MÉCANIQUE QUANTIQUE

TRAVAUX DIRIGÉS Nos. 12 (Durée : 1 h)

Moment 1/2 (partie 2 : formule de Rabi)

On applique à un atome composé d'un proton situé en O et d'un électron un champ magnétique permanent $\vec{B_0} = B_0\vec{u_z}$ et un champ magnétique $\vec{B_1}$ orthogonal à B_0, de norme constante, et tournant dans le sens rétrograde autour de $\vec{u_z}$ à la vitesse angulaire ω_1. Ainsi, $\left(\widehat{\vec{Ox}, \vec{B_1}(t)}\right) = -\omega_1 t$.

1. *Préliminaires*
   (a) Montrer qu'en physique classique, on peut associer un dipôle magnétique de moment $\vec{M}$ à l'électron tournant autour du noyau (introduire l'intensité I d'un courant fictif).
   (b) Relier $\vec{M}$ au moment cinétique classique $\vec{\sigma}$ de l'électron par rapport au noyau situé en O.

   Dans la suite, on pose $M_z = \gamma\sigma_z$, avec $\gamma = g\gamma_{\text{classique}}$. g est différent dans le cas d'un moment orbital et d'un moment intrinsèque (spin). On se place dans ce dernier cas.
2. (a) Exprimer le Hamiltonien H du système en fonction de $\gamma, \hbar, \vec{S}, \vec{B_0}, \vec{B_1}(t)$.
   (b) Exprimer H en fonction de $\hbar, \omega_0 = \gamma B_0, \omega_1 = \gamma B_1$ et des opérateurs $\widehat{S_x}, \widehat{S_y}, \widehat{S_z}$.
   (c) Montrer que dans la base orthonormale $(|+\rangle, |-\rangle)$ H s'exprime sous la forme

   $$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -\omega_0 & -\omega_1 e^{+i\omega_r t} \\ -\omega_1 e^{-i\omega_r t} & \omega_0 \end{pmatrix}$$

   (d) On pose $|\psi(t)\rangle = a_+(t)|+\rangle + a_-(t)|-\rangle$ et on suppose qu'à $t = 0$ $|\psi\rangle = |+\rangle$. Que représente $P(t) = |\langle -|\psi(t)\rangle|^2$?
   (e) On effectue le changement de variable

   $$b_+ = a_+(t)e^{-i\frac{\omega_r}{2}t} \quad b_- = a_-(t)e^{+i\frac{\omega_r}{2}t}$$

   Donner les équations différentielles du premier ordre qui régissent $b_+(t)$ et $b_-(t)$ en fonction de $\delta\omega = \omega_r - \omega_0$.
   (f) En déduire l'équation du second ordre vérifiée par $b_-(t)$.
   (g) Calculer $b_-(t)$ compte-tenu des conditions initiales.
   (h) En déduire la formule de Rabi :

   $$P(t) = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + (\delta\omega)^2}\sin^2\left(\sqrt{\omega_1^2 + (\delta\omega)^2}\,\frac{t}{2}\right)$$

   (i) Comment choisir ω_r pour que P ait la plus grande amplitude de variation ? Commenter.