Le Mans Université
Solutions aux exercices TD
L2 Économie-Gestion
Théorie de la croissance

François Langot*
Jhon Jair González†

Novembre, 2019

Exercice 1 et 2

Note : Les exercices 1 et 2 sont une variation de l'exercice 3. Pour trouver la solution de l'exercice 1 il faut prendre en considération la solution présentée pour l'exercice 3 et fixer $n = x = 0$. Pour trouver la solution de l'exercice 2 il faut prendre en considération la solution présentée pour l'exercice 3 et fixer $x = 0$.

Exercice 3

Soit le modèle de croissance économique de Solow avec progrès technique et croissance de la population. Utiliser la fonction de production Cobb-Douglas $F(K, L) = A_t K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha}$, $k_t = \frac{K_t}{L_t}$, où $L_t = L_0 e^{nt}$ et $A_t = A_0 e^{xt}$ avec x désignant le taux de croissance de la productivité et n le taux de croissance de la population.

Question 1

Trouver le taux de croissance du produit, de la consommation et du capital

D'abord, il faut exprimer toutes les variables en unités de travail efficace.

$$
\begin{aligned}
Y_t = A_t K_t^{1-\alpha} L_t^{\alpha} &= A_0 e^{xt} K_t^{1-\alpha} \left(L_0 e^{nt} \right)^{\alpha} = A_0 K_t^{1-\alpha} e^{x \frac{\alpha}{\alpha} t} \left(L_0 e^{nt} \right)^{\alpha} \\
&= A_0 K_t^{1-\alpha} \left(L_0 e^{(n + \frac{x}{\alpha})t} \right)^{\alpha} = A_0 K_t^{1-\alpha} E_t^{\alpha} \quad \text{où } E_t = L_0 e^{(n+\frac{x}{\alpha})t}
\end{aligned}
$$

E_t mesure les unités de travail efficace. $\tilde{k_t} = \frac{K_t}{E_t}$.

On sait que

$$
\begin{aligned}
Y_t &= C_t + I_t \\
K_{t+1} &= I_t + (1-\delta)K_t \\
Y_t &= C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = C_t + \dot{K}_t + \delta K_t
\end{aligned}
$$

où l'on note $\dot{K}_t = K_{t+1} - K_t = \frac{\partial K_t}{\partial t}$. Le taux de croissance du capital est alors $\frac{\dot{K}_t}{K_t} = \gamma_k$.

$$
\frac{Y_t}{E_t} = \frac{C_t}{E_t} + \frac{\dot{K}_t}{E_t} + \frac{\delta K_t}{E_t} \rightarrow \tilde{y_t} = \tilde{c_t} + \frac{\dot{K}_t}{E_t} + \delta \tilde{k_t} \quad \text{Il faut trouver } \frac{\dot{K}_t}{E_t}
$$

*Le Mans Université (Gains-TEPP) & Institut Universitaire de France & Paris School of Economics & Cepremap (ENS-Paris)
†Le Mans Université (Gains-TEPP)

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial(K_t/E_t)}{\partial t} = \frac{1}{E_t}\dot{K}_t - \frac{K_t}{E_t}\frac{\dot{E}_t}{E_t} = \frac{\dot{K}_t}{E_t} - \tilde{k}_t\Big(n + \frac{x}{\alpha}\Big)$$

$$\dot{\tilde{k}}_t = \frac{\dot{K}_t}{E_t} - \tilde{k}_t\Big(n + \frac{x}{\alpha}\Big)$$

En remplaçant $\frac{\dot{K}_t}{E_t}$

$$\tilde{y_t} = \tilde{c_t} + \dot{\tilde{k}}_t + \tilde{k}_t\Big(n + \frac{x}{\alpha}\Big) + \delta\tilde{k}_t$$

$$\tilde{c_t} = f(\tilde{k}_t) - sf(\tilde{k}_t)$$

$$\Rightarrow$$

$$\tilde{y_t} = f(\tilde{k}_t) - sf(\tilde{k}_t) + \dot{\tilde{k}}_t + \tilde{k}_t\Big(n + \frac{x}{\alpha}\Big) + \delta\tilde{k}_t$$
$$\Rightarrow$$

$$\dot{\tilde{k}}_t = sf(\tilde{k}_t) - \tilde{k}_t\Big(\delta + n + \frac{x}{\alpha}\Big) \quad \text{La dynamique du capital}$$

$$\frac{\dot{\tilde{k}}_t}{\tilde{k}_t} = \frac{sf(\tilde{k}_t)}{\tilde{k}_t} - \Big(\delta + n + \frac{x}{\alpha}\Big) \quad \text{Le taux de croissance du capital}$$

