

UEO N° AC2-01

MASTER 2 MENTION RECHERCHE ACOUSTIQUE

SUPPORT DE COURS

ACOUSTIQUE EN FLUIDE VISQUEUX ET CONDUCTEUR DE LA  
CHALEUR

AUTEUR : GUILLAUME PENELET, MAÎTRE DE CONFÉRENCES, LAUM, UMR CNRS 6613

année universitaire 2013-2014

# Table des matières

Table des matières . . . . .	i
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Equations fondamentales.</b>	<b>5</b>
1.1 Equations du mouvement en fluide non dissipatif (rappels). . . . .	5
1.1.1 Compressibilité : équation de conservation de la masse . . . . .	5
1.1.2 Inertie : équation d'Euler . . . . .	6
1.1.3 Equation de conservation de l'énergie. . . . .	7
1.1.4 Approximation de l'acoustique linéaire, équation de propagation acoustique . . . . .	9
1.2 Equations du mouvement en fluide dissipatif . . . . .	9
1.2.1 Viscosité, conductivité thermique (rappel) . . . . .	9
1.2.2 Conservation de la quantité de mouvement : équation de Navier-Stokes . . . . .	11
1.2.3 Conservation de l'énergie . . . . .	16
1.2.4 Approximation de l'acoustique linéaire . . . . .	17
1.2.5 Petit retour en arrière : vitesse du son adiabatique ou isotherme ? . . . . .	18
<b>2 Propagation acoustique en fluide dissipatif</b>	<b>21</b>
2.1 L'équation d'onde . . . . .	21
2.1.1 Cas particulier : fluide visqueux non conducteur de la chaleur . . . . .	23
2.1.2 Cas général . . . . .	24
2.1.3 Résumé . . . . .	25
2.2 Propagation en milieu infini . . . . .	25
2.2.1 Atténuation et dispersion (pour les gaz monoatomiques). . . . .	25
2.2.2 Le phénomène de relaxation thermique moléculaire . . . . .	27
2.3 Conditions aux frontières . . . . .	30
2.3.1 Epaisseurs de couches limites acoustiques visqueuse et thermique . . . . .	30
2.3.2 Conditions aux limites à l'interface fluide/paroi . . . . .	31
2.4 Réflexion d'une onde plane harmonique sur une paroi rigide. . . . .	32
2.5 Propagation d'ondes planes dans des guides . . . . .	36
2.5.1 Propagation d'ondes planes dans un guide de section circulaire . . . . .	36

2.5.2	Equation d'onde . . . . .	39
2.5.3	Cas limites asymptotiques . . . . .	39
2.5.4	Extension aux fentes et aux guides de section rectangulaire . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Quelques applications ou conséquences de la viscothermie</b>	<b>43</b>
3.1	Quelques problèmes académiques . . . . .	43
3.1.1	Ondes planes guidées, approche électroacoustique . . . . .	43
3.1.2	Ondes guidées en géométries cartésienne et cylindrique . . . . .	46
3.1.3	Résonateurs . . . . .	49
3.1.4	Modèle simplifié de matériaux poreux . . . . .	53
3.1.5	Ondes cylindriques et sphériques en espace infini . . . . .	54
3.2	Conséquences des effets visqueux . . . . .	55
3.2.1	Singularités géométriques . . . . .	55
3.2.2	Le vent acoustique . . . . .	57
3.2.3	Le gyromètre acoustique . . . . .	62
3.3	Conséquences des effets thermiques . . . . .	65
3.3.1	Généralités sur les effets thermoacoustiques . . . . .	65
3.3.2	Les machines thermoacoustiques . . . . .	67
3.3.3	Thermophones . . . . .	78
<b>A</b>	<b>Paramètres thermophysique ...</b>	<b>81</b>
<b>B</b>	<b>Tenseur des déformations</b>	<b>83</b>

# Introduction

## Objectifs du cours

Ce cours est une introduction à la description de la propagation acoustique lorsque les phénomènes visqueux et thermiques doivent être considérés. A ce titre, l'intitulé du cours aurait pu être formulé de la façon suivante : "Thermomécanique des milieux continus : applications à la propagation acoustique dans les fluides", ce qui aurait le mérite de mettre en lumière la nécessité de considérer conjointement les phénomènes thermodynamiques et les équations de la mécanique dans les milieux continus.

Ce cours reprend en partie les enseignements délivrés en cours d'acoustique physique de Master 1, en y ajoutant les phénomènes visqueux et thermiques. Dès lors, le cours d'acoustique physique de Master 1 est ici considéré comme un pré-requis, et le lecteur ayant besoin de réviser ses bases pourra, par exemple, consulter au préalable l'ouvrage de C. Potel et M. Bruneau intitulé "Acoustique Générale" [5] (chapitres 3 à 7), dont plusieurs exemplaires sont disponibles à la bibliothèque universitaire.

Ce cours s'inspire très largement de l'ouvrage de M. Bruneau [2] et dans une moindre mesure de celui de A. D. Pierce [4], ouvrages que le lecteur pourra consulter pour approfondir le sujet (ainsi que d'autres ouvrages de référence, par exemple [3]). Le chapitre 1 a pour objet d'établir les équations fondamentales du mouvement d'un fluide compressible visqueux et conducteur de la chaleur. Le chapitre 2 traite de la résolution de ces équations pour la description des phénomènes de propagation acoustique, et traite plus particulièrement de quelques aspects fondamentaux que sont la propagation en milieux infini et semi-infini, et la propagation d'ondes planes dans les guides. Enfin le chapitre 3 traite un certain nombre de problèmes académiques et donne quelques éléments sur certaines conséquences notoires des effets visqueux (gyrométrie acoustique, vent acoustique) et thermiques (machines thermoacoustiques).

## Remarques préliminaires, conventions, notations.

**Représentation Eulérienne ou Lagrangienne ?** Les variables utilisées par la suite pour décrire les perturbations dynamiques du fluide sont entre autres la pression, la température, la vitesse particulaire acoustique . . . L'étude du champ de déplacement du fluide, qui dépend du point et du temps, fait appel à la notion de particule fluide qui, rappelons-le, représente un volume élémentaire :

- suffisamment grand pour que l'hypothèse d'un continuum reste valide en son sein,
- suffisamment petit, i.e. quasi ponctuel, pour que l'on puisse y attacher une pression, une

température, etc . . .

Les équations du mouvement du fluide peuvent être recherchées de façon équivalente par deux approches différentes, à savoir la description Lagrangienne et la description Eulérienne. Dans la description Lagrangienne, l'observateur suit l'évolution d'un élément de fluide, identifié par sa position à un instant  $t_0$ . Ce type de description est parfaitement adapté à des problèmes de mécanique du point matériel, par exemple, mais s'avère moins pratique pour l'étude du mouvement d'un milieu continu. Dans la description Eulérienne, l'observateur ne suit pas le mouvement d'un élément de fluide donné, mais suit l'évolution du fluide en un point de l'espace donné. C'est ce type de description que nous retiendrons par la suite, sauf indication contraire.

**Hypothèse de fluide Newtonien.** Dans toute la suite du document, nous considérons que le fluide est un fluide réel (par opposition à parfait), c'est à dire visqueux et conducteur de la chaleur. Lorsqu'il sera, très rapidement, question d'un gaz, cette terminologie ne devra cependant pas être confondue avec l'hypothèse d'un gaz parfait (i.e. régie par la fameuse équation d'état  $PV = nRT$ ). En d'autres termes, nous considérerons un gaz parfait, mais visqueux et conducteur de la chaleur. Dès lors, le titre proposé pour ce module s'avère fallacieux, dans la mesure où la dénomination de fluide concerne également les liquides (et notamment l'eau) ; pour autant, une bonne part des connaissances délivrées dans ce cours sont transposables à la propagation dans l'eau et les fluides non parfaits, à quelques différences près (équation d'état, dépendance en température de la viscosité et de la conductivité thermique . . .) nécessitant de consulter la littérature adaptée.

De plus, le cadre de ce cours sera limité à la description du mouvement de fluides (en fait de gaz) Newtoniens, à savoir de fluides dont les caractéristiques rhéologiques sont telles que les contraintes sont à tout instant proportionnelles au taux de cisaillement. Cette restriction n'est que peu rédhitoire puisque la plupart des gaz usuels, et notamment l'air, peuvent être considérés, le plus souvent, comme Newtoniens.

**Hypothèse de l'acoustique linéaire, notation complexe et convention temporelle** Les variables thermomécaniques utilisées dans la suite du document sont la pression, la vitesse particulaire, la température, l'entropie, et la masse volumique du fluide. De plus, les variables (entropie  $S$ , énergie interne  $U$ , . . .) et constantes (capacité calorifique isobare  $C_p$ , . . .) thermodynamiques utilisées sont définies comme étant *massiques* (plutôt que molaires ou volumiques par exemple). Chacune de ces variables comporte une composante statique et une composante oscillante, et peut s'écrire :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}, t) &= P_0(\mathbf{r}) + p(\mathbf{r}, t), \\ \rho(\mathbf{r}, t) &= \rho_0(\mathbf{r}) + \rho'(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \\ T(\mathbf{r}, t) &= T_0(\mathbf{r}) + \tau(\mathbf{r}, t), \\ S(\mathbf{r}, t) &= S_0(\mathbf{r}) + s(\mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

où les variables  $P, \rho, \mathbf{v}, T$  et  $S$  désignent respectivement la pression, la masse volumique, la vitesse, la température et l'entropie massique particulières. Les caractères gras sont utilisés ici pour désigner des quantités vectorielles. Dans la suite du document, nous considérons qu'il n'y a pas d'écoulement moyen ( $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ ), que le milieu de propagation est homogène ( $P_0(\mathbf{r}) = P_0, \rho_0(\mathbf{r}) = \rho_0, \dots$ ) et nous nous placerons dans le cadre de l'hypothèse de l'acoustique linéaire. Nous considérons donc que les variables acoustiques sont de petites perturbations, à savoir que  $p \ll P_0, \rho' \ll \rho_0, \|\mathbf{v}\| \ll c_0, \tau \ll T_0$  et  $s \ll S_0$ , où  $c_0$  désigne la célérité adiabatique du son.

Enfin, il sera bien souvent opportun, sous l'hypothèse d'un mouvement harmonique de pulsation  $\omega$ , d'utiliser la notation complexe pour manipuler plus aisément les équations. A cet effet, nous ferons usage dans toute la suite du document de la convention temporelle  $+i\omega t$ . Chacune des variables acoustiques  $\xi$  s'écrira donc

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \Re \left[ \tilde{\xi}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \right].$$

où  $\tilde{\xi}$  désigne l'amplitude complexe de la variable  $\xi$ .

**Quelques notations** Dans la suite du document, les grandeurs vectorielles seront notées en caractère gras, et la dérivée droite  $d/dt$  sera utilisée pour désigner la dérivée convective :

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \xi.$$



# Chapitre 1

## Equations fondamentales.

### 1.1 Equations du mouvement en fluide non dissipatif (rappels).

#### 1.1.1 Compressibilité : équation de conservation de la masse

Considérons un volume fixe ( $V$ ) de fluide délimité par une surface ( $S$ ) (voir Fig. 3.94). A chaque instant du fluide entre et sort de ce volume. Le principe de conservation de la masse implique que la variation de masse totale  $m$  qu'il contient est opposée au flux de masse sortant à travers la surface ( $S$ ).

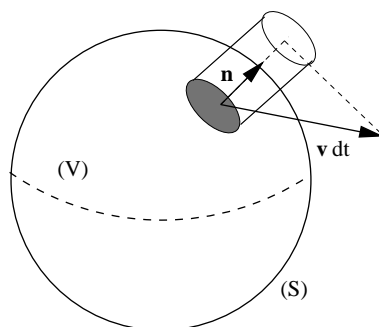


FIGURE 1.1 – Bilan de masse fluide à l'intérieur d'un volume fixe ( $V$ ). le vecteur unitaire normal  $\mathbf{n}$  est orienté vers l'extérieur du volume ( $V$ ) de surface ( $S$ ). Le flux de masse sortant par unité de temps est égal à  $\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$

Nous avons donc

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int \int \int_V \rho \cdot dV \right) = - \int \int_{(S)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.1)$$

En permutant la dérivée temporelle et l'intégrale volumique (permutation possible du fait que le volume est ici supposé fixe), puis utilisant le théorème de Green-Ostrogradski<sup>1</sup>, il vient :

$$\int \int \int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0. \quad (1.2)$$

1. Le théorème de Green-Ostrogradski, ou théorème de flux-divergence stipule qu'il y a égalité entre l'intégrale de



Cette équation est valable quel que soit le volume ( $V$ ), de sorte qu'en faisant tendre ce volume vers 0, on obtient la forme locale de l'équation de conservation de la masse (ou équation de continuité) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.3)$$

soit encore

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0. \quad (1.4)$$

Les équations (1.3) ou (1.4) rendent compte de la compressibilité du fluide, nécessaire à la propagation des perturbations acoustiques.

### 1.1.2 Inertie : équation d'Euler

Dans la mesure où les effets visqueux sont négligés, l'équation de conservation de la quantité de mouvement est obtenue en faisant usage du principe fondamental de la dynamique appliqué sur un domaine fluide de volume variable  $V(t)$  (mais de masse constante, par hypothèse) : la masse de volume fluide multipliée par son accélération est égale à l'ensemble des forces exercées sur ce volume par son environnement :

$$\frac{d}{dt} \left( \int \int \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV \right) = \int \int_{S(t)} \mathbf{f}_S dS + \int \int \int_{V(t)} \mathbf{f}_V dV. \quad (1.5)$$

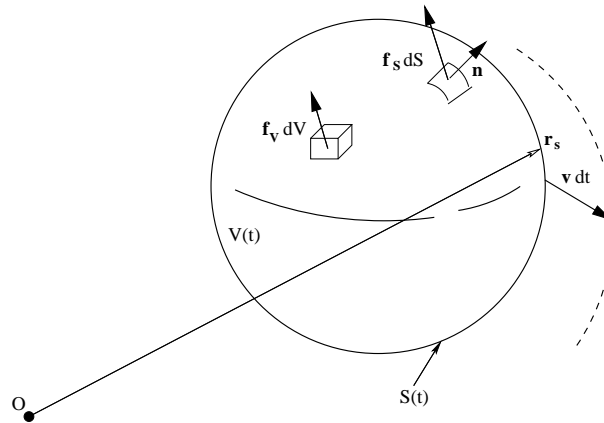


FIGURE 1.2 – Représentation schématique des forces agissant sur une particule de fluide de volume (variable)  $V(t)$  en mouvement dans un référentiel fixe d'origine  $O$ . Chaque point de la surface se déplace à la vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{r}_s, t)$

volume de la divergence d'un champ vectoriel  $\mathbf{f}$  et le flux de ce champ à travers la frontière ( $S$ ) de ce volume :

$$\int \int \int_V \operatorname{div} \mathbf{f} dV = \int \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS$$

Dans cette équation,  $\mathbf{f}_s$  désigne la force par unité de surface exercée par l'environnement voisin de la particule, et  $\mathbf{f}_v$  est une force volumique, par exemple la pesanteur. Bien que la gravité soit toujours présente, on négligera ici son effet sur la propagation acoustique, de même qu'on négligera plus généralement toute force volumique dans la suite :  $\mathbf{f}_v = 0$ . Par ailleurs, en l'absence de viscosité, les forces surfaciques sont orthogonales à la surface  $S(t)$  et correspondent aux forces de pression sur cette surface :  $\mathbf{f}_s = -P\mathbf{n}$ . Par suite, faisant usage du théorème de Green-Ostrogradski<sup>2</sup>, le premier terme du membre de droite peut être écrit sous la forme

$$\int \int_{S(t)} -P\mathbf{n}dS = \int \int \int_{V(t)} -\mathbf{grad}P dV. \quad (1.6)$$

La dérivée  $d/dt$  du membre de gauche est calculée dans un référentiel qui suit le mouvement du fluide. Dans ce référentiel, le produit  $\rho dV$  représente la masse d'un élément matériel de fluide et est par définition une constante puisqu'il contient toujours le même nombre de molécules :

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int \int \int_{V(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV, \quad (1.7)$$

Il s'ensuit que :

$$\int \int \int_{V(t)} \left( \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{grad}P \right) dV = 0. \quad (1.8)$$

Puisque l'intégrale de volume ci-dessus doit être nulle pour tout volume arbitraire, il s'ensuit que l'intégrande doit être nul, ce qui mène à la forme locale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{grad}P = 0. \quad (1.9)$$

### 1.1.3 Equation de conservation de l'énergie.

Les équations (1.3) et (1.9) mettent en jeu trois variables, à savoir  $P$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\rho$ . Une troisième équation est nécessaire, qui doit être recherchée dans les propriétés thermodynamiques du fluide et dans le principe de conservation de l'énergie.

