ par rapport à la variable d'espace correspondante.

Ceci dit chacune des composantes du champ vectoriel constitue un champ scalaire et a "parfaitement le droit" de dépendre des autres coordonnées ; par exemple  $E_x$  peut dépendre de  $y$  et de  $z$ .

L'opérateur rotationnel va nous permettre d'exploiter ces variations non prises en compte dans la divergence.

Ainsi on associe à un champ vectoriel  $\vec{B}$  (typiquement le champ magnétique) un nouveau champ vectoriel appelé rotationnel de  $\vec{B}$  et défini par

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$$

où  $\wedge$  dénote le produit vectoriel.

Remarquons que le rotationnel va donc dépendre de l'orientation de l'espace choisie ("règle de la main droite" ou non). Nous reviendrons sur ce point qui a d'importantes conséquences.

Le rotationnel comme son nom l'indique nous permettra de savoir à quel endroit le champ tourne autour d'une de ses sources. Ainsi le champ magnétique tourne autour des courants localisés, à l'endroit desquels son rotationnel est non nul, et en mécanique des fluides une tornade présente des vitesses qui tournent autour de leur source.

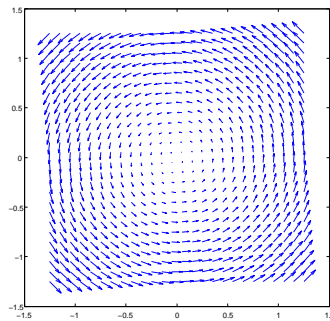


FIG. 2.12 – Cartographie du champ magnétique créé par une source de courant localisée ; le rotationnel est non nul à l'intérieur de la source

### 2.3.6 Laplacien

Nous pouvons aller plus loin que dans les paragraphes précédents et passer à des opérateurs faisant intervenir des dérivées secondes. Par exemple, l'opérateur dit Laplacien est noté par le symbole  $\Delta$  (deux fois  $\nabla$ ) défini sur un champ scalaire  $V$  (typiquement le potentiel électrique) par

$$\Delta V = \operatorname{div} \vec{\operatorname{grad}} V = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Cet opérateur, comme nous le verrons plus tard, permet de relier le potentiel à ses sources.

### 2.3.7 Laplacien vecteur

Cet opérateur Laplacien peut également s'appliquer à des champs vectoriels ; ainsi pour un champ  $\vec{A}$  (typiquement le potentiel vecteur du champ magnétique) on aura un vecteur à trois composantes égales au Laplacien de celles-ci

$$\Delta \vec{A} = (\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z)$$

Là encore le Laplacien permet de relier le champ à ses sources.



### 2.3.8 Systèmes de coordonnées non cartésiens

Ces différents opérateurs (gradient, divergence, rotationnel, laplacien) changent d'expression en fonction du système de coordonnées employé.

Ainsi en coordonnées cylindriques, le rotationnel d'un vecteur  $\vec{A}$  dont les trois coordonnées  $(A_r, A_\phi, A_z)$  dépendent chacune de  $(r, \phi, z)$  vaut

$$\text{rot}\vec{A} = \vec{e}_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) + \vec{e}_\phi \left( \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) + \vec{e}_z \left( \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \right)$$

Le lecteur est encouragé à consulter un formulaire ; la plupart du temps dans les examens les formules correspondantes sont données.

### 2.3.9 Algèbre des opérateurs vectoriels

De même, on peut combiner de façon assez riche les différents opérateurs vectoriels, un peu comme les formules qu'il est possible d'établir sur la dérivée d'un produit de fonctions.

Là encore le lecteur est encouragé à consulter un formulaire, sauf pour la formule suivante qui nous servira maintes fois dans la suite :

$$\text{rot}\text{rot}\vec{A} = \text{grad}\text{div}\vec{A} - \Delta\vec{A}$$

## 2.4 Formule de Green-Ostrogradski

Désormais équipés aussi bien des outils d'intégration que de dérivation des champs vectoriels, nous pouvons envisager des relations entre ces différents opérateurs (un peu comme pour la formule de l'intégration par parties).

Par exemple si nous considérons une surface fermée  $S$  enserrant un volume  $V$  on peut établir la formule suivante (formule de Green-Ostrogradski) pour un champ vectoriel  $\vec{E}$  (typiquement le champ électrique)

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}\vec{E} dV$$

Remarquons que l'homogénéité vectorielle est respectée, de même que l'homogénéité dimensionnelle (une dérivée a la dimension de la grandeur divisée par une distance). Ce n'est pas une preuve de la formule mais c'est encourageant !

Les physiciens ont l'habitude de "démontrer" la formule de la façon suivante : d'abord, en décomposant le volume  $V$  en petits cubes élémentaires  $dV = dx dy dz$  de surface  $S$ .

Ensuite en prenant le membre de droite de la formule

$$\begin{aligned} \iiint_{dV} \text{div}\vec{E} dx dy dz &\approx \text{div}\vec{E} dx dy dz \\ &= \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

pour le membre de gauche

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \approx -E_x(x, y, z) dy dz + E_x(x + dx, y, z) dy dz + \dots$$

en sommant sur les six faces du petit cube, en respectant l'orientation, (normales sortantes), et en se limitant au premier ordre

$$-E_x(x, y, z) dy dz + E_x(x + dx, y, z) dy dz = \frac{\partial E_x}{\partial x} dx dy dz$$

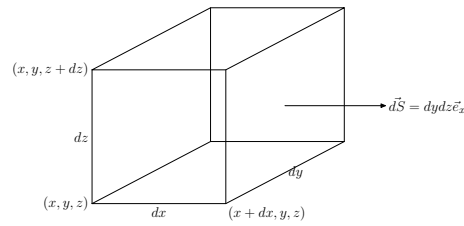


FIG. 2.13 – Cube élémentaire employé pour la "démonstration" de la formule de Green-Ostrogradski ou théorème de la divergence

On voit donc en répétant la procédure pour  $y$  et  $z$  que localement les membres de gauche et de droite des formules sont égaux.

En sommant sur l'ensemble du volume  $V$  étudié, il ne reste finalement que les faces extérieures des petits cubes  $dx dy dz$  et on obtient bien la formule dite de Green-Ostrogradski.

Cette formule nous sera utile pour établir la forme locale du théorème de Gauss.

## 2.5 Formule de Stokes

De même en utilisant le rotationnel on peut établir la formule suivante, dite formule de Stokes, pour un champ vectoriel  $\vec{B}$  (typiquement le champ magnétique), et un contour  $C$  entourant une surface  $S$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Là encore l'homogénéité vectorielle comme dimensionnelle de cette formule est vérifiée, et on peut la "démontrer" en découpant la surface  $S$  en petits carrés élémentaires  $dx dy$  et en établissant la circulation (membre de gauche) en quatre termes approchés au premier ordre.

Cette formule nous sera utile pour établir la forme locale du théorème d'Ampère.

## Chapitre 3

# Formes locales de l'électrostatique et de la magnéto-statique

À l'aide des outils mathématiques définis au chapitre précédent, nous pouvons désormais établir des équations locales pour l'électrostatique et la magnéto-statique.

### 3.1 Rappels d'électrostatique et magnéto-statique

Cependant, commençons par rappeler les principaux résultats des cours fondamentaux d'électromagnétisme. Nous allons donner dans la mesure du possible une présentation unifiée de l'électrostatique et de la magnéto-statique, on verra que ces deux sous-disciplines ne diffèrent que par les symétries et le caractère intrinsèque ou non des champs considérés.

#### 3.1.1 Causes et effets, force de Lorentz

Le champ électrostatique  $\vec{E}$  est causé par la présence d'une distribution de charges électriques  $q_i$  immobiles, et se manifeste par la force qu'il exerce sur une charge électrique test  $q$ . En effet, cette force peut agir sur un dynamomètre ou perturber le mouvement mesurable de la charge  $q$

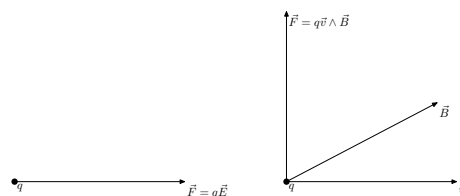


FIG. 3.1 – Nuage de charges ponctuelles subissant une force de Lorentz

Ainsi la charge  $q$  ressent-elle une force  $\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r})$  où  $\vec{r}$  est le vecteur position de la charge  $q$ .

De même, le champ magnéto-statique  $\vec{B}$  est causé par la présence d'une distribution de courants statiques (c'est à dire de charges électriques en mouvement stationnaire), et se manifeste par la force  $\vec{F}$  dite force de Lorentz qu'il exerce sur une charge  $q$  se mouvant à la vitesse  $\vec{v}$  dans le laboratoire.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

On voit donc qu'il y a une correction par rapport à l'expression précédente. On peut mettre en évidence cette force en observant la trajectoire d'électrons dans un tube à vide partiel : c'est le principe des tubes cathodiques, diodes, triodes dits "à tubes ou à lampes", cyclotrons, synchrotrons, etc, le champ électrique permettant d'accélérer les électrons et le champ magnétique de les dévier afin par exemple de leur faire décrire un cercle et de les faire repasser par les électrodes accélératrices un grand nombre de fois.

Remarquons d'ailleurs que le champ magnétique crée une force toujours orthogonale au sens du mouvement, donc qui ne travaille pas ; c'est finalement peu surprenant pour une force issue d'un champ qui est surtout un artifice mathématique et qui n'a pas de réalité physique intrinsèque. Vous en saurez plus à ce sujet dans le cours de relativité restreinte mais dans le paragraphe suivant nous allons esquisser les causes de ce paradoxe.

### 3.1.2 Aspect relativiste du champ magnétique

Souvent on trouve les problèmes de magnéto-statique plus compliqués à résoudre que ceux d'électrostatique bien que le formalisme soit très proche pour les deux problèmes. À mon avis ceci est dû au caractère relativiste et non intrinsèque qui est caché dans la magnéto-statique.

L'électrostatique est en effet strictement la même quel que soit le référentiel choisi, du moins tant que les vitesses d'éventuels mobiles sont petits par rapport à la vitesse de la lumière.

Par contre, on voit dans la force de Lorentz que le choix du référentiel d'étude peut faire varier la vitesse de la charge par transformation de Galilée, et donc la valeur de la force subie par la charge ! Cet effet est compensé par la transformation inverse subie par les courants et donc la valeur du champ magnétique, mais il est pour le moins paradoxal. De même le choix de l'orientation de l'espace va jouer sur le résultat du produit vectoriel et de même sur la force subie par la particule. Cet effet est également compensé par le changement de signe du champ magnétique dans ce cas, comme nous le verrons dans le paragraphe consacré à la loi de Biot et Savart, mais là encore nous voyons que le champ magnétique n'est pas une propriété intrinsèque du système étudié mais simplement un artifice mathématique nous permettant de calculer la force subie par la particule, qui, elle, a une réalité observable et doit donc être indépendante du référentiel et de l'orientation choisie.

### 3.1.3 Distributions de charges et de courants

On peut passer d'une distribution de charges discrètes  $q_i$  dans l'espace (correspondant typiquement à des noyaux chargés positivement et aux électrons négatifs les entourant) à une distribution continue de charges  $\rho(\vec{r})$  en moyennant sur un petit volume  $dV$ , petit face aux dimensions d'un problème typique étudié mais grand face aux dimensions atomiques.

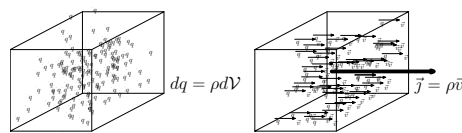


FIG. 3.2 – Distribution de charges ponctuelles en mouvement créant une densité continue de charges et de courants

Alors la charge  $dq$  contenue dans le petit volume vaudra

$$dq = \sum_i q_i = \rho(\vec{r})dV$$

avec  $\rho$  la densité de charges, champ scalaire dépendant de la position. Ce champ est tout à fait analogue à une densité ou masse volumique dépendant de la position et moyennant sur les masses des atomes.

De même, si les charges  $q_i$  sont en mouvement avec une vitesse  $\vec{v}_i$ , on définit le courant élémentaire comme

$$\vec{j}_i = q_i \vec{v}_i$$

et la densité de courant dans le petit volume par

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

où  $\vec{v}$  est la vitesse moyenne des charges  $q_i$ .

En principe il faudrait de plus sommer sur toutes les espèces de porteurs de charges présentes (ions et électrons). En physique nous nous limiterons au cas de charges constituées d'électrons uniquement, sauf dans les problèmes traitant de plasmas.

Ces distributions de charges ou de courants peuvent être quasi-mono-dimensionnelles (cas d'un fil mince), quasi-bidimensionnelles (cas d'une surface mince). Dans ces cas on aura intérêt à définir des densités de charges ou de courants linéiques ou surfaciques, en intégrant sur les dimensions non pertinentes. Ainsi on définit la densité de charges  $\sigma$  d'une surface en écrivant que

$$dq = \rho dx dy dz = \sigma dx dy$$

en supposant que la surface est mince suivant la direction  $z$  et ne présente pas de variations intéressantes de densité.

De même on définit la densité de charges linéiques  $\lambda$  pour un fil

$$dq = \rho dx dy dz = \lambda dx$$

en supposant que les seules variations sont suivant  $x$ , la densité surfacique de courant  $\vec{j}_S$  par

$$\vec{j}_S = \vec{j} dz$$

en supposant qu'il n'y a pas de variation suivant  $z$  et que la surface est mince.

### 3.1.4 Définition de l'intensité

Si maintenant nous revenons à la définition de l'intensité électrique

$$I = \frac{dq}{dt}$$

si nous considérons un tube de courant élémentaire de volume  $dV$  parcouru par des charges  $dq$  à la vitesse  $v$  alors

$$dq = \rho dV$$

or nous pouvons considérer que le volume  $dV$  vaut à peu près  $dS v dt$   
donc

$$dq = \rho v dt dS$$

et l'intensité  $dI$  passant à travers la surface du tube de courant élémentaire vaut

$$dI = \rho v dS = \vec{j} \cdot \vec{dS}$$

finalement l'intensité passant à travers une surface macroscopique  $S$  vaut

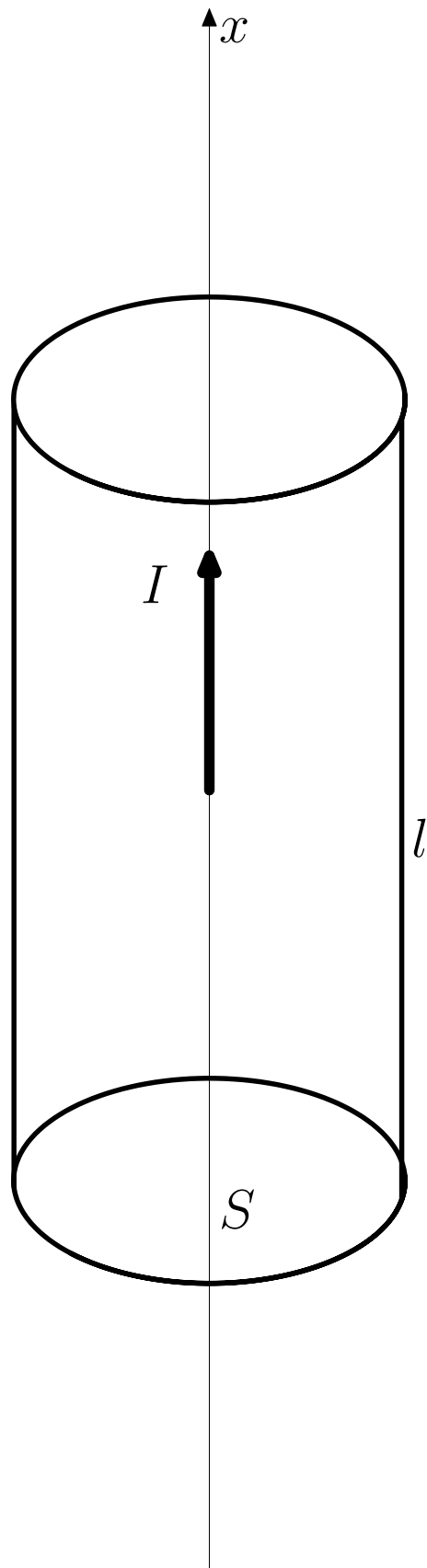


FIG. 3.3 – Tube de courant élémentaire

$$I = \int \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

un peu comme en calculant le débit d'une rivière en fonction de la vitesse de l'eau et de la surface transversale de la rivière on se rend compte que pour augmenter le débit il faut soit augmenter la vitesse, soit augmenter la surface.

### 3.1.5 Force de Laplace

Si maintenant nous sommes par une intégrale les forces de Lorentz subies par les porteurs de charge  $dq$  dans le tube de courant de longueur  $l$  suivant  $Ox$  et de section  $S$  parcouru par un courant uniforme perpendiculaire à  $S$  et soumis à un champ électrique  $\vec{E}$  et un champ magnétique  $\vec{B}$  nous obtenons

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \int_x \int \int_S dq (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

or  $dq = \rho dV$  avec  $\rho$  la densité volumique de charges

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \int_x \int \int_S \rho dV (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

or  $\rho \vec{v} = \vec{j}$  densité volumique de courant et

$$I = \int \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

. Comme  $dV = dS dl$  il vient donc en éliminant la contribution longitudinale du champ électrique (qui n'est bien sûr là que pour accélérer les charges, sinon il n'y aurait pas de courant, mais qui est compensée par les frottements et collisions à l'échelle atomique)

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \int_x I d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

force observable macroscopiquement, traduisant les effets du champ magnétique, et nommée force de Laplace.

C'est cette force qui permet la construction des moteurs électriques, haut-parleurs électromagnétiques, canons électriques, etc.

ICI INSERER DES PHOTOS DE MOTEUR, HP, canon

ÉVENTUELLEMENT MOMENT, COUPLE, ETC

### 3.1.6 loi de Coulomb et de Biot et Savart

Ces définitions vont permettre de donner plusieurs expressions des lois de Coulomb et Biot et Savart reliant les champs à leurs causes.

En effet Coulomb a montré au dix-huitième siècle par des expériences très délicates et inspirées par la théorie newtonienne de la gravitation que la force attractive ou répulsive entre deux charges électriques  $q_1$  et  $q_2$  (exercée par la première sur la seconde) situées en  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  respectivement était proportionnelle au produit algébrique de celles-ci, était alignée sur l'axe les reliant, et variait en inverse du carré de leur distance suivant

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^3}$$

Une distance sur le cube d'une distance est bien homogène au carré d'une distance, et cette formule exprime de façon concise l'axe de la force. On vérifie bien que deux charges identiques

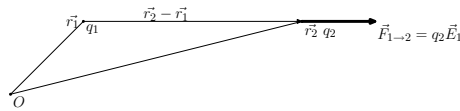


FIG. 3.4 – Force de Coulomb entre deux charges ponctuelles

se repoussent et que deux charges identiques s'attirent. Le coefficient de proportionnalité, très proche de  $9 \cdot 10^9$  en unités du système international (ce qui n'est pas anodin comme nous le verrons dans le dernier chapitre) est exprimé en fonction de la "perméabilité du vide"  $\epsilon_0$ .

On définit alors le champ électrique  $\vec{E}_1$  créé par la première charge et tel que

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \vec{E}_1$$

Remarquons que ce champ varie lui aussi en carré de la distance. Il est traditionnellement exprimé en volts par mètre car si nous introduisons le potentiel électrique  $V_1$  créé par la charge tel que

$$\vec{E}_1 = -\text{grad}V_1$$

on retrouve bien cette dimensionnalité. Le potentiel  $V_1$  vaut alors

$$V_1(\vec{r}) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_1\|}$$

et il varie en inverse de la distance à l'origine de la charge.

Les champs et potentiels électriques obéissent au principe de superposition, ce qui veut dire que le champ ou potentiel total créé par une distribution de charges  $q_i$  situées aux positions  $\vec{r}_i$  valent au point  $\vec{r}$  respectivement

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|^3}$$

$$V(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_i\|}$$

Si maintenant nous passons à une distribution continue de charges, il suffit de remplacer (par une procédure mathématique non détaillée ici) les sommes par des intégrales et les charges par des densités volumiques  $\rho(\vec{r}')$  situées au point  $\vec{r}'$  de la zone de volume  $V$  où sont les charges, multipliées par des éléments de volume et on obtient

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}')dV}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$V(\vec{r}) = \int_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')dV}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

On peut montrer en prenant le rotationnel de cette expression que  $\text{rot}\vec{E} = \vec{0}$ , point sur lequel nous reviendrons.

En ce qui concerne le champ magnétique, la situation est quasiment identique à celle du champ électrique. Le magnétisme, connu depuis l'invention de la boussole par les Chinois, et étudié en Europe depuis la Renaissance (par Gilbert par exemple), était considéré un phénomène indépendant de l'électricité jusqu'à ce que, peu après l'invention de la pile électrique par Volta permettant d'obtenir de bien plus fortes intensités que celles obtenues par les machines



électrostatiques du type Wimshurst, le Danois Oersted remarque par suite du désordre régnant sur son bureau qu'un courant électrique pouvait faire dévier l'aiguille d'une boussole.

Ampère et Biot et Savart, après communication de cette information révolutionnaire pour l'époque, ont alors établi les lois quantitatives de la magnéto-statique.

La loi de Biot et Savart permet de relier les causes du champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r})$  en un point de l'espace à sa valeur. Ainsi de façon analogue à la loi de Coulomb on a

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C I(\vec{r}') \frac{d\vec{l}(\vec{r}') \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

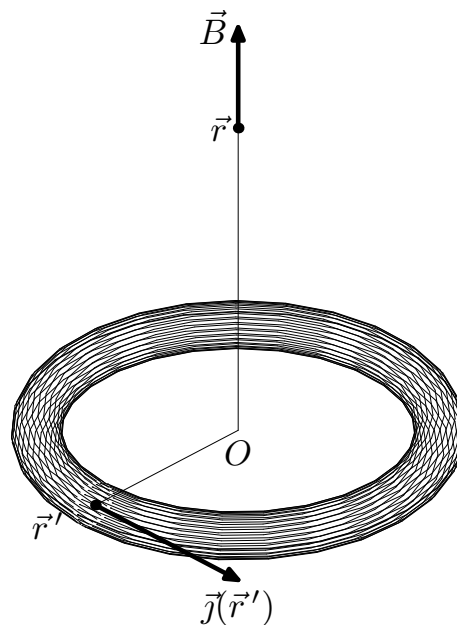


FIG. 3.5 – Boucle de courant créant un champ magnétique

l'intégration se faisant sur les circuits forcément fermés parcourus par des courants  $I$  dépendant de l'espace mais non du temps (état stationnaire mais hors d'équilibre).

On retrouve ici le produit vectoriel dont nous parlions dans les paragraphes précédents et qui implique que le choix d'orientation de l'espace influe sur le signe du résultat.

On peut déduire de ce résultat que  $\text{div} \vec{B} = 0$ , point sur lequel nous reviendrons.

En pratique, les lois de Coulomb et de Biot et Savart sont rarement employées, que ce soit dans les exercices "scolaires" ou en pratique sur ordinateur par exemple, sauf dans des cas très simples (distributions linéiques droites ou circulaires de charges et de courants) car elles nécessitent une intégration compliquée géométriquement et analytiquement pour chaque point considéré dans l'espace. Elles ont cependant l'avantage de relier directement les causes aux effets.

### 3.1.7 Courants ampériens

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu que les causes du champ magnétique étaient les courants, et que ses effets se manifestaient par des forces apparaissant sur d'autres courants.

Cependant (et même au début de ce cours) nous avons pris comme exemple de causes ou effets du champ magnétique les aimants, dans le cas de la boussole par exemple.

On est donc en droit de se demander où sont les courants dans les aimants ; à mon avis, c'est là aussi une des raisons de la difficulté apparente de la magnéto-statique par rapport à l'électrostatique. Ampère en raisonnant par analogie a supposé qu'il existait des boucles de courants locales dans les aimants ; en fait, ces boucles de courant sont constituées des électrons "tournant" autour des noyaux et créant ce que l'on appelle des moments magnétiques.

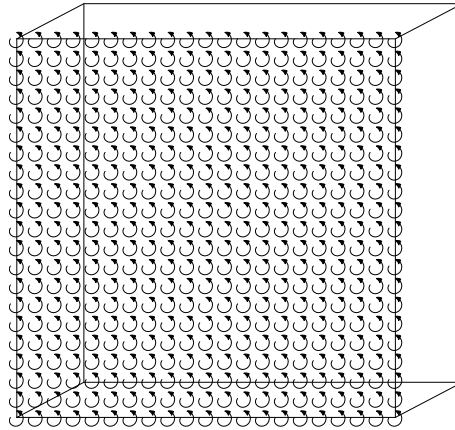


FIG. 3.6 – Principe des courants ampériens dans un barreau aimanté

Vous verrez dans le cours sur l'électromagnétisme dans la matière que toute matière est ainsi légèrement perturbée par la présence d'un champ magnétique (on a ainsi réussi à faire léviter une grenouille dans un champ magnétique très intense obtenu par des électroaimants supra-conducteurs !) mais dans certains matériaux (ferromagnétiques) les distances et interactions inter-atomiques sont telles que pour de relativement basses températures on observe une addition collective des moments et un effet macroscopique très important et mesurable : ainsi un bon aimant moderne peut-il soulever plusieurs dizaines de fois son poids.