Pour trouver le taux de croissance du produit (γ_Y), de la consommation (γ_C) et du capital (γ_K) on utilise la fonction de production:

$$\begin{aligned} log(Y_t) &= log(A_0) + (1-\alpha)log(K_t) + \alpha log(E_t) \\ &= log(A_0) + (1-\alpha)log(K_t) + \alpha log\Big(L_0 e^{\left(n+\frac{x}{\alpha}\right)t}\Big) \\ &= log(A_0) + (1-\alpha)log(K_t) + \alpha log(L_0) + \alpha\Big(n + \frac{x}{\alpha}\Big)t \end{aligned}$$

$$\frac{\partial log(Y_t)}{\partial t} = (1-\alpha)\frac{\partial log(K_t)}{\partial t} + \alpha\Big(n + \frac{x}{\alpha}\Big)$$
$$\gamma_Y = (1-\alpha)\gamma_K + \alpha\Big(n + \frac{x}{\alpha}\Big)$$

Il faut trouver $\gamma_K \rightarrow$

On a, par définition, une expression pour $\frac{\dot{\tilde{k_t}}}{\tilde{k_t}}$

$$\frac{\dot{\tilde{k_t}}}{\tilde{k_t}} = \frac{\dot{K_t}}{\tilde{k_t}E_t} - \left(n + \frac{x}{\alpha}\right)$$

On cherche à trouver les taux de croissance associés à l'état stationnaire ($\dot{\tilde{k_t}} = 0$) $\rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{K_t}}{E_t} &= \tilde{k_t}\left(n + \frac{x}{\alpha}\right) \\
\dot{K_t} &= \frac{E_t K_t}{E_t}\left(n + \frac{x}{\alpha}\right) \\
\frac{\dot{K_t}}{K_t} &= \left(n + \frac{x}{\alpha}\right) \\
&= \gamma_K \quad \text{Le taux de croissance du capital}
\end{aligned}$$

En remplaçant γ_K dans l'expression de de γ_Y, on déduit $\rightarrow$

$$\begin{aligned}
\gamma_Y &= (1-\alpha)\left(n + \frac{x}{\alpha}\right) + \alpha\left(n + \frac{x}{\alpha}\right) \\
\gamma_Y &= \left(n + \frac{x}{\alpha}\right) \quad \text{Le taux de croissance de la production}
\end{aligned}$$

Pour trouver le taux de croissance de la consommation γ_C $\rightarrow$

$$\begin{aligned}
C_t &= Y_t - S_t \\
C_t &= Y_t - sY_t \\
\frac{\partial log(Ct)}{\partial t} &= (1-\alpha)\gamma_K + \alpha\left(n + \frac{x}{\alpha}\right) \\
\gamma_C &= \left(n + \frac{x}{\alpha}\right) \quad \text{Le taux de croissance de la consommation}
\end{aligned}$$

$$\rightarrow$$

$$\gamma_Y = \gamma_C = \gamma_K$$

Question 2

Trouver le niveau de capital qui maximise la consommation à l'état stationnaire

$$\max_{\tilde{k_t}^{RO}} \left[C_t^* = f(\tilde{k_t}) - sf(\tilde{k_t}) = f(\tilde{k_t}) - \tilde{k_t}\left(n + \delta + \frac{x}{\alpha}\right)\right] \quad \text{où } \tilde{k_t}^{RO} \text{ est le niveau de } K_t \text{ de règle d'or}$$

$$\rightarrow$$

$$\frac{\partial C_t^*}{\partial \tilde{k_t}^{RO}} = f'(\tilde{k_t}) - \left(n + \delta + \frac{x}{\alpha}\right) = 0$$

Question 3

Trouver $\tilde{k_t}^*$, et $\tilde{k_t}^{RO}$

On sait que $f(\tilde{k_t}) = A_0\tilde{k_t}^{1-\alpha}$ et imposant $\dot{\tilde{k_t}} = 0$ à l'état stationnaire

$$\rightarrow$$

$$\dot{\tilde{k_t}} = sf(\tilde{k_t}) - \tilde{k_t}\Big(\delta + n + \frac{x}{\alpha}\Big) = 0$$

$$\tilde{k_t}^* = \Big(\frac{sA_0}{\delta + n + \frac{x}{\alpha}}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\tilde{k_t}^{RO} = \Big(\frac{1-\alpha}{\delta + n + \frac{x}{\alpha}}\Big)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Exercice 4

Soit le modèle de croissance endogène avec $Y_t = AK_t$. Supposer qu'il y a une croissance de la population $n : L_t = L_0 e^{nt}$ où n est le taux de croissance de la population.