En l'absence de viscosité, il ne peut y avoir de dissipation (sous forme d'énergie thermique) de l'énergie mécanique par frottements. De plus, dans la mesure où le fluide est supposé non conducteur de la chaleur, l'écart de température associé aux écarts de pression entre des particules fluides voisines ne peut se traduire par un transfert de chaleur, ce qui se traduit par  $\delta Q = 0$ , où  $\delta Q$  désigne la quantité de chaleur massique reçue par un élément de fluide. Par suite, compte-tenu que  $\delta Q = TdS$ , le mouvement acoustique est isentropique :

$$TdS = 0. \quad (1.10)$$

---

2. Plus précisément, on fait ici usage d'un corollaire du théorème de Green-Ostrogradski, qui stipule que si  $g$  désigne un champ scalaire, alors on a l'égalité :

$$\int \int \int_V \mathbf{grad}g dV = \int \int_S g \mathbf{n} dS$$

La particule considérée ne reçoit pas de chaleur de la part des particules voisines, ni ne se réchauffe du fait d'une dissipation d'énergie mécanique. Dès lors, en considérant que le fluide à l'étude est un milieu bivariant, i.e. dont l'état dépend de deux variables thermodynamiques indépendantes, il est possible d'exprimer la différentielle totale exacte de l'entropie  $dS$  en fonction de celles de deux autres variables judicieusement choisies, à savoir ici  $P$  et  $\rho$ . Les lois de la thermodynamiques nous permettent d'écrire que

$$dS = \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_\rho dP + \left( \frac{\partial S}{\partial \rho} \right)_P d\rho = \frac{C_v}{TP\beta} dP - \frac{C_p}{T\rho\alpha} d\rho, \quad (1.11)$$

où  $C_p = T(\partial S/\partial T)_P$  et  $C_v = T(\partial S/\partial T)_V$  désignent respectivement les capacités calorifiques massiques isobare et isochores,  $\beta = (1/P)(\partial P/\partial T)_V$  désigne le coefficient d'augmentation de pression isochore, et où  $\alpha = (1/V)(\partial V/\partial T)_P$  désigne le coefficient d'augmentation de volume isobare. Ceci peut encore s'écrire<sup>3</sup>

$$dS = \frac{C_v}{TP\beta} \left( dP - \frac{\gamma}{\rho\chi_T} d\rho \right), \quad (1.12)$$

$$= \frac{C_v}{TP\beta} \left( dP - \frac{1}{\rho\chi_S} d\rho \right), \quad (1.13)$$

où  $\chi_T = (-1/V)(\partial V/\partial P)_T$  et  $\chi_S = (-1/V)(\partial V/\partial P)_S = \chi_T/\gamma$  désignent respectivement les coefficients de compressibilité isotherme et adiabatique, et où  $\gamma = C_p/C_v$  est le coefficient polytropique du fluide. Ces deux dernières équations, combinées à l'hypothèse d'adiabaticité  $dS = 0$  permettent finalement d'obtenir une relation directe entre les variables  $P$  et  $\rho$  :

$$dP = c^2 d\rho \quad (1.14)$$

avec

$$c^2 = \frac{\gamma}{\rho\chi_T} = \frac{1}{\rho\chi_S}. \quad (1.15)$$

Dans le cas particulier d'un gaz parfait ( $n$  moles contenues dans un volume  $V$ ) pour lequel  $PV = nRT$  ( $R = 8.32$ ), il vient  $\alpha = \beta = \frac{1}{T}$ ,  $\chi_T = 1/P$ ,  $\chi_S = 1/(\gamma P)$ , et l'équation (1.14) s'écrit :

$$dP = \frac{\gamma P}{\rho} d\rho \quad (1.16)$$

L'intégration de l'équation (1.16) entre l'état initial ( $P_0$ ) et un état quelconque ( $P$ ), mène à

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = \gamma \int_{\rho_0}^\rho \frac{d\rho}{\rho}, \quad (1.17)$$

soit encore

$$\log \left( \frac{P}{P_0} \right) = \gamma \log \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right), \quad (1.18)$$

ce qui montre que cette troisième équation fondamentale, reliant  $P$  et  $\rho$ , est non linéaire, au même titre que l'équation de conservation de la masse (1.3) et l'équation d'Euler (1.9).

3. voir par exemple [2], pp. 28-32 pour plus de détails

### 1.1.4 Approximation de l'acoustique linéaire, équation de propagation acoustique

L'hypothèse de l'acoustique linéaire consiste à considérer que les perturbations acoustiques sont faibles en regard de leur composante statique<sup>4</sup>, i.e.  $\frac{p}{P_0} \sim \frac{\rho'}{\rho_0} \sim \frac{s}{S_0} \sim \frac{\tau}{T_0} \sim \frac{\|\mathbf{v}\|}{c_0} \sim \epsilon$ , ( $\epsilon \ll 1$ ). Ceci permet de simplifier grandement les équations du mouvement. Ainsi, les équations (1.3), (1.9) et (1.18) s'écrivent après linéarisation comme suit :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1.19)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \mathbf{grad} p = 0, \quad (1.20)$$

$$p = c_0^2 \rho', \quad (1.21)$$

où  $c_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$  désigne la célérité adiabatique du son.

Cet ensemble de trois équations constitue le système d'équations de base pour la description de la propagation linéaire sans pertes en fluide homogène au repos. On peut notamment déduire aisément de ce système l'équation de propagation acoustique linéaire pour la variable pression (report de (1.21) dans (1.19), puis  $\operatorname{div}(1.20) - \partial_t(1.19)$ ) :

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (1.22)$$

★ **Exercice** Etablir que les équations d'ondes pour les variables  $\rho'$  et  $\mathbf{v}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Delta \rho' - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} &= 0, \\ \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned}$$

## 1.2 Equations du mouvement en fluide dissipatif

### 1.2.1 Viscosité, conductivité thermique (rappel)

#### 1.2.1.1 Viscosité de cisaillement

La viscosité d'un fluide se définit comme la résistance que présente ce fluide à sa mise en mouvement. La viscosité de cisaillement d'un fluide peut-être mesurée en principe en considérant sa mise en mouvement entre 2 plans parallèles, l'un mobile, l'autre fixe, comme l'illustre la figure (1.3). Du fait d'un processus de diffusion de la quantité de mouvement, la mise en mouvement de la plaque supérieure engendre un déplacement du fluide voisin, à la vitesse de la plaque. Cet écoulement se transmet de proche en proche aux couches inférieures, de sorte qu'en régime stationnaire, on observe que la vitesse du fluide varie linéairement de 0 à  $v_0$  :  $v_x(y) = v_0 y/a$ .

4. à l'exception près de la vitesse particulière acoustique qui, en l'absence d'écoulement moyen, doit être supposée faible devant la célérité adiabatique du son introduite ci-après

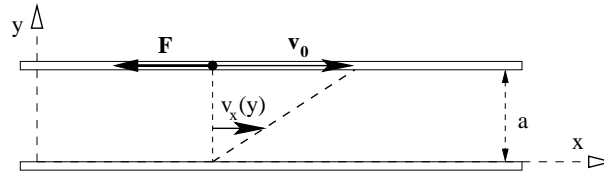


FIGURE 1.3 – Ecoulement cisailé d'un fluide entre 2 plans parallèles

L'écoulement cisailé du fluide est responsable d'une force de friction  $\mathbf{F}$  qui tend à s'opposer à la mise en mouvement de la plaque supérieure. Cette force de friction, ou plus précisément la contrainte de cisaillement  $F_x/S$  associée (où  $S$  désigne la surface de la plaque supérieure en contact avec le fluide), est proportionnelle au taux de cisaillement  $\frac{\partial v_x}{\partial y}$  du fluide :

$$\frac{F_x}{S} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (1.23)$$

La constante  $\mu$ , caractéristique du fluide, est appelée *viscosité dynamique* (ou *première viscosité*). L'unité dans le système international de cette grandeur est le Pascal.seconde ( $Pa.s$ ). L'annexe A répertorie la viscosité de quelques fluides. Notons que la viscosité dépend de la température : pour les gaz, la viscosité augmente avec la température, et pour l'air cette augmentation suit la loi empirique  $\mu \propto T_0^\beta$  avec  $\beta = 0.73$  [6]

### 1.2.1.2 Conductivité thermique

L'énergie interne d'un corps solide ou fluide correspond à l'énergie cinétique de ses éléments constituants qui se trouvent dans un mouvement permanent (atomes, molécules, électrons libres). La conduction représente le processus de propagation de la chaleur par le contact direct des particules d'un corps ou entre des corps ayant des niveaux énergétiques (donc des températures) différents. Dans le cas des gaz, le transfert thermique par conduction est le résultat de la diffusion moléculaire.

La loi fondamentale de la conduction a été établie expérimentalement en 1822 par Jean-Baptiste Fourier. Elle traduit que le flux surfacique  $\varphi$  de chaleur est proportionnel au gradient de température :

$$\varphi = -\lambda \mathbf{grad}T. \quad (1.24)$$

Le flux de chaleur est donc colinéaire au gradient de température, et donc de direction perpendiculaire aux surfaces isothermes. Son sens positif correspond par convention à la direction décroissante des températures. Le facteur de proportionnalité  $\lambda$  constitue une propriété physique et mesurable du corps. C'est un scalaire positif, appelé *conductivité thermique* qui définit l'aptitude du corps à transmettre de la chaleur. L'unité dans le système international de cette grandeur est le Watt/mètre/Kelvin ( $W/m/K$ ). La conductivité thermique est une caractéristique du milieu qui peut dépendre du point et de la température. Si le milieu est homogène et isotrope, elle ne dépend que de la température. L'annexe A répertorie la conductivité thermique de quelques fluides.

### 1.2.2 Conservation de la quantité de mouvement : équation de Navier-Stokes

L'une des conséquences de l'introduction de la viscosité dans la description du mouvement du fluide est que l'on doit abandonner l'hypothèse formulée au paragraphe 1.1.2 selon laquelle les forces surfaciques sont orthogonales à la surface de la particule fluide. Nous allons donc, dans un premier temps, établir l'expression générale de ces forces de surface, afin d'établir dans un second temps l'équation de Navier-Stokes du mouvement d'un fluide newtonien.

#### 1.2.2.1 Expression générale des forces de surface

**Contraintes dans un écoulement.** Considérons un élément de surface d'aire  $dS$  dans un fluide. La contrainte représente la valeur de la force par unité de surface qui est exercée par la portion de fluide située d'un côté de l'élément sur la portion de fluide située de l'autre côté de l'élément. Rappelons que dans un fluide au repos cette contrainte est normale à l'élément de surface et correspond à la pression. Dans un fluide réel (visqueux) en mouvement, cette contrainte comporte des composantes tangentielles qui résultent du frottement entre les deux couches fluides. Pour préciser ces forces, il est nécessaire de connaître :

- l'orientation de la surface  $dS$  dans l'espace, définie par le vecteur unitaire normal  $\mathbf{n}$ ,
- les valeurs des 3 composantes de la force par unité de surface suivant les trois axes (Ox),(Oy) et (Oz) d'un trièdre de référence, pour trois orientations de surface unités perpendiculaires à ces axes, ce qui représente donc neuf coefficients  $\sigma_{ij}$ .

On notera dans la suite  $[\sigma]$  le tenseur des contraintes dans le fluide considéré. Il s'agit d'un tenseur de rang 2, que l'on peut représenter par une matrice  $3 \times 3$ , sous la forme suivante :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \quad (1.25)$$

Par exemple, l'élément  $\sigma_{yx}$  représente ici la composante suivant (Oy) de la force exercée sur une surface unité dont la normale est orientée suivant (Ox). Déterminons à présent la contrainte  $\sigma_{\mathbf{n}}$  exercée sur un élément de surface  $dS$  d'orientation quelconque  $\mathbf{n} = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z$ , conformément à la figure 1.4.

Notons  $\sigma_{xn}dS$ ,  $\sigma_{yn}dS$  et  $\sigma_{zn}dS$  les composantes suivant (Ox),(Oy) et (Oz) de la force  $d\mathbf{f}$  exercée sur la surface  $dS$  de normale  $\mathbf{n}$ . La composante  $\sigma_{xn}$  est par exemple obtenue en écrivant l'équilibre des composantes suivant (Ox) des forces exercées sur les faces du tétraèdre dont les trois arêtes sont parallèles aux directions (Ox),(Oy) et (Oz), et de longueur  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  (voir Fig. 1.4) : les composantes suivant les 3 "petites" faces du tétraèdre s'écrivent respectivement  $-\sigma_{xx}n_x dS$ ,  $-\sigma_{xy}n_y dS$  et  $-\sigma_{xz}n_z dS$ , où les signes moins proviennent conjointement des conventions d'orientation des contraintes et des normales  $n_i \mathbf{e}_i$ , de sorte que la contrainte totale suivant (Ox) sur l'ensemble des 4 faces du tétraèdre s'écrit  $(\sigma_{xn} - \sigma_{xx}n_x - \sigma_{xy}n_y - \sigma_{xz}n_z) dS$ . En notant  $dV$  le volume du tétraèdre et  $\rho$  la masse volumique du fluide qui l'occupe, l'écriture du principe fondamental de la dynamique (en l'absence de force

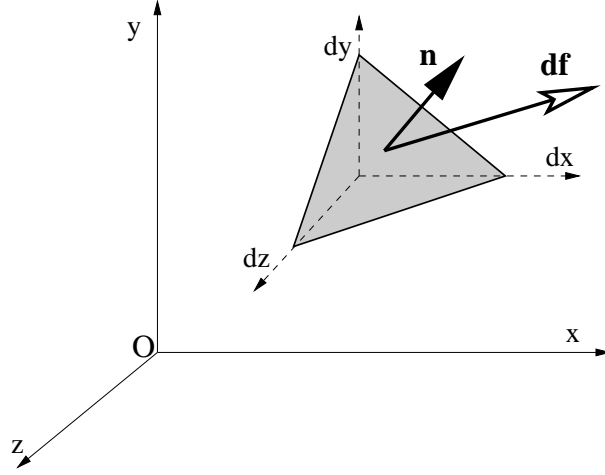


FIGURE 1.4 – Détermination de la contrainte sur une surface d'aire  $dS$  de normale  $\mathbf{n}$  d'orientation quelconque.

volumique) suivant la composante (Ox) mène à

$$(\sigma_{xn} - \sigma_{xx}n_x - \sigma_{xy}n_y - \sigma_{xz}n_z) dS = \rho dV \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (1.26)$$

Faisons maintenant tendre la taille du tétraèdre vers 0 en réduisant de manière homothétique chacune de ses dimensions (conservation de la forme, et donc de l'orientation de  $\mathbf{n}dV$ ). Le terme du membre de droite, proportionnel à  $dV$  tend alors vers 0 plus rapidement que le terme du membre de gauche, proportionnel à  $dS$ ; il en résulte que le terme entre parenthèses du membre de gauche doit être nul, ce qui mène à  $\sigma_{xn} = \sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y + \sigma_{xz}n_z$ . Ce raisonnement peut être mené de manière similaire pour les composantes  $\sigma_{yn}$  et  $\sigma_{zn}$ , ce qui permet finalement de relier les trois composantes des contraintes exercées sur la surface  $dS$  en fonction du tenseur des contraintes :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xn} \\ \sigma_{yn} \\ \sigma_{zn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

soit encore

$$\sigma_{\mathbf{n}} = \frac{d\mathbf{f}}{dS} = [\sigma] \cdot \mathbf{n}. \quad (1.28)$$

L'expression  $[\sigma] \cdot \mathbf{n} = \sigma_{\mathbf{n}}$  traduit le produit du tenseur  $[\sigma]$  d'ordre 2 par le vecteur  $\mathbf{n}$ . On peut également utiliser de manière équivalente la notation

$$\sigma_{in} = \sigma_{ij}n_j \quad (1.29)$$

pour définir l'une des composantes de  $\sigma_{\mathbf{n}}$ , la "somme" sur l'indice  $j = x, y, z$  étant ici implicite (convention de sommation d'Einstein).