### 3.1.8 Théorèmes de Gauss et d'Ampère

Nous avons dit dans les paragraphes précédents que les lois de Coulomb et de Biot et Savart étaient peu adaptées au calcul de champs dans des situations non-standard. Il existe en effet des formulations indirectes des relations de cause à effet dues à Gauss (pour la gravitation, mais celle-ci est formellement équivalente à l'électrostatique) et à Ampère qui sont bien plus pratiques. Ces relations démontrées dans les premiers cours d'électromagnétisme en remarquant que la définition des angles solides fait intervenir un terme en inverse du carré de la distance apparaissant dans les lois de Coulomb ou de Biot et Savart sont les suivantes : si nous considérons un volume  $V$  enserré par une surface  $S$  fermée, et que ce volume  $V$  contient (à l'exclusion de sa surface) un ensemble de charges  $q_i^{\text{intérieures}}$ , alors le flux du champ électrique créé par les charges sur la surface  $S$  est proportionnel à la charge totale présente dans le volume  $V$ . Le théorème de Gauss se formule alors

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i^{\text{intérieures}}}{\epsilon_0}$$

le facteur  $4\pi$  présent dans la loi de Coulomb disparaissant lors de l'intégration sur tous les angles solides. Il est à noter que ce théorème étant très simple, certains physiciens en particulier anglo-saxons vont jusqu'à poser  $\epsilon_0 = 1/(4\pi)$  (unités de Gauss).

De même pour le champ magnétique si nous considérons une courbe fermée  $C$  enserrant une surface  $S$  alors la circulation du champ magnétique le long de la courbe  $C$  est proportionnelle à la somme des courants traversant la surface  $S$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_s$$

là encore le facteur  $4\pi$  disparaît. En unités de Gauss par contre on prend  $\mu_0 = 4\pi c^2$  avec  $c$  célérité de la lumière.

On voit que les théorèmes de Gauss et d'Ampère peuvent nous permettre de calculer facilement les champs créés par des distributions quelconques de charges ou de courants à condition de choisir une surface ou un parcours d'intégration simple (typiquement, une sphère, un cercle, ou un cube et un carré). Les symétries du problème peuvent nous y aider.

### 3.1.9 Symétries et antisymétries des champs, lignes de champ

Le principe de Curie qui stipule pour tout phénomène que la symétrie des effets est un sous-ensemble de la symétrie des causes peut nous guider pour ce faire.

La dépendance spatiale des valeurs des champs électriques ou magnétiques sera donc obtenue par les symétries de leurs causes, respectivement charges et courants. Par exemple si le courant parcourt uniformément un fil cylindrique supposé infini d'axe  $Oz$  suivant ce même axe, alors le champ magnétique, en coordonnées cylindriques ne dépendra ni de  $z$  ni de l'angle polaire  $\phi$  vu l'invariance des causes par translation ou rotation et donc éventuellement seulement de la distance  $r$  à l'axe.

Pour la direction des champs électriques ou magnétiques, la situation est légèrement différente. En effet comme le champ électrique est un "vrai" vecteur (dit aussi contravariant), correspondant à un effet physique intrinsèque qui doit être le même dans tous les systèmes de coordonnées et quelle que soit l'orientation de l'espace, on peut montrer que ce champ électrique doit être contenu dans les plans de symétrie de ses causes et orthogonal au plan d'antisymétrie de ses causes.

Par contre, le champ magnétique dépendant du choix de l'orientation de l'espace, il est dit covariant, ou axial, et on montre qu'il est contenu dans les plans d'antisymétrie de ses causes et orthogonal aux plans de symétries de ses causes.

Ainsi, lorsqu'on calcule l'effet physique des champs sous la forme de force de Lorentz, dans les deux cas (électrique ou magnétique) la force, qui elle est intrinsèque, aura la même valeur et orientation après application des éléments de symétrie des causes.

Par exemple considérons une surface chargée d'une densité de charges telle que  $dq = \sigma dS$ , de faible épaisseur, contenue dans le plan  $xOy$ , et de dimension infinie. Tout plan orthogonal à  $xOy$  est manifestement un plan de symétrie des causes du champ électrique, et le champ électrique doit donc être contenu dans ce plan ; le champ électrique est donc orienté suivant  $Oz$  et les forces subies par une éventuelle charge  $q_1$  auront la même direction et finalement présenteront la même symétrie que les charges. Si nous considérons une charge  $q_2$  symétrique de  $q_1$  par rapport au plan  $xOy$  celle-ci subit une force  $\vec{F}$  symétrique de la précédente.

Si maintenant nous considérons dans les mêmes conditions une nappe de courant contenue dans le plan  $xOy$  et un courant  $I$  coulant dans la direction  $Ox$  par exemple, le plan  $xOz$  est plan de symétrie donc le champ magnétique lui sera orthogonal, et le plan  $yOz$  est plan d'antisymétrie donc le champ sera contenu à l'intérieur. On peut donc prévoir une direction suivant  $Oy$  pour le champ magnétique ; si maintenant nous considérons un fil électrique parallèle à  $Ox$  à une certaine distance du plan parcouru par une intensité  $I_1$  celui ci va subir une force de Laplace  $\vec{F}$  suivant  $Oz$  qui présentera bien les symétries planes des courants. Si maintenant nous considérons un fil parcouru par un courant  $I_2$  symétrique de  $I_1$  par rapport au plan  $xOy$ , le champ magnétique change de sens sur ce fil, ainsi que la force de Laplace qui a un sens conforme à l'intuition (deux fils parcourus par des courants parallèles se repoussent).

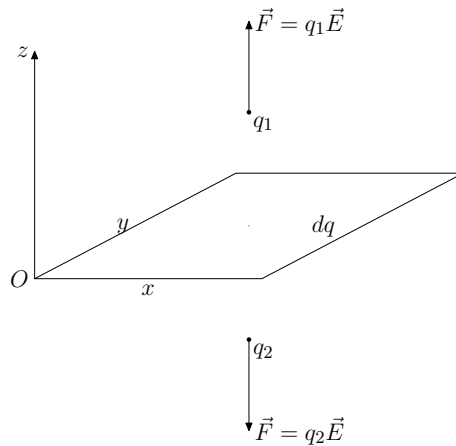


FIG. 3.7 – Symétrie de la force créée par une distribution surfacique de charge électrique

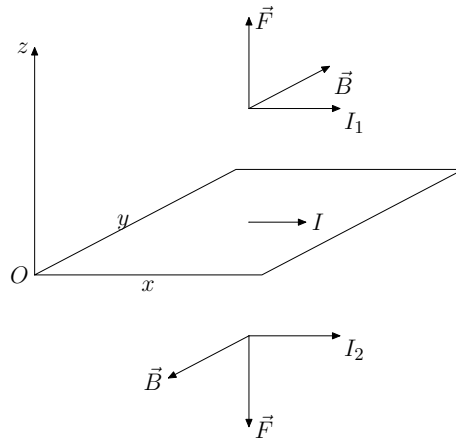


FIG. 3.8 – Symétrie de la force créée par une distribution surfacique de courant électrique

Ces considérations de symétries nous permettront en anticipant la forme des lignes de courant (les lignes sur lesquelles les champs ne varient pas, localement orthogonales aux équipotentielles), de choisir de façon pertinente les surfaces ou les parcours pour l'application des théorèmes de Gauss ou d'Ampère. Par exemple dans le cas d'un fil infini cylindrique parcouru par un courant uniforme  $I$  suivant  $Oz$ , nous avons prévu que le champ magnétique ne dépendrait que de  $r$  ; en outre les considérations de symétrie nous permettent de prévoir que le champ sera orthogonal aux plans de symétrie de ses causes, à savoir tout plan contenant le fil ; le champ sera donc orthoradial (suivant  $\vec{e}_\phi$ ) et les lignes de courant seront des cercles centrés sur l'axe du fil et orthogonaux à celui-ci. Nous prendrons donc dans le théorème d'Ampère un parcours constitué d'un cercle de rayon  $r$  et nous pouvons sortir le champ de l'intégrale vu qu'à  $r$  donné le champ est constant, et à l'extérieur du fil on aura :

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B}(r) \cdot d\vec{l} &= \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} B(r) \vec{e}_\phi \cdot r d\phi \vec{e}_\phi \\ &= 2\pi r B(r) = \mu_0 I \end{aligned}$$

et finalement

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\phi$$

Remarquons qu'à l'intérieur du fil le résultat serait différent car le membre de droite ne

serait pas constant ; ce calcul intéressant est laissé en exercice.

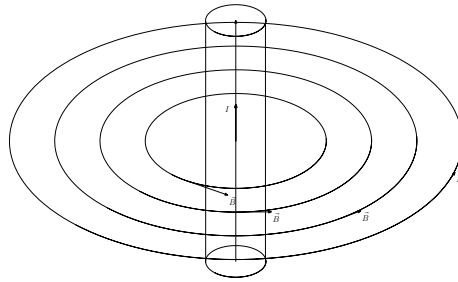


FIG. 3.9 – Lignes de champ magnétique créé par un fil infini

### 3.2 Forme locale des théorèmes de Gauss et Ampère

Vous aurez peut-être remarqué que jusqu'à présent nous n'avons fait qu'un usage modéré des outils mathématiques présentés dans la première partie du cours. Nous allons y remédier en reprenant les théorèmes de Gauss et d'Ampère et en introduisant les densités de charges et de courants : ainsi pour le théorème de Gauss

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i^{\text{intérieures}}}{\epsilon_0}$$

se transforme en

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}) dV$$

en remplaçant encore une fois les charges ponctuelles par leur densité moyenne sur un élément de volume  $dV$  et en sommant sur le volume  $V$  enserré par la surface  $S$  et contenant les charges (strictement, sans charges sur la surface).

De même pour le théorème d'Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_s$$

devient

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

en sommant sur la surface enserrée par  $C$ .

Nous souvenant des formules de Green-Ostrogradski et de Stokes, il nous vient alors une forte envie de transformer le membre de gauche de ces expressions pour obtenir

$$\iiint_V \text{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}) dV$$

et

$$\iint_S \vec{r} \text{ot} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Comme les volumes  $V$  ou les surfaces  $S$  sont quelconques, en les rendant infiniment petites nous nous rendons compte qu'il faut que les intégrandes soit égales à gauche et à droite des deux équations. On obtient donc la forme dite locale du théorème de Gauss

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

et la forme locale du théorème d'Ampère

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Nous verrons dans un chapitre ultérieur que cette expression n'est valable qu'en magnéto-statique et doit être corrigée lorsque les courants ne sont pas stationnaires (équation de Maxwell-Ampère).

En tout cas ces expressions sont particulièrement intéressantes car elles relient directement les champs à leurs sources, et comme annoncé dans la première partie du cours on voit que le champ électrique diverge autour de ses sources, et que le champ magnétique tourne autour de ses sources ; c'est particulièrement flagrant dans le cas respectivement d'une charge quasi-punctuelle, on d'un fil infini parcouru par un courant (règle du tire-bouchon ou du bonhomme d'Ampère par exemple).

### 3.3 Équation de Poisson

Si nous faisons désormais intervenir le potentiel électrique  $V$ , nous obtenons l'équation suivante : si nous posons

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V$$

comme nous venons de montrer que

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

alors

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Cette équation est dite équation de Poisson et elle relie le potentiel à ses sources. C'est cette équation qui est employée en pratique sur ordinateur pour déterminer des potentiels dans des situations arbitraires (accélérateur de particules, four micro-ondes, molécules complexes...).

Dans le cas où la charge est nulle (dans le vide par exemple) on obtient l'équation dite de Laplace

$$\Delta V = 0$$

Cette équation apparaît souvent dans d'autres sous-disciplines de la physique (thermique, etc). La plupart du temps elle permet de prévoir une dépendance linéaire du potentiel dans le vide pour raccorder deux conditions aux limites : cas des condensateurs par exemple.

En effet à une dimension on obtient

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

donc

$$\frac{dV}{dx} = a$$

avec  $a$  une constante (correspondant au champ électrique) ; puis

$$V = ax + b$$

avec  $b$  une autre constante à déterminer en fonction de conditions aux limites.

### 3.4 Flux du champ magnétique

Dans le cas du champ magnétique, on pourrait se demander si il existe une équation similaire. Cependant, et malgré de nombreuses recherches et spéculations, personne n'a encore observé de "charges" (ou monopôles) magnétiques, seulement des courants de charges électriques créant des dipôles (ou moments) magnétiques. Ainsi

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

et en considérant la formule de Green-Ostrogradski sur un tube orienté suivant  $\vec{B}$  et de surface éventuellement variable

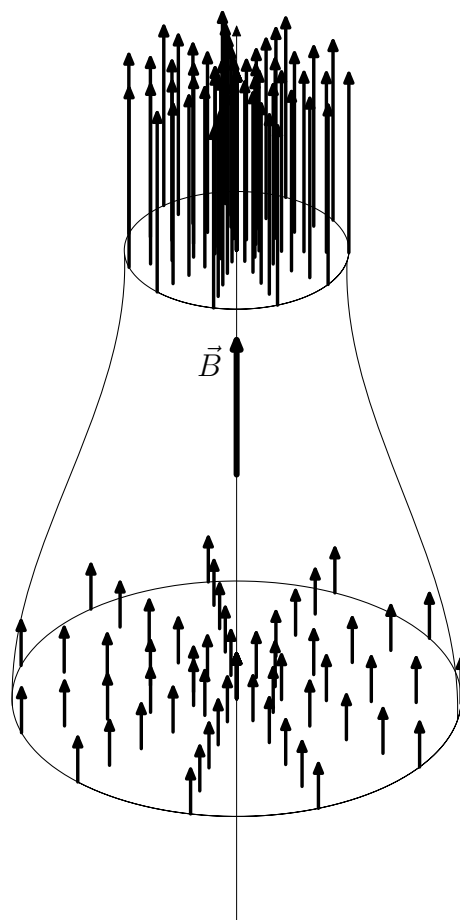


FIG. 3.10 – Tube de lignes de champ magnétique de section variable

on voit que le flux du champ magnétique à travers les surfaces entrante et sortante du tube est conservé.

Ceci nous aide à expliquer par exemple la forme des lignes de champ magnétique créé par un aimant à symétrie cylindrique :

### 3.5 Potentiel vecteur

Le lecteur pourra vérifier (en cartésiennes par exemple) que la divergence d'un rotationnel est toujours nulle. Par conséquent, vu que

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

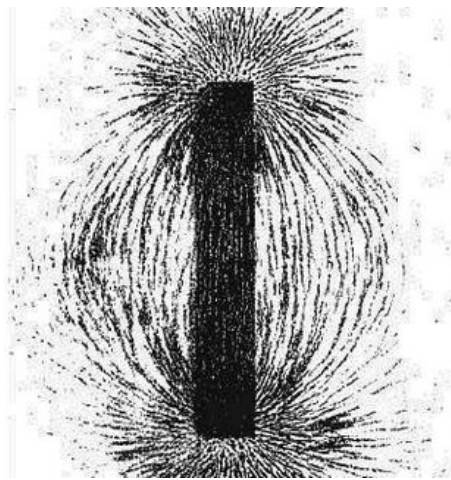


FIG. 3.11 – Lignes de champ magnétique d'un barreau aimanté, matérialisées par de la poudre d'oxyde de fer (ferrite)

il est tentant d'écrire, en analogie avec le champ électrique

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

$\vec{A}$  est appelé potentiel vecteur. Il est déterminé à une constante vectorielle près (un gradient, puisque le rotationnel d'un gradient est nul) de même que le potentiel électrique est déterminé à une constante près qui disparaît lorsqu'on en prend le gradient.

Nous verrons, de façon réciproque, qu'en électrostatique

$$\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$$

et que c'est pour cette raison qu'on peut écrire

$$\vec{E} = -\text{grad} V$$

En reprenant la forme locale du théorème d'Ampère nous obtenons de même comme

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

et

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

or si nous nous souvenons que

$$\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

vu le choix de constante que nous avons, nous pouvons prendre une constante telle que  $\text{div} \vec{A} = 0$  (choix dit jauge de Coulomb) et donc finalement

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

équation de Poisson qui relie le potentiel à ses causes.

Rappelons que pour le potentiel électrique nous avons

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$



et que d'autre part le potentiel est également relié à ses sources par la loi de Coulomb

$$V(\vec{r}) = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}')dV}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

par analogie, pour chaque composante de  $\vec{A}$  nous obtenons une équation similaire reliant le potentiel vecteur à ses sources

$$\vec{A}(\vec{r}) = \iiint_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{r}')dV}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

et en prenant le rotationnel de cette dernière expression nous retombons sur la loi de Biot et Savart, ce qui nous rassure à la fois sur la cohérence interne de l'électromagnétisme classique et sur nos capacités en calcul. Remarquons que la démonstration sans analogie nécessite des connaissances nettement plus avancées en mathématiques (théorie des distributions)

On peut remarquer que  $\vec{A}$  est obtenu directement à partir de ses causes (sans produit vectoriel) et donc qu'il est un "vrai" vecteur, intrinsèque, contravariant et donc qu'il est contenu dans les plans de symétrie de ses causes et orthogonal aux plans d'antisymétrie de ses causes. Rappelons cependant que son expression dépendra du choix de jauge (car il est défini à un gradient près) et du référentiel choisi car  $\vec{j}$  est proportionnel à la vitesse relative des charges par rapport à l'origine des coordonnées (usuellement on se place dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen).

### 3.6 Forme locale de la loi d'Ohm

Nous disposons désormais d'équations locales aussi bien pour le champ électrostatique  $\vec{E}$  que pour le champ magnétique  $\vec{B}$  mais pas de moyen de les relier entre elles.

Nous savons cependant que la présence d'un champ électrique va créer une force sur des charges présentes dans une distribution, et en l'absence de forces de rappel ces charges vont se mettre à bouger, créant un courant qui lui même va créer un champ magnétique. Si nous restons dans l'approximation des régimes stationnaires (c'est à dire des courants établis et indépendants du temps, ce qui est le cas par exemple tant qu'une pile n'est pas plate ou que nous avons bien réglé notre facture d'électricité), il est de coutume en physique de relier causes et conséquences en première approximation par un coefficient de proportionnalité. En effet, entre deux collisions avec des atomes du réseau du solide sous-jacent, qui sont approximativement équidistants, les électrons en mouvement vont être accélérés de façon constante par le champ électrique ce qui implique que leur vitesse (et donc le courant) est proportionnel au champ.

Entre densité de courant (mouvement des charges) et champ électrique, il est cependant difficile de distinguer lequel est la conséquence de l'autre, néanmoins nous pouvons donc considérer la loi suivante de proportionnalité

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

où  $\sigma$  est appelée conductivité du matériau, propriété intrinsèque à celui-ci.

Cette relation n'est pas forcément vraie, en particulier pas dans les supra ou semi-conducteurs, si le courant ou le champ sont trop grands, si la fréquence dépasse  $10^{14}$  Hz, ou dans les isolants parfaits ; néanmoins pour les métaux usuels, ou les isolants courants, elle s'applique convenablement. On peut retenir un ordre de grandeur de  $10^7$  unités du système international pour le cuivre, par exemple.

Si nous supposons que  $\sigma$  est constant sur un tube de courant de longueur  $l$  suivant  $Oz$  et de section  $S$ , et que dans ce tube le courant est parallèle à  $Oz$  et uniforme alors nous pouvons calculer l'intensité électrique totale

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

or

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V = -\frac{dV}{dz} = -\frac{V(l) - V(0)}{l}$$

puisque le courant, et donc  $\vec{E}$  sont suivant  $z$  et constants  
donc

$$I = \iint_S \sigma \frac{V(0) - V(l)}{l} \cdot d\vec{S}$$

Si nous notons  $U$  la différence de potentiel entre 0 et  $l$  (en convention française  $U = V(0) - V(l)$ ) et en employant l'hypothèse d'uniformité de la densité de courant que nous pouvons donc sortir de l'intégrale nous obtenons

$$U = \frac{l}{\sigma S} I$$

qui est une expression de la loi d'Ohm  $U = RI$  avec

$$R = \frac{l}{\sigma S}$$

résistance du tube de courant.  $\sigma$  est exprimé en S (Siemens) par mètre et vaut l'inverse de la résistivité  $\rho$ . (ne pas confondre avec la densité de charges).

Remarquons que plus le tube est long, plus sa résistance est élevée, et plus sa surface est grande, plus la résistance est petite. Ainsi les câbles de démarreur pour automobile, comme les tensions, pour des raisons historiques, sont très faibles (12V) et les puissances nécessaires importantes, sont ils de faible longueur, fort diamètre, et faits de cuivre qui est un des matériaux présentant la meilleure conductivité. Afin d'économiser en poids de cuivre, les constructeurs sont progressivement passés de 6 à 12 puis 24 et 48V récemment. L'inconvénient est que les batteries doivent disposer de plus d'éléments, le couple rédox du plomb étant d'environ 1V.

À l'échelle industrielle on élève les tensions afin de minimiser les pertes par effet Joule sur les longues distances, avec l'inconvénient d'augmenter la taille des installations : le champ électrique disruptif de l'air (celui pour lequel un éclair apparaît) ayant une certaine valeur, si on élève les tensions, il faut augmenter les distances entre électrodes pour éviter les éclairs qui endommageraient le matériel.

### 3.7 Conditions de passage et conducteurs parfaits

Jusqu'à présent, nous avons envisagé des champs soit présents dans le vide, soit créés par des distributions de charge dans le vide, indépendamment de toute considération sur des milieux matériels, considérations repoussées dans un cours ultérieur. Cependant nombre de problèmes (autour des condensateurs en particulier pour l'électrostatique, traversée de surfaces des bobines en magnéto-statique) font appel à la traversée d'interfaces entre deux milieux matériels.

Ainsi nous allons considérer une interface localement plane séparant deux milieux matériels 1 et 2, dans lesquels nous supposons les lois de l'électromagnétisme dans le vide inchangées. L'interface sera prise par commodité comme le plan  $xOy$ . Nous supposons que l'interface porte une charge surfacique  $\sigma$  et un courant surfacique  $\vec{j}$  mais qu'il n'y a pas de charges volumiques.

En effet, dans un conducteur parfait la densité de charges est nulle car si nous supposons valable la forme locale de la loi d'Ohm

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

si  $\sigma \rightarrow \infty$  pour que le produit reste fini il faut que  $\vec{E} \rightarrow \vec{0}$ . C'est l'effet dit "cage de Faraday" : le champ est nul dans un conducteur parfait, ce qui permet de s'isoler des perturbations électromagnétiques telles que la foudre par exemple.

Comme la forme locale du théorème de Gauss nous dit que

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$

il faut que la densité de charges  $\rho$  soit nulle. Physiquement cela veut dire que comme les charges de même signe (électrons) se repoussent, s'il n'y a pas de force de friction, elles vont toutes partir en surface pour éventuellement former une densité de charges  $\sigma$  s'il n'y a pas de moyen de les évacuer du conducteur. Par ailleurs, la surface du conducteur parfait est forcément une équipotentielle.

Cette hypothèse du conducteur parfait n'est cependant pas indispensable pour la suite mais nous nous en servons à l'occasion.

Pour une fois nous allons employer la formule de Stokes pour le champ électrique et celle de Green-Ostrogradski pour le champ magnétique.

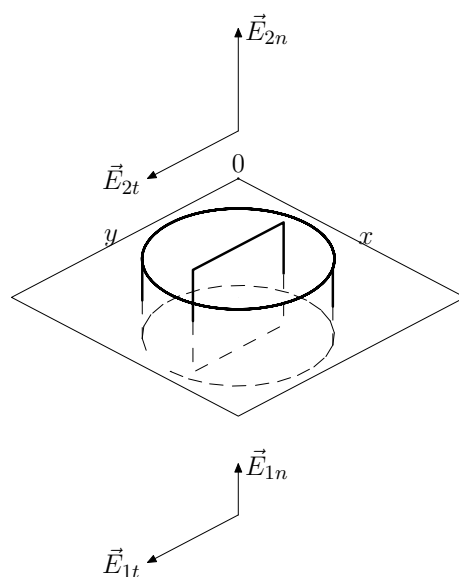


FIG. 3.12 – Surface et parcours autour de la surface chargée séparant deux milieux employés pour la démonstration du théorème de Coulomb

En effet nous avons vu que le rotationnel de  $\vec{E}$  est nul (du moins en régime permanent) par conséquent si nous considérons un parcours rectangulaire  $C$  coupé en deux par la surface et symétrique, de côté  $l$  et de faible épaisseur  $e$  suivant la direction  $z$ , alors une application de la formule de Stokes donne

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Si maintenant nous détaillons la circulation, en décomposant le champ électrique dans chaque zone 1 et 2 suivant deux composantes, l'une  $\vec{E}_n$  en projection sur la normale  $\vec{n} = \vec{e}_z$  à la surface, et l'autre dite composante tangentielle  $\vec{E}_t$  composée de la projection de ce vecteur suivant une direction donnée perpendiculaire à la normale, par exemple  $Ox$ , alors la circulation de  $\vec{E}$  vaut

$$0 = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = E_{1l}l - E_{2l}l + E_{1n}e - E_{2n}e$$

si nous choisissons le parcours rectangulaire tel qu'il soit colinéaire à  $\vec{E}_{1l}$ .

Par conséquent en faisant tendre l'épaisseur  $e$  vers 0 on a continuité de la composante tangentielle à la traversée de l'interface. Cela sera vrai également si nous considérons la direction  $Oy$ , et donc vrai pour l'ensemble de la partie du champ contenu dans le plan.

Si maintenant nous appliquons le théorème de Gauss à une boîte cylindrique (ou "camembertoïdale") de surface  $S = \pi r^2$  et d'épaisseur  $e$  faible, également coupée en deux par l'interface, alors comme

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\Sigma q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

et que l'intégrale surfacique s'approche par

$$E_{2n}S - E_{1n}S + 2\pi r e E_{1l} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

puisque nous avons vu que la composante tangentielle était continue. Si maintenant nous faisons tendre l'épaisseur  $e$  vers 0, il reste après simplification par  $S$

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

résultat que l'on nomme parfois théorème de Coulomb et que l'on peut résumer (avec la continuité de la composante tangentielle incluse) en

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

Remarquons que pour une charge surfacique donnée, plus la surface est petite ou courbée et plus la densité surfacique de charges est grande, ce qui explique le "pouvoir des pointes" de provoquer des étincelles ou d'attirer la foudre : d'où la forme pointue des paratonnerres, ou *a contrario* les formes très rondes des machines électrostatiques, choisies pour retarder les décharges le plus possible en maintenant le champ en dessous du champ disruptif de l'air.