Question 1

Trouver une expression qui représente l'état stationnaire de k_t

D'abord il faut exprimer les variables par tête, $k_t = \frac{K_t}{L_t}$

$$\begin{aligned}
\frac{Y_t}{L_t} &= \frac{AK_t}{L_t} = ak_t \\
\frac{\dot{K}_t}{L_t} &= \frac{K_{t+1} - K_t}{L_t} = \frac{I_t}{L_t} - \delta\frac{K_t}{L_t} \\
\frac{\dot{K}_t}{L_t} &= i_t - \delta k_t
\end{aligned}$$

Il faut trouver $\frac{\dot{K}_t}{L_t} \rightarrow$

$$\dot{k}_t = \frac{\dot{K}_t}{L_t} - k_t n$$

$$\rightarrow$$

$$\dot{k}_t + k_t n = i_t - \delta k_t$$

Prendre en compte que:

$$I_t = S_t$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\dot{k}_t + nk_t + \delta k_t &= f(k_t) - (1-s)f(k_t) \\
\frac{\dot{k}_t}{k_t} &= \frac{sf(k_t)}{k_t} - (\delta + n) \\
\frac{\dot{k}_t}{k_t} &= \frac{sAk_t}{k_t} - (\delta + n) \\
\frac{\dot{k}_t}{k_t} &= sA - (\delta + n)
\end{aligned}$$

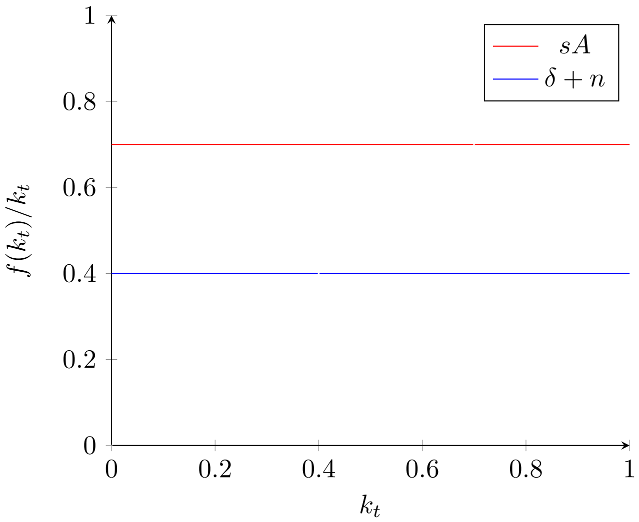
Question 2

Trouver que le taux de croissance du capital est égal au taux de croissance du produit

$$\frac{\partial log(Y_t)}{\partial t} = \frac{\partial log(A)}{\partial t} + \frac{\partial log(K_t)}{\partial t}$$
$$\gamma_Y = \gamma_K$$

Question 3

Faire un graphique qui représente l'évolution du taux de croissance du capital



Note: la graphique est basé sur des valeurs hypothétiques.

Exercice 5

Réviser les notes du cours

Exercice 6

Cet exercice est une variation de l'exercice 7. Vous pouvez trouver une solution en fixant $E_t = 0$, $H_t = H_{t+1} = 1$, $\beta = 0$.

Exercice 7

Soit le modèle de capital humain à la Mankiw, Romer and Weil (1992):

- Épargne financière $I_t = s_k Y_t$
- Education $E_t = s_h Y_t$
- Accumulation du capital physique: $K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t$
- Accumulation du capital humain: $H_{t+1} = (1 - \delta)H_t + E_t$
- Fonction de production: $Y_t = K_t^\alpha H_t^\beta (X_t L_t)^{1-\alpha-\beta}$
- Croissance de la population $L_{t+1} = (1 + n)L_t$
- Croissance des connaissances $X_{t+1} = (1 + g)X_t$

Question 1

Trouver le niveau de capital physique k_t et le niveau de capital humain h_t associés à l'état stationnaire.