Il est ensuite utile d'extraire du tenseur des contraintes  $[\sigma]$  la partie qui correspond aux contraintes de pressions, qui sont les seules présentes en l'absence de gradients de vitesse. Dans la mesure où les contraintes de pression sont par définition normales à la surface considérée, la composante de  $[\sigma]$  associée à ces contraintes est purement diagonale. Ainsi, en adoptant les notations de l'équation (1.29), on décompose le tenseur sous la forme :

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - P\delta_i^j, \quad (1.30)$$

où  $P$  est la pression et  $\delta_i^j$  le tenseur de Kroneker ( $\delta_i^j = 1$  si  $i = j$ , 0 sinon). Cette dernière équation fait donc apparaître le tenseur des contraintes de viscosité  $[\sigma']$ , dont nous allons montrer ci-après qu'il est symétrique.

Considérons un élément de volume cubique d'arêtes  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  conformément au schéma de la Fig. 1.5, et dont le mouvement serait une rotation autour d'un axe parallèle à la direction (Ox) passant par le centre du cube. Les composantes  $\sigma'_{yz}$  et  $\sigma'_{zy}$  des contraintes de viscosité sont les seules à contribuer au couple  $\Gamma_x$  résultant par rapport à cet axe. Ce couple résultant s'écrit :

$$\Gamma_x = \sigma'_{zy}(dx dz)dy - \sigma'_{yz}(dx dy)dz = (\sigma'_{zy} - \sigma'_{yz}) dV. \quad (1.31)$$

L'application du principe fondamental de la dynamique, en notant  $dI$  le moment d'inertie de l'élément de volume  $dV$  par rapport à son axe de rotation, mène à  $\Gamma_x = dI \frac{d^2\Omega_x}{dt^2}$  où  $d_{tt}^2\Omega_x$  désigne l'accélération angulaire de l'élément de fluide par rapport à son axe de rotation. Là encore, faisant tendre le volume  $dV$  vers 0, on constate que le terme du membre de droite, compte-tenu que  $dI$  est proportionnel à  $dV(dy^2 + dz^2)$  décroît plus vite que le terme du membre de gauche, ce qui impose que  $\sigma'_{zy} = \sigma'_{yz}$ . Dans la mesure où ce raisonnement peut-être aisément étendu aux 2 autres rotations, il s'ensuit que le tenseur des contraintes de viscosité est symétrique :

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}. \quad (1.32)$$

### 1.2.2.2 Déformations dans un écoulement.

Afin de pouvoir établir une relation entre les contraintes de viscosité appliquées à un élément de fluide et les déformations de cet élément de fluide, il s'avère utile de "décomposer" le champ du gradient de vitesse au voisinage du centre de l'élément fluide. Considérons, à un instant  $t$ , une particule fluide située en un point  $\mathbf{r}$  et dont la vitesse est  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ ; celle d'une particule voisine située au point  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  est  $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ . Chaque composante  $dv_i$  de  $d\mathbf{v}$  s'écrit

$$dv_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j, \quad (1.33)$$

où les éléments  $G_{ij} = \partial v_i / \partial x_j$  sont les éléments d'un tenseur de rang 2, le tenseur des taux de déformation du fluide. Ce tenseur s'écrit sous la forme d'une matrice  $3 \times 3$ , qui peut être décomposée sous la forme

$$G_{ij} = e_{ij} + \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (1.34)$$



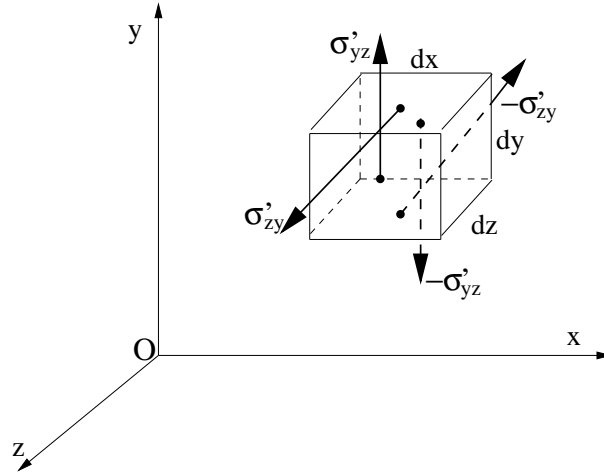


FIGURE 1.5 – Détermination de la contrainte sur une surface d'aire  $dS$  de normale  $\mathbf{n}$  d'orientation quelconque.

faisant apparaître une partie symétrique ( $e_{ij} = e_{ji}$ ) et une partie antisymétrique ( $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ ). Quelques précisions sont apportées en annexe B quant à la signification physique de ces 2 tenseurs  $e_{ij}$  (déformation pure) et  $\omega_{ij}$  (rotation pure).

### 1.2.2.3 Relation entre contraintes de viscosité et déformations pour un fluide Newtonien.

Nous avons établi précédemment [Eq.(1.32)] que le tenseur des contraintes de viscosité est nécessairement symétrique. Il en résulte que la relation entre contraintes et déformation ne peut faire apparaître que la partie symétrique  $e_{ij}$  du tenseur des taux de déformations. Nous ne considérons dans toute la suite du document que des fluides Newtoniens pour lesquels la relation contrainte/déformation s'écrit<sup>5</sup> :

$$\sigma'_{ij} = \mu \left( 2e_{ij} - \frac{2}{3} \delta_i^j e_{mm} \right) + \eta \left( \delta_i^j e_{mm} \right), \quad (1.35)$$

où la sommation sur l'indice  $m$  est implicite, et où les paramètres  $\mu$  et  $\eta$  sont appelés coefficients de première et de seconde viscosité. Remarquant que le terme  $e_{mm}$  n'est autre que  $\text{div} \mathbf{v}$ , l'équation (1.35) peut donc être réécrite sous la forme

$$\sigma'_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_i^j \text{div} \mathbf{v} \right) + \eta \delta_i^j \text{div} \mathbf{v}. \quad (1.36)$$

Cette dernière équation appelle à plusieurs commentaires. Si l'on suppose que le vecteur vitesse est orienté suivant la direction (Ox) et que la composante correspondante  $v_x$  ne varie que suivant (Oy), il vient :

$$\sigma'_{xy} = \sigma'_{yx} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad (1.37)$$

5. on consultera les ouvrages de référence, par exemple [1] pour une justification détaillée de cette loi de comportement

Ceci traduit bien qu'il y a équivalence entre la première viscosité introduite ici, et la viscosité de cisaillement introduite au paragraphe 1.2.1.1. Ce coefficient  $\mu$  traduit donc l'amplitude du phénomène d'amortissement par cisaillement du fluide. Le coefficient de deuxième viscosité  $\eta$  est quant à lui appelé *viscosité de volume*, dénomination justifiée par le fait qu'il apparaît en facteur de la divergence du champ de vitesse : ce coefficient est sans effet dans le cas d'écoulement incompressible (sans variation de volume) pour lesquels  $\text{div} \mathbf{v} = 0$ . Il doit en revanche être considéré dans le phénomène d'atténuation du son à longue distance. Cette viscosité de volume traduit un déséquilibre thermodynamique<sup>6</sup> associé à l'existence de phénomènes de relaxation, et responsable d'un amortissement qui tire son origine des mouvements de vibration et de rotations induits à l'échelle microscopique des molécules. Cette viscosité de volume est nulle pour les gaz monoatomiques ; pour les gaz diatomiques et l'air, la valeur généralement acceptée est  $\eta = 0.6\mu$  [4]

#### 1.2.2.4 Equation de Navier-Stokes

L'équation du mouvement du fluide en présence de viscosité est obtenue en faisant usage des résultats des paragraphes précédents et en appliquant le principe fondamental de la dynamique à un volume  $V$  de fluide, de surface  $S$ , de façon analogue au raisonnement mené au paragraphe 1.1.2, à la différence près que les forces surfaciques  $\mathbf{f}_s = -\mathbf{n}P$  sont ici remplacées par  $\mathbf{f}_s = [\sigma] \cdot \mathbf{n}$  (on rappelle que les forces volumiques ne sont pas considérées dans la suite<sup>7</sup>) :

$$\frac{d}{dt} \left( \int \int \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV \right) = \int \int_{S(t)} [\sigma] \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.38)$$

Compte-tenu des relations (1.27) et (1.29), l'intégrale de surface du membre de droite peut être transformée en une intégrale de volume par application du théorème de Green-Ostrogradski sur chacune des composantes  $\sigma_{in} = \sigma_{ij}n_j$  de  $[\sigma] \cdot \mathbf{n}$ . Cela mène à l'égalité :

$$\int \int_S [\sigma] \cdot \mathbf{n} dS = \int \int \int_V \mathbf{div} [\sigma] dV, \quad (1.39)$$

où l'opérateur  $\mathbf{div}$ , à ne pas confondre avec l'opérateur divergence  $\text{div}$ , est un opérateur vectoriel qui s'applique à une matrice (le tenseur  $[\sigma]$ ) et dont les composantes  $i$  s'écrivent  $\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ .

Finalement, usant des mêmes relations que celles employés au paragraphe 1.1.2 pour l'établissement de l'équation d'Euler, l'équation du mouvement du fluide peut donc se mettre sous la forme globale :

$$\left( \int \int \int_{V(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV \right) = \int \int \int_V \mathbf{div} [\sigma] dV, \quad (1.40)$$

dont on déduit la forme locale (cf. paragraphe 1.1.2) :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{div} [\sigma]. \quad (1.41)$$

6. différence entre la pression strictement mécanique définie à l'équation 1.30 et la pression thermodynamique obtenue par report des valeurs locales de masse volumique et de pression dans l'équation d'état du fluide

7. ces forces volumiques  $\mathbf{f}$  peuvent cependant aisément être considérées en ajoutant le terme  $\int \int \int_V \rho \mathbf{f} dV$  dans le membre de droite de l'équation 1.38

Dès lors, compte-tenu de la relation (1.30), on peut séparer dans  $[\sigma]$  la partie correspondant aux forces de pression de celle relative aux forces de viscosité :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{grad}P + \mathbf{div} [\sigma']. \quad (1.42)$$

Cette équation est valable pour tous les fluides, puisqu'aucune hypothèse concernant le tenseur des contraintes de viscosité  $[\sigma']$  n'a encore été introduite. Sous l'hypothèse d'un fluide newtonien, le report de la relation (1.36) dans (1.42) mène à :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{grad}P + \mu \Delta \mathbf{v} + \left( \eta + \frac{\mu}{3} \right) \mathbf{grad} \mathbf{div} \mathbf{v}, \quad (1.43)$$

où la notation  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{grad} \mathbf{div} \mathbf{v} - \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{v}$  représente l'opérateur laplacien vectoriel appliqué au champ  $\mathbf{v}$  ( $[\Delta \mathbf{v}]_i = \Delta v_i = \mathbf{div} \mathbf{grad} v_i$ ). Cette équation constitue l'équation de Navier-Stokes pour les fluides newtoniens en écoulement compressible. Une forme équivalente de cette équation, compte-tenu de l'égalité  $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{grad} \mathbf{div} \mathbf{v} - \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{v}$ , s'écrit :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{grad}P + \left( \eta + \frac{4}{3}\mu \right) \mathbf{grad} \mathbf{div} \mathbf{v} - \mu \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{v}, \quad (1.44)$$

★ **Exercice** Retrouver le résultat (1.43) à partir de (1.42) et (1.36)

### 1.2.3 Conservation de l'énergie

En l'absence de source de chaleur volumique, l'apport de chaleur dans un domaine de fluide peut être séparé en deux contributions distinctes, à savoir :

- l'énergie calorifique provenant des effets de la dissipation visqueuse de l'énergie acoustique,
- l'énergie calorifique due au flux de chaleur traversant par conduction thermique la frontière du domaine<sup>8</sup>.

La première forme d'énergie peut être déduite en exprimant la variation par unité de temps de la densité instantanée d'énergie cinétique :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} \right) = \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}. \quad (1.45)$$

Faisant usage de l'équation de conservation de la masse (1.3), inchangée en présence de viscosité et de conduction thermique, et de l'équation de Navier-Stokes (1.43), il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} \right) &= -\frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} \mathbf{div}(\rho \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \left[ -\mathbf{grad}P - \rho \mathbf{v} \mathbf{grad} \mathbf{v} + \mu \Delta \mathbf{v} + \left( \eta + \frac{\mu}{3} \right) \mathbf{grad} \mathbf{div} \mathbf{v} \right], \\ &= -\frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} \mathbf{div}(\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot [\mathbf{grad}P + \rho \mathbf{v} \mathbf{grad} \mathbf{v}] + \mathbf{v} \cdot \left[ \mu \Delta \mathbf{v} + \left( \eta + \frac{\mu}{3} \right) \mathbf{grad} \mathbf{div} \mathbf{v} \right], \end{aligned}$$

8. Notons ici que le mécanisme de convection forcée est implicitement pris en compte par le terme convectif  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}$  de l'opérateur  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}$ . Notons également que les effets de rayonnement sont négligeables compte-tenu des très faibles écart de températures associés aux oscillations de pression acoustique.

Cette équation fait notamment apparaître que la prise en compte de la viscosité est responsable d'une variation de la densité d'énergie cinétique instantanée (cf. troisième terme du membre de droite). Cette variation due à la viscosité est d'une part liée à la dissipation d'énergie sous forme de chaleur, mais aussi à l'influence de la viscosité sur le transfert d'énergie entre le volume élémentaire considéré et son environnement. Nous ne chercherons pas ici à dissocier ces 2 causes physiques pour en extraire l'apport de chaleur par frottement visqueux, car il est également utile de constater que le troisième terme du membre de droite est un terme quadratique en vitesse, que nous pourrions donc négliger dans le cadre de l'approximation de l'acoustique linéaire.