De la même façon pour le champ magnétique, en employant le fait que sa divergence est toujours nulle, puis avec le théorème d'Ampère, on peut établir *a contrario* que sa composante normale est continue alors qu'on a une discontinuité de la composante tangentielle, résultat dont la démonstration est tout à fait similaire résumé par

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j} \wedge \vec{n}$$

Par exemple à la traversée de la surface d'un solénoïde créant un champ magnétique constant en son sein, et nul à l'extérieur, on a une discontinuité exactement donnée par l'expression ci-dessus.

## Chapitre 4

# Induction

Après avoir détaillé ce qui se passait en régimes stationnaires, nous allons désormais progressivement supprimer cette restriction en faisant d'abord varier lentement le champ magnétique. Lorsque Faraday a réalisé cette expérience, il s'est aperçu qu'une variation du champ magnétique induisait un courant dans les circuits, de façon inverse à l'expérience d'Oersted. Une analyse plus fine du phénomène a montré qu'en fait c'était la variation de flux du champ magnétique qui engendrait un courant.

### 4.1 Force électromotrice

On définit plus précisément le phénomène en introduisant la notion de force électromotrice  $e$ , moyenne des forces induisant un mouvement des porteurs de charge dans un circuit  $C$  constitué d'une boucle quasi-fermée, en normalisant par la charge  $q$  des porteurs en mouvement ; ainsi

$$e = \oint_C \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{l}$$

avec  $d\vec{l}$  l'élément de longueur du circuit et  $\vec{F}$  la force s'exerçant sur le porteur de charge. Cette force électromotrice régnant entre deux bornes infiniment proches du circuit s'exprime en volts. Si le circuit obéit à la loi d'Ohm et présente une résistance finie, on observera alors l'apparition d'un courant induit.

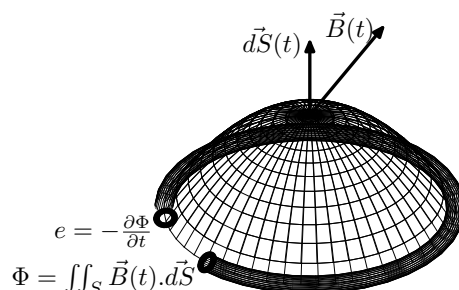


FIG. 4.1 – Force électromotrice  $e$  induite par un champ magnétique dans un circuit fermé

### 4.2 Loi de Lenz-Faraday

On constate expérimentalement que ce courant induit a tendance à créer un champ magnétique opposé à celui qui lui a donné naissance ; cette homéostasie (opposition aux variations)

est très fréquente en physique-chimie (loi de modération de Le Châtelier, phénomènes dissipatifs dans le transport de chaleur, de particules ou de quantité de mouvement, etc.). On formule quantitativement cette loi sous la forme suivante (loi de Lenz ou Faraday)

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

où  $\Phi$  représente le flux du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers la surface  $S$  du circuit  $C$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

D'ailleurs, remarquons que certains auteurs nomment  $\vec{B}$  "le vecteur induction magnétique" pour ne pas le confondre avec le champ magnétique dans la matière  $\vec{H}$  qui sera discuté dans le cours sur l'électromagnétisme dans les milieux matériels.

*Remarquons également qu'il faut éventuellement tenir compte du nombre de spires du circuit dans le calcul du flux*

Cette loi de Lenz-Faraday résume sous une forme très compacte plusieurs phénomènes différents.

Remarquons d'abord qu'une intensité constante dans un circuit peut créer un champ magnétique stationnaire alors qu'un champ magnétique et un circuit totalement fixes ne peuvent induire un courant : une variation d'un des paramètres est nécessaire.

#### 4.2.1 Variation du champ magnétique

Ces paramètres peuvent être évidemment la valeur du champ magnétique  $\vec{B}$ , comme par exemple dans le cas des transformateurs électriques à courant alternatif permettant d'abaisser et d'élever à volonté les tensions en se servant de bobines à nombre de spires différents induisant un courant l'une dans l'autre.

C'est par exemple le phénomène qui est exploité dans les automobiles pour obtenir la haute tension (de l'ordre de 100 kV) nécessaire à l'apparition d'une étincelle entre les électrodes des bougies qui enflamment le carburant, à partir du 12 V de la batterie transformé en courant variable par interruptions successives commandées par la rotation du moteur (autrefois "vis platinées", "delco", désormais entièrement électroniques).

C'est également la raison pour laquelle il est recommandé d'utiliser les interrupteurs pour commander les machines électriques et non d'arracher les prises ; on peut dans ce cas là induire des fortes tensions, puis des éclairs qui oxydent les connecteurs et peuvent ensuite donner lieu à des incendies par variation de la résistance prévue par le constructeur.

Ce phénomène est également exploité dans les systèmes de chauffage (cuisinières ou autre) dits "à induction" ; il existe de nombreux exercices correspondants.

#### 4.2.2 Variation de l'angle entre la surface et le champ

On peut également faire varier la valeur du produit scalaire (par l'angle relatif)  $\vec{B} \cdot d\vec{S}$  entre le champ magnétique et le vecteur surface dans l'expression du flux. C'est par exemple le cas dans les dynamos

ICI INSERER LE DESSIN OU LA VIDÉO DYNAMO

où une bobine tournante à l'intérieur du champ créé par exemple par un aimant permanent voit apparaître une force électromotrice induite alternative. Remarquons d'ailleurs que le principe de la dynamo, ou de l'alternateur est très proche de celui du moteur électrique qui avait cependant été inventé bien auparavant ; cependant c'est la découverte de l'induction puis le développement de dynamos performantes (machine de Gramme) qui ont conduit à la seconde

révolution industrielle à la fin du XIX<sup>me</sup> siècle. En permettant de distribuer à volonté la puissance motrice ou l'éclairage, on a ainsi pu se dispenser des systèmes de courroies et poulies qui distribuait la force des machines à vapeur de la première révolution industrielle ayant débuté environ un siècle auparavant.

### 4.2.3 Variation de la surface

Enfin, il est également possible de faire varier la surface du circuit dans l'expression du flux. Ce phénomène est peu exploité en pratique mais il peut donner lieu à des termes correctifs dans le cas de circuits mobiles ; on préférera cependant dans ce cas l'approche basée sur la force de Lorentz et donnée dans le paragraphe suivant.

## 4.3 Force de Lorentz et induction : champ électromoteur

On peut également relier la loi de Lenz-Faraday à la force de Lorentz et réciproquement. Ainsi nous avons défini la force électromotrice  $e$  régnant entre les bornes  $A$  et  $B$  infiniment proches d'un circuit fermé  $C$  comme la force moyenne s'appliquant sur les porteurs de charge (les électrons). Ainsi

$$e = \oint_C \frac{\vec{F}}{q} \cdot d\vec{l}$$

Or la force s'appliquant sur le porteur de charges est la force de Lorentz

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Remarquons que l'on peut introduire un champ  $\vec{E}_m$  homogène à un champ électrique dit champ électromoteur tel que

$$e = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

Par identification

$$\vec{E}_m = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

dit champ électromoteur, est le champ électrique vu par l'élément de courant dans le référentiel du laboratoire. Cette forme est particulièrement pratique pour les problèmes tels que le freinage par courants de Foucault.

Par la loi de Galilée de composition des vitesses, la vitesse du porteur de charges est la somme de sa vitesse  $\vec{v}_m$  par rapport une origine fixe  $O'$  du circuit et de la vitesse  $\vec{v}_c$  du circuit (ou de son origine  $O'$ ) par rapport à l'origine du laboratoire  $O$ .

Ainsi

$$e = \oint_C (\vec{E} + (\vec{v}_c + \vec{v}_m) \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Or la vitesse du porteur de charges  $\vec{v}_m$  est forcément colinéaire à  $d\vec{l}$  élément de longueur du circuit ; par conséquent après application du produit vectoriel avec  $\vec{B}$  sa contribution est nulle et on peut ne garder que  $\vec{v}_c$ .

Il reste dans la force électromotrice

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} + \oint_C (\vec{v}_c \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Comparons désormais cette expression avec la loi de Lenz-Faraday reliant  $e$  au flux du champ magnétique  $\vec{B}$  à travers la surface  $S$  du circuit

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

avec  $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

La dérivée est ici une dérivée dite "totale". (dérivant par rapport à une variation explicite du flux par rapport au temps). Si nous décomposons désormais, comme il est courant en mécanique des fluides, cette dérivée en un terme dépendant explicitement du temps (par exemple correspondant au cas où le champ change au cours du temps, ou la surface ou le produit scalaire change), et en un terme dépendant implicitement du temps (dans le cas d'un circuit mobile) nous obtenons ce qui est appelé la dérivée partielle par rapport au temps ainsi qu'un terme dit "convectif" lié au déplacement du circuit :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

nous reconnaissons les vitesses dans cette expression et finalement

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_c \cdot \vec{\nabla}$$

donc

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

donne

$$e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \iint_S \vec{v}_c \cdot \vec{\nabla} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

nous pouvons sortir  $\vec{v}_c$  de l'intégrale et une application de la formule de Stokes en remarquant que

$$\vec{v}_c \cdot \vec{\nabla} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\vec{v}_c \wedge \text{rot} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

car

$$\text{rot}(\vec{B} \wedge \vec{v}_c) = \vec{B}(\text{div} \vec{v}_c) - \vec{v}_c(\text{div} \vec{B}) + (\vec{v}_c \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_c$$

ce qui peut se montrer avec un peu de patience en cartésiennes. Or  $\text{div} \vec{B} = 0$ ; et si nous remarquons de plus que la vitesse  $\vec{v}_c$  est une constante dans l'espace ses dérivées spatiales sont nulles.

Finalement

$$e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \oint_C (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

le deuxième terme est identique à celui de l'expression obtenue au début du paragraphe à partir de la force de Lorentz, et correspond à une vitesse éventuelle du circuit par rapport au référentiel d'étude, alors que le premier terme correspond à une induction locale au circuit. Nous identifions alors

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

et nous allons voir que l'on peut obtenir une forme locale de cette équation.



#### 4.4 Forme locale : équation de Maxwell-Faraday et champ de Neumann

Comme  $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  une application du théorème de Stokes au membre de droite de l'expression de la dérivée partielle du flux par rapport au temps dans le paragraphe précédent donne

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

ainsi comme la surface  $S$  est quelconque à partir du moment où elle est enserrée par le circuit  $C$  il faut que les intégrales soient égales et donc

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

en faisant rentrer la dérivée temporelle sous l'intégrale (nous sommes en physique !).

Cette formule locale, obtenue encore une fois à partir d'une loi intégrale (la loi de Lenz-Faraday) est appelée équation de Maxwell-Faraday.

Elle relie le rotationnel du champ électrique à ses causes, à savoir une variation du champ magnétique dans le temps.

Remarquons qu'en régime stationnaire (indépendant du temps) ce rotationnel du champ électrique est nul ; ainsi, dans le chapitre précédent, nous avons le droit d'écrire le champ électrique comme gradient du potentiel, ce qui ne sera plus forcément le cas.

Si nous nous souvenons que la divergence du champ magnétique  $\vec{B}$  est toujours nulle, nous pouvons toujours écrire ce dernier champ comme rotationnel d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

Comme nous venons de trouver l'équation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

en substituant l'équation pour  $\vec{A}$  on obtient

$$\text{rot} \vec{E} = -\text{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

en faisant passer la dérivée temporelle sous le rotationnel. Par conséquent comme le rotationnel d'un gradient est nul les deux expressions sous le rotationnel sont égales à un gradient près ; ce gradient est clairement celui du potentiel électrique pour être cohérent avec le régime stationnaire indépendant du temps

$$\vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Nous voyons ainsi un terme supplémentaire apparaître dans l'expression usuelle du champ électrique. Cette expression dite champ de Neumann est particulièrement utile dans la recherche des champs émis par une antenne, comme nous le verrons dans une autre partie du cours. Remarquons cependant que ce champ est unique mais qu'on peut changer  $V$  et  $\vec{A}$  simultanément toute en conservant le résultat ( $V$  est défini à une constante près et  $\vec{A}$  à un gradient près).

Pour retrouver l'équation de Poisson il nous faut cependant rappeler la condition dite "jauge de Coulomb" telle que

$$\text{div} \vec{A} = 0$$

auquel cas on aura toujours

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = -\Delta V$$

Nous verrons cependant que ce choix pourra poser des problèmes dans les équations de Maxwell dites complètes, avec le "courant de déplacement". On préférera alors la jauge dite de Lorentz.

## 4.5 Auto- et mutuelle induction

Les formules vues dans les paragraphes précédents sont surtout utiles dans les problèmes concernant une boucle de courant (pour les formules intégrales) ou un dispositif massif tel qu'un barreau conducteur (pour les formules locales). Les dispositifs réels tels que les transformateurs, moteurs, bobinages, etc, sont pourtant souvent à mi-chemin entre ces deux situations, c'est pourquoi il vaut mieux employer des expressions résumant la physique, éventuellement de façon empirique, dans des coefficients globaux.

Ainsi, considérons deux circuits fermés  $C_1$  et  $C_2$  respectivement parcourus par des courants variables  $I_1(t)$  et  $I_2(t)$ . Le courant  $I_1(t)$  parcourant le premier circuit va créer dans l'espace un champ magnétique  $\vec{B}_1(t)$  variable qui va induire une force électromotrice dans les deux circuits ; dans le premier circuit on parlera d'auto (ou self) induction et dans le deuxième circuit de mutuelle induction. La réciproque est vraie pour le deuxième circuit.

Ainsi si nous notons le flux total  $\Phi_1$  présent dans le premier circuit  $C_1$  celui-ci se décompose en la contribution  $\Phi_{11}$  de  $\vec{B}_1(t)$  créé par  $I_1(t)$  et  $\Phi_{12}$  de  $\vec{B}_2(t)$  créé par  $I_2(t)$

$$\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$$

et de même

$$\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}$$

Rappelons que par la loi de Biot et Savart le champ est directement relié à sa cause (le courant) ; ainsi pour  $\vec{B}_1(t)$  par exemple

$$\vec{B}_1(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} I_1(\vec{r}', t) \frac{d\vec{l}(\vec{r}') \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Si nous supposons que l'intensité est constante sur le circuit nous pouvons la sortir de l'intégrale, et si maintenant nous calculons  $\Phi_{11}$  flux de  $\vec{B}_1$  dans  $C_1$

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= \iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 \\ \Phi_{11} &= I_1(t) \iint_{S_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{d\vec{l}(\vec{r}') \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot d\vec{S}_1 \end{aligned}$$

Cette formule effrayante ne doit pas nous cacher que le facteur de droite est simplement géométrique (dépend de l'arrangement mutuel des circuits) et que finalement on peut la résumer sous la forme

$$\Phi_{11} = L_1 I_1(t)$$

$L_1$  sera appelée auto-inductance du circuit en système international est exprimée en H (Henry). Souvent sa valeur est plutôt établie expérimentalement que calculée car il y a souvent des

"pertes de lignes de champ" qui font que la valeur théorique ne coïncide pas tout à fait avec la valeur expérimentale comme vous pourrez le voir en travaux pratiques.

Remarquons qu'il faudra bien tenir compte du nombre de spires éventuel dans les calculs de  $L_1$ .

Ainsi, on va voir apparaître dans le circuit lui-même une force électromotrice s'opposant aux variations du courant le parcourant. Vous avez déjà vu sans doute en électrocinétique de tels dipôles, symbolisés comme par hasard par des bobines et d'impédance  $jL\omega$  (correspondant à la dérivée de la loi de Lenz) en courant alternatif sinusoïdal.

Dans certains montages démontrant ce phénomène d'induction mutuelle, on essaiera ainsi de cacher l'auto-induction en choisissant des valeurs de  $\omega$  appropriées par rapport aux résistances, aux  $L$  et aux  $M$ , mais ce phénomène sera toujours présent. En principe il faudrait établir un système de deux équations différentielles couplées pour décrire le phénomène obtenu.

De la même façon nous pouvons établir

$$\Phi_{12} = M_{12}I_2(t)$$

avec  $M_{12}$  mutuelle inductance des deux circuits, puis

$$\Phi_{21} = M_{21}I_1(t)$$

et enfin

$$\Phi_{22} = L_2I_2(t)$$

avec comme expression de  $M_{12}$

$$M_{12} = \iint_{S_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2(\vec{r}_2) \wedge (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{||\vec{r}_1 - \vec{r}_2||^3} \cdot d\vec{S}_1(\vec{r}_1)$$

avec  $\vec{r}_1$  sur  $S_1$  et  $\vec{r}_2$  sur  $C_2$ .

Si nous remarquons que pour un champ scalaire  $f$  et pour un champ vectoriel  $\vec{V}$

$$\text{rôt}(f\vec{V}) = f\text{rôt}\vec{V} + \text{grad}f \wedge \vec{V}$$

comme

$$\text{grad} \frac{1}{||\vec{r}_1 - \vec{r}_2||} = \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{||\vec{r}_1 - \vec{r}_2||^3}$$

et

$$\text{rôt}d\vec{l}_2 = \vec{0}$$

ce qui se démontre trivialement en cartésiennes

il vient

$$M_{12} = \iint_{S_1} \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \text{rôt} \left( \frac{d\vec{l}_2(\vec{r}_2)}{||\vec{r}_1 - \vec{r}_2||} \right) \cdot d\vec{S}_1(\vec{r}_1)$$

et par une application de la formule de Stokes le rotationnel disparaît

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \left( \frac{d\vec{l}_2(\vec{r}_2)}{||\vec{r}_1 - \vec{r}_2||} \right) \cdot d\vec{l}_1(\vec{r}_1)$$

et il reste une formule certes intimidante mais dans laquelle nous pouvons permuter sans encombre les deux indices vu que le signe de la distance  $||\vec{r}_1 - \vec{r}_2||$  ne changera pas. Ainsi retenons que

$$M_{12} = M_{21}$$

ce que vous pourrez vérifier en travaux pratiques en permutant les bornes des montages démontrant l'induction sans changer le résultat.

Retenons que si nous voulons calculer l'auto ou la mutuelle inductance, il faut établir le champ magnétique dans l'espace, puis calculer son flux dans un des circuits, et enfin mettre en facteur l'intensité.

## Chapitre 5

# Équations de Maxwell

### 5.1 Historique

C'est Maxwell qui a formulé les différentes équations de l'électromagnétisme (électrostatique : théorème de Gauss, magnéto-statique : théorème d'Ampère, induction : loi de Lenz-Faraday) sous les formes locales que nous avons vues. Il faut bien se rendre compte qu'à l'époque (milieu du XIX<sup>me</sup> siècle) ces équations étaient formulées en coordonnées cartésiennes et très difficilement lisibles. Avant les travaux de Maxwell, personne ne s'était donc aperçu qu'elles étaient incohérentes.

### 5.2 Équation de conservation de la charge

En effet, si nous établissons sous forme locale une équation assez intuitive que nous connaissons déjà sous différentes formes, à savoir l'équation de conservation de la charge, nous allons arriver à une incohérence.

Revenons à la définition de la densité de courant

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$

où  $\rho$  est la densité de charges et  $\vec{v}$  leur vitesse.

Si nous considérons un petit tube de charge de volume  $V$ , de surface  $S$  perpendiculaire à  $Ox$  et longueur  $dl$  suivant  $Ox$ , avec  $\vec{v}$  uniforme et parallèle à  $Ox$  (avec  $v = \frac{dl}{dt}$ ) alors la charge totale  $Q$  présente dans le tube vaut

$$Q = \iiint_V \rho dV = \rho S dl$$

La variation de la charge durant un intervalle de temps  $dt$  est égale à la somme des charges entrantes et sortantes (s'il n'y a pas de création). Comme l'intensité électrique  $I$  sortante vaut

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \rho \vec{v} \cdot \vec{S} = \iint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

(si le flux sortant est positif la charge dans le volume diminue), en appliquant la formule de Green-Ostrogradski au membre de droite nous obtenons si nous considérons que le volume  $V$  est arbitraire et donc que les intégrales sont égales :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Remarquons que cette équation de conservation de la charge se réduit en régime permanent à

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

ce qui est par exemple une expression de la loi des nœuds : la somme des intensités entrantes est égale aux intensités sortantes s'il n'y a pas d'accumulation ou de perte locale.

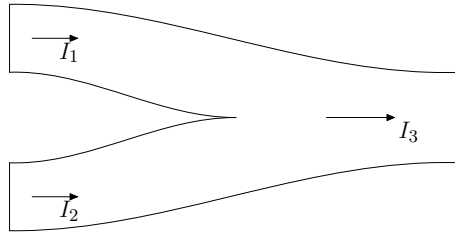


FIG. 5.1 – Nœud électrique et loi des nœuds en régime permanent

### 5.3 Courant de déplacement

En régime permanent, les équations déjà obtenues sont cohérentes ; ceci dit, en régime variable, il apparaît une contradiction manifeste entre la forme locale du théorème d'Ampère

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

qui implique puisque la divergence d'un rotationnel est nulle

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

alors qu'en régime variable nous venons de montrer que

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

La solution à ce paradoxe proposée par Maxwell est d'introduire un courant fictif supplémentaire  $\vec{j}_D$  nommé courant de déplacement dans les équations ;

si

$$\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

si nous prenons la divergence de la forme locale du théorème d'Ampère avec le nouveau courant  $\vec{j} + \vec{j}_D$  il vient

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{div} \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_D)$$

soit, puisque la divergence d'un rotationnel est nulle

$$0 = \operatorname{div} (\vec{j} + \vec{j}_D)$$

soit encore en employant la conservation de la charge et la définition du courant de déplacement

$$0 = -\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

dans la mesure où la forme locale du théorème de Gauss s'écrit

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

nous arrivons cette fois-ci après simplification algébrique à un membre de droite qui est bien nul et un système d'équations cohérent.

Ce courant de déplacement  $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  apparaît donc en régime variable ; la forme locale du théorème d'Ampère que nous avons établie précédemment reste donc valable en magnéto-statique si les courants sont fixés. Remarquons que comme souvent en physique une avancée théorique n'invalide pas les théories précédentes mais simplement limite leur domaine de validité.

Remarquons d'autre part que si les courants sont lentement variables (approximation dite ARQP pour Approximation des Régimes Quasi-Permanents) on peut négliger le courant de déplacement par rapport aux autres courants et le chapitre précédent sur l'induction reste valable. On peut montrer en exercice que dans les matériaux usuels cette approximation est valable pour des fréquences  $f$  inférieures au THz et pour des tailles de circuit petites devant la longueur d'onde  $\lambda = c/f$ , point que nous verrons plus en détail dans le chapitre sur les ondes électromagnétiques.

On peut montrer dans une situation idéale que le courant de déplacement (qui a surpris les scientifiques lors de son introduction par Maxwell) a un sens.

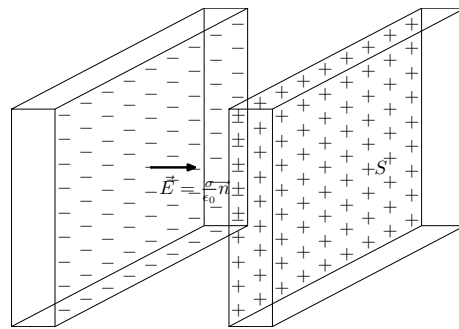


FIG. 5.2 – Schéma d'un condensateur plan

Soit un condensateur idéal formé de deux plaques de surface  $S$  chargées  $+Q$  et  $-Q$  éloignées d'une distance  $d$  dans le vide. Nous avons montré précédemment que le champ est nul à l'intérieur d'un conducteur parfait ; il peut cependant y avoir une densité de charges surfaciques  $\sigma$ , donc ici  $\sigma = \pm Q/S$ . Si nous appliquons les conditions de passage entre l'intérieur et l'extérieur des plaques rappelons que

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur normal aux plaques.

Par conséquent puisque le champ est nul dans le conducteur

$$\vec{E}_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

(ce qui permet par ailleurs en intégrant de trouver la valeur de la capacité  $C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$  du condensateur dans la formule  $Q = CU$  avec  $U$  différence de potentiel entre les plaques).

Relions maintenant (disons pour  $t > 0$ ) les deux plaques par un conducteur de faible résistance  $r$ . Le courant "se met à couler" pour équilibrer les charges entre les deux plaques, générant au passage un courant  $I$ . En première approximation si la densité de courant  $\vec{j} = j\vec{n}$  est supposée uniforme et normale à la surface

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \approx jS$$

or

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d\sigma S}{dt}$$

rappelons que nous venons d'établir par les conditions de passage

$$\sigma \vec{n} = \epsilon_0 \vec{E}_2$$

donc en rapprochant les deux équations précédentes  $S$  disparaît et il reste

$$\vec{j} = \epsilon_0 \frac{d\vec{E}_2}{dt}$$

On peut arguer que par continuité du courant, entre les plaques où règne le vide et où donc manifestement il ne peut y avoir de courant on va retrouver la même équation qui est exactement celle que nous avons établie pour le courant de déplacement.

Cet exemple est loin d'être une preuve mais peut contribuer à se convaincre de l'existence de ce courant de déplacement ; il sera d'autant plus intense que la résistance  $r$  est petite et donc la décharge du condensateur rapide.