D'abord nous devons exprimer les variables en variables par "tête efficace" $\rightarrow k_t = \frac{K_t}{X_t L_t}$

$$\begin{aligned} K_{t+1} &= I_t + (1-\delta)K_t \\ &= s_k Y_t + (1-\delta)K_t \\ &= s_k K_t^\alpha H_t^\beta (X_t L_t)^{1-\alpha-\beta} + (1-\delta)K_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{K_{t+1}}{X_t L_t}\frac{X_{t+1}L_{t+1}}{X_{t+1}L_{t+1}} &= \frac{s_k K_t^\alpha H_t^\beta (X_t L_t)^{1-\alpha-\beta}}{X_t L_t} + (1-\delta)\frac{K_t}{X_t L_t} \\ k_{t+1}(1+g)(1+n) &= s_k k_t^\alpha h_t^\beta + (1-\delta)k_t \\ k_{t+1}(1+g+n) &= s_k k_t^\alpha h_t^\beta + (1-\delta)k_t \end{aligned}$$

Il faut suivre le même processus pour $H_{t+1} \rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{H_{t+1}}{X_t L_t}\frac{X_{t+1}L_{t+1}}{X_{t+1}L_{t+1}} &= \frac{s_h K_t^\alpha H_t^\beta (X_t L_t)^{1-\alpha-\beta}}{X_t L_t} + (1-\delta)\frac{H_t}{X_t L_t} \\ h_{t+1}(1+g)(1+n) &= s_h k_t^\alpha h_t^\beta + (1-\delta)h_t \\ h_{t+1}(1+g+n) &= s_h k_t^\alpha h_t^\beta + (1-\delta)h_t \end{aligned}$$

À l'état stationnaire: $\lim_{t\to\infty} k_t = k$ et $\lim_{t\to\infty} h_t = h \rightarrow$

$$k(\delta+g+n) = s_k k^\alpha h^\beta \tag{1}$$
$$h(\delta+g+n) = s_h k^\alpha h^\beta \tag{2}$$
$$y = k^\alpha h^\beta \tag{3}$$

$$(1)/(2) \rightarrow$$

$$k = \frac{s_k}{s_h}h$$

En remplaçant en (3) $\rightarrow$

$$y = \left(\frac{s_k}{s_h}\right)^\alpha h^{\alpha+\beta} \rightarrow$$

$$h(\delta+g+n) = s_h\left(\frac{s_k}{s_h}\right)^\alpha h^{\alpha+\beta}$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{aligned} h^* &= \left(\frac{s_h^{1-\alpha}s_k^\alpha}{n+\delta+g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \\ k^* &= \left(\frac{s_h^\beta s_k^{1-\beta}}{n+\delta+g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \end{aligned}$$

Question 2

Trouver l'évolution de la richesse par tête $\tilde{y_t} = \frac{Y_t}{L_t} \rightarrow$

En remplaçant k^* et h^* dans la fonction de production, on peut obtenir l'expression suivante:

$$y = \left(\frac{s_h^{1-\alpha} s_k^{\alpha}}{n+\delta+g}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{s_h^{\beta} s_k^{1-\beta}}{n+\delta+g}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}}$$

En appliquant le log, on obteint

$$log(y) = \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} log(s_k) + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} log(s_h) - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta} log(\delta+n+g)$$

Maintenant, il faut trouver $\tilde{y_t} = \frac{Y_t}{L_t} \rightarrow$

$$\begin{aligned}
\frac{Y_t}{L_t} &= K_t^{\alpha} H_t^{\beta} \frac{(X_t L_t)^{1-\alpha-\beta}}{L_t} \\
\tilde{y_t} &= \left(\frac{K_t}{L_t}\right)^{\alpha} \left(\frac{H_t}{L_t}\right)^{\beta} X_t^{1-\alpha-\beta} \\
\tilde{y_t} &= \left(\frac{K_t}{X_t L_t}\right)^{\alpha} \left(\frac{H_t}{X_t L_t}\right)^{\beta} X_t \\
log(\tilde{y_t}) &= \alpha log(k_t) + \beta log(h_t) + log(X_t)
\end{aligned}$$

En considérant que $X_t = (1+g)^t X_0 \rightarrow$

$$log(\tilde{y_t}) = \alpha log(k_t) + \beta log(h_t) + gt + log(X_0)$$

En considérant k^* et h^* $\rightarrow$

$$log(\tilde{y_t}) = gt + log(X_0) + \frac{\alpha}{1-\alpha-\beta} log(s_k) + \frac{\beta}{1-\alpha-\beta} log(s_h) - \frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta} log(\delta+n+g)$$

Question 3

Calculer la vitesse de la convergence

On va montrer que

$$y_{t+1} - y_t = -\lambda(y_t - y) \quad \text{avec } \lambda = (n+g+\delta)(1-\alpha-\beta)$$