La seconde forme d'énergie (flux de chaleur conductif) peut être exprimée en faisant usage de l'équation de conduction de la chaleur 1.24. La quantité de chaleur introduite par unité de temps dans le volume élémentaire,

$$\frac{\delta Q}{dt} = \int \int \int_V \rho T \frac{dS}{dt} dV,$$

est égale à l'opposé du flux total de chaleur

$$\int \int_S (-\lambda \mathbf{grad} T) \cdot \mathbf{n} dS,$$

sortant du volume élémentaire, de sorte qu'en utilisant à nouveau le théorème de Green-Ostrogradski, il vient :

$$\int \int \int_V \rho T \frac{dS}{dt} dV = - \int \int \int_V \lambda \operatorname{div} (-\mathbf{grad} T) dV.$$

Finalement, l'équation locale de la conservation de l'énergie prend la forme suivante

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \lambda \Delta T + O(\|\mathbf{v}\|^2), \quad (1.46)$$

où le second terme du membre de droite, non explicité, traduit le réchauffement dû à la dissipation visqueuse d'énergie acoustique.

### 1.2.4 Approximation de l'acoustique linéaire

Le système d'équations non linéaires constitutif des problèmes d'acoustique en fluide visqueux et conducteur de la chaleur s'écrit donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.47)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{grad} P + \left( \eta + \frac{4}{3} \mu \right) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu \mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad (1.48)$$

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \lambda \Delta T + O(\|v\|^2), \quad (1.49)$$

Il peut être judicieux de substituer à la variable entropie massique (pas directement accessible à la mesure) un jeu de deux autres variables, en usant de la relation thermodynamique (choisie en fonction du problème à traiter)

$$dS = \frac{C_p}{T} dT - \frac{P\beta}{\rho} \chi_T dP. \quad (1.50)$$

Finalement, sous l'hypothèse de l'acoustique linéaire et d'un gaz parfait ( $\beta = 1/T$ ,  $\chi_T = 1/P$ ), le jeu d'équations ci-dessus s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad (1.51)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{grad} p + \left( \eta + \frac{4}{3} \mu \right) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu \mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad (1.52)$$

$$\rho_0 C_p \frac{\partial \tau}{\partial t} = \lambda \Delta \tau + \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (1.53)$$

qui constitue un jeu de 3 équations pour 4 variables ( $p$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\rho$  et  $\tau$ ). La quatrième équation doit être recherchée dans les relations thermodynamiques : on peut par exemple éliminer la variable  $\tau$  en utilisant la relation

$$dT = -\frac{T}{\rho \chi_T P} d\rho + \frac{T}{P} dP. \quad (1.54)$$

En réalité, nous aurions pu, dès le départ, éliminer la variable entropie massique de l'équation (1.49) en l'exprimant en fonction des variables  $\rho$  et  $P$ , c'est à dire en utilisant l'équation (1.13), ce qui mènerait à un jeu de 3 équations à 3 inconnues ( $p$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\rho'$ ), dont on pourrait déduire l'équation de propagation. Néanmoins, nous verrons par la suite qu'il peut s'avérer judicieux de conserver la variable  $\tau$  dès lors que le domaine d'étude est borné, au motif que les conditions aux frontières du domaine mettent en jeu cette variable.

### 1.2.5 Petit retour en arrière : vitesse du son adiabatique ou isotherme ?

Il est intéressant de mentionner que l'hypothèse d'un mouvement acoustique adiabatique n'a pas toujours été perçue comme une évidence. En effet, les travaux menés au cours des XVII<sup>e</sup> et XVIII<sup>e</sup> siècles sur ce qu'il convient désormais d'appeler la propagation acoustique sans dissipation (paragraphe 1.1) se basaient d'une part sur les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (Eqs. (1.3) et (1.9)), et d'autre part sur une loi reliant les variables pression et masse volumique :  $P = f(\rho)$ . La plupart des travaux de cette époque faisaient usage de la loi  $P = K\rho$ , où  $K$  est une constante<sup>9</sup>. Ces considérations étaient en accord avec l'état de connaissance de l'époque, et notamment en accord avec la loi de Boyle<sup>10</sup> ( $PV = c^{te}$ ), dont on sait à présent qu'elle correspond à une transformation thermodynamique isotherme. Malheureusement, la prédiction de la célérité des ondes acoustiques étaient en désaccord d'environ 16 % par rapport aux mesures. Il fallut attendre les travaux de Laplace pour qu'une expression correcte de la relation entre  $P$  et  $\rho$  soit proposée. Ce dernier appliqua le principe simple selon lequel la propagation acoustique en champ libre se fait (presque) sans échange de chaleur entre les particules voisines, ce qui l'amena à établir une expression de la vitesse du son en accord avec les résultats expérimentaux. Ce postulat d'un mouvement adiabatique consiste à utiliser la relation  $P = K\rho^\gamma$  (i.e.  $PV^\gamma = c^{te}$ ). On sait à présent que cette hypothèse est en fait une très bonne approximation, exactement équivalente à celle utilisée au paragraphe 1.1.3 puisqu'une

9. à l'exception notable de la loi  $P = K\rho^m$  proposée par Lagrange (où  $m$  est également une constante)

10. Cette loi fut établie expérimentalement en 1662 par l'irlandais Robert Boyle, puis un peu plus tard (1676) par le français Edme Mariotte

transformation adiabatique est isentropique. Reste que la véritable relation à rechercher, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.2.3 est une loi du type

$$P = P(\rho, S) \tag{1.55}$$

traduisant la bi-variance du fluide et dont les lois  $P = K\rho$  et  $P = K\rho^\gamma$  sont des cas particuliers.



## Chapitre 2

# Propagation acoustique en fluide dissipatif

### 2.1 L'équation d'onde

Nous avons établi au chapitre précédent les équations fondamentales de l'acoustique linéaire en fluide dissipatif, Eqs. (1.51)-(1.53), sous l'hypothèse d'un gaz parfait :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{grad} p + \left( \eta + \frac{4}{3} \mu \right) \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad (2.2)$$

$$\rho_0 C_p \frac{\partial \tau}{\partial t} = \lambda \Delta \tau + \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (2.3)$$

auxquelles doit par exemple s'ajouter la relation thermodynamique (fluide bivariant)

$$d\rho = \rho \chi_T (dP - P\beta dT). \quad (2.4)$$

L'élimination de la variable  $\rho'$  grâce à la relation (2.4) linéarisée (et l'hypothèse d'un gaz parfait, de sorte que  $\beta = 1/T$ ) permet alors de réécrire le problème sous la forme suivante :

$$\frac{\gamma}{c_0} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\rho_0 c_0}{T_0} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \rho_0 c_0 \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 c_0} \mathbf{grad} p = l_v \mathbf{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - l'_v \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}, \quad (2.6)$$

$$\left[ \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - l_h \Delta \right] \tau = \frac{1}{\rho_0 c_0 C_p} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (2.7)$$

où l'on rappelle que  $c_0^2 = \gamma P_0 / \rho_0$ , et où les quantités

$$l_v = \frac{1}{\rho_0 c_0} \left( \frac{4}{3} \mu + \eta \right), \quad (2.8)$$

$$l'_v = \frac{\mu}{\rho_0 c_0}, \quad (2.9)$$

$$l_h = \frac{\lambda}{\rho_0 c_0 C_p}, \quad (2.10)$$



sont homogènes à des longueurs et traduisent les effets de viscosité et de conduction thermique du fluide. A ce stade, il est opportun de remarquer et de faire usage du fait que le champ de vitesse particulière  $\mathbf{v}$  peut (comme tout champ de vecteur) être décomposé de manière unique en la somme d'un champ laminaire, noté  $\mathbf{v}_1$ , et d'un champ tourbillonnaire, noté  $\mathbf{v}_v$ , sous la forme

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_v = \mathbf{grad}\phi + \mathbf{rot}\psi,$$

avec

$$\mathbf{rot}\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \text{div}\mathbf{v}_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{rot}\mathbf{v}_v \neq \mathbf{0}, \text{div}\mathbf{v}_v = 0,$$

et où les champs  $\phi$  et  $\psi$  représentent respectivement les potentiels scalaire et vecteur. Cette décomposition permet de réécrire l'équation de Navier-Stokes sous la forme

$$\mathbf{grad} \left[ \frac{1}{c_0} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 c_0} p - l_v \Delta \phi \right] + \mathbf{rot} \left[ \frac{1}{c_0} \frac{\partial \psi}{\partial t} + l'_v \mathbf{rot}\mathbf{rot}\psi \right] = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

Cette équation se sépare naturellement en une équation pour la partie irrotationnelle qui s'écrit après intégration spatiale

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0 c_0} p - l_v \Delta \phi = \mathbf{0}, \quad (2.12)$$

et en une seconde équation pour la partie rotationnelle :

$$\frac{1}{c_0} \frac{\partial \psi}{\partial t} + l'_v \mathbf{rot}\mathbf{rot}\psi = \mathbf{0}. \quad (2.13)$$

La première équation traduit une extension au cas visqueux de la relation entre pression acoustique et potentiel scalaire en fluide parfait. La seconde équation qui ne fait pas apparaître la pression acoustique  $p$  (ni les fluctuations acoustiques de masse volumique  $\rho'$ ) traduit un processus de diffusion de la vortacité  $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{rot}\mathbf{rot}\psi = \mathbf{rot}\mathbf{v}_v$ . Ce processus de diffusion de la vortacité ne prend d'importance, comme nous le verrons par la suite, qu'en présence de parois.

Finalement le problème acoustique peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\frac{\gamma}{c_0} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\rho_0 c_0}{T_0} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \rho_0 c_0 \text{div}(\mathbf{v}_1) = 0, \quad (2.14)$$

$$\left[ \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - l_v \Delta \right] \mathbf{v}_1 = -\frac{1}{\rho_0 c_0} \mathbf{grad} p, \quad (2.15)$$

$$\left[ \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - l'_v \Delta \right] \mathbf{v}_v = \mathbf{0}, \quad (2.16)$$

$$\left[ \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - l_h \Delta \right] \tau = \frac{1}{\rho_0 c_0 C_p} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (2.17)$$

où les équations (2.15) et (2.16) sont directement déduites de (2.12) et (3.81). Ce système d'équations (associé aux conditions aux frontières et aux conditions initiales) constitue la base de la description du champ acoustique dans de nombreux problèmes. Il permet notamment d'établir l'équation de propagation pour les variables  $p$ ,  $\tau$  et  $\mathbf{v}_1$  (rappelons que la composante  $\mathbf{v}_v$  ne traduit pas un processus acoustique mais un processus de diffusion de la vortacité).

★ **Exercice** Reprendre pas à pas les détails de calculs permettant de mener au système d'équations (2.14)-(2.17) à partir des équations de conservation (1.51)-(1.53)

### 2.1.1 Cas particulier : fluide visqueux non conducteur de la chaleur

Dans le cas simplifié où le fluide est supposé non conducteur de la chaleur ( $l_h = 0$ ), il est aisé d'obtenir l'équation de propagation pour la variable  $p$ . Pour ce faire, la variable  $\tau$  est tout d'abord éliminée dans l'équation (2.14) grâce au report de son expression en fonction de la variable  $p$  à l'aide de l'équation (2.17). L'application de l'opérateur  $\left[\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - l_v \Delta\right]$  à l'équation (2.14) permet ensuite d'éliminer le terme  $\text{div} \mathbf{v}_1$  en usant de la divergence de l'équation (2.15). Tout calcul fait, et compte-tenu de ce que<sup>1</sup>  $C_p = \frac{P_0}{\rho_0 T_0} \frac{\gamma}{\gamma-1}$  on obtient l'équation suivante pour la variable pression acoustique :

$$\left[1 + \frac{l_v}{c_0} \frac{\partial}{\partial t}\right] \Delta p - \frac{1}{c_0} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0. \quad (2.18)$$

On remarque donc que la prise en compte de la viscosité se traduit par un terme additionnel du troisième ordre,  $\frac{\partial}{\partial t} \Delta p$ , affecté d'un coefficient  $\frac{l_v}{c_0}$ , homogène à un temps, qui vaut environ  $2.10^{-10}$  s pour l'air dans des conditions normales de température et de pression. La petitesse de ce terme laisse donc à penser que la solution non visqueuse ne se différencie de la solution visqueuse que pour les signaux de très hautes fréquence, de l'ordre de l'inverse de ce temps caractéristique.

Le phénomène d'atténuation dû à la viscosité du fluide peut être examiné plus attentivement en considérant l'hypothèse d'une onde plane harmonique se propageant par exemple suivant les  $x$  croissants. L'équation (2.18) dans le domaine fréquentiel pour une onde harmonique de pulsation acoustique  $\omega$  s'écrit :

$$[1 + ik_0 l_v] \Delta \tilde{p} + k_0^2 \tilde{p} = 0 \quad (2.19)$$

avec  $k_0 = \omega/c_0$ , de sorte que le report de la forme de solution recherchée  $\tilde{p}(x, t) \propto e^{i(\omega t - kx)}$  (onde plane se propageant suivant les  $x$  croissants) mène à la relation de dispersion suivante :

$$-k^2 [1 + ik_0 l_v] + k_0^2 = 0. \quad (2.20)$$

En posant  $k = k' - ik''$ , il est possible d'extraire de la relation de dispersion les parties réelle et imaginaire du nombre d'onde  $k$ , qui donnent accès d'une part à la vitesse de propagation de l'onde (vitesse de phase  $v_\varphi = \omega/k'$ ) et d'autre part à l'atténuation de l'onde par unité de longueur  $k''$ . Compte-tenu de la faible valeur du coefficient  $k_0 l_v$  dans le domaine audible (et jusqu'à plusieurs dizaines de kHz), il est judicieux de se contenter d'un développement limité au premier ordre de ce petit paramètre pour évaluer  $k$  :

$$k = \frac{k_0}{\sqrt{1 + ik_0 l_v}} \approx k_0 - i \frac{l_v}{2} k_0^2.$$

Il s'ensuit donc qu'au premier ordre du petit paramètre  $k_0 l_v$  la vitesse de propagation de l'onde  $v_\varphi = \omega/k' = c_0$  n'est pas modifiée par la viscosité. D'autre part, l'atténuation par unité de longueur

$$k'' = \frac{l_v \omega^2}{2c_0^2} = \frac{\left(\frac{4}{3}\mu + \eta\right) \omega^2}{2\rho_0 c_0^3}$$

1. du fait que  $C_p - C_V = R/M_{mol} = P/(\rho T)$  et  $C_p/C_V = \gamma$ .

est proportionnelle aux 2 coefficients de viscosité et au carré de la fréquence acoustique. Pour l'air dans les conditions standard et à la fréquence de 1 kHz, on a  $k'' \approx 1.3 \cdot 10^{-5}$  Neper/m ce qui correspond à une atténuation d'amplitude de l'ordre de 1.3% après 1 km de propagation. Cette atténuation est donc complètement négligeable dans le domaine audible (sauf à longue distance), et devient très importante pour les très hautes fréquences, rendant quasi-impossible la propagation d'ondes acoustiques dans l'air à des fréquences de l'ordre du MHz. Pour autant, d'autres phénomènes rentrent en jeu dans un gaz réel dès lors que le phénomène de conduction de la chaleur est pris en compte. Ces phénomènes sont liés d'une part aux pertes par conduction de la chaleur entre particules voisines (voir paragraphe qui suit) mais également aux phénomènes de relaxation thermique moléculaire (voir paragraphe 2.2.2).

★ **Exercice** Calculer l'atténuation due aux seuls effets visqueux d'une onde plane en champ libre, dans l'air dans des conditions normales de température et de pression, pour une fréquence d'1 MHz.