## 5.4 Équations de Maxwell

Résumons donc le système d'équations corrigé auquel nous arrivons :

-Forme locale du théorème de Gauss dite désormais équation de Maxwell-Gauss (MG)

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

-Forme locale du théorème d'Ampère, corrigée avec le courant de déplacement, dite équation de Maxwell-Ampère (MA)

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

-Forme locale de la loi de Lenz-Faraday, dite équation de Maxwell-Faraday (MF)

$$\operatorname{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

-Conservation du flux magnétique, absence de monopôles magnétiques, dite équation de Maxwell-flux (MΦ)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Ces équations sont à connaître par cœur pour tout étudiant en physique dans l'enseignement supérieur.

Remarquons qu'elles ne sont valables que dans le vide ou en présence de charges localisées sans milieu modifiant la valeur des champs. Elles impliquent, comme nous l'avons vu précédemment, l'équation de conservation de la charge électrique

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$



## Chapitre 6

# Ondes électromagnétiques

Après avoir établi le système d'équations de Maxwell, il nous vient naturellement l'envie de les mélanger pour voir si quelque nouvelle prédiction peut sortir de l'unification et de la correction ainsi réalisée du formalisme de l'électrostatique, de la magnéto-statique, de l'induction et de la conservation de la charge.

Nous allons voir que de l'existence du courant de déplacement, même dans le vide, apparaît alors la possibilité de l'existence d'une onde.

### 6.1 Équation d'onde dans le vide

Pour simplifier, plaçons nous d'abord dans le vide. Les équations de Maxwell deviennent alors en l'absence de charges ou de courants

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \quad (\text{MG})$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad (\text{MA})$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (\text{MF})$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad (\text{M}\Phi)$$

On voit que les équations de Maxwell-Ampère et de Maxwell-Faraday sont mutuellement liées. Prenons par exemple le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère : on obtient

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B} = \operatorname{rot}\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

or

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{B} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{B} - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B}$$

car la divergence de  $\vec{B}$  est toujours nulle.

Il vient donc

$$-\Delta\vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\operatorname{rot}\vec{E}}{\partial t}$$

en mélangeant avec l'équation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \text{ (MF)}$$

il apparaît

$$\Delta\vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

ou encore

$$\Delta\vec{B} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Nous allons voir dans le paragraphe suivant que cette équation est une équation d'onde pour le champ électromagnétique.

En attendant, réalisons l'application numérique approximative

$$\mu_0\epsilon_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{4\pi 9 \cdot 10^9} = \left(\frac{1}{3 \cdot 10^8}\right)^2 \approx \frac{1}{c^2}$$

avec  $c$  célérité de la lumière. Nous comprenons mieux la surprise de Maxwell arrivant à ce résultat et expliquant ainsi par l'introduction du courant de déplacement, permettant le couplage des équations, la nature électromagnétique de la lumière, et prévoyant l'existence d'ondes électromagnétiques de toute fréquence.

Nous pouvons répéter le raisonnement pour le champ électrique en prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot}\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\text{rot}\vec{B}}{\partial t}$$

De nouveau

$$\text{rot}\text{rot}\vec{E} = \text{grad}\text{div}\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$$

car la divergence de  $\vec{E}$  est nulle dans le vide par Maxwell-Gauss.

De même Maxwell-Ampère dans le vide donne

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

et finalement

$$\Delta\vec{E} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

soit exactement la même équation que pour le champ magnétique et les mêmes remarques. Nous allons voir que les ondes électromagnétiques ont simultanément une composante électrique et magnétique.

## 6.2 Solutions générales

Tout d'abord, envisageons en général l'équation aux dérivées partielles dite équation d'onde de d'Alembert (établie historiquement pour une corde vibrante du type corde de guitare)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

où  $u$  correspondra par exemple à une des composantes cartésiennes de  $\vec{E}$  ou de  $\vec{B}$ .

Remarquons d'abord que dans cette équation  $c$  a bien les dimensions d'une vitesse.

Introduisons deux variables  $X$  et  $Y$  telles que

$$X = x - ct$$

et

$$Y = x + ct$$

alors réciproquement

$$x = \frac{X + Y}{2}$$

et

$$ct = \frac{Y - X}{2}$$

par conséquent

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X}$$

par la règle des dérivées de fonctions composées exprimées comme usuellement en physique ; la même formule peut être exprimée pour  $t$  et il vient

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial X}$$

On peut exprimer les mêmes relations pour  $Y$ .

Finalement l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = 0$$

par conséquent toute fonction  $F$  de  $X$  est solution de l'équation d'onde, de même que toute fonction  $G$  de  $Y$ . Par superposition nous pouvons donc écrire

$$u = F(x - ct) + G(x + ct)$$

Remarquons que la première partie  $F$  correspond à une propagation sans déformation de la forme de  $F$  à  $x - ct$  constant (donc à  $x$  croissant pour  $t$  croissant) donc à la célérité  $c$ . On fait la différence entre la "célérité" de l'onde (correspondant grosso modo à sa vitesse de propagation, comme il peut être démontré dans un cours plus avancé) et la vitesse éventuelle d'un élément du milieu : charge par exemple, ou particules d'air en acoustique.

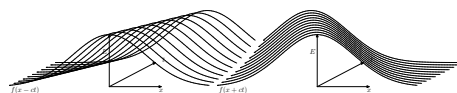


FIG. 6.1 – Propagation spatio-temporelle des deux types de solution à l'équation d'onde

Réciproquement  $G$  correspond à une propagation de l'onde vers les  $x$  décroissants pour  $t$  croissant ("de droite à gauche" avec les conventions usuelles).

Si les deux formes  $F$  et  $G$  sont identiques on peut avoir superposition et obtenir des "ondes stationnaires" (dans une cavité par exemple) avec des maxima dont la position est indépendante du temps. Nous y reviendrons.

On peut pour le moment supposer par exemple  $G = 0$ .

Dans ce cas  $u = F(x - ct)$ . On peut envisager un grand nombre de formes pour  $F$  mais la plus courante correspond à une décomposition en fréquences spatiales ou temporelles de  $F$  (série ou transformée de Fourier). Ainsi si nous posons

$$u^* = u_0 e^{ik(x-ct)}$$

en notations complexes ( $i^2 = -1$ ) correspondant à

$$u = \operatorname{Re} u^* = u_0 \cos(k(x - ct))$$

si  $u_0$  est réel on peut vérifier aisément que l'on a une solution.

Réciproquement

$$u^* = u_1 e^{ik(x+ct)}$$

correspondrait à la partie  $G$  de la solution.

Remarquons que si  $u_0 = u_1$  alors

$$u^* = u_1 (e^{ik(x-ct)} + e^{ik(x+ct)})$$

$$u^* = u_1 e^{ikx} (e^{-ikct} + e^{ikct})$$

$$u = 2u_1 \cos kx \cos kct$$

par les formules de Moivre ou d'Euler et dans ce cas on a bien une onde stationnaire qui ne se propage pas : la partie spatiale est constante.

### 6.3 Fréquence et longueur d'onde

Si nous introduisons un paramètre  $\omega = kc$  nous constatons que  $k$  est homogène à l'inverse d'une longueur et que  $\omega$  est donc homogène à l'inverse d'un temps.

En considérant les deux formes de solution que nous avons trouvées précédemment l'onde progressive

$$u = u_0 \cos(kx \pm \omega t)$$

ou l'onde stationnaire

$$u = 2u_1 \cos kx \cos \omega t$$

dans les deux cas à  $t$  figé  $k$  est relié à la période spatiale  $\lambda$  que nous appellerons longueur d'onde. De même  $\omega$  est relié à la période temporelle  $T$  et à la fréquence  $f$ .

Ainsi

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

et en mélangeant avec  $\omega = kc$  nous arrivons à

$$f\lambda = c$$

formule qui est à notre avis la plus simple à retenir.

On peut la vérifier sur les postes de radio gradués en longueur d'onde comme en fréquence ; ainsi France Inter peut-il être trouvé à 1852m ou 162 kHz environ.

De même pour les ondes stationnaires : un four micro-ondes émet des ondes particulièrement bien absorbées par l'eau à 2,45 GHz soit une longueur d'onde de 12 cm environ ; c'est pour cela que ces fours disposent d'un plateau tournant, sinon la nourriture ne serait pas chauffée de façon homogène. On peut vérifier cela en disposant de la poudre de cacao sur le plateau arrêté : on voit clairement les endroits où l'onde stationnaire est nulle ou maximale.

## 6.4 Structure des ondes électromagnétiques dans le vide

Il existe une variété de solutions pour l'équation d'onde électromagnétiques dans le vide. Cependant, au vu du paragraphe précédent, si nous décomposons chaque composante de  $\vec{E}$  ou  $\vec{B}$  nous obtenons une équation monodimensionnelle de d'Alembert ; il est donc tentant d'envisager une solution sinusoïdale pour une des composantes.

## 6.5 Ondes planes ; expression de nabra

Choisissons par exemple

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

avec

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$$

l'équation d'onde étant

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

On peut aisément vérifier que les projections de  $\vec{E}$  sur  $Oy$  et  $Oz$  étant nulles l'équation d'onde est satisfaite, et sur  $Ox$  on obtient bien une solution si  $kc = \omega$  avec  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ .

Nous avons donc une solution (parmi d'autres possibles, n'oublions pas que comme l'équation est linéaire le principe de superposition s'applique) à l'équation d'onde.

Calculons dans ce cas, par l'équation de Maxwell-Faraday, le champ magnétique correspondant.

Comme

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

et

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x e^{i(kz - \omega t)}$$

nous obtenons en prenant garde au fait que  $\vec{E}$  est suivant  $\vec{e}_x$  mais dépend de  $z$  et donnera une seule composante non nulle dans le rotationnel

$$(\text{rot} \vec{E}) \cdot \vec{e}_y = \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$(\text{rot} \vec{E}) \cdot \vec{e}_y = ik E_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = ik E_0 \vec{e}_y e^{i(kz - \omega t)}$$

après intégration temporelle en éliminant les signes et à une constante près

$$\vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 \vec{e}_y e^{i(kz - \omega t)}$$

Manifestement  $\vec{B}$  ayant la même forme que  $\vec{E}$  obéit également à l'équation de propagation. Remarquons cependant que comme  $k/\omega = 1/c$  la composante magnétique du champ est bien inférieure (en unités SI...) à la composante électrique ; sauf dans des dispositifs spécifiques (cadre à grand nombre de tours) on détectera donc plutôt la composante  $\vec{E}$  du champ électromagnétique.



FIG. 6.2 – Cadre permettant de trouver la direction d'un signal radio (radiogoniométrie) en détectant sa composante magnétique

Si nous introduisons le vecteur  $\vec{k} = k\vec{e}_z$ , remarquons que  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$  forment un trièdre direct et que  $\vec{k}$  est dans le sens de propagation de l'onde. On l'appellera vecteur d'onde pour l'onde étudiée, caractérisée ici par sa nature plane : en effet à un instant donné les lieux d'égale perturbation électrique ou magnétique sont des plans dans l'espace, perpendiculaires à la direction de propagation  $Oz$ .

Il est à noter que nous aurions pu orienter différemment les axes mais que le résultat aurait été le même. De façon générale, sans particulariser le repère cartésien, nous pouvons écrire pour l'onde

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

avec  $\vec{r}$  vecteur position dans un système de coordonnées et un repère arbitraire. Notons bien l'homogénéité vectorielle de cette formule.



FIG. 6.3 – Structure d'onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement

Par ailleurs, on peut résumer les relations précédentes (Maxwell-Faraday) en remarquant qu'on peut exprimer simplement l'opérateur nabla dans le cas de l'onde plane progressive vers les  $z$  croissants par exemple puisque la dérivée spatiale se réduit à une multiplication par  $ik$  et l'intégration temporelle à une division par  $-i\omega$  :

$$\vec{\nabla} = i\vec{k}$$

Ainsi

$$\vec{B} = \frac{1}{i\omega} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}$$

en tenant compte du signe de la loi de Lenz

$$\vec{B} = \frac{1}{i\omega} i\vec{k} \wedge \vec{E}$$

et

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$$

ce qui résume les résultats obtenus précédemment pour une onde plane indépendamment du système de coordonnées.

## 6.6 Ondes sphériques

Considérons maintenant une autre forme pour la solution.

Si nous supposons une symétrie sphérique du problème l'équation d'onde, par exemple pour le champ électrique

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

se résume vu l'expression du Laplacien en sphériques à

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

les autres termes étant supposés nuls (pas de dépendance des angles polaires  $\theta$  et  $\phi$ ).  
Considérons arbitrairement que  $\vec{E}$  est de la forme

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_\phi \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}$$

(nous verrons plus tard que cette forme correspond à longue distance à l'onde émise par un dipôle oscillant) alors l'expression de l'équation d'onde en sphériques donne bien  $\vec{0}$  après une algèbre un peu longue, en employant deux fois la formule de la dérivée d'un produit par exemple.

Nous avons donc bien une solution possible à l'équation d'onde dans ce cas.

Si par l'équation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

nous calculons le champ magnétique correspondant, comme en sphériques l'opérateur rotationnel vaut pour la coordonnée  $\theta$

$$\text{rot} \vec{E} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \sin \theta \frac{r \partial E_\phi}{\partial r}$$

et sera nul ici pour les autres coordonnées donc

$$\text{rot} \vec{E} = - \vec{e}_\theta \frac{i k e^{i(kr - \omega t)}}{r}$$

et après intégration temporelle

$$\vec{B} = \vec{e}_\theta \frac{k}{\omega} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}$$

Remarquons encore une fois que  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$  forment un trièdre direct si nous prenons  $\vec{k}$  suivant la direction de propagation  $\vec{e}_r$  avec  $kr = \vec{k} \cdot \vec{e}_r$ . Localement on peut même définir une forme d'onde plane ; ainsi, la lumière émise par le soleil est-elle à symétrie sphérique, et s'atténue en carré de la distance comme nous le verrons dans le paragraphe suivant sur l'énergie et le vecteur de Poynting, mais arrive localement sur Terre sous forme d'une onde plane avec une très bonne approximation.



## Chapitre 7

# Aspects énergétiques des phénomènes électromagnétiques

Dans ce chapitre, nous allons reprendre les résultats des chapitres précédents du point de vue énergétique, ce qui va nous permettre de mieux appréhender certains phénomènes, en particulier en ce qui concerne la propagation des ondes électromagnétiques.

### 7.1 Énergie électrostatique et magnéto-statique

Commençons tout d'abord par rappeler quelques résultats du cours d'électrostatique et de magnéto-statique.

#### 7.1.1 Travail d'établissement d'une distribution de charges

Rappelons que la force de Lorentz qui s'exerce sur une particule de charge  $q_i$  plongée dans un champ électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  dépendant de la coordonnée spatiale  $\vec{r}$  vaut

$$\vec{F} = q_i(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

où  $\vec{v}$  représente la vitesse de la particule dans le référentiel du laboratoire.

Par conséquent, le travail  $\mathcal{W}$  nécessaire pour amener la charge d'un point  $A$  à un point  $B$  le long d'un contour  $C$  vaut l'opposé du travail reçu par la charge, et donc

$$\mathcal{W} = - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

comme  $\vec{v}$  est toujours parallèle à  $d\vec{l}$  le produit vectoriel lui est orthogonal, et la composante magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas.

Finalement si nous considérons que  $\vec{E}$  dérive d'un potentiel selon  $\vec{E} = -\text{grad}V_e$  le travail devient

$$\mathcal{W} = q_i(V_e(B) - V_e(A))$$

il ne dépend donc pas du chemin suivi.

La convention veut que l'énergie d'une distribution de charges soit égale au travail nécessaire à sa constitution, et souvent on prend de plus un potentiel nul à l'infini ; ainsi si  $A$  est situé à l'infini

$$\mathcal{W} = q_i V_e(B)$$

et si nous supposons que le point  $B$  est situé en  $\vec{r}_i$  et que le potentiel est créé par la loi de Coulomb par un ensemble de  $i - 1$  charges  $q_j$  situées chacune en  $\vec{r}_j$

$$\mathcal{W}' = q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|}$$

et l'énergie totale d'un ensemble de  $N$  charges vaut

$$\mathcal{W} = \sum_{i=1}^N \mathcal{W}' = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{j<i} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|}$$

ou encore

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|}$$

en omettant l'interaction d'une charge avec elle-même dans la somme.

Si comme dans les premiers chapitres nous passons à une distribution de charges continue dans tout l'espace  $dq = \rho(\vec{r})dV(\vec{r})$  il vient

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \iiint \iiint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r})dV(\vec{r})\rho(\vec{r}')dV(\vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

ou encore avec le potentiel électrique  $V_e$

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \iiint V_e(\vec{r})\rho(\vec{r})dV$$

or en électrostatique l'équation de Poisson est toujours vérifiée donc

$$\Delta V_e = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

et en substituant  $\rho$  il vient

$$\mathcal{W} = -\frac{1}{2} \iiint \epsilon_0 V_e(\vec{r})\Delta V_e dV$$

Si nous revenons à  $\vec{E} = -\text{grad}V_e$  en employant une intégration par parties pour chaque coordonnée cartésienne et en remarquant que le terme tout intégré est nul puisque le champ est supposé nul à l'infini il reste

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \iiint \epsilon_0 \|\vec{E}\|^2 dV$$

expression que nous privilégierons par la suite.

### 7.1.2 Travail d'établissement d'une distribution de courants statique

Nous allons désormais appliquer le même raisonnement que dans le paragraphe précédent au calcul de l'énergie d'une distribution de courants. Encore une fois, l'énergie de la distribution est prise égale au travail d'établissement, égal à l'opposé du travail  $\mathcal{W}$  reçu par le circuit. Considérons un circuit isolé constitué d'un fil parcouru par un courant  $I$  homogène en régime permanent.

On a

$$\frac{d\mathcal{W}}{dt} = -Ie = I \frac{d\Phi}{dt}$$

en vertu de la loi de Lenz-Faraday, pour un circuit de surface  $S$  subissant un champ magnétique  $\vec{B}$  de flux  $\Phi$  à travers cette surface. Notons que ce champ magnétique est créé par le courant  $I$  lui-même.

Nous en déduisons facilement que

$$d\mathcal{W} = Id\phi$$

or par définition

$$d\Phi = \iint_S \vec{d}B \cdot \vec{d}S$$

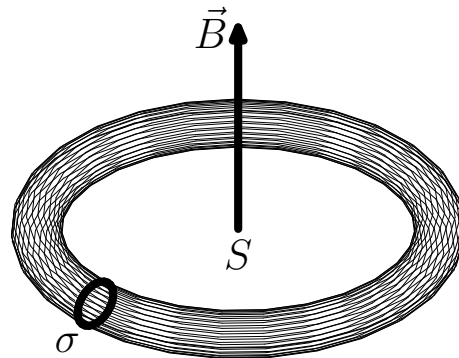


FIG. 7.1 – Circuit modèle employé pour le calcul de l'énergie magnétostatique

d'autre part si nous considérons que le fil a une section  $\sigma$  d'élément de surface  $\vec{d}\sigma$  l'intensité vaut

$$I = \iint_{\sigma} \vec{j} \cdot \vec{d}\sigma$$

avec  $\vec{j}$  la densité de courant

Finalement

$$d\mathcal{W} = \iint_{\sigma} \vec{j} \cdot \vec{d}\sigma \iint_S \vec{d}B \cdot \vec{d}S$$

Si nous employons le potentiel vecteur tel que  $\vec{d}B = \text{rot} \vec{d}A$  une application de la formule de Stokes pour faire disparaître le rotationnel donne

$$d\mathcal{W} = \iint_{\sigma} \vec{j} \cdot \vec{d}\sigma \int_C \vec{d}A \cdot \vec{d}l$$

avec  $\vec{d}l$  élément de longueur du circuit de contour  $C$ .

En regroupant les intégrales nous voyons apparaître une intégrale sur le volume du fil, et en intégrant à partir d'un temps où l'énergie est nulle (au début de l'établissement supposé très lent de la distribution de courant)

$$\mathcal{W} = \iiint_{\mathcal{V}_1} \vec{j} \cdot \vec{A} \cdot d\mathcal{V}$$

formule élégante, similaire à celle obtenue en électrostatique, et que nous généraliserons à une distribution arbitraire de courants dans tout l'espace en sommant leurs contributions locales par le même raisonnement, et en introduisant comme dans le paragraphe précédent sur l'électrostatique un facteur 1/2 pour éviter le double comptage des interactions mutuelles entre courants.

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \iiint \vec{j} \cdot \vec{A} \, d\mathcal{V}$$

Cependant, en magnéto-statique la forme locale du théorème d'Ampère (sans courant de déplacement) vaut

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

donc l'équation précédente se transforme en

$$\mathcal{W} = \iiint \frac{\text{rot} \vec{B}}{2\mu_0} \cdot \vec{A} \, d\mathcal{V}$$

et en intégrant par parties sur chacune des composantes cartésiennes, en se souvenant que  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$  et en prenant le champ nul à l'infini ce qui fait disparaître le terme tout intégré il vient

$$\mathcal{W} = \iiint \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} \, d\mathcal{V}$$

équation que nous retiendrons pour la suite.

### 7.1.3 Puissance du champ électromagnétique ; vecteur de Poynting

Considérons désormais le cas général d'un champ électromagnétique obéissant aux équations de Maxwell, sans supposer une quelconque stationnarité. La force qui s'exerce sur une charge élémentaire  $dq$  animée d'une vitesse  $\vec{v}$  par rapport au référentiel du laboratoire est la force de Lorentz qui vaut

$$d\vec{F} = dq(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

La puissance  $d\mathcal{P}$  de cette force vaut quant à elle

$$d\mathcal{P} = d\vec{F} \cdot \vec{v} = dq \vec{v} \cdot \vec{E}$$

puisque la composante magnétique est toujours orthogonale à la trajectoire. Si nous intégrons sur l'espace, avec  $dq = \rho dV$  et  $\rho$  la densité de charges il vient pour la puissance totale  $\vec{P}$  déposée sur les charges contenues dans un volume  $\mathcal{V}$  par le champ

$$\mathcal{P} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho \vec{v} \cdot \vec{E} \, dV$$

soit encore par définition de la densité de courant  $\vec{j}$

$$\mathcal{P} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} \, dV$$

Cette formule est particulièrement utile pour étudier par exemple la puissance obtenue par le chauffage par induction en supposant la forme locale de la loi d'Ohm et en employant le champ de Neumann.

Nous pouvons de plus, à l'inverse du paragraphe précédent, employer l'équation de Maxwell-Ampère avec le courant de déplacement pour remplacer  $\vec{j}$  dans cette équation ; ainsi

$$\mathcal{P} = \iiint_{\mathcal{V}} \left( \text{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{E} \, dV$$

En employant la formule d'analyse vectorielle

$$\operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}$$

il vient par substitution

$$\mathcal{P} = \iiint_{\mathcal{V}} \left( -\operatorname{div}(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}) + \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \operatorname{rot} \vec{E} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \right) dV$$

En employant l'équation de Maxwell-Faraday

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

il apparaît

$$\mathcal{P} = \iiint_{\mathcal{V}} \left( -\operatorname{div}(\vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}) - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} \right) dV$$

Si nous introduisons la densité totale d'énergie électromagnétique  $u$  somme des contributions électrostatiques et magnéto-statiques vues dans les paragraphes précédents

$$u = \epsilon_0 \frac{\|\vec{E}\|^2}{2} + \frac{\|\vec{B}\|^2}{2\mu_0}$$

ainsi que le vecteur  $\vec{\Pi}$  dit de Poynting tel que

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

nous remarquons dans l'expression de  $\mathcal{P}$  après application de la formule de Green-Ostrogradski pour transformer le premier terme en intégrale de surface sur la surface  $S$  du volume  $\mathcal{V}$  que

$$\mathcal{P} = - \iint_S \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} - \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial u}{\partial t} dV$$

ce qui signifie que la puissance électromagnétique déposée dans une distribution de charge est égale à l'opposé de la variation d'énergie du champ électromagnétique moins le flux du vecteur de Poynting représentant ainsi la puissance sortante du champ.

Remarquons que si le volume considéré est vide de charges alors  $\mathcal{P} = 0$  et le flux du vecteur de Poynting représente la perte d'énergie du champ électromagnétique contenu dans ce volume.

#### 7.1.4 Énergie transportée par une onde plane

Par exemple, dans le cas d'une onde plane nous avons pris

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x \cos(kz - \omega t)$$

d'où

$$\vec{B} = \frac{1}{c} E_0 \vec{e}_y \cos(kz - \omega t)$$

et

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{e}_z \cos^2(kz - \omega t)$$

La puissance moyenne dans le temps étant égale par définition à

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \vec{\Pi}$$

il vient après linéarisation du  $\cos^2$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z$$

Notons que nous aurions pu obtenir le même résultat en employant la notation complexe ; dans ce cas on peut montrer comme en électrocinétique que le résultat est fonction du conjugué du second facteur selon

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \quad \vec{E}^* \wedge \text{Conjg} \vec{B}^*$$

L'énergie se propage donc suivant la direction du vecteur  $\vec{k} = k\vec{e}_z$  et nous pouvons ainsi faire le lien de façon quantitative entre la "vibration de Fresnel" notée  $s$  des opticiens, assimilée à l'amplitude du champ électrique, et l'intensité lumineuse définie comme valeur moyenne de la puissance transportée par l'onde électromagnétique associée : ceci donne une base satisfaisante à la théorie des interférences lumineuses et à celle de la diffraction comme vous le verrez au niveau d'un master de physique.