Donc, on va définir les fonctions suivants:

$$\begin{aligned}
k_{t+1} &= F(k_t, h_t) \\
h_{t+1} &= G(k_t, h_t)
\end{aligned}$$

On fait une approximation de la fonction $F(k_t, h_t)$ et $G(k_t, h_t)$ autour de k et h pour avoir une fonction linéaire (développement de Taylor à l'ordre 1)$\rightarrow$

$$\begin{aligned}
k_{t+1} &= F(k,h) + F'_k(k,h)(k_t - k) + F'_h(k,h)(h_t - h) \\
k_{t+1} &= k + F'_k(k,h)(k_t - k) + F'_h(k,h)(h_t - h) \\
\frac{k_{t+1} - k}{k} &= F'_k(k,h)\frac{(k_t - k)}{k} + F'_h(k,h)\frac{(h_t - h)}{k}\frac{h}{h}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h_{t+1} &= G(k,h) + G'_k(k,h)(k_t - k) + G'_h(k,h)(h_t - h)\\
\frac{h_{t+1}-h}{h} &= G'_k(k,h)\frac{(k_t-k)}{h}\frac{k}{k} + G'_h(k,h)\frac{(h_t-h)}{h}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_t &= y + (\alpha k^{-1} y)(k_t - k) + (\beta h^{-1} y)(h_t - h)\\
\frac{y_t - y}{y} &= \alpha\frac{(k_t-k)}{k} + \beta\frac{(h_t-h)}{h}\\
\frac{y_{t+1} - y}{y} &= \alpha\frac{(k_{t+1}-k)}{k} + \beta\frac{(h_{t+1}-h)}{h}
\end{aligned}
$$

On a trouvé les expressions pour $\frac{(k_{t+1}-k)}{k}$ et $\frac{(h_{t+1}-h)}{h}$ $\rightarrow$

$$
\frac{y_{t+1}-y}{y} = \alpha\left(F'_k(k,h)\frac{(k_t-k)}{k} + F'_h(k,h)\frac{(h_t-h)}{k}\frac{h}{h}\right) + \beta\left(G'_k(k,h)\frac{(k_t-k)}{h}\frac{k}{k} + G'_h(k,h)\frac{(h_t-h)}{h}\right) \tag{4}
$$

En tenant en compte les valeurs associées à l'état stationnaire et que

$$
\begin{aligned}
k_{t+1} = F(k_t, h_t) &= \frac{1}{1+g+n}\left((1-\delta)k_t + s_k k_t^{\alpha} h_t^{\beta}\right)\\
h_{t+1} = G(k_t, h_t) &= \frac{1}{1+g+n}\left((1-\delta)h_t + s_h k_t^{\alpha} h_t^{\beta}\right)
\end{aligned}
$$

Les dérivées associées aux valeurs de l'état stationnaire sont:

$$
\begin{aligned}
F'_k(k,h) &= \frac{\partial F(h,k)}{\partial k}\\
F'_h(k,h) &= \frac{\partial F(h,k)}{\partial h}\\
G'_k(k,h) &= \frac{\partial G(h,k)}{\partial k}\\
G'_h(k,h) &= \frac{\partial G(h,k)}{\partial h}
\end{aligned}
$$

Il faut remplacer ces calculs dans (4) $\rightarrow$

$$
\frac{y_{t+1}-y}{y} = [1 - (1-\alpha-\beta)(\delta+n+g)]\left(\alpha\frac{(k_t-k)}{k} + \beta\frac{(h_t-h)}{h}\right)
$$

$$
\frac{y_{t+1}-y}{y} = (1-\lambda)\left(\frac{y_t-y}{y}\right) \quad \text{avec } \lambda = (n+g+\delta)(1-\alpha-\beta)
$$

En tenant en compte que

$$
\begin{aligned}
\frac{y_{t+1}-y}{y} &= \gamma_y \quad \text{avec } \gamma_y \text{ le taux de croissance de } y_t\\
log\left(\frac{y_{t+1}}{y}\right) &= log(1+\gamma_y) \approx \gamma_y \rightarrow\\
\frac{y_{t+1}-y}{y} &= log(y_{t+1}) - log(y)
\end{aligned}
$$

$$\rightarrow$$

$$\begin{aligned}
log(y_{t+1}) - log(y) &= (1-\lambda)(log(y_t) - log(y)) \\
log(y_t) - log(y) &= (1-\lambda)^t(log(y_0) - log(y)) \\
y_{t+1} - y &= (1-\lambda)(y_t - y) \\
y_{t+1} - y - y_t + y &= (1-\lambda)(y_t - y) - y_t + y \\
y_{t+1} - y_t &= -\lambda(y_t - y)
\end{aligned}$$

Combien des périodes t faut-il pour réduire de moitié l'écart entre la condition initiale et l'état stationnaire?