### 2.1.2 Cas général

Dans le cas où la conductivité thermique du gaz n'est pas négligée, l'établissement de l'équation de propagation pour la variable  $p$  peut-être obtenu de la même façon que précédemment à partir des équations de base (2.14)-(2.17) : le facteur  $\text{div}\mathbf{v}_1$  est éliminé par combinaison de l'équation (2.14) et de la divergence de l'équation (2.15) puis la variable  $\tau$  est éliminée en reportant l'équation (2.17) dans l'équation qui résulte de l'opération précédente en lui appliquant au préalable l'opérateur  $\left[\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - l_h \Delta\right]$ . Tous calculs faits, et en ne retenant que les termes du premier ordre des petites longueurs  $l_v$  et  $l_h$ , il vient (voir [2] pour plus de détails) :

$$\left[\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - l_h \Delta\right] \left[\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(1 + l_{vh} \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta\right] p \approx 0, \quad (2.21)$$

où la nouvelle longueur  $l_{vh}$  associée aux effets viscothermiques s'écrit

$$l_{vh} = l_v + (\gamma - 1)l_h.$$

Il convient de noter que les fluctuations de température et la vitesse particulaire laminaire satisfont à la même équation (2.21). La forme de l'équation de propagation (2.21) conduit à faire usage du principe de superposition et à exprimer l'écart instantané de pression sous forme de la somme d'une pression acoustique  $p_a$  et d'une pression "entropique"  $p_h$  qui sont respectivement solution des équations suivantes :

$$\left[\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(1 + l_{vh} \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t}\right) \Delta\right] p_a \approx 0, \quad (2.22)$$

$$\left[\frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} - l_h \Delta\right] p_h \approx 0. \quad (2.23)$$

On peut remarquer que l'équation (2.22) est identique à l'équation (2.18) à ceci près que la longueur caractéristique visqueuse  $l_v$  est remplacée par la longueur caractéristique visco-thermique  $l_{vh}$ . Il s'agit d'une équation de propagation acoustique qui prend en compte les pertes par viscosité et par conduction

de la chaleur. La seconde équation, (2.23), est une équation de diffusion qui ne traduit donc pas un processus de propagation mais un processus de diffusion de la chaleur lié à la conduction du fluide<sup>2</sup>. Là encore il convient de préciser que la même décomposition sous forme d'un mode entropique et d'un mode acoustique peut-être appliquée au champ de vitesse particulaire laminaire  $\mathbf{v}_1$  et aux fluctuations de température  $\tau$ , chaque composante satisfaisant aux mêmes équations (2.22) et (2.23).

### 2.1.3 Résumé

Dès lors que viscosité et conduction de la chaleur sont pris en compte, nous avons vu que le traitement des équations fondamentales amène à considérer différents modes, à savoir le mode acoustique (régé par une équation de propagation) et les modes entropique et de vorticité (régés par des équations de diffusion).

La présence des effets visqueux et thermique se manifeste à deux niveaux. Dans la mesure où le milieu considéré est non-borné, les trois modes peuvent être considérés comme non couplés, et l'influence des effets viscothermiques sur la propagation acoustique se traduit par une atténuation faible (dans les conditions usuelles) des ondes, de sorte que la solution "fluide parfait" sera peu modifiée et seule une correction d'amplitude aura besoin d'être appliquée. Ce type de problème (propagation en milieu infini) est traité plus particulièrement au paragraphe suivant, où l'on montre qu'un effet additionnel (la relaxation thermique moléculaire) doit néanmoins être considéré pour une description réaliste des effets viscothermiques dans les gaz polyatomiques (comme l'air). En présence de parois, la présence de conditions aux limites va introduire un couplage de ces "modes", qui va modifier la solution en fluide parfait de façon significative, même si les distances de propagation considérées restent faibles. Cet aspect sera traité plus en détail au paragraphes 2.4 et 2.5.

## 2.2 Propagation en milieu infini

Nous avons déjà traité de la propagation d'une onde plane en milieu infini dans le cas particulier d'un fluide visqueux et non conducteur de la chaleur. Ce problème est repris ici dans le cas plus général, puis un mécanisme additionnel, la relaxation thermique moléculaire, est ensuite considéré.

### 2.2.1 Atténuation et dispersion (pour les gaz monoatomiques).

En fluide réel, les effets de conduction thermique rendent le comportement des ondes non-adiabatique. Il en résulte une forte complication des équations, avec la présence (en plus des modes acoustique et de vorticité) d'un *mode entropique* (voir paragraphe 2.1.2). Les équations de départ sont les équations (2.14) - (2.17) qui portent sur les variables  $p = p_a + p_h$ ,  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{1a} + \mathbf{v}_{1h}$ ,  $\tau = \tau_a + \tau_h$ , et  $\mathbf{v}_v$ .

Lorsque le milieu considéré est non borné, il s'avère cependant que seul le mode acoustique est à prendre en compte car les phénomènes sont quasi adiabatiques, ce qui a notamment pour conséquence

---

2. Au delà de sa définition "mathématique", il est peu aisé de donner une signification physique au mode entropique, hormis qu'il s'agit d'une conséquence du caractère non-isentropique des phénomènes et qui induit donc des effets régés par une équation de diffusion (pas de propagation).

que l'écart instantané de pression  $p$  peut être confondu avec sa composante acoustique. En effet, si l'on prend en compte que  $l_{v,h} \approx 10^{-8}m \ll 1$  le report de la variable  $\tau = \tau_a + \tau_h$  dans l'équation (2.17) compte-tenu que  $\Delta\tau_a \approx \frac{1}{c_0^2} \partial_{tt}^2 \tau_a$  [Eq. (2.22)] et que  $\Delta\tau_h \approx \frac{1}{l_h c_0} \partial_t \tau_h$  [Eq. (2.23)] mène à écrire que

$$p_a \approx \rho_0 C_p \left( 1 - \frac{l_h}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \tau_a \approx \rho_0 C_p \tau_a \quad \text{et} \quad p_h \approx 0. \quad (2.24)$$

De même, en effectuant ce même report dans (2.14) (compte-tenu du résultat précédent et en usant de la relation  $C_p = \frac{P_0}{\rho_0 T_0} \frac{\gamma}{\gamma-1}$ ), il vient

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{\mathbf{1}_a}}{\partial t} \approx -\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0 T_0} \mathbf{grad} \tau_a \quad \mathbf{v}_{\mathbf{1}_h} \approx \frac{\gamma P_0}{\rho_0 T_0 c_0} l_h \mathbf{grad} \tau_h. \quad (2.25)$$

La pression entropique est donc toujours extrêmement petite en regard de la pression acoustique, et l'on confondra donc  $p_a$  et  $p$  dans la suite afin de ne pas alourdir les notations. On pourrait montrer par un raisonnement analogue à celui fait ci-dessus *qu'en dehors des couches limites* (i.e. loin de parois à proximité desquelles il existe de forts gradients de température et de vitesse), les composantes entropique  $\mathbf{v}_{\mathbf{1}_h}$  et de vorticité  $\mathbf{v}_{\mathbf{v}}$  de la vitesse particulière sont négligeables en regard de la vitesse acoustique  $\mathbf{v}_{\mathbf{1}_a}$ , de sorte qu'on pourra écrire que  $\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_{\mathbf{1}_a}$ . Compte-tenu des propos qui précèdent, l'équation de propagation acoustique en fluide dissipatif prend la forme suivante pour la pression acoustique :

$$\left[ \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left( 1 + l_{vh} \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \right] p(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.26)$$

Dans la plupart des cas, les problèmes sont considérés en régime établi ce qui amène à réécrire cette équation dans le domaine de Fourier sous la forme suivante :

$$[(1 + ik_0 l_{vh}) \Delta + k_0^2] \tilde{p}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.27)$$

Par suite, compte-tenu que  $k_0 l_{vh} \ll 1$ , on a

$$\Delta p = -\frac{k_0^2 \tilde{p}}{1 + ik_0 l_{vh}} \approx -k_0^2 (1 - ik_0 l_{vh}) \tilde{p},$$

soit encore (équation de Helmholtz)

$$(\Delta + k^2) \tilde{p} = 0 \quad (2.28)$$

avec

$$k = k' + ik'' = k_0 - i \frac{l_{vh}}{2} k_0^2. \quad (2.29)$$

Les conclusions à tirer quant à la vitesse de propagation (identique à la célérité adiabatique) et à l'atténuation de l'onde acoustique sont par suite les mêmes que celles tirées au paragraphe 2.1.1 à ceci près que la conduction thermique est responsable de pertes additionnelles qui sont du même ordre de grandeur que celles dues aux seuls effets visqueux.

Néanmoins, lorsqu'elle est mise à l'épreuve de l'expérience, l'estimation théorique de l'atténuation des ondes sonores tirée de (2.29) n'est pas en accord à toutes fréquences avec l'expérience lorsque le milieu de propagation est un gaz (ou une combinaison de gaz) polyatomique. Ceci est dû au phénomène de relaxation thermique moléculaire, qui fait l'objet du paragraphe suivant.

★ **Exercice** Calculer l'atténuation due aux effets visqueux et thermiques d'une onde plane en champ libre, dans l'air dans des conditions normales de température et de pression, pour une fréquence d'1 MHz.

### 2.2.2 Le phénomène de relaxation thermique moléculaire

La théorie de la cinétique des gaz nous enseigne que dans le modèle du gaz parfait monoatomique, l'énergie interne du gaz est exclusivement de nature cinétique, et que si le gaz considéré comporte  $n\mathcal{N}$  molécules (atomes), où  $n$  désigne le nombre de moles, et  $\mathcal{N}$  le nombre d'Avogadro, son énergie interne s'écrit  $U = \frac{3}{2}n\mathcal{N}k_B T = \frac{3}{2}nRT$  où  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} J.K$  désigne la constante de Boltzmann,  $R = 8.31 J.mol^{-1}.K$  la constante des gaz parfaits, et où le facteur 3 au numérateur est directement lié à l'existence de 3 degrés de liberté pour le mouvement de translation des molécules. Ceci permet d'établir, d'après la définition même de la capacité calorifique massique à volume constant  $C_V = \frac{1}{nM_{mol}} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$  (où  $M_{mol}$  désigne la masse molaire du gaz) que

$$C_V = C_V^t = \frac{3}{2} \frac{R}{M_{mol}},$$

où l'exposant  $t$  est utilisé pour préciser que seuls les mouvements de translation des molécules sont considérés ici. Dans le cas d'un gaz parfait polyatomique, l'hypothèse de ponctualité des molécules n'est plus valide et cela se traduit par la nécessité de prendre en compte également les mouvements de vibration et de rotation dans l'expression de l'énergie interne du gaz. Lorsqu'un gaz subit une compression adiabatique, sa température s'élève [Eq. (1.50)], ce qui revient à dire que le mouvement de translation des molécules s'accélère. Mais les molécules diatomiques sont animées de mouvements de vibrations et de rotation qui eux aussi s'accélèrent. A la température ordinaire le mouvement de rotation apparaît sur toutes les molécules et il est capable de varier pratiquement instantanément (relativement à la période acoustique) sous l'effet d'une sollicitation extérieure. Pour un gaz parfait diatomique, et à température ambiante, on a

$$C_V \approx C_V^{t+r} = C_V^t + C_V^r = \frac{3}{2} \frac{R}{M_{mol}} + \frac{2}{2} \frac{R}{M_{mol}} = \frac{5}{2} \frac{R}{M_{mol}}$$

du fait de la possibilité des mouvement de rotation suivant les 2 directions transverses à l'axe de la molécule. Par contre, le mouvement de vibration n'apparaît pas dans sa totalité à la température ordinaire mais seulement à des températures de quelques milliers de degrés, pour lesquels

$$C_V \approx C_V^{t+r+v} = C_V^{t+r} + C_V^v = \frac{5}{2} \frac{R}{M_{mol}} + \frac{2}{2} \frac{R}{M_{mol}} = \frac{7}{2} \frac{R}{M_{mol}}$$

du fait des mouvements de vibration dans les deux directions perpendiculaires à l'axe de la molécule (et donc deux degrés de liberté supplémentaires). Néanmoins, même à température ambiante, cet effet de relaxation dû au transfert translation/vibration peut s'avérer significatif. La prise en compte de cet effet, à la différence du transfert translation/rotation (dont on verra par la suite qu'il est pris en compte via le coefficient de viscosité de volume  $\eta$ ), nécessite cependant de considérer également que

ce mouvement de vibration ne varie pas au moment où il est sollicité mais seulement au bout d'un certain temps (très court mais pas toujours négligeable en regard des périodes usuelles en acoustique), appelé temps de relaxation et noté  $\theta$  dans la suite. De la sorte, quant à la suite de la sollicitation due aux volumes élémentaires voisins, la pression  $P$  croît (par exemple) dans le volume considéré, le mouvement de translation des molécules (seul responsable de  $P$ ) s'accélère aussitôt, puis une partie de l'énergie de translation se transforme avec retard en énergie de vibration ; quand la pression commence à décroître, l'énergie de vibration continue de croître avant de décroître ensuite par conversion en énergie de translation. Ce retard à la mise en mouvement est responsable d'un mécanisme d'amortissement qui apparaît pleinement pour des fréquences acoustiques voisines de  $1/\theta$ .

Ainsi, compte-tenu de ce qui précède, la variation d'énergie interne massique d'un fluide diatomique peut être écrite

$$dU = nC_V^{t+r}\tau + n\delta E_{vib} \quad (2.30)$$

où  $\tau \approx dT$  désigne la variation de température et  $\delta E_{vib}$  l'énergie massique instantanée emmagasinée sous forme d'énergie de vibrations des molécules. Cependant, du fait du retard de la mise en mouvement de vibration, le gaz ne se trouve pas à chaque instant à son point d'équilibre, pour lequel  $\delta E_{vib} = C_V^v\tau$ , mais suit une loi avec retard du type

$$\frac{\partial \delta E_{vib}}{\partial t} + \frac{\delta E_{vib}}{\theta} = \frac{C_V^v\tau}{\theta}. \quad (2.31)$$

Formellement, la prise en compte de ce retard à la mise en mouvement amène à écrire la variation d'énergie interne sous la forme

$$dU = nC_V^*\tau \quad (2.32)$$

où la constante  $C_V$  se trouve remplacée par l'opérateur

$$C_V^* = C_V^{t+r+v} \left( 1 - \frac{C_V^v}{C_V^{t+r+v}} \frac{\theta \partial_t}{1 + \theta \partial_t} \right) \quad (2.33)$$

ce qui amène également à redéfinir les constantes  $C_p$  et  $\gamma$  en les remplaçant par les opérateurs  $C_p^* = \frac{R}{M} + C_V^*$  et  $\gamma^* = \frac{C_p^*}{C_V^*}$ . Ainsi, la prise en compte du phénomène de relaxation moléculaire (transfert translation/vibration) revient à opérer les substitution décrites ci-avant dans les équations fondamentales (de sorte notamment que  $c_0$  devient  $c_0^* = \sqrt{\frac{\gamma^* P_0}{\rho_0}}$ ). Dans le domaine fréquentiel, cela revient à écrire l'équation de propagation (2.28) sous la forme

$$\left[ \Delta + k_0^2 \left( 1 - ik_0 l_{vh} - \sum_q D_q \frac{i\omega\theta_q}{1 + i\omega\theta_q} \right) \right] \tilde{p} = 0, \quad (2.34)$$

où la somme sur l'indice  $q$  rend compte de la présence éventuelle de plusieurs molécules diatomiques dans le gaz considéré, ce qui est le cas de l'air composé essentiellement d'azote  $N_2$  ( $\approx 80\%$ ) et d'oxygène  $O_2$  ( $\approx 20\%$ ). Le coefficient  $D_q$  s'écrit [2] :

$$D_q = \frac{(\gamma - 1)C_{Vq}^v}{C_p} \quad (2.35)$$

et les temps de relaxation  $\theta_q$  sont relatifs aux espèces considérées (essentiellement  $N_2$  et  $O_2$  pour l'air). Par suite, reprenant le raisonnement retenu au paragraphe 2.2.1, il est possible d'exprimer la vitesse de phase

$$\frac{\omega}{k'} \approx c_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \sum_q D_q \frac{(\omega\theta_q)^2}{1 + (\omega\theta_q)^2} \right) \approx c_0 \quad (2.36)$$

et l'atténuation par unité de longueur

$$k'' = \frac{\omega}{2c_0} \left( \frac{\omega l_{vh}}{c_0} + \sum_q D_q \frac{\omega\theta_q}{1 + (\omega\theta_q)^2} \right). \quad (2.37)$$