### 7.1.5 Énergie transportée par une onde sphérique

De la même façon, si nous reprenons les ondes sphériques que nous avons considérées arbitrairement de la forme

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_\phi \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}$$

et

$$\vec{B} = \vec{e}_\theta \frac{k}{\omega} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}$$

il vient pour la moyenne du vecteur de Poynting

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \frac{E_0^2}{2r^2 \mu_0 c} \vec{e}_r$$

Remarquons encore une fois que ce vecteur est colinéaire au sens de propagation de l'onde ; si nous calculons le flux  $\Phi$  du vecteur sur une sphère de rayon  $R$  centrée à l'origine il vient

$$\Phi = \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{e}_r \sin \theta R^2 d\theta d\phi$$

après intégration triviale

$$\Phi = \frac{2\pi E_0^2}{\mu_0 c}$$

Ce flux total est donc constant par simplification des  $R^2$  ; *a contrario*, ce résultat intuitif de conservation de l'énergie nous explique pourquoi pour une onde à symétrie sphérique l'intensité locale sur un élément de surface décroît en carré de la distance, ce dont nous avons l'expérience quotidienne en nous éloignant d'une source ponctuelle.

## Chapitre 8

# Champs électriques dans les milieux matériels

Les résultats établis dans les chapitres précédents sont évidemment valables dans l'absolu. Cependant, la formulation présentée est employée de préférence dans le vide, ou en présence de charges ponctuelles éventuellement mobiles. La matière est certes constituée d'atomes eux-mêmes constitués de charges ponctuelles en mouvement (noyaux et électrons), mais lorsque le problème traité concerne une échelle suffisamment grande pour négliger la nature ponctuelle des noyaux et des électrons, il est préférable de moyenniser l'influence de ces charges ponctuelles sur les champs électromagnétiques en introduisant, moyennant certaines approximations, des versions modifiées de ces mêmes champs.

### 8.1 Charges de polarisation et champ dépolarisant

Ainsi, on constate expérimentalement que la capacité d'un condensateur est multipliée par un facteur  $\epsilon_r$  si l'on remplit l'espace situé entre les armatures par un diélectrique, c'est à dire par un matériau bon isolant. À charge constante la différence de potentiel entre ces armatures et donc le champ électrique dérivant de ce potentiel se trouvent donc divisés par ce même facteur  $\epsilon_r$ . Cela laisse prévoir qu'il existe des charges liées au diélectrique engendrant un champ dépolarisant d'effet contraire à celui des charges libres.

Le champ électrique régnant entre les armatures est donc en vertu du principe de superposition somme du champ  $\vec{E}$  créé par les charges présentes sur les armatures (cas du condensateur à vide) et du champ créé par les charges liées au diélectrique, noté  $\vec{E}_p$  pour champ dépolarisant.

Ce champ est en première approximation essentiellement créé par les dipôles électriques induits dans les molécules constituant le milieu diélectrique.

### 8.2 Approximation dipolaire électrique

Avant d'aller plus loin, il faut définir ce que nous entendons par dipôle électrique.

Nous avons introduit dans les chapitres précédents les densités volumiques de charges et de courants dans un milieu en moyennant les charges microscopiques sur un volume petit macroscopiquement mais grand microscopiquement.

De la même façon, il est possible de quantifier pour un petit volume le déséquilibre et la répartition des charges positives et charges négatives.

Si nous prenons une origine  $O$  et un ensemble de  $N$  charges positives  $q_{i+}$  présentes aux points  $A_{i+}$  et  $N$  charges négatives  $q_{i-}$  présentes aux points  $A_{i-}$  le moment dipolaire  $\vec{p}$  de cette distribution de charges est défini par

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_{i+} \vec{OA}_{i+} + \sum_{i=1}^N q_{i-} \vec{OA}_{i-}$$

soit comme barycentre des lieux des charges pondérés par les valeurs algébriques de celles-ci. Il est alors facile de généraliser pour une distribution continue de charges en remplaçant les sommes discrètes par des intégrales, comme nous l'avons fait pour les densités de charges et de courants.

### 8.2.1 Cas de deux charges égales et opposées

Par ailleurs, dans le cas simple de deux points  $B_-$  et  $B_+$  portant des charges égales et opposées  $q$ , définissant un dipôle électrique, il vient

$$\vec{p} = q(\vec{OB}_+ - \vec{OB}_-) = q\vec{B}_- \vec{B}_+$$

Dans ce dernier cas particulier, calculons le potentiel électrique  $V$  régnant en un point  $M$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right)$$

avec  $r_+$  la distance du point  $M$  au point  $B_+$ , et  $r_-$  la distance du point  $M$  au point  $B_-$ .

Si nous introduisons le point  $N$  comme point milieu de  $B_-$  et  $B_+$  on a

$$r_+ = \|\vec{B}_+ \vec{M}\| = \|\vec{NM} + \vec{B}_+ \vec{N}\| = r \left\| \vec{u} + \frac{\vec{B}_+ \vec{N}}{r} \right\|$$

et

$$r_- = \|\vec{B}_- \vec{M}\| = \|\vec{NM} + \vec{B}_- \vec{N}\| = r \left\| \vec{u} + \frac{\vec{B}_- \vec{N}}{r} \right\|$$

en notant  $r = \|\vec{NM}\|$  et  $\vec{u}$  vecteur unitaire dans la direction  $\vec{NM}$ . Par conséquent  $V(M)$  se réexprime sous la forme

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{1}{\left\| \vec{u} + \frac{\vec{B}_+ \vec{N}}{r} \right\|} - \frac{1}{\left\| \vec{u} + \frac{\vec{B}_- \vec{N}}{r} \right\|} \right)$$

Or

$$\left\| \vec{u} + \frac{\vec{B}_+ \vec{N}}{r} \right\| = \sqrt{\left( \vec{u} + \frac{\vec{B}_+ \vec{N}}{r} \right) \cdot \left( \vec{u} + \frac{\vec{B}_+ \vec{N}}{r} \right)}$$

$$\left\| \vec{u} + \frac{\vec{B}_+ \vec{N}}{r} \right\| = \sqrt{1 + 2 \frac{\vec{B}_+ \vec{N} \cdot \vec{u}}{r} + \frac{B_+ N^2}{r^2}}$$

et de même pour la charge négative.

Si nous considérons désormais que la distance  $B_+ N$  est petite par rapport à  $r$ , il est possible de négliger au premier ordre le terme quadratique et de faire un développement limité au premier ordre de l'inverse de la racine carrée. Avec le même raisonnement pour la charge négative, en tenant compte du signe, il vient

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( 1 - \frac{\vec{B}_+ \vec{N} \cdot \vec{u}}{r} - 1 - \frac{\vec{B}_- \vec{N} \cdot \vec{u}}{r} \right)$$

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left( -\frac{\vec{B}_+ \vec{N} \cdot \vec{u}}{r} + \frac{\vec{B}_- \vec{N} \cdot \vec{u}}{r} \right)$$



$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{B}_- \vec{B}_+ \cdot \vec{u}$$

et finalement

$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

formule élégante justifiant l'introduction du moment dipolaire. Rappelons bien que cette formule n'est valable que si  $r$  est grand devant la distance des deux charges.

En nous plaçant en coordonnées polaires appropriées d'origine  $N$ , avec  $\vec{p}$  suivant l'axe  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_z$  orthogonal au plan  $(\vec{p}, \vec{u})$  il vient

$$V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

et si nous calculons le champ électrique au point  $M$  tel que  $\vec{E}(M) = -\text{grad}V$  en coordonnées polaires il apparaît

$$\vec{E}_M = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta$$

soit encore de façon intrinsèque en se débarrassant des vecteurs unitaires

$$\vec{E}_M = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{u})\vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^3} - \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

### 8.2.2 Cas du dipôle rigide

Il est alors facile d'établir l'énergie potentielle  $\mathcal{E}$  d'un dipôle rigide en interaction avec un champ  $\vec{E}$  dérivant d'un potentiel  $V$

$$\mathcal{E} = -qV_{B_-} + qV_{B_+} = -q(V_{B_-} - V_{B_+})$$

or

$$V_{B_+} - V_{B_-} = \int_{B_-}^{B_+} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

encore une fois si les deux charges sont proches on peut faire l'approximation

$$V_{B_+} - V_{B_-} \approx B_- \vec{B}_+ \cdot \vec{E}$$

ainsi il vient

$$\mathcal{E} = -qB_- \vec{B}_+ \cdot \vec{E} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

De la même façon on peut établir que le dipôle subit un moment résultant des forces électriques sur chacune des charges

$$\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

## 8.3 Molécules polaires, polarisabilité

En pratique les dipôles que nous allons étudier sont formés des charges positives et négatives présentes dans une molécule (électrons comme noyaux).

En l'absence de champ électrique appliqué une molécule peut être soit **non-polaires** (c'est à dire qu'elle ne présente pas de dipôle électrique permanent, les positions des charges positives compensant grâce à une symétrie élevée celles des charges négatives, comme dans le cas de

O<sub>2</sub>, CH<sub>4</sub>...), soit **polaire** (c'est le cas de molécule ne présentant pas d'élément de symétrie simple, comme HCl ou H<sub>2</sub>O)

Cependant en présence d'un champ électrique extérieur  $\vec{E}$  tel que celui régnant entre les armatures d'un condensateur, on peut observer :

- Une polarisation électronique, c'est à dire une déformation du nuage électronique des atomes du matériau sous l'effet du champ électrique appliqué. On résume simplement cet effet au premier ordre en introduisant un coefficient de proportionnalité entre cause et conséquence, tel que  $\vec{p} = \alpha \vec{E}$ , ce coefficient étant appelé polarisabilité du matériau.
- Une polarisation ionique, c'est à dire pour un cristal compressible une translation des ions positifs dans le sens du champ et des ions négatifs dans le sens contraire.
- Une polarisation d'orientation. En l'absence de champ, pour une substance polaire, le désordre induit par la température du matériau implique que le dipôle moyen  $\langle \vec{p} \rangle$  est nul. Cependant sous l'effet d'un champ, l'énergie potentielle  $\mathcal{E} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$  ayant tendance à se minimiser, les dipôles vont s'orienter dans la direction du champ et conduire à créer un moment dipolaire macroscopique.

## 8.4 Vecteur polarisation

On définit alors, comme pour la densité de charges ou de courants, une densité volumique de dipôles pour un matériau continu mais formé de molécules polarisables de moments dipolaires  $\vec{d}p$ . Cette densité est appelée vecteur polarisation, et notée  $\vec{P}$  telle que

$$\vec{P} = \frac{\vec{d}p}{dV}$$

## 8.5 Charges de polarisation

Le potentiel électrique  $V(M)$  régnant dans une région de l'espace sera alors en vertu du principe de superposition somme des potentiels créés par les dipôles (ou charges dites "liées") présents dans les molécules constituant le matériau, globalement neutre, et des potentiels créés par les autres charges, dites "libres" (présentes sur les armatures d'un condensateur par exemple).

Alors en appliquant la formule approchée donnant le potentiel créé par un dipôle

$$V_{\text{liées}} = \int \int \int_{\text{matériau}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{u}}{r^2} dV$$

Remarquons que

$$\frac{\vec{P} \cdot \vec{u}}{r^2} = \vec{P} \cdot \vec{\text{grad}} \frac{1}{r}$$

et que d'autre part pour un champ  $G$  et un champ vectoriel  $\vec{a}$

$$\text{div}(G\vec{a}) = G\text{div}\vec{a} + \vec{\text{grad}}G\vec{a}$$

donc

$$\frac{\vec{P} \cdot \vec{u}}{r^2} = -\frac{1}{r} \text{div}\vec{P} + \text{div} \frac{\vec{P}}{r}$$

et le potentiel devient

$$V_{\text{liées}} = \int \int \int_{\text{matériau}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \operatorname{div} \vec{P} + \operatorname{div} \frac{\vec{P}}{r} \right) dV$$

En appliquant la formule de Green-Ostrogradski au second membre il vient

$$V_{\text{liées}} = \int \int \int_{\text{matériau}} \frac{\rho_p dV}{4\pi\epsilon_0 r} + \int \int_S \frac{\sigma_p dS}{4\pi\epsilon_0 r}$$

en définissant

$$\rho_p = -\operatorname{div} \vec{P}$$

et

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

avec  $\vec{n}$  vecteur normal à la surface  $S$  du matériau dirigé vers l'extérieur de celle-ci.

$\rho_p$  représente la densité de charges de polarisation et se manifeste quand la compensation des charges en volume n'est pas totale.

$\sigma_p$  représente la densité surfacique de charges de polarisation se manifeste dans tous les cas car il ne peut y avoir compensation au niveau de la surface mais seulement dans le volume.

Remarquons que la neutralité électrique de la distribution de dipôles est respectée. En effet

$$\int \int \int_{\text{matériau}} \rho_p dV + \int \int_S \sigma_p dS = \int \int \int_{\text{matériau}} (-\operatorname{div} \vec{P}) dV + \int \int \int_{\text{matériau}} (\operatorname{div} \vec{P}) dV = 0$$

par Green-Ostrogradski.

## 8.6 Vecteur excitation électrique

En présence de charges liées et de charges libres, l'équation de Maxwell-Gauss s'écrit

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{liées}} + \rho_{\text{libres}})$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (-\operatorname{div} \vec{P} + \rho_{\text{libres}})$$

ainsi

$$\operatorname{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{libres}}$$

et on peut définir un nouveau vecteur  $\vec{D}$  dit vecteur excitation électrique tel que

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

et nous obtenons une équation de Maxwell-Gauss simplifiée reliant le vecteur excitation électrique à ses sources constituées des charges libres

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_{\text{libres}}$$

Le vecteur excitation électrique  $\vec{D}$  aura donc le même comportement que le vecteur champ électrique en présence de charges.

Nous pouvons ainsi reprendre la démonstration du théorème de Coulomb et montrer qu'à la traversée d'une interface chargée superficiellement et séparant deux milieux, la composante normale de  $\vec{D}$  subit une discontinuité

$$\vec{D}_{N2} - \vec{D}_{N1} = \sigma \vec{n}$$

## 8.7 Milieux diélectriques linéaires

Nous avons vu que l'apparition de charges de polarisation dans un matériau diélectrique est causée par l'application d'un champ électrique extérieur  $\vec{E}$ . Comme usuellement en physique, nous allons dans un premier temps proposer de relier cause et conséquence par une relation linéaire. Ainsi, si nous pouvons écrire (ce qui n'est pas vrai dans l'absolu)

$$\vec{D} = [\epsilon]\vec{E}$$

avec  $[\epsilon]$  une matrice  $3 \times 3$ , le matériau sera dit linéaire diélectriquement. La matrice  $[\epsilon]$  sera dite opérateur permittivité diélectrique.

Si cette matrice est proportionnelle à la matrice unité, on dira que le milieu est isotrope (dans ce cas le vecteur excitation électrique est parallèle au champ électrique), et si la constante de proportionnalité ne varie pas avec la position, on dira que le milieu est homogène.

En résumé pour un milieu linéaire, homogène et isotrope (DLHI)

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E}$$

avec  $\epsilon$  une constante.

Dans ce cas puisque

$$\text{div}\vec{D} = \rho$$

$$\text{div}\epsilon\vec{E} = \rho$$

$$\epsilon\text{div}\vec{E} + \vec{E}.\vec{\text{grad}}\epsilon = \rho$$

et si  $\epsilon$  est constant (milieu homogène spatialement) le second terme est nul et il reste

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

Cette équation très proche de l'équation de Maxwell-Gauss. Tout ce que nous avons démontré dans le vide reste donc vrai à condition de remplacer  $\epsilon_0$  par  $\epsilon$  qui s'exprime d'ailleurs dans la même unité.

On définit ainsi la permittivité relative  $\epsilon_r$  du milieu, sans dimension, telle que

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E}$$

La conséquence en est pour la densité de polarisation que

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0\vec{E} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E}$$

En posant  $\chi = \epsilon_r - 1$  on obtient de nouveau une relation linéaire entre cause et conséquences

$$\vec{P} = \chi\epsilon_0\vec{E}$$

$\chi$  sera appelée susceptibilité diélectrique.

Si désormais nous reprenons le calcul de la capacité  $C$  d'un condensateur plan formé de deux électrodes de surface  $S$  éloignées d'une distance  $d$  et séparées par un milieu de permittivité relative  $\epsilon_r$ , nous trouvons bien

$$C = \epsilon_0\epsilon_r \frac{S}{d}$$

avec un raisonnement similaire à celui employé dans le vide. On voit que la capacité augmente en présence d'un diélectrique d'où l'intérêt de développer des matériaux à permittivité très élevée et champ de claquage important, pour aider au stockage de l'énergie dans des véhicules hybrides par exemple.

## 8.8 Approche microscopique des milieux diélectriques

Dans les paragraphes précédents, nous avons modélisé les milieux diélectriques par un effet moyen des molécules. On peut aller cependant un peu plus loin en séparant les contributions moyennes des molécules constituant le milieu de leurs contributions locales.

### 8.8.1 Méthode de Lorentz

Ainsi, si nous considérons un milieu diélectrique où règnent un champ électrique  $\vec{E}$  et un vecteur excitation électrique  $\vec{D}$  homogènes (comme au sein d'un grand condensateur par exemple) nous pouvons autour d'un point  $M$  donné définir une sphère d'un rayon  $R$  petit mais décelable à l'échelle microscopique ; l'étude des molécules à l'extérieur de cette sphère pourra donc se faire d'un point de vue macroscopique comme dans les paragraphes précédents.

Par contre l'étude des molécules situées à l'intérieur de la sphère relève d'une étude microscopique.

Le champ  $\vec{E}_l$  régnant au centre de la sphère est donc en vertu du principe de superposition somme du champ  $\vec{E}$  créé par les charges libres (sur les armatures du condensateur par exemple), du champ  $\vec{E}_1$  créé par les charges liées au diélectrique à l'extérieur de la sphère, et du champ  $\vec{E}_2$  créé par les molécules présentes dans la sphère.

$$\vec{E}_l = \vec{E} + \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Or si nous supposons par exemple que la polarisation d'ensemble  $\vec{P}$  de la sphère microscopique est dirigée suivant la direction  $\vec{e}_z$  des coordonnées polaires, alors le champ  $\vec{E}_2$  créé par les charges liées au diélectrique à l'intérieur de la sphère est somme des contributions des charges surfaciques  $\vec{E}_{p2}$  telles que nous les avons vues au paragraphe précédent, et des contributions des charges volumiques.

$$d\vec{E}_{p2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sigma dS \vec{u}_{M \rightarrow N}$$

or

$$\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \cos \theta$$

Et par symétrie les contributions à  $\vec{E}_{p2}$  de part et d'autre de l'axe  $\vec{e}_z$  s'additionnent pour donner une résultante double suivant ce même axe pondérée par un  $\cos \theta$  en projection.

En sommant sur la moitié de la sphère située par exemple pour les  $x > 0$  il vient

$$\vec{E}_{p2} = \vec{e}_z \frac{P}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int \int_S \cos^2 \theta dS$$

or sur la demi-sphère

$$dS = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$

et finalement

$$\vec{E}_{p2} = \vec{e}_z \frac{P}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \vec{e}_z \frac{P}{3\epsilon_0}$$

en faisant le changement de variable trivial  $u = \cos \theta$

Ainsi le champ total régnant dans la sphère au point  $M$  vaut

$$\vec{E}_l = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} + \vec{E}_2$$

Dans un milieu gazeux, liquide ou solide totalement amorphe assimilable à une distribution de dipôles totalement irrégulière le champ  $\vec{E}_2$  est nul comme nous l'avons expliqué dans les paragraphes précédents, de même que pour un réseau régulier cubique dont  $M$  serait un nœud.

### 8.8.2 Polarisabilité d'un diélectrique

Rappelons que nous avons défini la polarisabilité  $\alpha$  d'un dipôle de moment  $\vec{p}$  soumis à un champ électrique local  $\vec{E}$  par

$$\vec{p} = \alpha \vec{E}$$

Si  $n$  dénote le nombre de dipôles par unité de volume alors

$$\vec{P} = n\vec{p} = n\alpha\vec{E}$$

#### Polarisabilité électronique

Rappelons que le moment dipolaire d'un nuage de charges  $q_i$  situées aux positions  $\vec{r}_i$  vaut

$$\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i$$

Pour un noyau d'hydrogène par exemple

$$\vec{p} = +|q_e|\vec{r}_{\text{noyau}} - |q_e|\vec{r}_{\text{electron}}$$

L'électron étant environ 1836 fois plus léger que le noyau, l'amplitude de son mouvement est bien plus importante, et on peut donc négliger en première approximation le mouvement du noyau sous l'effet d'un champ extérieur (c'est une des versions de l'approximation de Born-Oppenheimer)

Ainsi en simplifiant les notations

$$\vec{p} = -|q_e|\vec{r}$$

Dans la théorie simplifiée classique de l'électron élastiquement lié nous pouvons écrire l'équation de Newton pour l'électron de masse  $m$  soumis à une force de rappel  $-k\vec{r}$  et une force de freinage  $-h\dot{\vec{r}}$

$$m\ddot{\vec{r}} = -|q_e|\vec{E}_l - k\vec{r} - h\dot{\vec{r}}$$

La solution stationnaire pour  $\dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}} = \vec{0}$  vaut

$$-|q_e|\vec{E}_l - k\vec{r} = \vec{0}$$

donc

$$\vec{r} = -\frac{|q_e|}{k}\vec{E}_l$$

et

$$\vec{p} = -|q_e|\vec{r} = \frac{|q_e|^2}{k}\vec{E}_l$$

Si nous introduisons la pulsation  $\omega_0$  de l'oscillateur harmonique correspondant à la force de rappel élastique

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

donc

$$\vec{p} = -|q_e|\vec{r} = \frac{|q_e|^2}{m\omega_0^2}\vec{E}_l$$

donc la polarisabilité électronique statique vaut

$$\alpha_e = \frac{|q_e|^2}{m\omega_0^2}$$

Pour aller plus loin et préciser la valeur de la pulsation à partir de premiers principes, un traitement quantique de l'électron est nécessaire.

### Polarisabilité ionique

Dans le cas d'un cristal ionique on obtient un résultat tout à fait similaire en sommant sur les contributions des ions.

### Polarisabilité d'orientation pour des molécules polaires

Nous avons vu que dans un milieu désordonné constitué de molécules polaires, la polarisation moyenne est nulle par suite du désordre, en champ nul. Par contre si le champ local  $\vec{E}_l$  est non nul, on va observer une tendance à l'orientation de  $\vec{p}$  dans le sens de  $\vec{E}_l$  afin de minimiser l'énergie potentielle d'interaction  $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_l$  entre les dipôles et le champ. Cet effet est cependant contrarié par l'agitation thermique.

Quantitativement, supposons qu'il y a  $dn$  dipôles par unité de volume, contenus dans l'angle solide  $d\Omega$  défini autour de la direction  $\vec{u}$ . La densité de dipôles vaut

$$dn = A(\vec{u})d\Omega$$

Il se trouve que l'on peut en théorie cinétique classique (voir l'introduction du cours de thermodynamique correspondant) exprimer la probabilité  $p(E)$  de trouver un système dans l'état d'énergie  $E$  (l'état d'énergie la plus basse possible étant pris à  $E = 0$ )

par

$$p(E) \propto e^{-\frac{E}{k_b T}}$$

$k_b$  étant la constante de Boltzmann et  $T$  la température absolue du thermostat entourant le système.

Les probabilités étant normalisées à 1 on obtient ainsi la constante de proportionnalité.

Ici nous aurons

$$A(\vec{u}) = A_0 e^{-\frac{E_p}{k_b T}} = A_0 e^{-\frac{pE_l \cos\theta}{k_b T}}$$

si  $p$  dénote la norme de  $\vec{p}$  et  $\theta$  l'angle entre  $\vec{p}$  et  $\vec{E}_l$ .

Alors

$$dn = A_0 e^{a \cos\theta} d\Omega$$

avec  $a = \frac{pE_l}{k_b T}$

Par symétrie le vecteur polarisation résultant  $\vec{P}$  de norme  $P$  est colinéaire à  $\vec{E}_l$ .

Par conséquent

$$P = \int pA(\vec{u}) \cos \theta d\Omega$$

$$P = \int pA_0 e^{a \cos \theta} \cos \theta d\Omega$$

or l'élément d'angle solide vaut en intégrant sur l'angle polaire  $\theta$

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$$

soit

$$P = 2\pi pA_0 \int_0^\pi e^{a \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta$$

or

$$n = \int dn = 2\pi \int_0^\pi A_0 e^{a \cos \theta} \sin \theta d\theta$$

de cette dernière équation nous tirons  $A_0$  et finalement

$$\frac{P}{n} = p \frac{\int_0^\pi e^{a \cos \theta} \cos \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{a \cos \theta} \sin \theta d\theta}$$

ou

$$P = np\mathcal{L}(a)$$

avec  $\mathcal{L}(a)$  qui sera appelée fonction de Langevin.

Ainsi la polarisation moyenne est égale au produit de la densité de dipôles par unité de volume, de la valeur absolue d'un dipôle, et de cette fonction de Langevin dont nous pouvons remarquer qu'elle est égale au quotient de la dérivée d'une fonction  $D(a)$  par cette même fonction

$$\mathcal{L}(a) = \frac{\frac{d}{da} D(a)}{D(a)}$$

Nous reconnaissons une dérivée logarithmique

$$\mathcal{L}(a) = \frac{d}{da} \ln D(a)$$

avec

$$D(a) = \int_0^\pi e^{a \cos \theta} \sin \theta d\theta$$

En effectuant le changement de variable trivial  $u = \cos \theta$ , comme

$$du = -\sin \theta d\theta$$

il vient

$$D(a) = - \int_1^{-1} e^{au} du = \frac{1}{a} (e^a - e^{-a}) = \frac{2 \sinh a}{a}$$

et

$$\mathcal{L}(a) = \frac{d}{da} (\ln 2 - \ln a + \ln \sinh a)$$

soit



$$\mathcal{L}(a) = -\frac{1}{a} + \coth a$$

La fonction de Langevin tend vers 1 quand  $a$  tend vers l'infini (basses températures par exemple), et vers  $\frac{a}{3}$  quand  $a$  tend vers 0 (hautes températures, revoir la définition de  $a$  plus haut) comme le montre un développement limité que nous laisserons faire au lecteur.