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= (1-\lambda)^t \\
t &= \frac{log(1/2)}{log(1-\lambda)}
\end{aligned}$$

Si l'on impose $\alpha = \beta = 1/3$ et $(n+g+\delta) = 0.06 \rightarrow$

$$\lambda = (n+\delta+g)(1-\alpha-\beta) = 0.02 \rightarrow$$

$$t = \frac{log(1/2)}{log(1-0.02)} = 35$$

Note: il existe convergence si $\lambda \in (0, 1)$.

Exercice 8

Voir le cours

Exercice 9

Voir le cours

Exercice 10

Soit le modèle de Solow en économie ouverte et l'identité des comptes nationaux

$$Y = C + I + XN \rightarrow Y + rF = C + I + XN + rF$$

$$V_t = K_t + F_t$$

XN exportations nettes, F les avoirs de capitaux étrangers, V richesse totale

Question 1

Trouver l'expression qui détermine le taux d'Intérêt mondial r^w, le salaire w_t, trouver v^* et $\bar{w}$ de l'état stationnaire. Trouver le RNB de l'état stationnaire (y_t^n).

D'abord on va définir quelques relations pour cette économie

$$
\begin{aligned}
NX_t + rF_t &= F_{t+1} - F_t \\
S_t &= Y_t + rF_t - C_t \\
S_t &= I_t + F_{t+1} - F_t \\
K_{t+1} &= I_t + K_t \quad \text{avec } \delta = 0 \\
K_{t+1} &= S_t - (F_{t+1} - F_t) + K_t \rightarrow \\
K_{t+1} + F_{t+1} &= S_t + F_t + K_t \\
V_t &= K_t + F_t \rightarrow \\
V_{t+1} &= S_t + V_t \\
S_t &= s(Y_t + rF_t) \\
Y_t &= AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \\
w_t &= \frac{\partial F_t}{\partial L_t} \\
r_t &= \frac{\partial F_t}{\partial K_t} \\
Y_t &= w_t L + r_t K_t
\end{aligned}
$$

En calculant les variables par tête $k_t = K_t/L_t$

$$
\begin{aligned}
\frac{Y_t}{L_t} &= \frac{AK_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}}{L_t} \\
y_t &= Ak_t^{\alpha}
\end{aligned}
$$

Donc, si $r^w = r \rightarrow$

$$
\begin{aligned}
r^w &= \frac{\partial F_t}{\partial K_t} \\
r^w &= \alpha A k^{\alpha - 1} \rightarrow \\
\bar{k} &= \left(\frac{\alpha A}{r^w}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \rightarrow \\
w_t = \bar{w} &= \frac{\partial F_t}{\partial L_t} \\
\bar{w} &= (1-\alpha) A \bar{k}^{\alpha} \\
\bar{w} &= (1-\alpha) A \left(\frac{\alpha A}{r^w}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}
\end{aligned}
$$

En prenant en compte l'évolution de la richesse totale

$$
\begin{aligned}
V_{t+1} &= S_t + V_t \\
V_{t+1} &= s(Y_t + r^w F_t) + V_t \\
V_{t+1} &= s(wL_t + r^w K_t + r^w F_t) + V_t \\
V_{t+1} &= swL_t + (1 + sr^w) V_t
\end{aligned}
$$

En prenant en compte que $L_{t+1} = (1+n)L_t$ avec $n > -1$ et $v_t = V_t/L_t \rightarrow$

$$
\begin{aligned}
V_{t+1} \frac{L_{t+1}}{L_{t+1} L_t} &= sw + (1 + sr^w) v_t \\
v_{t+1}(1+n) &= sw + (1 + sr^w) v_t \\
v_{t+1} &= \frac{s\bar{w}}{(1+n)} + \frac{(1 + sr^w) v_t}{(1+n)} \\
&= \Phi(v_t)
\end{aligned}
$$

Un état stationnaire es donné par $v_{t+1} = v_t = v^*$

$$
\begin{aligned}
v^* &= \frac{s\bar{w}}{n - sr^w} \\
y^{n*} &= \frac{n}{n - sr^w}\bar{w}
\end{aligned}
$$