Afin de se faire une idée de l'importance des différents effets dans un cas réaliste, il peut être utile d'estimer  $k''$  dans le cas de l'air aux conditions standard de température et de pression, en notant que l'humidité de l'air (présence de molécules  $H_2O$  susceptibles de collider avec  $O_2$  et  $N_2$ ) est un paramètre important. D'après des données empiriques recueillies dans [4], on a (dans des conditions standard de température et de pression) :

$$\begin{aligned} D_{O_2} &\approx 0.0059 \frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma} \approx 0.0011 \\ D_{N_2} &\approx 0.00118 \frac{(\gamma - 1)^2}{\gamma} \approx 0.0002 \\ \frac{P_{ref}}{P_0} \frac{1}{2\pi\theta_{O_2}} &= 24 + (4.41 \cdot 10^6) \times h \frac{0.05 + 100h}{0.391 + 100h} \\ \frac{P_{ref}}{P_0} \frac{1}{2\pi\theta_{N_2}} &= \left( \frac{T_{ref}}{T_0} \right)^{1/2} \left( 9 + (3.5 \cdot 10^4) h e^{6.142 \left[ \left( \frac{T_{ref}}{T_0} \right)^{1/3} - 1 \right]} \right) \end{aligned}$$

où  $P_{ref} = 1.013 \cdot 10^5$  Pa,  $T_{ref} = 293.16$  K et où le coefficient  $h$  est défini à partir du taux d'humidité relative  $RH$  sous la forme

$$h = \frac{0.01 \times RH \times P_{vap}(T)}{P_0},$$

où  $P_{vap}(T)$  désigne la pression de vapeur saturante ( $P_{vap} = 2338$  Pa à 20 degrés Celcius). La figure 2.1 présente les résultats obtenus pour l'atténuation par unité de longueur  $k''$ , qui fait clairement apparaître d'une part que les phénomènes de relaxation moléculaire liés au transfert d'énergie translation/vibration jouent un rôle significatif, et d'autre part que la prise en compte de ces effets implique que l'atténuation ne suit plus simplement une loi quadratique en fréquence.

Les résultats obtenus à la figure 2.1 montrent également que dans le domaine des "basses fréquences", i.e. pour  $f < \frac{1}{2\pi\theta_{N_2}} (< \frac{1}{2\pi\theta_{O_2}})$ , l'atténuation suit une loi quadratique en fréquence. Dans ce domaine de fréquence ( $\omega\theta \ll 1$ ), la prise en compte de l'effet de relaxation moléculaire (transfert translation/vibration) revient donc à ajouter un terme correctif  $\delta l \approx \sum_q c_0 D_q \theta_q$  à la longueur thermovisqueuse  $l_{vh}$ . Il convient de noter à cet effet que la seconde viscosité de volume  $\eta$  introduite au paragraphe (1.2.2.3) traduit un phénomène de la même nature que celui décrit ici, à ceci près qu'il décrit essentiellement le transfert d'énergie translation/rotation pour lequel l'extrême petitesse du temps de relaxation revient à considérer cet effet comme une simple correction de longueur caractéristique



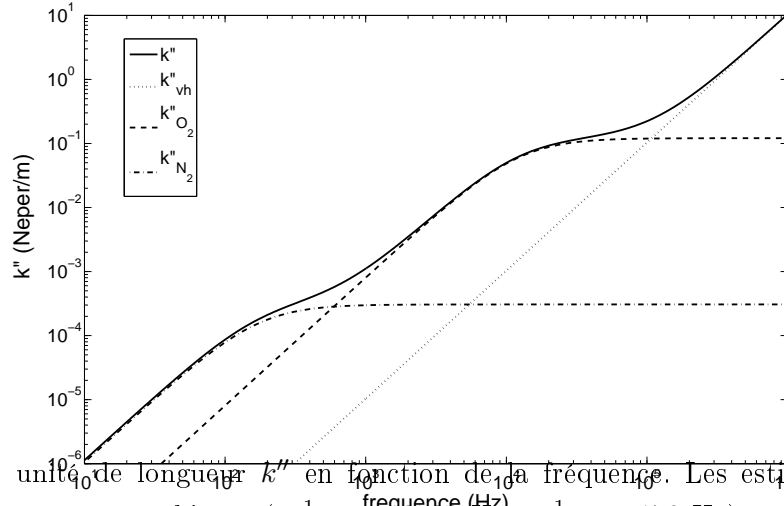


FIGURE 2.1 – Atténuation par unité de longueur  $k''$  en fonction de la fréquence. Les estimations sont données pour de l'air à température ambiante ( $\frac{1}{2\pi\theta_{O_2}} \approx 12500$  Hz,  $\frac{1}{2\pi\theta_{N_2}} \approx 170$  Hz) et un taux d'humidité  $RH$  de 20 %. Cette atténuation  $k''$ , donnée par l'équation (2.37), peut être séparée en la contribution de l'absorption "classique"  $k''_{vh}$  ainsi que les contributions  $k''_{O_2}$  et  $k''_{N_2}$  liées aux transferts translation/vibration pour les molécules d'oxygène et d'azote

visqueuse (ou de façon équivalente comme une correction à la viscosité de cisaillement) dans la gamme de fréquence usuelle.

## 2.3 Conditions aux frontières

### 2.3.1 Epaisseurs de couches limites acoustiques visqueuse et thermique

Nous avons établi que toute perturbation qui satisfait les équations linéaires fondamentales (2.14-2.17) peut être décomposée en une composante acoustique, entropique et tourbillonnaire, ce qui s'écrit pour le champ de vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_v + \mathbf{v}_{I_a} + \mathbf{v}_{I_h}$ . Nous avons également établi que lorsqu'une perturbation se propage en milieu infini, seul le mode acoustique est à considérer. En réalité, cela n'est vrai qu'en dehors des sources et des frontières du domaine. En effet, revenant aux équations (2.22), (2.23) et (2.16) que satisfont respectivement la composante acoustique  $\mathbf{v}_{I_a}$ , entropique  $\mathbf{v}_{I_h}$  et tourbillonnaire  $\mathbf{v}_v$ , il est assez direct d'écrire que dans le domaine fréquentiel, pour une pulsation  $\omega$  donnée, les relations de dispersion  $k^2 = -i\omega/(c_0 l'_v) = -i\omega\rho/\mu$  et  $k^2 = -i\omega/(c_0 l_h) = -i\omega\rho C_p/\lambda$  associées respectivement aux modes tourbillonnaire et entropique sont telles que la partie imaginaire de  $k$  pour ces 2 modes est bien supérieure à celle,  $k'' \sim l_{vh}$ , associée au mode acoustique. En d'autres termes, les modes tourbillonnaires et entropiques qui prennent essentiellement naissance aux discontinuités (source ou frontière) s'éteignent rapidement dès lors que l'on s'éloigne de ces discontinuités. Une

définition naturelle de la distance “jusqu’à laquelle” les modes entropique et tourbillonnaire s’étendent est l’inverse de la partie imaginaire du nombre d’onde correspondant, usuellement appelée épaisseur de couche limite (acoustique). C’est donc ainsi qu’on définit les épaisseurs de couche limite visqueuse

$$\delta_\nu = \sqrt{\frac{2\mu}{\omega\rho}} = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}} \quad (2.38)$$

et thermique

$$\delta_\kappa = \sqrt{\frac{2\lambda}{\omega\rho C_p}} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\omega}} = \frac{\delta_\nu}{\sqrt{\text{Pr}}} \quad (2.39)$$

où  $\nu = \mu/\rho$  désigne la viscosité cinématique du fluide,  $\kappa = \lambda/(\rho C_p)$  désigne la diffusivité thermique du fluide, et  $\text{Pr} = \nu/\kappa$  le nombre de Prandtl du fluide (pour l’air,  $\text{Pr} \approx 0.7$ ). Conformément au propos qui précèdent, dans les conditions usuelles<sup>3</sup> les épaisseurs de couches limites  $\delta_{\nu,\kappa}$  sont bien inférieures à la longueur d’onde  $2\pi c_0/\omega$ . A titre d’exemple, on a  $2\pi c_0/\omega \approx 34$  cm,  $\delta_\nu \approx 71$   $\mu\text{m}$  et  $\delta_\kappa \approx 84$   $\mu\text{m}$  dans l’air à la fréquence de 1 kHz.

### 2.3.2 Conditions aux limites à l’interface fluide/paroi

La condition usuelle de continuité de la composante normale de la vitesse particulière à l’interface du fluide et d’une paroi (fixe ou en mouvement à la vitesse  $\mathbf{v}_p$ ) n’est plus suffisante dès lors que la viscosité du fluide est prise en compte, et une deuxième condition aux limites portant sur  $\mathbf{v}$  doit être ajoutée<sup>4</sup>. La condition supplémentaire systématiquement retenue est celle de la continuité de la composante tangentielle du champ de vitesse. Cette condition de non-glissement

$$\mathbf{v}_{//}(\mathbf{r}_f, t) = \mathbf{v}_{p//}(\mathbf{r}_f, t) \quad (2.40)$$

où  $\mathbf{r}_f$  désigne la localisation de la frontière et où l’indice // est utilisé pour désigner la composante du champ tangentielle à l’interface, peut être retenue dès lors que l’hypothèse d’un milieu fluide continu reste valide<sup>5</sup>.

Par ailleurs, il est également nécessaire d’ajouter les conditions aux frontières qui portent sur les mécanismes de transfert de chaleur associés à la conduction du fluide. Plus précisément, la continuité de la température et du flux de chaleur conductif doit être prise en compte, soit :

$$T(\mathbf{r}_f, t) = T_p(\mathbf{r}_f, t), \quad (2.41)$$

$$\lambda \mathbf{grad} T \cdot \mathbf{n}_f = \lambda_p \mathbf{grad} T_p \cdot \mathbf{n}_f, \quad (2.42)$$

où  $T_p$  désigne la température locale instantanée de la paroi, où  $\mathbf{n}_f$  désigne un vecteur unitaire normal à l’interface, et où  $\lambda_p$  désigne la conductivité thermique de la paroi. Etant donné que les solides peuvent

3. Notons tout de même que lorsque  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\delta_{\nu,\kappa} \rightarrow \infty$

4. D’un point de vue formel, ceci vient du fait de la présence d’une dérivée spatiale d’ordre 2 dans l’équation de Navier-Stokes, alors même que seule une dérivée spatiale du premier ordre apparaît dans l’équation d’Euler

5. ce qui revient à considérer que le libre parcours moyen des molécules est bien inférieur à une longueur caractéristique du système comme les épaisseurs de couche limite

généralement être considérés comme de bien meilleurs conducteurs que les fluides ( $\lambda_p \gg \lambda$ ) et qu'ils présentent également une grande inertie thermique devant celle du fluide (i.e. ils peuvent prendre de la chaleur au fluide sans se réchauffer significativement<sup>6</sup>), les deux conditions ci-dessus peuvent être simplement remplacées par une condition selon laquelle la paroi reste en tout point (et donc à l'interface) à température ambiante, ce qui impose que les perturbations de température soient nulles à l'interface fluide paroi :

$$\tau(\mathbf{r}_f, t) = 0. \quad (2.43)$$

## 2.4 Réflexion d'une onde plane harmonique sur une paroi rigide.

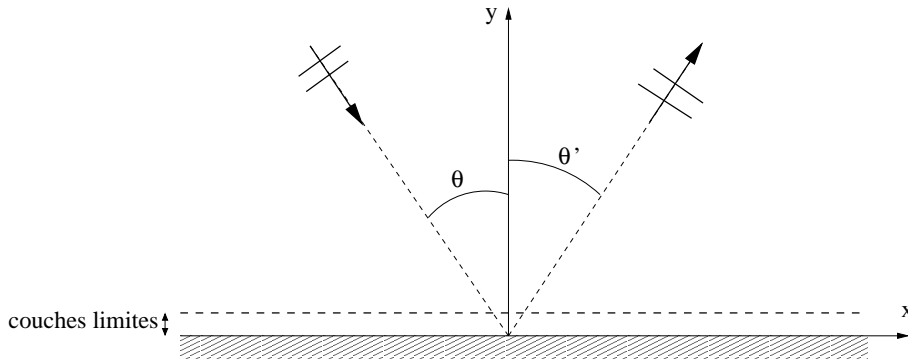


FIGURE 2.2 – Réflexion d'une onde plane sur une paroi rigide, située en  $y = 0$

Considérons le problème illustré, sur la figure 2.2, de la réflexion d'une onde plane sur une paroi rigide placée sur le plan  $y = 0$ . Le problème ainsi posé est supposé indépendant de la variable  $z$ , et l'interaction de l'onde incidente avec la paroi rigide se traduit par la création à proximité de la paroi d'une onde de diffusion entropique, d'une onde de diffusion tourbillonnaire, et bien sûr d'une onde réfléchie. On admet ici pour des raisons de concision du propos que la réflexion est spéculaire, c'est à dire que  $\theta = \theta'$  (mais la démonstration de ce résultat, déjà vue en cours de Master 1 dans le cas sans pertes, ne pose pas de problème).

La propagation des ondes dans le demi-espace  $y > 0$  est donc régie par le système d'équations :

$$(\Delta + k_v^2) \tilde{\mathbf{v}}_v = 0, \quad (2.44)$$

$$(\Delta + k_a^2) \tilde{\tau}_a = 0, \quad (2.45)$$

$$(\Delta + k_h^2) \tilde{\tau}_h = 0, \quad (2.46)$$

6. il convient de préciser que sur un cycle acoustique la paroi va successivement prendre puis restituer de la chaleur au fluide, qu'elle va en réalité lui en prendre plus qu'elle ne lui en restitue (puisqu'elle est responsable de pertes par conduction thermique), mais que l'on pourra généralement considérer (sauf peut-être en thermoacoustique...) que cet apport de chaleur moyen est insuffisant pour être responsable d'une variation de température moyenne du solide

où les nombres d'onde tourbillonnaire, acoustique et entropique sont respectivement définis par :

$$k_v^2 = -i \frac{k_0}{l'_v} = -i \frac{\rho_0 \omega}{\mu}, \quad (2.47)$$

$$k_a^2 \approx k_0^2 (1 - ik_0 l_{vh}) = k_0^2 \left( 1 - ik_0 \left( \frac{\eta + \frac{4}{3}\mu}{\rho_0 c_0} + (\gamma - 1) \frac{\lambda}{\rho_0 c_0 C_p} \right) \right), \quad (2.48)$$

$$k_h^2 \approx -i \frac{k_0}{l_h} = -i \frac{\rho_0 \omega C_p}{\lambda}. \quad (2.49)$$

Les équations associées au modes entropique et acoustique sont écrites ici avec la variable  $\tau = \tau_a + \tau_h$ . Rappelons cependant que les variables  $p = p_a + p_h$  et  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{1a} + \mathbf{v}_{1h}$  satisfont aux mêmes équations. De plus, la connaissance de  $\tau$  permet aisément d'en déduire  $p$  et  $\mathbf{v}_1$ , à l'aide des relations (2.24) et (2.25) écrites ici en régime harmonique ( $\partial_t \sim i\omega$ ). La fermeture du problème se fait par la prise en compte des conditions aux frontières  $\tau = 0$  et  $\mathbf{v} = 0$  en  $y = 0$ .