Ainsi comme nous l'avons discuté qualitativement pour les hautes températures l'agitation thermique rend la moyenne de la polarisation d'orientation nulle. Par contre par exemple pour la température ambiante ( $T = 300K$ ), même pour un champ  $E_l$  intense de l'ordre de  $10^6 \text{ V.m}^{-1}$   $a$  est très petit et on peut assimiler  $\mathcal{L}(a)$  à sa limite.

Il vient donc dans ce cas des basses températures

$$P = np \frac{a}{3} = \frac{np^2 E_l}{3k_b T}$$

avec une polarisation colinéaire au champ local.

La polarisabilité d'orientation vaut donc

$$\alpha_o = \frac{p^2}{3k_b T}$$

Rappelons qu'elle se superpose aux polarisabilités ioniques et électroniques.

### Relation entre susceptibilité et polarisabilité

La polarisation totale  $\vec{P}$  s'exprime soit en fonction du champ total  $\vec{E}$  soit en fonction du champ local  $\vec{E}_l$ . Nous avons par ailleurs montré que

$$\vec{E}_l = \vec{E} + \frac{P}{3\epsilon_0}$$

Comme cette polarisation s'exprime soit en fonction de la susceptibilité  $\chi$  soit en fonction de la polarisabilité  $\alpha$

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{P} = n \alpha \vec{E}_l$$

en comparant ces deux formules et l'expression du champ local on obtient avec un peu d'algèbre

$$\chi \epsilon_0 = \frac{n \alpha}{1 - \frac{n \alpha}{3 \epsilon_0}}$$

Pour un milieu peu dense on peut négliger le terme correctif au dénominateur et on obtient

$$\chi \approx \frac{n \alpha}{\epsilon_0}$$

et on retrouve bien que le champ local est proche du champ total.

**Formule de Clausius-Mossoti**

Nous pouvons *a contrario* reprendre la formule précédente entre susceptibilité et polarisation pour trouver

$$\frac{n\alpha}{3\epsilon_0} = \frac{\frac{\chi}{3}}{1 + \frac{\chi}{3}}$$

Rappelons que

$$\vec{P} = \chi\epsilon_0\vec{E}$$

et que le vecteur déplacement électrique  $\vec{D}$  vaut

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

donc

$$\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi)\vec{E} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E}$$

et

$$\chi = \epsilon_r - 1$$

ainsi

$$\frac{n\alpha}{3\epsilon_0} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$

ce qui constitue la formule de Clausius-Mossoti.

Remarquons que la polarisabilité  $\alpha$  dépend de la température et que la densité  $n$  dépend de la pression et de la température. Par conséquent la permittivité relative  $\epsilon_r$  dépend elle aussi de ces mêmes paramètres.

On peut également exprimer la densité moléculaire  $n$  en fonction de la densité  $\rho$ , du nombre d'Avogadro  $\mathcal{N}_A$  et de la masse molaire  $M$

$$n = \mathcal{N}_A \frac{\rho}{M}$$

alors

$$\mathcal{N}_A \frac{\alpha}{3\epsilon_0} = \frac{M(\epsilon_r - 1)}{\rho(\epsilon_r + 2)}$$

Si nous supposons que polarisabilités électroniques et ioniques sont constantes, en reprenant la formule pour la polarisabilité totale incluant la dépendance de la polarisabilité d'orientation en fonction de la température

$$\alpha = \frac{p^2}{3k_b T} + \text{Constante}$$

on trouve donc une dépendance linéaire pour

$$\frac{M(\epsilon_r - 1)}{\rho_r + 2)}$$

en fonction de cette même température, plus ou moins importante en fonction du carré de la valeur du moment dipolaire  $p$ . Pour une molécule non polaire comme le méthane par exemple on peut prédire que  $\frac{M(\epsilon_r - 1)}{\rho_r + 2)}$  est à peu près indépendant de la température.

## 8.9 Polarisation électrique en régime variable

### 8.9.1 Notation complexe

Supposons, pour simplifier, que nous nous trouvons désormais en régime sinusoïdal forcé, comme par exemple nous pouvons souvent nous ramener en utilisant l'analyse de Fourier.

Ainsi si le champ électrique local vaut

$$\vec{E}_l = \vec{E}_0 \cos \omega t$$

en régime forcé le dipôle électrique local suivra avec un certain déphasage  $\phi$

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \cos(\omega t - \phi)$$

Ainsi  $\vec{E}_l$  et  $\vec{P} = n\vec{p}$  seront colinéaires mais déphasés.

Par conséquent comme

$$\vec{E}_l = \vec{E} + \frac{P}{3\epsilon_0}$$

et

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

de même  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$  et  $\vec{P}$  seront colinéaires et déphasés.

Si l'on pose

$$\vec{p}^* = \alpha^* \vec{E}_l^*$$

pour le choix de la représentation complexe

$$\vec{E}_l^* = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

avec  $\alpha^*$  polarisabilité électronique complexe, il vient naturellement que les coefficients sont les mêmes qu'en régime statique. L'existence éventuelle de parties imaginaires dans les coefficients traduit le déphasage entre les champs.

Par convention on prendra positives les parties imaginaires des différents coefficients et

$$\alpha^* = \alpha' + i\alpha''$$

$$\chi^* = \chi' + i\chi''$$

$$\epsilon_r^* = \epsilon_r' + i\epsilon_r''$$

Remarquons que dans le cas du choix inverse

$$\vec{E}_l^* = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

alors on aurait

$$\alpha^* = \alpha' - i\alpha''$$

$$\chi^* = \chi' - i\chi''$$

$$\epsilon_r^* = \epsilon_r' - i\epsilon_r''$$

### 8.9.2 Polarisation par déformation en régime variable

#### Théorie de l'électron élastiquement lié

Reprenons l'équation de Newton pour un électron supposé élastiquement lié, de masse  $m$  soumis à une force de rappel  $-k\vec{r}$  et une force de freinage  $-h\dot{\vec{r}}$

$$m\ddot{\vec{r}} = -|q_e|(\vec{E}_l + \dot{\vec{r}} \wedge \vec{B}_l) - k\vec{r} - h\dot{\vec{r}}$$

en incluant désormais la contribution magnétique à la force de Lorentz. Remarquons que pour une onde électromagnétique plane le champ magnétique est  $c$  fois plus petit que le champ électrique dans le vide et donc souvent négligeable.

La force de freinage est issue d'une part des chocs entre particules, et donc négligeable si le milieu est peu dense, et d'autre part du rayonnement de freinage émis par toute particule accélérée (voir les exercices et le cours correspondants). Ce terme est à prendre en compte aux fortes accélérations, typiquement pour une fréquence comprise entre  $10^{15}$  et  $10^{17}$  Hz, donc dans le domaine des rayonnements allant de l'ultraviolet aux rayons X. Au delà il faudrait introduire la relativité dans les équations car les vitesses s'approcheraient de celle de la lumière.

Il existe un effet similaire pour les ions d'un cristal ionique, pour des fréquences divisées par le rapport de la masse de l'ion sur celle de l'électron, donc typiquement entre  $10^{12}$  et  $10^{14}$  Hz donc dans l'infrarouge proche.

Pour l'atome d'hydrogène, à un électron, en posant derechef

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

on obtient donc

$$m\ddot{\vec{r}} = -|q_e|\vec{E}_l - k\vec{r} - h\dot{\vec{r}}$$

en régime forcé par

$$\vec{E}_l = \vec{E}_0 \cos \omega t$$

en posant

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cos(\omega t - \phi)$$

il vient

$$\vec{r}_0 e^{i\phi} = -\frac{|q_e|}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau})} \vec{E}_0$$

en posant  $\tau = \frac{m}{h}$ .

Le vecteur dipôle électrique, en négligeant le mouvement des noyaux, vaut

$$\vec{p} = -|q_e|\vec{r} = \vec{p}_0 \cos(-\omega t + \phi)$$

comme en notation complexe

$$\vec{p}_0 e^{i\phi} = \alpha^* \vec{E}_0$$

il vient

$$\alpha^* = \frac{|q_e|^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau})}$$

**Milieu peu dense**

Dans le cas d'un milieu dilué où l'amortissement est faible, on peut négliger le terme imaginaire au dénominateur. Dans ce cas

$$\alpha \approx \frac{|q_e|^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

L'électron se comporte alors comme un oscillateur faiblement amorti, et l'on est dans une région de transparence. De plus on retrouve la polarisabilité statique si  $\omega$  est faible face à  $\omega_0$ . Au contraire au voisinage de  $\omega_0$  on a une résonance et l'électron effectue des oscillations de forte amplitude ; les accélérations sont fortes et le rayonnement de freinage n'est plus négligeable. On dit que l'on est dans une région d'absorption et la polarisabilité devient complexe.

**Région d'absorption**

Cette polarisabilité avait été définie comme

$$\alpha^* = \alpha' + i\alpha''$$

par conséquent comme

$$\alpha^* = \frac{|q_e|^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau})}$$

on obtient

$$\alpha' = \frac{|q_e|^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

et

$$\alpha'' = \frac{|q_e|^2}{m} \frac{\frac{\omega}{\tau}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

on peut facilement montrer que  $\alpha'$  est extrémal pour

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 \pm \frac{\omega}{\tau}} \approx \omega_0 \pm \frac{1}{2\tau}$$

et qu'aux extréma on atteint les valeurs  $\mp \alpha_{\text{statique}} \omega_0 \tau$ .

alors que  $\alpha''$  est extrémal pour  $\omega \approx \omega_0$  au premier ordre en  $\frac{1}{\tau}$ .

On a donc une région d'absorption importante autour de  $\omega_0$ .

**Influence de la densité**

Nous avons montré plus haut que

$$\chi \epsilon_0 = \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3\epsilon_0}}$$

Au premier ordre pour les faibles densités, en étendant aux complexes on a donc

$$\chi^* = \frac{n\alpha^*}{\epsilon_0}$$

ce qui donnera une susceptibilité ou une permittivité imaginaire non nulle dans la zone d'absorption.

Si par contre on tient compte de la densité au dénominateur, on voit qu'on aura un décalage de la zone d'absorption à mesure que la densité augmente.

### Atome à plusieurs électrons

Si nous considérons désormais que l'atome ou la molécule étudiée possèdent plusieurs électrons, en première approximation on peut sommer sur les niveaux électroniques  $j$  de population  $n_j$  possédant chacun une fréquence de résonance  $\omega_j$  pour obtenir

$$\epsilon_r^* - 1 = \chi^* = \frac{|q_e|^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{n_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau_j}}$$

Dans le cas d'un cristal ionique dont chaque atome a une masse  $m_j$  et présente une charge  $q_j$  et un temps caractéristique  $\tau_j$  on obtient de même

$$\epsilon_r^* - 1 = \chi^* = \sum_j \frac{|q_j|^2}{\epsilon_0 m_j} \frac{n_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau_j}}$$

On peut inclure les électrons comme l'une des charges  $j$  de ce dernier système ce qui simplifiera les équations.

### 8.9.3 Application à l'optique

#### Indice complexe

Considérons un système formé de vide pour  $x < 0$  et d'un milieu infiniment long pour  $x \geq 0$ .

Supposons qu'une onde électromagnétique plane polarisée rectilignement suivant  $\vec{O}y$  frappe l'interface.

Dans le vide le champ électrique vaut donc

$$\vec{E}_v = \vec{E}_{v0} e^{i(k_0 x - \omega t)}$$

avec un vecteur d'onde

$$\vec{k}_0 = \frac{\omega}{c} \vec{e}_x = \frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{e}_x$$

et dans le milieu

$$\vec{E}_m = \vec{E}_{m0} e^{i(kx - \omega t)}$$

avec un vecteur d'onde

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_x = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}_x$$

Par convention l'indice optique  $n^*$  est égal au rapport de la célérité de la lumière dans le vide par rapport à celle dans le milieu. Comme par continuité temporelle du champ électrique à l'interface les pulsations sont les mêmes dans le vide et dans le milieu on a

$$n^* = \frac{k}{k_0}$$

La résolution des équations de Maxwell dans le vide et dans le milieu donne facilement

$$k_0^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2$$

$$k^2 = \epsilon \mu_0 \omega^2$$

or

$$\varepsilon = \varepsilon_0(\varepsilon'_r + i\varepsilon''_r)$$

donc

$$(n^*)^2 = \varepsilon'_r + i\varepsilon''_r$$

si l'on décompose  $n^*$  en parties réelles et imaginaires selon

$$n^* = n' + in''$$

on obtient

$$\begin{aligned}\vec{E}_m &= \vec{E}_{m0} e^{i(kx - \omega t)} \\ \vec{E}_m &= \vec{E}_{m0} e^{i(n^* k_0 x - \omega t)} \\ \vec{E}_m &= \vec{E}_{m0} e^{i((n' + in'')k_0 x - \omega t)} \\ \vec{E}_m &= \vec{E}_{m0} e^{-n'' k_0 x} e^{i(n' k_0 x - \omega t)}\end{aligned}$$

on a donc atténuation de l'onde dans le milieu, avec perte d'énergie par rayonnement des électrons des atomes par exemple.

La solution physique de  $(n^*)^2 = \varepsilon'_r + i\varepsilon''_r$  correspond donc à  $n'' > 0$  sinon on aurait amplification de l'onde dans le milieu.

Le plus facile pour calculer  $n'$  et  $n''$  est de passer en notation trigonométrique selon

$$\varepsilon_r^* = |\varepsilon_r^*| e^{i\psi} = \varepsilon'_r + i\varepsilon''_r$$

Rappelons que nous avons choisi  $\varepsilon''_r > 0$  donc  $\psi$  est compris entre 0 et  $\pi$ . Par conséquent

$$n^* = \sqrt{|\varepsilon_r^*|} e^{i\frac{\psi}{2}}$$

et on a bien  $n'' > 0$ .

$n''$  est appelé indice d'extinction et  $n'$  l'indice de réfraction ou l'indice de propagation de phase.

Rappelons que l'on peut avoir plusieurs bandes d'absorption optique centrées autour des fréquences de résonance ioniques ou électroniques.

### Régions de transparence : relation de Sellmeier

Rappelons que nous avons trouvé

$$\varepsilon_r^* = (n^*)^2 = 1 + \sum_j \frac{|q_j|^2}{\varepsilon_0 m_j} \frac{n_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau_j}}$$

Dans les régions de transparence, loin des pulsations de résonance, on aura donc

$$\varepsilon_r^* = n^2 = 1 + \sum_j \frac{|q_j|^2}{\varepsilon_0 m_j} \frac{n_j}{\omega_j^2 - \omega^2}$$

Si on exprime ce résultat en fonction des longueurs d'onde  $\lambda$  et  $\lambda_j$  telles que

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

et

$$\omega_j = \frac{2\pi c}{\lambda_j}$$

on obtient

$$n^2 = 1 + \sum_j \frac{|q_j|^2}{\epsilon_0 m_j 4\pi c^2} \frac{n_j}{\frac{1}{\lambda_j^2} - \frac{1}{\lambda^2}}$$

soit en introduisant des coefficients  $a_j$  pour simplifier l'expression

$$n^2 = 1 + \sum_j \frac{a_j}{\frac{1}{\lambda_j^2} - \frac{1}{\lambda^2}}$$

avec un peu d'algèbre

$$n^2 = 1 + \sum_j \frac{a_j \lambda_j^2 (\lambda^2 - \lambda_j^2 + \lambda_j^2)}{\lambda^2 - \lambda_j^2}$$

$$n^2 = 1 + \sum_j a_j \lambda_j^2 + \sum_j \frac{a_j \lambda_j^4}{\lambda^2 - \lambda_j^2}$$

formule que l'on peut résumer sous la forme de la relation de Sellmeier

$$n^2 = n_\infty^2 + \sum_j \frac{A_j}{\lambda^2 - \lambda_j^2}$$

formule qui donne la variation de l'indice d'un milieu transparent en fonction de la longueur d'onde, et donc la relation de dispersion dans le milieu permettant d'expliquer des phénomènes tels que la décomposition de la lumière par un prisme par exemple.

### Formule de Cauchy

Dans le domaine de la lumière visible, la fréquence du rayonnement est bien inférieure à la fréquence de résonance des électrons, et donc si le milieu est transparent on a

$$\omega_j \gg \omega$$

donc

$$\lambda \gg \lambda_j$$

et on peut simplifier la relation de Sellmeier en

$$n^2 = n_\infty^2 + \sum_j \frac{A_j}{\lambda^2}$$

et si l'on ne conserve que la résonance électronique en négligeant les résonances ioniques

$$n^2 = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

ce qui constitue la formule de Cauchy, souvent suffisante en pratique pour modéliser la variation de l'indice d'un verre optique en fonction de la longueur d'onde de la lumière.



## 8.10 Polarisation d'orientation en régime variable

Nous avons établi que les molécules polaires avaient tendance à orienter leur dipôle dans le sens du champ électrique local afin de minimiser l'énergie potentielle, cette tendance étant contrariée par l'agitation thermique.

Cependant, si on supprime instantanément le champ local, on constate que la dépoliarisation des molécules n'est pas instantanée. Debye a introduit l'équation différentielle du premier ordre suivante pour modéliser le phénomène de relaxation de la polarisation  $\vec{P}$  :

$$\tau \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{P} = \vec{0}$$

avec une solution en

$$\vec{P} = \vec{P}_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\tau$  étant un temps de relaxation qui a pour valeur typique  $10^{-7}$  s . En présence d'un champ local l'équation devient

$$\tau \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{P} = n\alpha_0 \vec{E}_l$$

ce qui entraîne que pour les temps longs la polarisation tend vers la valeur statique  $n\alpha_0 \vec{E}_l$ .

On admettra que cette équation reste valable pour un champ  $\vec{E}_l$  dépendant du temps par exemple sous la forme

$$\vec{E}_l = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

Si  $\omega$  est petit devant  $\frac{1}{\tau}$  l'orientation des dipôles suit sans retard l'orientation du champ et la polarisabilité sera proche de la valeur statique.

Si ces valeurs sont comparables il apparaîtra un déphasage entre la polarisation et le champ local.

Si enfin  $\omega$  est très grand devant  $\frac{1}{\tau}$  les oscillations du champ étant trop rapide, les dipôles n'auront pas le temps de s'orienter et la polarisabilité tendra vers 0.

Quantitativement en introduisant une polarisation complexe

$$\vec{P}^* = n\alpha^* \vec{E}_l$$

l'équation différentielle en régime forcé établi donne

$$\vec{P}^* (1 - i\omega\tau) = n\alpha_0 \vec{E}_l$$

d'où

$$\alpha^* = \frac{\alpha_0}{1 - i\omega\tau} = \alpha' + i\alpha''$$

d'où

$$\alpha' = \frac{\alpha_0}{1 + \omega^2\tau^2}$$

$$\alpha'' = \frac{\alpha_0\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

Par conséquent on voit bien que  $\alpha'$  décroît avec la fréquence en partant de la valeur statique et tend vers 0, alors que  $\alpha''$  partant de 0 présente un maximum pour  $\omega = \frac{1}{\tau}$  et tend ensuite vers 0.

### 8.11 Courant de polarisation

La présence d'un champ local  $\vec{E}_l(t)$  va causer une mise en mouvement partielle des charges liées et donc engendrer un courant.

Par exemple dans le cas de l'atome d'hydrogène le moment dipolaire vaut

$$\vec{p} = -|q_e|\vec{r}$$

où  $\vec{r}$  est la position de l'électron et  $|q_e|$  sa charge. Si la répartition des dipôles est uniforme, avec  $n$  la densité, le vecteur polarisation vaut

$$\vec{P} = -n|q_e|\vec{r}$$

alors que par définition le courant  $\vec{j}_p$  associé aux charges de polarisation vaut

$$\vec{j}_p = \Sigma_i \rho_i \vec{v}_i = -n|q_e|\dot{\vec{r}}$$

par conséquent

$$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Nous pouvons vérifier que cette expression est en accord avec la loi de conservation de la charge. En effet comme

$$\rho_p = -\text{div} \vec{P}$$

la divergence de l'expression précédente donne

$$\text{div} \vec{j}_p = \text{div} \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_p}{\partial t}$$

ce qui vérifie bien la conservation de la charge.

### 8.12 Puissance volumique moyenne dissipée dans un diélectrique isolant

Si un diélectrique est isolant, il n'y aura pas de courant de conduction et uniquement un courant de polarisation. Faisons l'hypothèse simplificatrice que ce diélectrique est peu dense ce qui permettra d'assimiler le champ électrique au champ local. Dans ce cas la puissance dissipée dans le diélectrique a pour densité volumique

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

soit ici

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial d\tau} = \vec{j}_p \cdot \vec{E}_l$$

En régime sinusoïdal forcé établi et en notation complexe prenons

$$\vec{E}_l = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

Si le milieu est peu dense

$$\vec{P} = n\alpha^* \vec{E} = \chi^* \epsilon_0 \vec{E} \approx \chi^* \epsilon_0 \vec{E}_l$$

soit

$$\vec{P} = (\epsilon'_r - 1 + i\epsilon''_r)\epsilon_0\vec{E}_0e^{-i\omega t}$$

La puissance moyenne dissipée vaudra donc

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \right\rangle = \langle \vec{J}_p \cdot \vec{E}_l \rangle$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{J}_p \cdot \text{Conjg} \vec{E}_l)$$

en employant le raccourci déjà utilisé dans le chapitre sur les puissances en électromagnétisme.

Comme nous avons montré au paragraphe précédent que

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

en introduisant

$$\vec{P} = (\epsilon'_r - 1 + i\epsilon''_r)\epsilon_0\vec{E}_0e^{-i\omega t}$$

$$\vec{J}_p = (-i\omega)(\epsilon'_r - 1 + i\epsilon''_r)\epsilon_0\vec{E}_0e^{-i\omega t}$$

donc

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2} \text{Re}((-i\omega)(\epsilon'_r - 1 + i\epsilon''_r)\epsilon_0\vec{E}_0e^{-i\omega t} \cdot \text{Conjg} \vec{E}_0e^{-i\omega t})$$

soit

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2} \text{Re}((-i\omega\epsilon'_r - 1 + \omega\epsilon''_r)\epsilon_0E_0^2)$$

et finalement

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{2} \omega\epsilon''_r\epsilon_0E_0^2$$

et on retrouve bien que la partie imaginaire de la permittivité relative, si elle est non nulle dans un certain domaine de fréquences, correspond à une perte d'énergie par échauffement du milieu. Ceci est modélisé par la résistance de fuite des condensateurs.

### 8.13 Conclusion : les trois types de polarisation

On conclut donc que la polarisabilité d'orientation correspond au phénomène de plus grande inertie et disparaît la première, sans effet de résonance, en général dans le domaine des ondes radio (vers  $f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 10^6$  Hz).

On trouve ensuite les résonances ioniques et électroniques dans l'infrarouge et dans l'ultraviolet.



# Chapitre 9

## Milieux magnétiques

### 9.1 Modélisation dipolaire

#### 9.1.1 Moment magnétique

De la même façon que nous avons défini les dipôles électrostatiques par un moment, nous pouvons introduire la définition du moment  $\vec{\mathcal{M}}$  d'une distribution de courants  $\vec{j}$  localisée dans un petit volume  $V$  définissant un circuit électrique

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{r} \wedge \vec{j} dV$$

Ou en supposant que la densité de courant  $\vec{j}$  est uniforme, il est possible de la sortir de l'intégrale par

$$\vec{j} dV = \vec{j} (\vec{dS} \cdot \vec{dr})$$

$$\vec{j} dV = (\vec{j} \cdot \vec{dS}) \cdot \vec{dr}$$

donc

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{r} \wedge I \vec{dr} = I \vec{S}$$

par définition du vecteur surface  $\vec{S} = \iint \vec{dS}$  d'une courbe  $C$  enserrant le volume  $V$  et définissant le circuit et de l'intensité électrique  $I$  traversant la surface qui lui est orthogonale.

#### 9.1.2 Potentiel vecteur créé par un dipôle magnétique

Rappelons que le potentiel vecteur obéit dans les conditions de jauge convenable à une équation de Poisson analogue à celle de l'électrostatique

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

et que donc par analogie avec le champ électrique créé par une distribution de charges

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j} dr'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

ou en passant à l'intensité électrique, en supposant  $\vec{j}$  constant sur un circuit  $C$  d'élément de longueur  $\vec{dl}(\vec{r}')$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{I}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{dl}(\vec{r}')$$

(formule qui redonne bien celle de Biot et Savart si on en prend le rotationnel)

Si on applique la deuxième formule du gradient qui dit que

$$\oint_C \lambda d\vec{l} = \iint_S d\vec{S} \wedge \text{grad}\lambda$$

pour toute surface  $S$  s'appuyant sur  $C$

(formule obtenue en multipliant scalairement à gauche par un vecteur  $\vec{a}$  constant puis en appliquant la formule de Stokes et celle du produit mixte, sachant que

$$\text{rot}\vec{\lambda} = \lambda \text{rot}\vec{a} + (\text{grad}\lambda) \wedge \vec{a}$$

)

avec cette formule du gradient, donc, il vient

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S I d\vec{S}' \wedge \text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

et en développant l'expression du gradient

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

en utilisant l'approximation du circuit élémentaire, avec  $r = |\vec{r} - \vec{r}'|$  distance entre ce circuit à la position  $\vec{r}'$  et le point  $\vec{r}$  où le potentiel vecteur est calculé, et  $\vec{u}$  vecteur unitaire de ce même vecteur  $\vec{r} - \vec{r}'$  en prenant garde au signe lors du calcul du gradient.

Cette dernière formule, élégante, est à rapprocher de celle donnant le potentiel électrostatique créé par un dipôle électrique.

