UNIVERSITÉ DU MAINE — LICENCE DE PHYSIQUE

MÉCANIQUE QUANTIQUE
TRAVAUX DIRIGÉS Nos. 11 (Durée : 1 h)

Moment 1/2 (partie 1)

On note $\vec{\sigma}$ le moment cinétique d'une particule, associée à son spin, et on définit l'opérateur $\vec{S} = \vec{\sigma}/\hbar$, de projections S_x, S_y, S_z sur les différents axes cartésiens.

1. (a) Vérifier que $\vec{S}^2$ commute avec S_z.
   (b) On pose $S_+ = S_x + iS_y$ et $S_- = S_x - iS_y$. Ces opérateurs sont-ils hermitiques ?
   (c) Montrer que S_- est adjoint de S_+.
   (d) Exprimer S_+S_- en fonction de $\vec{S}^2$, S_z et S_z^2, puis S_-S_+
2. Soit $|-\rangle$ un vecteur propre normé de $\vec{S}^2$ et S_z associé aux valeurs propres respectives 3/4 et $-1/2$.
   (a) Montrer que $[S_z, S_+] = S_+$. En déduire que $S_+|-\rangle$ est vecteur propre de S_z avec la valeur propre $+1/2$.
   (b) Montrer que $[\vec{S}^2, S_+] = 0$. En déduire que $S_+|-\rangle$ est vecteur propre de $\vec{S}^2$ avec la valeur propre $+3/4$.
3. On pose $|+\rangle = S_+|-\rangle$. En évaluant par deux méthodes $\langle -|S_z|+\rangle$ montrer que l'on a $\langle -|+\rangle = 0$.
4. Montrer que $|-\rangle$ étant normé $|+\rangle$ l'est aussi.
5. En évaluant la norme de $S_+|+\rangle$ montrer que ce vecteur est nul.
6. En déduire la matrice représentant S_+ dans la base orthonormale $|+\rangle, |-\rangle$.
7. En déduire la matrice représentant S_-.