On cherche à ce problème une solution pour la variable  $\tilde{\tau}$  sous la forme de la somme d'une onde plane incidente  $\tilde{\tau}^+$  d'amplitude unitaire, elle-même somme d'un mode acoustique [solution de (2.45)], et d'un mode entropique [solution de (2.46)]

$$\tilde{\tau}^+ = \tilde{\tau}_a^+ + \tilde{\tau}_h^+ = \left[ e^{ik_{ay}y} + A_h^+ e^{ik_{hy}y} \right] e^{-ik_x x} \approx e^{ik_{ay}y} e^{-ik_x x} = \tilde{\tau}_a^+, \quad (2.50)$$

et d'une onde réfléchie

$$\tilde{\tau}^- = \tilde{\tau}_a^- + \tilde{\tau}_h^- = \left[ R_a e^{-ik_{ay}y} + A_h^- e^{-ik_{hy}y} \right] e^{-ik_x x}, \quad (2.51)$$

où  $R_a$  désigne le coefficient de réflexion en amplitude de l'onde acoustique. Dans ces deux équations, les nombres d'onde satisfont aux relations de dispersion suivantes [report des formes de solution dans les équations (2.45) et (2.46)]

$$k_a^2 = k_{ay}^2 + k_x^2 \quad \text{et} \quad k_h^2 = k_{hy}^2 + k_x^2. \quad (2.52)$$

Il convient de noter que l'onde thermique incidente d'amplitude  $A_h^+$  est ici négligée en regard de celle de l'onde acoustique, aux mêmes motifs que ceux avancés au paragraphe 2.2. De même, aucune dissociation n'est faite entre mode acoustique et thermique pour le problème suivant la direction  $x$ , puisqu'en l'absence de frontière suivant cette direction c'est le mode acoustique qui prévaut. En revanche l'onde thermique réfléchie, d'amplitude  $A_h^-$  prend naissance à l'interface fluide paroi qui impose que  $\tilde{\tau}_a^- = -\tilde{\tau}_h^-$  en  $y = 0$ . Cette onde thermique réfléchie est donc d'amplitude significative en regard de l'onde acoustique, du moins sur une distance de l'ordre de l'épaisseur de couche limite thermique.

Ensuite, les relations (2.25) permettent d'écrire la forme de solution pour le champ de vitesse particulaire laminaire  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1^+ + \mathbf{v}_1^-$  :

$$\mathbf{v}_1^+ = -\frac{1}{i\omega} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0 T_0} \left[ \partial_x \tilde{\tau}_a^+ \mathbf{e}_x + \partial_y \tilde{\tau}_a^+ \mathbf{e}_y \right], \quad (2.53)$$

$$\mathbf{v}_1^- = -\frac{1}{i\omega} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0 T_0} \left[ \partial_x \tilde{\tau}_a^- \mathbf{e}_x + \partial_y \tilde{\tau}_a^- \mathbf{e}_y \right] + \frac{\gamma P_0 l_h}{\rho_0 T_0 c_0} \left( \partial_x \tilde{\tau}_h^- \mathbf{e}_x + \partial_y \tilde{\tau}_h^- \mathbf{e}_y \right). \quad (2.54)$$

Enfin, concernant le champ de vitesse particulière tourbillonnaire, seule l'onde réfléchie est retenue<sup>7</sup>,  $\mathbf{v}_v = \mathbf{v}_v^+ + \mathbf{v}_v^- \approx \mathbf{v}_v^- \propto e^{-ik_{vy}y} e^{-ik_x x}$ , qui s'écrit sous la forme suivante (imposée par la condition  $\text{div}(\mathbf{v}_v) = 0$ )

$$\mathbf{v}_v^- = A_v^- e^{-ik_{vy}y} e^{-ik_x x} \left( -\frac{k_{vy}}{k_x} \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \right), \quad (2.55)$$

de sorte qu'en reportant cette forme de solution dans (2.44) on obtient la relation de dispersion

$$k_v^2 = k_x^2 + k_{vy}^2. \quad (2.56)$$

Finalement, le report des formes de solutions ci-dessus pour  $\tau$ ,  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_v$  dans les conditions aux frontières

$$\forall x, y = 0, \tau = 0, \mathbf{v}_{1x} + \mathbf{v}_{vx} = 0, \mathbf{v}_{1y} + \mathbf{v}_{vy} = 0,$$

puis l'élimination des paramètres  $A_v^-$  et  $A_h^-$ , mènent à la relation suivante

$$-i(\gamma - 1) k_0 l_h (1 + R_a) (k_x^2 + k_{hy} k_{vy}) = (k_x^2 + k_{vy} k_{ay}) R_a - (k_{vy} k_{ay} - k_x^2) \quad (2.57)$$

qui donne accès à l'expression du coefficient de réflexion  $R_a$ . En remarquant<sup>8</sup> que  $k_x \ll k_{hy}$ ,  $k_{hy}^2 \approx -ik_0/l_h$ ,  $k_x \ll k_{hy}$ ,  $k_{vy}^2 \approx -ik_0/l'_v$  du fait de la petitesse des longueurs  $l_h$  et  $l'_v$ , ceci permet finalement d'exprimer l'admittance spécifique de paroi  $\frac{\rho_0 c_0}{Z_a} = -\rho_0 c_0 \frac{v_{ay}}{p_a} |_{y=0}$  sous la forme suivante :

$$\frac{\rho_0 c_0}{Z_a} \approx \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{c_0}} \left[ \left( 1 - \frac{k_{ay}^2}{k_a^2} \right) \sqrt{l'_v} + (\gamma - 1) \sqrt{l_h} \right] \quad (2.58)$$

où  $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ , soit encore

$$\frac{\rho_0 c_0}{Z_a} \approx \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{c_0}} \left[ \sin^2 \theta \sqrt{l'_v} + (\gamma - 1) \sqrt{l_h} \right] \quad (2.59)$$

Ce résultat amène à plusieurs commentaires concernant les mécanismes de dissipation à proximité de parois :

- l'influence des effets visqueux sur valeur de l'admittance spécifique de paroi dépend de l'angle d'incidence de l'onde  $\theta$ , ce qui n'est pas le cas des effets de conduction ;
- l'admittance spécifique de paroi est proportionnelle à  $\sqrt{\omega}$  ainsi qu'à  $\sqrt{l'_v}$  et  $\sqrt{l_h}$ . Cette dépendance en  $\sqrt{l'_v}$  et  $\sqrt{l_h}$  montre que les pertes pariétales jouent un rôle important en regard des pertes volumiques ( $\sqrt{l'_v}, l_h \gg l_v, l_h \sim 10^{-4}$ ) ;
- les effets de viscosité de volume, non négligeables pour la propagation en milieu infini, ne jouent aucun rôle en proche paroi où les effets de cisaillement prédominent (du fait de la présence de forts gradients de vitesse au sein des couches limites acoustique) ;

7. l'onde tourbillonnaire incidente est négligée au même titre que l'onde entropique incidente, de même que l'onde tourbillonnaire réfléchie qui prend naissance à l'interface ne peut être négligée à l'instar de l'onde entropique réfléchie

8. d'après les relations de dispersion (2.52) et (2.56)

- le résultat (2.59) établi ici pour une onde plane harmonique se réfléchissant sur une paroi plane est en fait d'application plus générale : il peut notamment s'appliquer au cas d'une surface courbe dont le rayon de courbure reste nettement supérieur aux épaisseurs de couche limite, dans la mesure où cette surface peut-être localement remplacée par son plan tangent.

Il est également intéressant de considérer l'absorption induite par les effets viscothermiques pariétaux. Ceci peut être fait en calculant le coefficient d'absorption  $\alpha = 1 - |R_a|^2$  en usant de l'équation (2.58), compte tenu des approximations  $k_x \ll k_{hy}$ ,  $k_{hy}^2 \approx -ik_0/l_h$ ,  $k_x \ll k_{hy}$ ,  $k_{vy}^2 \approx -ik_0/l'_v$ . Le lecteur pourra vérifier que cela mène au résultat suivant (avec  $\cos \theta = k_{ay}/k_a$ ) :

$$\alpha(\theta) = \frac{4\sqrt{2} (\sqrt{k_0 l'_v} \sin^2 \theta + (\gamma - 1)\sqrt{k_0 l_h}) \cos \theta}{[\sqrt{2} \cos \theta + (\sqrt{k_0 l'_v} \sin^2 \theta + (\gamma - 1)\sqrt{k_0 l_h})]^2 + (\sqrt{k_0 l'_v} \sin^2 \theta + (\gamma - 1)\sqrt{k_0 l_h})^2}. \quad (2.60)$$

**Exercice** Reprendre en détail toutes les étapes de calcul menant au résultat (2.59).

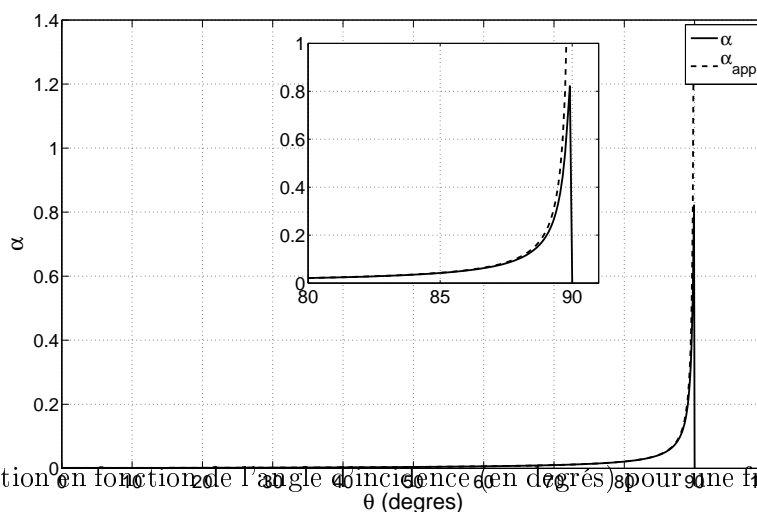


FIGURE 2.3 – Coefficient d'absorption  $\alpha$  en fonction de l'angle d'incidence  $\theta$  (en degrés) pour une fréquence de 1 kHz.

Pour des angles d'incidence non rasant, i.e. loin de  $\theta \approx \pi/2$  cette expression peut-être simplifiée sous la forme (compte-tenu que  $\sqrt{k_0 l} \ll 1$ )

$$\alpha_{app}(\theta) = \frac{4 (\sqrt{k_0 l'_v} \sin^2 \theta + (\gamma - 1)\sqrt{k_0 l_h})}{\sqrt{2} \cos \theta}. \quad (2.61)$$

indiquant que l'absorption augmente à mesure que l'angle d'incidence  $\theta$  augmente. Notons tout de même que pour  $\theta \approx \pi/2$ , la relation approchée ne peut plus être utilisée, et le report de  $\theta = \pi/2$  dans (2.60) mène à  $\alpha = 0$  : il n'y a pas d'absorption en incidence purement rasante, au motif que l'onde incidente ne transporte pas d'énergie dans la direction perpendiculaire à la paroi<sup>9</sup>.

9. le coefficient d'absorption  $\alpha$  est par définition le rapport entre l'intensité absorbée et l'intensité incidente sur la

La figure 2.3 présente l'allure de  $\alpha$  et  $\alpha_{app}$  en fonction de l'angle d'incidence  $\theta$  pour une onde incidente de fréquence 1 kHz. Il apparaît que ce coefficient passe par un maximum (supérieur à 0.8), mais qu'il reste en général assez faible en dehors des incidences rasantes<sup>10</sup>.

## 2.5 Propagation d'ondes planes dans des guides

### 2.5.1 Propagation d'ondes planes dans un guide de section circulaire

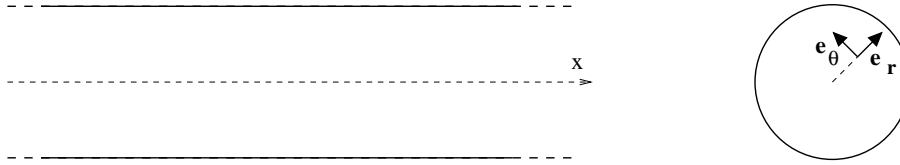


FIGURE 2.4 – Propagation d'ondes plane en tube cylindrique à section circulaire

Le problème considéré ici, illustré sur la figure 2.4, est celui de la propagation d'ondes acoustiques dans un guide de section circulaire de rayon  $R$ . On considère également que la fréquence de l'onde est inférieure à la première fréquence de coupure  $f_c = 1.84c_0/R$ , de sorte que l'onde considérée est une onde plane. Ainsi les fluctuations de pressions  $p$ , et donc la pression acoustique  $p_a \approx p$ , ne dépendent que de la variable  $x$  :  $p_a(r, \theta, x) = p_a(x)$ , tandis que les autres variables ( $\rho'$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\tau$ ,  $s$ ) sont supposées indépendantes de la variable azimuthale  $\theta$ , pour des raisons évidentes d'axisymétrie.

#### 2.5.1.1 Relation entre $v_x$ et $p$

La projection sur l'axe  $x$  de l'équation de Navier-Stokes (1.43) s'écrit :

$$i\omega\rho_0\tilde{v}_x(x, r) = -\partial_x\tilde{p} + \mu\Delta\tilde{v}_x(x, r) + \left(\eta + \frac{\mu}{3}\right)\partial_x(\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}}), \quad (2.62)$$

où  $\tilde{v}_x$  désigne la composante suivant  $x$  du champ de vitesse particulière. De plus, dans la mesure où la longueur d'onde acoustique  $2\pi c_0/\omega$  est supposée très grande en regard des épaisseurs de couches limites visqueuses  $\delta_\nu$  et thermiques  $\delta_\kappa$ , on peut retenir l'approximation dite *de couche limite* selon laquelle la variation longitudinale du champ de vitesse est bien inférieure à sa variation transverse :

$$|\partial_x\tilde{v}_x| \ll |\partial_r\tilde{v}_x|,$$

paroi, de sorte que lorsqu'une onde se propage parallèlement à la paroi, l'intensité incidente sur la paroi, et et par suite celle absorbée, sont nulles. En d'autres termes, le coefficient  $\alpha$  tel qu'il est défini ici ne peut traduire des pertes qui pourtant existent bien. Néanmoins, ce mécanisme de pertes pour une incidence purement rasante est traité en détail au paragraphe 2.5 dans le cas plus général de la propagation d'ondes planes dans les tubes

<sup>10</sup>. A titre d'exemple, on peut calculer le coefficient d'absorption acoustique moyen en incidence aléatoire  $\bar{\alpha} = \int_0^{\pi/2} \alpha(\theta) \sin(2\theta) \cdot d\theta$  qui vaut 0.0057 à 1kHz et 0.0018 à 100 Hz. Il n'est donc pas exagéré en première approche de considérer qu'une paroi rigide est parfaitement réfléchissante.

de sorte que l'équation (2.62) devient :

$$i\omega\rho_0\tilde{v}_x = -\partial_x\tilde{p} + \mu\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r\tilde{v}_x(x,r)). \quad (2.63)$$