En supposant que  $r' = 0$  (dipôle à l'origine du repère des sphériques) et en supposant que  $\vec{\mathcal{M}}$  est orienté suivant l'axe  $Oz$ , ce que nous pouvons toujours faire, il est alors facile d'établir

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \mathcal{M} \sin\theta \vec{e}_\phi$$

puis de prendre le rotationnel de cette expression pour trouver

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} 2\mathcal{M} \cos\theta$$

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \mathcal{M} \sin\theta$$

ou sous une forme plus compacte

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (3(\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{u})\vec{u} - \vec{\mathcal{M}})$$

formule à rapprocher du résultat obtenu en électrostatique.

## 9.2 Milieux magnétiques

### 9.2.1 Sources microscopiques de l'aimantation

#### Courants ampériens

Nous avons déjà évoqué l'hypothèse d'Ampère lors de la discussion des causes du champ magnétique. N'est-il pas paradoxal en effet que les causes du champ magnétiques soient des courants (c'est à dire des charges en mouvement) alors que les sources les plus usuelles de champ magnétique soient les aimants, où il est difficile de voir où se trouverait un éventuel courant ? Ampère avait donc dès 1821 émis l'hypothèse que les milieux magnétiques étaient constitués d'une infinité de dipôles élémentaires créés par des boucles de courant microscopiques.

### Moment magnétique orbital de l'électron

Ces boucles de courant élémentaires ne sont autres que les électrons circulant autour des noyaux des atomes. Considérons l'atome de Bohr, formé d'un électron de masse  $m_e$  et de charge  $-|q_e|$  en orbite circulaire autour d'un proton supposé fixe. L'orbite de cet électron est parcourue en une période  $T$ , l'intensité électrique correspondante vaut donc

$$I = \frac{-|q_e|}{T} = -|q_e| \frac{\omega}{2\pi}$$

avec  $\omega$  la vitesse angulaire de l'électron.

D'après la définition du moment magnétique créé par cette boucle de courant de surface  $S$

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}} &= I\vec{S} = I\pi r^2 \vec{e}_z \\ \vec{\mathcal{M}} &= -|q_e| \frac{\omega}{2\pi} \pi r^2 \vec{e}_z \\ \vec{\mathcal{M}} &= -|q_e| \frac{\omega}{2} r^2 \vec{e}_z\end{aligned}$$

Si nous considérons le moment cinétique orbital  $\vec{L}$  de l'électron

$$\vec{L} = m_e \vec{r} \wedge \vec{v} = m_e r^2 \omega \vec{e}_z$$

par conséquent

$$\vec{\mathcal{M}} = -\frac{|q_e|}{2m_e} \vec{L}$$

Expérimentalement, pour un système réel, on relie  $\vec{\mathcal{M}}$  à  $\vec{L}$  par la relation

$$\vec{\mathcal{M}} = -a\vec{L}$$

où  $a$  est le rapport gyromagnétique. En effet l'approximation de l'atome de Bohr n'est jamais totalement vraie pour diverses raisons liées à la mécanique quantique, aux couplages divers, au fait que les atomes ont plusieurs électrons, et  $a$  diffère de façon plus ou moins grande de  $\frac{|q_e|}{2m_e}$  suivant la complexité du système étudié. Une conséquence de cette relation est l'effet Einstein-de Haas : en modifiant l'aimantation d'un système, on peut modifier son moment cinétique et donc le mettre en mouvement.

D'autre part, dans le modèle de l'atome de Bohr, le moment cinétique orbital de l'électron est quantifié suivant

$$\vec{L} = \hbar \vec{J}$$

avec  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  la constante de Planck qui vaut  $1,0546 \cdot 10^{-34}$  J.s (voir le cours de physique quantique).

$$|\vec{J}| = \sqrt{J(J+1)}$$

avec  $J$  un nombre entier ou demi-entier (d'où la notion de quantification de l'énergie).

On appelle la quantité  $\mu_b = \frac{|q_e|}{2m_e} \hbar$  le magnéton de Bohr.

On introduit ainsi le facteur de Landé  $g$  tel que

$$\vec{\mathcal{M}} = -g\mu_b \vec{J}$$

et on constate que  $g$  varie entre 1 et 2 suivant la nature du système considéré.

En particulier, l'électron lui-même possède un moment cinétique intrinsèque de rotation sur lui-même (dit "spin") pour lequel  $g \approx 2$  (loin du résultat classique).

D'autre part, si on applique au matériau un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  alors en notant  $m$  le nombre quantique magnétique

$$m = \vec{J} \cdot \vec{e}_z$$

suivant l'état du système  $m$  ne pourra prendre que  $2J + 1$  valeurs entre  $-J$  et  $m = +J$ . Par conséquent l'énergie d'interaction du système avec le champ magnétique qui vaut

$$\mathcal{E} = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B} = mg\mu_b B$$

sera elle-même quantifiée. On voit apparaître dans ce cas une influence de  $m$  sur l'énergie du système alors qu'en l'absence de champ magnétique ce nombre quantique n'a pas d'influence (levée de dégénérescence par effet Zeeman).

### 9.3 Étude macroscopique des milieux magnétiques

#### 9.3.1 Courants d'aimantation volumiques et surfacique

De la même façon que nous avons défini dans l'étude de l'électrostatique dans les milieux matériels une densité de dipôles, dans le cas du magnétisme on définit à partir du moment local une densité d'aimantation volumique  $\vec{M}$  telle que

$$\vec{M} = \frac{d\vec{\mathcal{M}}}{dV}$$

S'il y a des excédents locaux de courant liés à cette aimantation, il apparaît donc, encore une fois par analogie avec les relations établies en électrostatique pour la densité de charges, un courant d'aimantation volumique  $\vec{j}_M$  tel que

$$\vec{j}_M = \text{rot}\vec{M}$$

Remarquons que si l'aimantation est uniforme, ces courants sont nuls, sauf éventuellement près de la surface où il y aura forcément une discontinuité de  $\vec{M}$ .

On définit ainsi une densité de courants d'aimantation de surface dirigée vers l'extérieur du matériau :

$$\vec{j}_{SM} = \vec{M} \wedge \vec{n}$$

comme nous avons défini la densité de charges surfaciques d'un matériau.

Par exemple, dans le cas d'un aimant cylindrique magnétisé uniformément suivant son axe avec  $\vec{M} = M\vec{e}_z$

il apparaît une densité de courants d'aimantation orthoradiale  $\vec{j}_{SM} = M\vec{e}_\theta$ , et ce système est donc totalement analogue à un solénoïde à  $n$  spires par unité de longueur parcouru par un courant surfacique  $\vec{j}_{SM} = nI$ , ce qui nous permet de calculer facilement le champ magnétique créé sur l'axe .

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{2} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \vec{e}_z$$

où  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont les angles sous lesquels les faces sont vues.



### 9.3.2 Équations de Maxwell dans les milieux

De la même façon que nous avons modifié l'équation de Maxwell-Gauss pour prendre en compte l'effet sur le champ électrique de toutes les charges (libres et liées au milieu) et ainsi introduit le vecteur déplacement électrique, il nous faut désormais modifier l'équation de Maxwell-Ampère de la même façon.

Le champ magnétique  $\vec{B}$  est toujours de divergence nulle, mais ses sources consistent en tous les courants (libres de densité  $\vec{j}$ , de déplacement  $\vec{j}_D$  et liés au matériau : courants d'aimantation  $\vec{j}_M$  et de polarisation  $\vec{j}_P$ ).

Ainsi l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit-elle

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_M + \vec{j}_P + \vec{j}_D)$$

ou en remplaçant ces divers courants par leurs expressions

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \text{rot}\vec{M} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

souvenons-nous que le vecteur déplacement électrique  $\vec{D}$  est défini par

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

il vient donc

$$\text{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

et si nous définissons un vecteur excitation magnétique  $\vec{H}$  tel que

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

il vient

$$\text{rot}(\vec{H}) = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

forme modifiée des équations de Maxwell-Ampère dans un milieu matériel.

Remarquons que si nous prenons la divergence de cette expression, en vertu de la loi de conservation de la charge il apparaît

$$\text{div}\vec{H} = 0$$

Dans un régime quasi-permanent, le terme dépendant du temps disparaît et on obtient le théorème d'Ampère dans un milieu matériel parcouru par un courant  $I$  traversant une surface enserrée par un circuit  $C$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

de même on peut démontrer que les relations de passage entre deux milieux (théorème de Coulomb) sont analogues à celles obtenues pour  $\vec{B}$  au facteur  $\mu_0$  près : la composante tangentielle de  $\vec{H}$  entre deux milieux varie de

$$\vec{H}_{t2} - \vec{H}_{t1} = \vec{j}_S \wedge \vec{n}$$

### 9.3.3 Relations constitutives

#### Milieu linéaire

De même que dans le cas électrique, on peut écrire en première approximation une relation linéaire entre cause de l'excitation (aimantation) et conséquence (excitation magnétique). Ainsi on définit la susceptibilité magnétique  $\chi$ , sans unité, telle que

$$\vec{M} = \chi \vec{H}$$

dans la mesure où cette relation est valable (milieu linéaire, homogène, isotrope). Par exemple, dans les milieux dits diamagnétiques (la plupart des matériaux),  $\chi$  a une valeur négative, pour des raisons liées à la loi de Lenz que nous détaillerons plus loin, mais de valeur absolue très faible (de  $10^{-9}$  dans les gaz à  $10^{-6}$  dans les liquides). Ainsi, toute matière a un comportement magnétique à condition d'être soumise à un champ suffisamment intense : on a pu faire léviter une grenouille grâce à des aimants supraconducteurs !

Dans les milieux dits paramagnétiques, beaucoup moins nombreux, pour des raisons quantiques liées par exemple à la règle de Hund sur laquelle nous reviendrons,  $\chi$  a une valeur du même ordre de grandeur que dans les diamagnétiques, mais positive. Le dioxygène présente de telles propriétés.

Pour ces milieux, la susceptibilité suit la loi de Curie

$$\chi = \frac{C}{T}$$

où  $C$  est une constante dite constante de Curie et  $T$  la température absolue en Kelvins.

Dans les milieux dits ferromagnétiques, qui sont constitués par quelques cas particuliers comme le fer, le cobalt et le nickel, les propriétés magnétiques sont beaucoup plus intenses mais dépendent de l'histoire du matériau et ne peuvent donc être résumées par une relation linéaire simple entre cause et conséquence ; nous y reviendrons.

Finalement si nous revenons à la définition de  $\vec{H}$  on a

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

donc

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \chi \vec{H})$$

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H}$$

et on définit une perméabilité relative sans unité

$$\mu_r = 1 + \chi$$

et absolue

$$\mu = \mu_0(1 + \chi)$$

#### Énergie d'un milieu magnétique linéaire

On peut montrer comme nous l'avons déjà fait dans le vide que l'énergie d'un milieu magnétique linéaire vaut

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \int \int \int \vec{B} \cdot \vec{H} dV$$

en intégrant sur tout le milieu et en introduisant un vecteur de Poynting modifié  $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ .

En rajoutant ce terme au premier principe de la thermodynamique, et en tenant compte de la loi de Curie, on peut montrer qu'il est possible de faire varier la température en changeant le champ magnétique ("démagnétisation adiabatique"), ce qui est un processus d'obtention de très basses températures proches du zéro absolu.

### Force subie par un milieu aimanté

De même que nous avons calculé la force et les couples subis par un dipôle électrique, on peut montrer que la force totale  $\vec{R}$  subie par un milieu aimanté soumis à un champ appliqué  $\vec{B}_a$  vaut pour sa composante suivant  $x$  par exemple

$$R_x = \int \int \int \vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}_a}{\partial x} dx dy dz$$

et ainsi de suite pour les autres composantes.

Dans le cas d'un milieu linéaire homogène et isotrope on obtient donc

$$\vec{R} = \frac{\chi}{2\mu_0} \int \int \int \text{grad} B^2 dV$$

en assimilant  $\vec{B}_a$  à  $\vec{B}$ .

La force locale est donc normale aux surfaces où  $\vec{B}$  est constant.

## 9.4 Étude microscopique des milieux magnétiques

Pour la majorité des matériaux, l'aimantation est nulle en l'absence de champ magnétique appliqué. Il se peut cependant que les atomes ou molécules formant une substance présentent un moment magnétique, mais du fait de l'agitation thermique, leur moyenne sur un échantillon macroscopique est nulle.

On appelle ces matériaux paramagnétiques ou diamagnétiques suivant qu'en réaction à l'application d'un champ magnétique extérieur apparaisse une aimantation faible respectivement dans la même direction ou en sens opposé à ce champ.

### 9.4.1 Diamagnétisme

#### Modélisation simple de l'origine du phénomène

Considérons le modèle d'un électron dans l'atome de Bohr. Si on fait passer progressivement de  $\vec{O}$  à  $\vec{B}$  la valeur du champ magnétique appliqué le mouvement de l'électron se trouve perturbé. Cette perturbation, action d'un champ magnétique sur le courant constitué par la circulation de l'électron autour du noyau, est donc un phénomène d'induction et obéit à la loi de Lenz, en sens opposé à la perturbation : d'où la création d'un moment magnétique en sens contraire à  $\vec{B}$ .

Le diamagnétisme est une propriété générale qui peut être cachée par des propriétés supplémentaires du matériau (paramagnétisme, ferromagnétisme).

En l'absence de champ magnétique (pour  $t < 0$  par exemple) supposons que la vitesse angulaire de l'électron vaut  $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{u}_z$ .

La force  $\vec{F}$  qui s'exerce sur l'électron se réduit à la force électrostatique de Coulomb proportionnelle au champ électrique  $\vec{E}$  et vaut

$$\vec{F} = -|q_e| \vec{E} = -\frac{Z|q_e|^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = |q_e| \vec{\text{grad}} V$$

avec  $Z$  le nombre de protons dans le noyau,  $-|q_e|$  la charge de l'électron,  $r$  sa distance au noyau,  $\vec{e}_r$  le vecteur radial et  $V$  le potentiel créé par le noyau.

Si l'on applique progressivement  $\vec{B}$  entre les instants  $t = 0$  et  $t = t_1$  (avec  $\vec{B}$  constant pour  $t > t_1$ )

une nouvelle force  $\vec{F}^*$  apparaît et s'exerce sur l'électron de vitesse  $\vec{v}$  : c'est une combinaison de la force de Lorentz et de l'effet du champ de Neumann  $\vec{E}_m$

$$\vec{F}^* = -|q_e|(\vec{E}_m + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

avec

$$\vec{E}_m = -\vec{\text{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

où  $\vec{A}$  est le potentiel vecteur dont dérive  $\vec{B}$ . (voir les chapitres précédents).

Si  $\vec{B}$  est constant dans l'espace (c'est sûrement vrai pour un champ extérieur à l'échelle de l'atome) on peut prendre  $\vec{A}$  suivant

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{r} = \frac{1}{2} Br \vec{e}_\theta$$

si nous supposons de plus que  $\vec{B}$  est suivant la direction  $\vec{e}_z$ .

Finalement comme le terme de Lorentz  $\vec{v} \wedge \vec{B}$  est donc suivant  $\vec{e}_r$ , car  $\vec{v}$  reste suivant  $\vec{e}_\theta$  tant que la perturbation due au champ n'est pas trop importante, on peut décomposer  $\vec{F}^*$  en deux contributions suivant  $\vec{e}_r$  et suivant  $\vec{e}_\theta$

$$\vec{F}^* = -|q_e|(\vec{E}_m + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{F}^* = -|q_e|(-\vec{\text{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

$$\vec{F}^* = -|q_e|(\frac{Z|q_e|}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r - \frac{\partial \frac{1}{2} Br \vec{e}_\theta}{\partial t} + r\dot{\theta} \wedge B \vec{e}_r)$$

or en écrivant le principe fondamental de la dynamique pour l'électron dans un référentiel supposé galiléen

$$\vec{F}^* = m_e \vec{a} = m_e((\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta)$$

en notant  $\vec{a}$  l'accélération de l'électron de masse  $m_e$  supposé rester dans le plan de son orbite de départ ( $\dot{z} = 0$ ). Si nous supposons que l'effet du champ magnétique se réduit à perturber la vitesse angulaire de l'électron et non sa distance au proton  $r$  on peut négliger les termes  $\dot{r}$  et il vient donc en égalant les composantes des forces sur  $\vec{e}_\theta$

$$m_e r \ddot{\theta} = |q_e| \frac{\partial \frac{1}{2} Br}{\partial t}$$

or  $\dot{\theta}$  est égal à la vitesse angulaire de l'électron  $\omega$  donc après simplification par  $r$

$$m_e \frac{\partial \omega}{\partial t} = |q_e| \frac{\partial \frac{1}{2} B}{\partial t}$$

et après intégration temporelle

$$\omega(t_1) - \omega(0) = \frac{|q_e|}{2m_e} B$$

La vitesse angulaire aura donc varié d'une quantité  $\omega_L = \frac{|q_e|}{2m_e} B$  appelée pulsation de Larmor, qui vaut la moitié de la pulsation cyclotron de l'électron.

On arriverait au même résultat en étudiant la composante  $\vec{e}_r$ .

On peut également voir l'effet du champ magnétique comme le passage à un référentiel tournant, précessant justement à cette vitesse angulaire  $\omega_L$  (théorème de Larmor).

Une solution complète du problème montrerait que  $r$  varie de  $10^{-10}$  en valeur relative pour des valeurs usuelles de champ magnétique et donc que l'approximation  $\dot{r} = 0$  est parfaitement justifiée.

On peut également arriver à ce résultat par le théorème du moment cinétique dans le référentiel supposé galiléen. Si nous reprenons les notations du début du chapitre le moment des forces magnétiques est donc tel que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

avec  $\vec{L}$  moment cinétique de l'électron,  $\vec{\mathcal{M}}$  moment magnétique.

En reprenant la définition du facteur de Landé

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\frac{g|q_e|}{2m_e} \vec{L} \wedge \vec{B}$$

Par conséquent  $\vec{L}$  est constant (puisque sa variation lui est orthogonale) et en se souvenant des formules de transformation des vecteurs dans un référentiel en rotation  $\vec{\omega}_L = \frac{|q_e|}{2m_e} \vec{B}$  on retrouve bien tous les phénomènes expliqués quelques paragraphes plus haut (précession de Larmor). Le lecteur conviendra que cette méthode est très rapide et très efficace, avec le facteur de Landé en plus, mais le phénomène est moins visible qu'avec une approche explicite.

Le phénomène est largement utilisé expérimentalement pour étudier les propriétés de la matière : résonance électronique, résonance magnétique nucléaire, etc, en utilisant deux champs magnétiques orthogonaux, l'un fixe et très important et l'autre variable pour sonder la variation de fréquence de résonance du système.

### Calcul de la susceptibilité magnétique

Pour résumer le paragraphe précédent, l'effet d'un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$  appliqué à un atome de Bohr est de faire varier la vitesse angulaire  $\omega$  de l'électron d'une quantité  $\omega_L = \frac{|q_e|}{2m_e} B$ . Si nous revenons au calcul de l'intensité du courant créé par la rotation de l'électron autour du noyau cette vitesse angulaire supplémentaire correspond à une intensité électrique supplémentaire

$$I_{\text{supp}} = \frac{q}{T} = \frac{-|q_e|}{2\pi} \omega_L$$

$$I_{\text{supp}} = \frac{-|q_e|^2}{4\pi m_e} B$$

et le moment magnétique de l'électron est donc affecté d'une quantité supplémentaire

$$\vec{\mathcal{M}}_{\text{supp}} = I_{\text{supp}} \vec{S} = \pi \rho^2 \vec{e}_z \frac{-|q_e|^2}{4\pi m_e} B$$

avec  $\rho$  rayon de la projection de l'orbite de Bohr sur le plan  $Oxy$  orthogonal à la direction du champ magnétique  $\vec{B}$ .

En moyenne sur une assemblée d'atomes cette valeur  $\rho^2$  se moyenne à la somme des moyennes de  $x^2$  et de  $y^2$ , c'est à dire à  $2/3$  de la moyenne de  $r_i^2$  rayon de l'orbite de Bohr du  $i$ -ème électron.

Ainsi pour une assemblée d'atomes indépendants la moyenne de la variation de moment magnétique par électron vaudra

$$\langle \vec{\mathcal{M}}_{\text{supp}} \rangle = \frac{2}{3} \pi \langle r_i^2 \rangle \vec{e}_z \frac{-|q_e|^2}{4\pi m_e} B$$

Si chaque atome possède  $Z$  électrons indépendants la résultante vaut

$$\langle \vec{\mathcal{M}}_{\text{supp}} \rangle = \frac{2Z}{3} \pi \langle r^2 \rangle \vec{e}_z \frac{-|q_e|^2}{4\pi m_e} B$$

En supposant qu'il y a  $n$  atomes par unité de volume l'aimantation supplémentaire vaut

$$\langle \vec{M}_{\text{supp}} \rangle = \frac{2Zn}{3} \pi \langle r^2 \rangle \vec{e}_z \frac{-|q_e|^2}{4\pi m_e} B$$

or par définition

$$\langle \vec{M}_{\text{supp}} \rangle = \frac{\chi}{\mu_0} \vec{B}$$

donc la susceptibilité diamagnétique  $\chi$  vaut dans ces approximations

$$\chi = -\frac{\mu_0 n |q_e|^2}{6m_e} \langle r^2 \rangle$$

Remarquons que cette susceptibilité est bien négative comme nous l'avions prévu à partir de la loi de Lenz, et que sa valeur est très faible. Une application numérique pour un gaz tel que l'hydrogène atomique donne ainsi  $\chi$  proche de  $-10^{-9}$  et pour un liquide ou pour un solide  $\chi$  proche de  $-10^{-6}$ .

#### 9.4.2 Paramagnétisme

Cependant, une mesure de la susceptibilité de l'air par exemple donne une valeur positive et de l'ordre de  $10^{-5}$ . En effet, l'air est formé de 20% environ de dioxygène, et la théorie quantique de remplissage des orbitales moléculaires (règle de Hund) montre qu'une configuration dans laquelle les spins des électrons de valence sont colinéaires est énergétiquement la plus favorable. Ainsi, les molécules de dioxygène présentent-elles individuellement des dipôles magnétiques, qui peuvent être considérés indépendants si le gaz est suffisamment dilué.

En l'absence de champ magnétique appliqué, en raison de l'agitation thermique ces dipôles  $\vec{\mathcal{M}}$  sont répartis de façon isotrope et l'aimantation moyenne est nulle.

Cependant, en présence d'un champ extérieur  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ , si nous supposons que la statistique de Boltzmann s'applique, le nombre  $A(\vec{u})$  de dipôles ayant l'orientation  $\vec{u}$  dans l'angle solide  $d\Omega$  est proportionnel à un facteur exponentiel de l'énergie  $E_p$  d'interaction dipôle-champ magnétique :

$$A(\vec{u}) = A_0 e^{-\frac{E_p}{k_b T}}$$

avec  $k_b$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température absolue d'un thermostat entourant le système

comme

$$E_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$$

il vient

$$A(\vec{u}) = A_0 e^{\frac{M B \cos \theta}{k_b T}}$$

$$A(\vec{u}) = A_0 e^{a \cos \theta}$$

avec  $\theta$  angle entre le vecteur  $\vec{u}$  et le champ magnétique  $\vec{B}$  et  $a = \frac{MB}{k_b T}$ .

### Théorie de Langevin

L'aimantation résultante  $\vec{M}$  est somme des contributions des dipôles individuels, qui auront évidemment tendance à s'aligner de façon parallèle au champ magnétique, les autres composantes se moyennant à zéro par symétrie de l'agitation thermique. Il suffit donc de calculer la composante de  $\vec{M}$  suivant  $Oz$

$$M = \int dn \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{e}_z$$

avec  $dn$  le nombre de dipôles dans l'angle solide  $d\Omega$ ,

$$dn = A_0 e^{a \cos \theta} d\Omega$$

La constante de proportionnalité  $A_0$  étant donnée par la condition de normalisation sur le nombre total  $n$  de dipôles dans la région considérée

$$n = \int dn$$

soit

$$A_0 = \frac{n}{\int e^{a \cos \theta} d\Omega}$$

Finalement

$$M = \int dn \vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{e}_z$$

$$M = \int dn \mathcal{M} \cos \theta$$

or en coordonnées sphériques, l'élément de surface  $dS = r^2 \sin \theta d\phi d\theta$  d'une sphère vaut  $r^2 d^2\Omega$  donc après intégration sur l'angle  $\phi$  (rotation autour de la direction du champ magnétique n'ayant pas d'influence géométrique sur le résultat) il vient

$$M = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} A_0 e^{a \cos \theta} d\Omega \mathcal{M} \cos \theta$$

comme

$$d\Omega = \sin \theta d\theta$$

on a

$$M = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} A_0 e^{a \cos \theta} \sin \theta \mathcal{M} \cos \theta d\theta$$

en substituant la valeur de  $A_0$

$$\frac{M}{n} = \frac{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} e^{a \cos \theta} \sin \theta \mathcal{M} \cos \theta d\theta}{\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} e^{a \cos \theta} \sin \theta d\theta}$$

soit encore

$$M = \mathcal{M} n \mathcal{L}(a)$$

avec  $\mathcal{L}(a)$  fonction de Langevin que nous avons déjà rencontrée dans le chapitre précédent sur l'électrostatique dans les milieux matériels, ce qui n'est pas très étonnant vu la similitude des phénomènes.

