

**MÉCANIQUE QUANTIQUE**  
**TRAVAUX DIRIGÉS Nos. 15** (Durée: 1 h )

## Perturbations indépendantes du temps

On considère un oscillateur harmonique de Hamiltonien

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

On pose  $X = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$  et  $P = \sqrt{\frac{1}{m\hbar\omega}}p$

1. Rappeler les expressions des opérateurs de création et d'annihilation  $a$  et  $a^\dagger$ , leur commutateur, leur action ainsi que celle de  $N = a.a^\dagger$  sur les vecteurs propres  $|\phi_n\rangle$  de  $H_0$ .
2. On rajoute à  $H_0$  un terme de perturbation  $W = \lambda\hbar\omega X$ , où  $\lambda$  est petit.
  - (a) À quelle situation physique ce terme pourrait-il correspondre ?
  - (b) Appliquer la théorie des perturbations stationnaires au deuxième ordre à  $H = H_0 + W$ . Vérifier qu'on retrouve le résultat exact pour la  $n$ -ième énergie propre de  $H$  :

$$E_n = (n + \frac{1}{2}\hbar\omega) - \frac{\lambda^2}{2}\hbar\omega$$

3. On suppose désormais que  $W$  vaut  $\frac{1}{2}\rho\hbar\omega X^2$ .
  - (a) Que valent les énergies propres *exactes* de  $H = H_0 + W$  ?
  - (b) Retrouver ce résultat au deuxième ordre par la théorie des perturbations
4. Cette fois, on prend pour  $W$  un terme anharmonique en  $\sigma\hbar\omega X^3$ .
  - (a) Évaluer au deuxième ordre les  $E_n$ . Commenter
  - (b) Les états propres de  $H$ , évalués au deuxième ordre de la théorie des perturbations, sont ils ceux de  $H_0$  ? Quelles sont les conséquences physiques de ce résultat ? (par exemple, par rapport aux probabilités de transition entre états ?)