En reconnaissant cette fonction comme une dérivée logarithmique de son dénominateur rappelons qu'il vient

$$\mathcal{L}(a) = \coth a - \frac{1}{a}$$

Aux faibles températures (pour  $a$  grand) cette fonction tend vers 1 donc  $M$  tend vers  $\mathcal{M}n$  : tous les dipôles s'alignent vers le champ magnétique extérieur, c'est ce qu'on appelle l'aimantation à saturation. Par contre aux températures intermédiaires,  $a$  tend rapidement vers zéro, comme la fonction  $\mathcal{L}$  et donc la susceptibilité fait de même.

Le moment dipolaire magnétique d'une molécule typique est de l'ordre du magnéton de Bohr  $\mu_B$ . Par conséquent

$$a \approx \frac{\mu_B B}{k_b T}$$

Vu les ordres de grandeur de  $\mu_B$  et de  $k_b$ , pour des valeurs raisonnables de  $B$  en Tesla (le record est de l'ordre de 20 T) et pour  $T$  proche de la température ambiante  $a$  est usuellement très petit. Un développement limité de  $\mathcal{L}$  donne

$$\mathcal{L}(a) \approx \frac{a}{3}$$

d'où

$$M \approx \mathcal{M}n \frac{a}{3}$$

$$M \approx \mathcal{M}^2 n \frac{B}{3k_b T}$$

or la susceptibilité magnétique est définie par

$$\vec{M} = \frac{\chi \vec{B}}{\mu_0}$$

donc

$$\chi = \frac{\mu_0 n \mathcal{M}^2}{3k_b T} = \frac{C}{T}$$

et on retrouve la loi de Curie que nous avons discutée macroscopiquement.

### Théorie quantique

Dans le paragraphe précédent, nous avons supposé que toutes les projections du moment magnétique suivant la direction du champ magnétique extérieur étaient possibles.

Cependant, comme nous l'avons déjà discuté en partie, la théorie quantique montre que les projections  $\mathcal{M}_z$  de  $\vec{\mathcal{M}}$  sur la direction de  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  sont quantifiées, et ne peuvent prendre que  $2J + 1$  valeurs entre  $-J$  et  $m = +J$ . Ainsi  $\vec{\mathcal{M}} = -g\mu_B \vec{J}$  et  $\mathcal{M}_z = -g\mu_B m$  avec  $\vec{J}$  moment cinétique de norme  $\sqrt{J(J+1)}$  et  $m$  un nombre entier.

Si nous supposons valable la statistique de Boltzmann et reprenons le calcul du paragraphe précédent, le nombre de dipôles magnétiques par unité de volume dans l'état  $m$ , en présence d'un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$  vaut de nouveau, avec les mêmes notations

$$n_m = A_0 e^{-\frac{\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}}{k_b T}}$$

( $A_0$  constante de normalisation et  $T$  température absolue du thermostat) mais cette fois en tenant compte de la quantification du moment

$$n_m = A_0 e^{\frac{g\mu_B m B}{k_b T}}$$



En posant  $a^* = \frac{g\mu_B B}{k_b T}$

$$n_m = A_0 e^{a^* m}$$

et la condition de normalisation donne, en considérant qu'il y a  $n$  dipôles par unité de volume

$$n = \sum_{m=-J}^{m=+J} n_m$$

d'où

$$A_0 = \frac{n}{\sum_{m=-J}^{m=+J} e^{a^* m}}$$

or l'aimantation est reliée à la valeur moyenne du nombre  $m$  qui vaut par définition

$$\langle m \rangle = \sum_{m=-J}^{m=+J} m n_m$$

donc en substituant la valeur de  $A_0$

$$\langle m \rangle = \frac{\sum_{m=-J}^{m=+J} m n e^{a^* m}}{\sum_{m=-J}^{m=+J} e^{a^* m}}$$

En introduisant  $a' = J a^*$  par tradition, pour faire ressortir le rôle de  $J$  on obtient

$$\langle m \rangle = n J \frac{\sum_{m=-J}^{m=+J} \frac{m}{J} e^{a' \frac{m}{J}}}{\sum_{m=-J}^{m=+J} e^{a' \frac{m}{J}}}$$

soit encore

$$\langle m \rangle = n J \mathcal{B}(a')$$

avec  $\mathcal{B}$  la fonction dite de Brillouin.

On peut vérifier qu'aux températures usuelles on a accord avec la théorie de Langevin. Pour un système de spin à deux niveaux pour lequel  $g \approx 2$  par exemple ( $J = 1/2$  donc  $m$  peut prendre les deux valeurs  $-1/2$  et  $1/2$ )

$$\mathcal{B}(a') = \frac{-e^{-a'} + e^{a'}}{e^{-a'} + e^{a'}}$$

$$\mathcal{B}(a') = \tanh a'$$

Comme  $a' = J \frac{g\mu_B B}{k_b T}$  on peut vérifier que même pour les valeurs extrêmes de  $B$  (10 T par exemple) à température ambiante de 300K  $a'$  est très faible donc

$$\mathcal{B}(a') \approx a'$$

et

$$\langle m \rangle \approx n J a' \approx \frac{n \mu_B B}{2 k_b T}$$

l'aimantation moyenne vaut donc par unité de volume

$$M = g \mu_B \langle m \rangle \approx \frac{n \mu_B^2 B}{k_b T}$$

La théorie de Langevin nous avait donné

$$M_l \approx \mathcal{M}^2 n \frac{B}{3 k_b T}$$

Or vectoriellement nous avons pour le moment magnétique

$$|\vec{\mathcal{M}}| = g\mu_B\sqrt{JJ+1}$$

et donc ici

$$|\vec{\mathcal{M}}| = \mu_B\sqrt{3}$$

donc la théorie de Langevin conduit à

$$M_l \approx n\frac{B}{k_bT}$$

et donc au même résultat. Notons cependant que le résultat diffère entre les deux théories pour les très basses températures.

### 9.4.3 Paramagnétisme à champ moléculaire

Jusqu'ici, nous avons considéré que le champ magnétique s'exerçant sur les constituants des matériaux étudiés se réduisait à un champ extérieur  $\vec{B}$ . Notons cependant que comme dans le cas électrostatique, on peut considérer que les noyaux et électrons génèrent un champ moléculaire  $\vec{B}_{\text{mol}}$  se superposant au champ extérieur, qui sera particulièrement présent dans les milieux très denses tels que les solides.

Ainsi le champ s'exerçant dans la matière vaut-il

$$\vec{B}_l = \vec{B} + \vec{B}_{\text{mol}}$$

L'hypothèse de Weiss consiste, comme toujours en première approximation en physique, à considérer que ce champ moléculaire est proportionnel à sa cause, c'est à dire à l'aimantation locale. Alors

$$\vec{B}_{\text{mol}} = \lambda\vec{M}$$

Si nous nous plaçons à température ambiante ( $T = 300K$ ) les deux paragraphes précédents nous ont montré que l'aimantation valait

$$M = n\mathcal{M}\mathcal{L}(a) \approx n\mathcal{M}\frac{a}{3}$$

soit

$$M = \mathcal{M}^2 n \frac{B_l}{3k_bT}$$

en considérant cette fois ci le champ local.

En considérant que les trois vecteurs  $\vec{M}, \vec{B}, \vec{B}_l$  sont colinéaires

$$M = \mathcal{M}^2 n \frac{B + B_{\text{mol}}}{3k_bT}$$

$$M = \mathcal{M}^2 n \frac{B + \lambda M}{3k_bT}$$

d'où

$$M\left(1 - \frac{n\mathcal{M}^2}{3k_bT}\lambda\right) = \mathcal{M}^2 n \frac{B}{3k_bT}$$

et

$$M = B \frac{\mathcal{M}^2}{(3k_bT)\left(1 - \frac{n\mathcal{M}^2}{3k_bT}\lambda\right)}$$

ou

$$M = \frac{B}{\mu_0} \frac{C}{T - T_c}$$

avec  $C$  et  $T_0$  des constantes (loi de Curie-Weiss).

ce qui donne une forme très simple à la susceptibilité

$$\chi = \frac{C}{T - T_c}$$

En pratique, on constate que cette loi est uniquement valable pour des températures supérieures à la température dite critique  $T_c$  à laquelle la susceptibilité devient infinie. Cette loi est quasi-universelle et caractérise les systèmes présentant une certaine catégorie de transitions de phase ; en effet on constate qu'en dessous de la température  $T_c$  règne souvent une phase ordonnée, comme par exemple la phase ferromagnétique que nous allons maintenant discuter.

#### 9.4.4 Ferromagnétisme

##### Courbe de première aimantation

Si on suppose qu'un matériau ferromagnétique n'a jamais été aimanté, son aimantation est nulle. Sous l'effet d'une excitation magnétique  $H$  apparaît progressivement une aimantation macroscopique  $M$  qui finit par arriver à une certaine valeur de saturation, par exemple  $1,70 \cdot 10^{-6}$  U.S.I. pour le fer.

##### ICIFIGURESATURATION

La susceptibilité  $\chi$  définie par  $M = \chi H$ , part pour le fer d'une valeur de 500 U.S.I. pour  $H = 0$ , présente un maximum pour  $H = 10^2$  A.m<sup>-1</sup> et tend ensuite vers zéro.

Ce comportement est dû à une propension que présentent les moments magnétiques des atomes constituant certains matériaux à s'aligner de façon colinéaire. Les exemples les plus connus (pour les systèmes à un seul type d'atomes) sont le fer, le cobalt et le nickel mais depuis les années 1970 ont également été découverts certains alliages de fer, de terres rares et d'autres éléments présentant des propriétés similaires (Alliages AlNiCo, NdFeB, SmCo, FePt...). On a ainsi des matériaux présentant une aimantation collective particulièrement intense par somme des contributions individuelles des atomes : ceci a permis par exemple la miniaturisation de haut-parleurs, l'amélioration de leur fidélité, ainsi que de très forts progrès des générateurs et moteurs électriques tels qu'employés dans les véhicules modernes.

Ces matériaux sont tels que l'interaction dite d'échange entre les électrons constituant leurs atomes favorise un tel arrangement colinéaire, sur des longueurs mésoscopiques (de l'ordre de 10 micromètres), à l'intérieur de zones appelés domaines de Weiss.

Après fabrication du matériau, ces domaines sont naturellement désordonnés et répartis de façon aléatoire, ce qui explique que l'aimantation macroscopique du matériau est nulle, comme pour un matériau ordinaire (non ferromagnétique). La présence d'une excitation magnétique suffisamment forte fait progressivement basculer les moments magnétiques des domaines de Weiss pour favoriser leur alignement sur le champ extérieur. Ainsi apparaît progressivement l'aimantation macroscopique.

Lorsque tous les moments magnétiques sont alignés, l'aimantation ne peut plus grandir, on a donc atteint une valeur de saturation plus ou moins grande suivant le matériau. Si l'excitation est supprimée, suivant les interactions entre moments magnétiques et entre domaines, l'aimantation va plus ou moins persister : on construit ainsi des aimants permanents. Les aimants naturels trouvés dans la nature sont des alliages de fer polarisés soit par le champ magnétique terrestre, soit par exemple par les champs magnétiques intenses créés par la foudre. On a pu

ainsi reconstituer la dérive des continents en se servant des aimants naturels trouvés dans des couches géologiques comme mémoire de l'orientation du champ magnétique terrestre dans le passé (ce champ ayant d'ailleurs basculé plusieurs fois depuis la formation de la Terre).

Il est possible de visualiser les domaines de Weiss sous un microscope : c'est l'expérience de Barkhausen.

Notons qu'une élévation de la température au delà de la température de Curie va, par les effets de désordre associés, annuler tout effet collectif et toute aimantation permanente.

### Hystérésis

Après suppression du champ, il peut donc demeurer une aimantation dite aimantation rémanente si la température est suffisamment basse. Si on fait varier un certain nombre de fois l'excitation magnétique entre des valeurs positives et négatives conduisant le système à saturation, on obtient un cycle dans le plan  $M - H$  dit cycle d'hystérésis. Ce cycle est symétrique.

Ce terme désigne le fait que le système présente une mémoire de son histoire magnétique : de tels systèmes sont ainsi employés comme mémoire de données permanente dans les "(magnetic) core memory" fils et bandes magnétiques, cassettes, disquettes, disques durs, disques magnéto-optiques, etc.

La valeur de l'excitation magnétique permettant d'annuler l'aimantation permanente est notée  $H_c$  pour excitation coercitive.

On peut également tracer un cycle  $B - H$  qui a la même allure. De tels cycles peuvent être tracés à l'oscilloscope en séparant excitation et induction par le champ résultant, à l'aide d'un transformateur démontable par exemple. À l'aide d'un condensateur, on peut réintégrer la dérivation induite par le phénomène d'induction et ainsi, en mode XY, avec un courant alternatif plus ou moins grand, parcourir le cycle d'hystérésis et amener le système à saturation.

### Pertes par hystérésis

On remarque cependant, si on fait un bilan énergétique précis dans un transformateur, que les gains en champ dûs à la présence d'un matériau ferromagnétique à la perméabilité relative élevée sont accompagnés d'un échauffement de ce même matériau et de pertes énergétiques.

Ainsi, dans la partie excitatrice du système, en l'absence d'induit, on a lors d'une unité de temps  $dt$

$$Eidt - Ri^2 dt = \delta W_m + \delta \tau_{\text{Laplace}}$$

Les termes de gauche de l'équation représentent le travail fourni par le générateur de force électromotrice  $E$  et les pertes par effet Joule dans les fils d'alimentation de résistance  $R$  parcourus par un courant  $i$ , les termes de droite, respectivement l'énergie du champ magnétique et le travail des forces de Laplace (nul si le système est immobile), plus éventuellement un terme lié à la magnétostriction du matériau (modification de son volume due à la présence du champ magnétique suite à des effets à l'échelle atomique), que nous supposerons nul ici.

Rappelons que la densité volumique de puissance liée à un champ électromagnétique vaut

$$\mathcal{P}_m = \frac{\delta W_m}{\delta t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ce qui se simplifie ici vu l'absence de polarisation électrique.

Ce résultat peut être retrouvé en écrivant l'équation de l'induction dans le circuit

$$E - \frac{d\Phi}{dt} = Ri$$

avec  $\Phi$  le flux du champ magnétique.

par conséquent

$$Eidt - Ri^2 dt = id\Phi$$

Si nous supposons que les lignes du champ magnétique sont circulaires et de longueur  $l$ , le théorème d'Ampère appliqué sur une ligne de champ à la surface externe du bâti donne

$$Hl = Ni$$

avec  $N$  le nombre de spires contenues dans la ligne de champ.

Par conséquent

$$i = \frac{Hl}{N}$$

et si nous faisons l'approximation, pour un bâti du transformateur de faible épaisseur et de surface  $S$ , que le flux total vaut  $N$  fois le flux parcourant une spire

$$\Phi = N\Phi_{1\text{spire}} \approx NBS$$

avec  $B$  le champ magnétique.

Alors

$$id\Phi = \frac{Hl}{N}d(NBS) = HlSdB = HVdB$$

avec

$$V = lS$$

volume du transformateur.

comme

$$Eidt - Ri^2 dt = id\Phi = VHdB$$

et

$$Eidt - Ri^2 dt = \delta W_m + \delta \tau_{\text{Laplace}}$$

par unité de volume l'énergie magnétique a donc la même expression ( $HdB$ ) que le résultat établi en général.

Sur un cycle d'hystérésis l'énergie volumique fournie au matériau vaut donc

$$\mathcal{W} = \oint HdB$$

or

$$B = \mu_0(H + M)$$

donc

$$HdB = Hd(\mu_0 H) + Hd(\mu_0 M) = d\left(\frac{1}{2}\mu_0 H^2\right) + Hd(\mu_0 M)$$

Le premier terme du membre de droite représente l'énergie d'établissement du champ dans le vide et disparaît par parité pour un cycle symétrique. Le second terme représente l'énergie d'aimantation du milieu.

Ainsi

$$\mathcal{W} = \oint HdB = \mu_0 \oint HdM$$

Mais le premier principe nous dit que la variation d'énergie interne du système sur un cycle doit être nulle. Par conséquent si  $Q$  est la quantité de chaleur échangée avec l'extérieur

$$\mathcal{W} + Q = 0$$

donc

$$Q = -\mu_0 \oint H dM$$

usuellement cette quantité de chaleur est négative donc on a échauffement du matériau (on peut aussi avoir refroidissement par démagnétisation).

Notons que cette énergie dissipée sous forme de chaleur est issue d'un effet magnétique et non d'un effet Joule.

#### 9.4.5 Utilisation des matériaux ferromagnétiques

Le paragraphe précédent nous a montré que l'énergie dissipée était proportionnelle à l'aire du cycle d'hystérésis. Par conséquent, dans un transformateur, on va privilégier, pour minimiser les pertes, des matériaux présentant un cycle à l'aire la plus petite possible (matériaux dits "doux" comme l'alliage du fer et du silicium, pour lequel le champ coercitif ne vaut que 50 A.m<sup>-1</sup>).

Cependant, pour un aimant permanent, la recherche d'une aimantation élevée implique une forte valeur du champ coercitif (50 000 A.m<sup>-1</sup> par exemple) et donc une grande aire pour le cycle d'hystérésis.

De tels matériaux sont dits "durs".

Si l'on se limite à de faibles valeurs de l'excitation, on peut cependant rester dans un domaine quasi-linéaire où les pertes sont faibles et où l'aimantation est proportionnelle à l'excitation.

À l'heure actuelle, les nanotechnologies, en permettant d'inclure des noyaux de matériaux magnétiques durs dans des matrices douces ou réciproquement et de contrôler les interactions entre noyaux, permettent d'envisager des matériaux magnétiques à la fois durs et doux : avec une forte excitation coercitive mais avec de faibles pertes par hystérésis.

# **Chapitre 10**

## **Formulaire**





# Chapitre 11

## Conseils méthodologiques

### 11.1 Généralités

Travailler le cours chapitre par chapitre en se forçant à mémoriser les principaux résultats. Faire et refaire les exercices correspondants ainsi que ceux trouvés dans des ouvrages quelconques. (bibliothèque, ouvrages de niveau DEUG, annales, sites Web de particuliers ou institutionnels, recueils d'exercices "prépa", CAPES, agrégation, sites étrangers, wikipedia..). Même si vous n'y arrivez pas il est toujours stimulant de se confronter à des approches, notations et conventions différentes afin de bien savoir ce dont on parle et la physique qui se cache derrière. Ne pas négliger les aspects historiques ainsi que les applications industrielles afin de bien comprendre l'intérêt et la démarche de la sous-discipline ainsi que les ordres de grandeur en jeu.

Éventuellement, faire ceci en groupe. Ne pas hésiter à poser des questions aux enseignants, à vos camarades, sur des forums.

Les résultats essentiels du cours et des travaux dirigés doivent être parfaitement connus avec leurs hypothèses. Seul un travail régulier et/ou une participation attentive en cours le permettent. Si vous faites l'effort de toujours précéder l'enseignant d'une ligne au lieu d'avoir plusieurs tableaux de retard comme c'est souvent le cas le travail personnel se réduit à une simple révision. Si le cours se transforme subitement à vos yeux en un amas de hiéroglyphes, réagir immédiatement et en tout cas avant la veille de l'examen en reprenant du départ voire en repartant du cours des années précédentes.

### 11.2 Pré-requis

Bien connaître les relations trigonométriques usuelles, dérivées et intégrales, changement de variable et intégration par parties, l'analyse vectorielle dans les systèmes de coordonnées usuels, ainsi que les exponentielles complexes.

### 11.3 Conseils de rédaction

Toujours faire des figures claires et employant des couleurs. Éviter les cas particuliers dans les figures (30 degrés, 45 degrés...)

Raisonner le plus possible en français clair, introduire les équations seulement lorsqu'elles sont nécessaires, éviter les abréviations et les quantificateurs d'existence.

Partir d'un rappel du cours pertinent en définissant bien les hypothèses employées (symétries, est-on dans le vide, linéarités...)

Lier les étapes du raisonnement par des mots-clefs (or, donc, mais, puisque...) commenter les résultats obtenus (sens de variations, cas limites) pour voir si l'on retrouve des cas connus ou évidents. Estimer de tête à partir des puissances de 10 les ordres de grandeur des applications numériques et commenter les résultats s'ils sont surprenants, faire attention aux unités (tout résultat doit en avoir une, même "SI"), tout remettre en SI (en particulier les cm, mA, Celsius, calories etc) et vérifier l'homogénéité des résultats (ne pas "additionner moutons et chèvres", ne pas prendre le logarithme ou le sinus de quantités dimensionnées). Un correcteur acceptera plus facilement une erreur algébrique dans les coefficients qu'un résultat non homogène du point de vue des unités ou pire un résultat non homogène vectoriellement ( $e^{i\vec{k}r}$ ).....)

## 11.4 Optimisation d'une note à un examen écrit ou oral

Soigner la présentation : créer une marge, écrire lisiblement en suivant les lignes, avec une taille raisonnable de caractères (donnée par l'interligne), éviter les fautes d'orthographe, en particulier les accords, accents, et surtout les noms propres ("Principe de Curry, formule de Stokes"), éviter les taches, ratures, surcharges, effaceur et fluides correcteurs, encadrer les résultats, utiliser deux couleurs et pas de crayon à papier (couleur noires ou bleue et verte traditionnellement, le rouge étant réservé au correcteur).

Pour gagner du temps ne pas recopier les questions ou les figures mais éventuellement les reformuler avec concision, et employer le brouillon avec parcimonie, uniquement pour les calculs compliqués et pour le démarrage des problèmes. S'entraîner à écrire directement à l'encre noire sur les copies, sans effaceur : une fois cette discipline acquise on peut gagner 10 à 20 % de temps à l'arrivée.

Si possible lire le sujet en entier et s'inspirer des réponses aux questions suivantes pour les questions précédentes. Souvent la question donne la méthode et le point de départ et la question suivante le point d'arrivée. En cas d'échec à démontrer dans un temps raisonnable (15 minutes d'efforts) donner au moins les premières étapes, admettre le résultat et passer aux questions suivantes afin de pouvoir faire les applications numériques.

Si la démonstration obtenue dépasse une vingtaine de lignes, ou si le résultat n'est pas relativement élégant (tenant sur une ligne avec des coefficients simples), il est probablement faux vu les problèmes usuellement posés.

À l'oral en cas de blocage ne pas hésiter à questionner l'examineur avec tact ou à lui proposer des hypothèses simplificatrices. En tout cas toujours montrer qu'on maîtrise son cours.

## 11.5 Approche d'un problème d'électromagnétisme

Bien définir le système étudié. Utiliser les symétries du système voire en imposer. ("Supposons que toute vache est sphérique...") Utiliser des coordonnées adaptées aux symétries. Faire les démonstrations générales en cartésiennes en effectuant des permutations circulaires des indices  $(x, y, z)$  et traiter les cas particuliers en cylindriques, polaires ou sphériques.

S'entraîner sur quelques exercices pour savoir quelles formes équivalentes utiliser : pour la détermination des champs électriques et magnéto-statiques employer soit les formes intégrales (lorsque les symétries sont évidentes) ou locales des théorèmes de Gauss ou d'Ampère, ou l'intégration directe avec la loi de Coulomb ou de Biot et Savart (souvent très calculatoire). Se servir des conditions de passage ; établir le champ à un endroit simple (au centre du solénoïde par exemple) et par les théorèmes intégraux l'établir ailleurs, et relier les inconnues par des conditions de passage. Éventuellement utiliser l'approximation dipolaire à grande distance.

Pour l'induction essayer soit la Loi de Lenz (pour les circuits simples), ou Maxwell-Faraday, ou le champ de Neumann, ou le champ électromoteur en particulier pour des pro-

blèmes locaux et dans des dispositifs massifs (chauffage, freinage) ...

Relier les champs inconnus par des relations phénoménologiques (en particulier forme locale de la loi d'Ohm si elle est valable).

Utiliser les conditions de passage (théorème de Coulomb) soit pour fixer les conditions au bord, soit pour déduire la valeur des charges et des courants au bord du problème.

Profiter des hypothèses : dans le vide charge et courants sont nuls, dans un conducteur parfait charge et champ électrique sont nuls.

Travailler soit avec les potentiels électriques, ou potentiels vecteurs (équation de Poisson, Laplace, surtout pour les condensateurs) soit avec champs électriques et champs magnétiques suivant le problème. L'élégance des équations doit guider.

Employer dans les régimes variables soit la conservation de la charge soit les équations de Maxwell complètes.

Parfois dans les exercices usuels on peut sortir les champs des intégrales (ce n'est pas toujours vrai).

Éventuellement raisonner à partir de l'énergie.

Éventuellement employer le principe de superposition si les équations sont linéaires (ce qui est le cas des équations de Maxwell).

Ne pas employer des conventions de signe personnelles mais toujours rester dans les conventions françaises car certaines conventions de signe se cachent à des endroits inattendus en particulier dans le lien avec l'électrocinétique fait dans l'induction. Choisir le sens de parcours des circuits (et donc l'orientation des surfaces par la règle du tire-bouchon de droitier) en fonction du sens attendu de l'intensité (du plus vers le moins). Orienter les surfaces enserrant des volumes de préférence de l'intérieur vers l'extérieur. Critiquer le signe des résultats obtenus par rapport au bon sens (charge ou décharge d'un condensateur par exemple).

Pour les forces électromagnétiques macroscopiques, employer la force de Laplace dans les cas de déplacements linéaires, et le moment de cette force pour des systèmes rotatifs ; éventuellement employer l'énergie d'un moment dans un champ. Utiliser l'approximation dipolaire.

De même au niveau microscopique on pourra employer avec profit le théorème de l'énergie mécanique pour simplifier l'étude de la force de Lorentz sur une charge en mouvement, ou se placer dans des repères tournants (base de Frenet) et référentiels non galiléens en employant la force centrifuge.

Remarquer pour les problèmes concernant les plasmas que l'électron est bien plus léger que les noyaux ; dans ces problèmes, on se place souvent en régime sinusoïdal forcé pour une fréquence donnée.