Il convient de noter que cette approximation couche limite a pour conséquence que le terme de viscosité de volume disparaît de l'équation de Navier-Stokes : ceci signifie que la dissipation pariétale, liée au cisaillement et proportionnelle à  $\sqrt{l_v} \sim 10^{-4}$ , joue un rôle prédominant en regard de la dissipation visqueuse de volume (proportionnelle à  $l_v \sim 10^{-8}$ ). La résolution de (2.63) compte-tenu que  $\tilde{v}_x(x,R) = 0$ , mène à une relation entre le gradient longitudinal de pression et la composante longitudinale du champ de vitesse. Après calculs, il vient :

$$\tilde{v}_x = \frac{i}{k_0\rho_0c_0}(1 - F_\nu(r))\partial_x\tilde{p}, \quad (2.64)$$

avec

$$F_\nu(r) = \frac{J_0(k_\nu r)}{J_0(k_\nu R)}, \quad (2.65)$$

où l'on rappelle que  $k_\nu = \sqrt{-i\frac{k_0}{l_v}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{k_0}{l_v}} = \frac{1-i}{\delta_\nu}$ , et où  $J_n$  désigne la fonction de Bessel cylindrique de premier espèce d'ordre  $n$ . Il est dès lors possible de calculer la vitesse moyenne sur une section de la vitesse particulière :

$$\langle\tilde{v}_x\rangle = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi r\tilde{v}_x.dr \quad (2.66)$$

$$= \frac{i}{k_0\rho_0c_0}(1 - f_\nu)\partial_x\tilde{p}, \quad (2.67)$$

où la fonction  $f_\nu$  (appelée fonction visqueuse) est définie par

$$f_\nu = \frac{2}{k_\nu R}\frac{J_1(k_\nu R)}{J_0(k_\nu R)}. \quad (2.68)$$

★ **Exercice** Redémontrer le résultat (2.64), partant de (2.63)

### 2.5.1.2 Relation entre $\tau$ et $p$

L'approximation de couche limite peut également être retenue pour la variable  $\tau$ , i.e.  $\partial_x\tau \ll \partial_r\tau$  de sorte que l'équation du transport de la chaleur (2.17) s'écrit en régime harmonique

$$ik_0\tilde{\tau} - l_h\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r\tilde{\tau}) = \frac{ik_0}{\rho_0C_p}\tilde{p}. \quad (2.69)$$

Compte-tenu de la condition aux frontières  $\tilde{\tau}(x,R) = 0, \forall x$ , la résolution de cette équation mène à la relation entre  $\tilde{p}$  et  $\tilde{\tau}$  qui suit :

$$\tilde{\tau} = \frac{\tilde{p}}{\rho_0C_p}[1 - F_\kappa(r)], \quad (2.70)$$

avec

$$F_\kappa(r) = \frac{J_0(k_h r)}{J_0(k_h R)}, \quad (2.71)$$



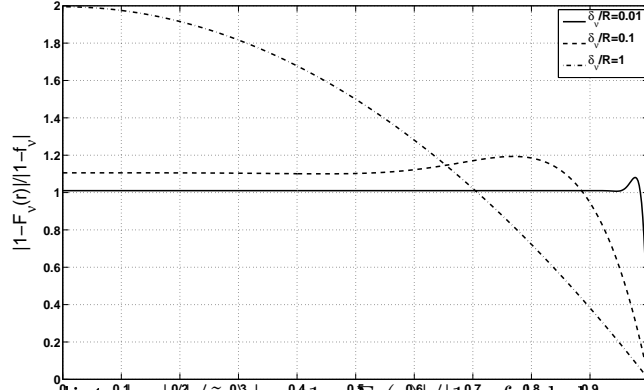


FIGURE 2.5 – Distribution radiale normalisée  $|1-F_{\nu}(r)|/|1-f_{\nu}|$  de la composante axiale du champ de vitesse en fonction de la coordonnée radiale  $r/R$  et pour différentes valeurs de  $\delta_{\nu}/R$ .

où l'on rappelle que  $k_h = \sqrt{-i \frac{k_0}{l_h}} = \frac{1-i}{\delta_{\kappa}}$ . Il est dès lors possible de calculer les fluctuations moyennes de température sur une section :

$$\langle \tilde{\tau} \rangle = \frac{\tilde{p}}{\rho_0 C_p} [1 - f_{\kappa}], \quad (2.72)$$

où la fonction  $f_{\kappa}$  est définie par

$$f_{\kappa} = \frac{2}{k_h R} \frac{J_1(k_h R)}{J_0(k_h R)}. \quad (2.73)$$

### 2.5.1.3 Autres relations

L'expression des oscillations de masse volumique  $\tilde{\rho}$  en fonction de  $\tilde{p}$  peut être obtenue à partir de l'équation d'état linéarisée sous l'hypothèse d'un gaz parfait<sup>11</sup>

$$\tilde{\rho}' = -\frac{\rho_0}{T_0} \tilde{\tau} + \frac{\gamma}{c_0^2} \tilde{p}, \quad (2.74)$$

et de l'équation (2.70), ce qui conduit à :

$$\tilde{\rho}' = \frac{1}{c_0^2} [1 + (\gamma - 1)F_{\kappa}(r)] \tilde{p} \quad (2.75)$$

★ **Exercice** Redémontrer le résultat (2.75).

Enfin, il est également possible d'exprimer la composante suivant  $r$  du champ de vitesse particulière en fonction du champ de pression  $p$  en usant de l'équation de conservation de la masse et des relations (2.75) et (2.64). Néanmoins, le calcul n'est pas précisé ici dans la mesure où le report de l'hypothèse d'onde plane, i.e.  $\partial_r p = 0$  dans la projection suivant  $r$  de l'équation de Navier-Stokes, a

11. pour un gaz parfait, on a  $P = \rho \frac{R}{M_{mol}} T$  de sorte que  $d\rho = \frac{\rho}{P} dP - \frac{\rho}{T} dT$

pour conséquence que la composante radiale du champ de vitesse est nécessairement négligeable devant sa composante axiale. De ce fait, l'équation de conservation de la masse linéarisée devient simplement

$$i\omega\tilde{\rho}' + \rho_0\partial_x\tilde{v}_x \approx 0 \quad (2.76)$$

### 2.5.2 Equation d'onde

Le report des relations (2.75) et (2.64) dans l'équation de conservation de la masse (2.76), puis l'intégration sur la section du guide d'onde mène directement à l'équation de propagation pour la pression acoustique

$$\partial_{xx}^2\tilde{p} + k^2\tilde{p} = 0, \quad (2.77)$$

avec

$$k^2 = k_0^2 \left( 1 + \frac{f_\nu + (\gamma - 1)f_\kappa}{1 - f_\nu} \right) \quad (2.78)$$

et  $k_0 = \omega/c_0$ . Cette équation est similaire à celles obtenues précédemment pour la propagation d'ondes planes en champ libre. Néanmoins, elle diffère des équations précédentes par la présence des fonctions  $f_\nu$  et  $f_\kappa$  qui traduisent les couplages visqueux et thermique entre le fluide oscillant et les parois du guide, couplages qui dépendent des dimensions et de la forme de ce guide. De plus, ces fonctions traduisent des pertes viscothermiques pariétales, proportionnelles à  $\sqrt{\omega}$  à la différence des pertes volumiques, proportionnelles à  $\omega^2$ .

En posant  $k = k' - ik''$ , il est possible d'extraire de la relation de dispersion les parties réelle et imaginaire du nombre d'onde  $k$ , qui donnent accès d'une part à la vitesse de propagation de l'onde (vitesse de phase  $v_\varphi = \omega/k'$ ) et d'autre part à l'atténuation de l'onde par unité de longueur  $k''$ . Sans aucune hypothèse sur les dimensions du guide d'onde relativement aux épaisseurs de couches limites, il vient :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c_0}{\Re \left[ \left( 1 + \frac{f_\nu + (\gamma - 1)f_\kappa}{1 - f_\nu} \right)^{1/2} \right]} \quad (2.79)$$

$$k'' = -k_0 \Im \left[ \left( 1 + \frac{f_\nu + (\gamma - 1)f_\kappa}{1 - f_\nu} \right)^{1/2} \right] \quad (2.80)$$

où  $\Re[\dots]$  et  $\Im[\dots]$  désignent les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe.

### 2.5.3 Cas limites asymptotiques

Il est intéressant d'analyser les cas limites asymptotiques d'un guide d'onde large (i.e. pour lequel  $R \gg \delta_{\nu,\kappa}$ ) et d'un guide d'onde étroit ( $R \ll \delta_{\nu,\kappa}$ ).

Dans le cas d'un guide d'onde large, le développement limité au premier ordre du petit paramètre  $\epsilon_{\nu,\kappa} = \frac{\delta_{\nu,\kappa}}{R}$  de la vitesse de phase  $v_\varphi$  et du coefficient d'atténuation par unité de longueur  $k''$  mène au

résultats suivant <sup>12</sup> :

$$v_\varphi \approx c_0 \left[ 1 - \frac{\sqrt{c_0}}{R\sqrt{2\omega}} \left( \sqrt{l'_v} + (\gamma - 1)\sqrt{l_h} \right) \right] \approx c_0, \quad (2.81)$$

$$k'' \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\omega}{2c_0}} \left( \sqrt{l'_v} + (\gamma - 1)\sqrt{l_h} \right). \quad (2.82)$$

Ainsi, dans le cas d'un guide d'onde large, la vitesse de phase correspond à la célérité adiabatique comme dans le cas de la propagation en milieu infini. En revanche le coefficient d'atténuation  $k''$  (proportionnel à  $\sqrt{l'_v}$  et  $\sqrt{l_h}$ ) est beaucoup plus important que dans le cas de la propagation en milieu infini (où  $k'' \propto l'_v, l_h$ ).

Dans le cas d'un guide d'onde étroit, le développement limité au premier ordre du petit paramètre  $\epsilon_{\nu,\kappa} = \left( \frac{R}{\delta_{\nu,\kappa}} \right)^2$  de la vitesse de phase  $v_\varphi$  et du coefficient d'atténuation par unité de longueur  $k''$  mène au résultats suivant <sup>13</sup> :

$$v_\varphi \approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\gamma l'_v}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{R}{\delta_\nu} c_T \quad (2.83)$$

$$k'' \approx \frac{2}{R} \sqrt{\gamma k_0 l'_v} = \sqrt{2} \frac{\omega}{c_T} \frac{\delta_\nu}{R} \quad (2.84)$$

où  $c_T = \frac{c_0}{\gamma}$  désigne la célérité isotherme <sup>14</sup>. La propagation dans un tube capillaire se traduit donc par une vitesse de propagation très lente ( $v_\varphi \ll c_0$ ) et une atténuation très importante ( $k'' = k'$ ) de sorte qu'il s'agit plus en réalité d'un processus de diffusion.

## 2.5.4 Extension aux fentes et aux guides de section rectangulaire

Les développements présentés au paragraphes 2.5.1 et 2.5.2 pour la propagation d'ondes planes dans des guides à section circulaire peuvent être repris dans le cas de guides à section autre que circulaire. Les résultats, relativement usuels, obtenus pour le cas de la propagation (2-D) dans une fente de largeur  $D$  ou bien dans un guide de section carrée d'arête  $a$  sont notamment utiles à mentionner (le lecteur pourra par ailleurs vérifier à titre d'exercice les résultats mentionnés ci-après).

### 2.5.4.1 Fentes

En appliquant le raisonnement du paragraphe 2.5.1 au cas de la propagation suivant  $x$  d'une onde plane dans une fente d'épaisseur  $h$  suivant la coordonnée  $y$  (propagation 2-D supposée indépendante de la variable  $y$ ), ce qui mène à une nouvelle expression des fonctions visqueuses ( $F_\nu(y), f_\nu$ ) et thermiques

12. compte-tenu que  $J_n(\epsilon) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\epsilon}} \cos\left(\epsilon - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ , de sorte que  $f_{\nu,\kappa} \sim \dots \sim (1-i)\frac{\delta_{\nu,\kappa}}{R}$

13. compte-tenu que  $f_{\nu,\kappa} \sim \dots \sim 1 - \frac{i}{4} \left( \frac{R}{\delta_{\nu,\kappa}} \right)^2$

14. On peut d'ailleurs noter que la disparition de la longueur caractéristique  $l_h$  traduit que les processus sont isothermes, la paroi imposant en tout point sa température au fluide

$(F_\kappa(y), f_\kappa)$ . Après calculs, les résultats obtenus sont les suivants :

$$F_{\nu,\kappa}(y) = \frac{\cosh\left(\frac{(1+i)y}{\delta_{\nu,\kappa}}\right)}{\cosh\left(\frac{(1+i)h}{2\delta_{\nu,\kappa}}\right)}, \quad (2.85)$$

$$f_{\nu,\kappa} = \frac{\tanh\left(\frac{(1+i)h}{2\delta_{\nu,\kappa}}\right)}{\left(\frac{(1+i)h}{2\delta_{\nu,\kappa}}\right)}. \quad (2.86)$$

Ces nouvelles expressions des fonctions  $f_{\nu,\kappa}$  peuvent être directement remplacées dans l'équation d'onde (2.77) qui reste inchangée. De plus, l'étude des cas limites asymptotiques mène aux mêmes résultats que ceux présentés au paragraphe 2.5.1 en remplaçant le rayon  $R$  par la demi-épaisseur  $h/2$ .

**Exercice** Retrouver les résultats ci-dessus en appliquant au cas d'une fente la démarche adoptée au paragraphe précédent pour un guide d'onde de section circulaire

#### 2.5.4.2 Guide à section carrée

En appliquant le raisonnement du paragraphe 2.5.1 au cas de la propagation suivant  $x$  d'une onde plane dans un guide à section carrée d'arête  $2a$ , une nouvelle expression des fonctions visqueuses  $(F_\nu(y, z), f_\nu)$  et thermiques  $(F_\kappa(y, z), f_\kappa)$  est obtenue. Après calculs<sup>15</sup>, les résultats obtenus pour  $f_\nu$  et  $f_\kappa$  sont les suivants :

$$f_{\nu,\kappa} = 1 - \left(\frac{8}{\pi^2}\right)^2 \sum_{m=1,3,5,\dots} \sum_{n=1,3,5,\dots} F_{m,n}^{\nu,\kappa}. \quad (2.87)$$

avec

$$F_{m,n}^{\nu,\kappa} = m^2 n^2 \left[ 1 + i \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{\delta_{\nu,\kappa}}{a}\right)^2 (m^2 + n^2) \right]. \quad (2.88)$$

Ces nouvelles expressions des fonctions  $f_{\nu,\kappa}$  peuvent être directement remplacées dans l'équation d'onde (2.77) qui reste inchangée. De plus, l'étude des cas limites asymptotiques mène aux mêmes résultats que ceux présentés au paragraphe 2.5.1 en remplaçant le rayon  $R$  par la demi-arête  $a$ .

---

15. Pour ce dernier cas d'un tube à section carrée, les calculs à mener ne présentent pas de difficulté majeure, mais ils sont en revanche très long à mener. Le lecteur souhaitant reprendre ces calculs pourra par exemple consulter la référence suivante : W.P. Arnott, H.E. Bass, R. Raspet, J. Acoust. Soc. Am. 90 :3228-3237, 1990



## Chapitre 3

# Quelques applications ou conséquences de la viscothermie

### 3.1 Quelques problèmes académiques

#### 3.1.1 Ondes planes guidées, approche électroacoustique

##### 3.1.1.1 Analogie avec la théorie des lignes, constantes réparties

Le problème de la propagation d'ondes planes guidées traité au chapitre précédent peut également être traité par analogie avec la théorie des lignes de transmission en électricité. Cette approche s'avère notamment très utile en électroacoustique lorsque sont traités des problèmes de couplages de transducteurs électroacoustiques avec des guides d'onde.

Nous avons vu au paragraphe 2.5 qu'il est possible d'exprimer le gradient longitudinal de pression en fonction de la moyenne sur une section de la composante longitudinale du champ de vitesse :

$$\partial_x \tilde{p} = -\frac{ik_0 \rho_0 c_0}{1 - f_\nu} \langle \tilde{v}_x \rangle, \quad f_\nu = \frac{2}{k_\nu R} \frac{J_1(k_\nu R)}{J_0(k_\nu R)}. \quad (3.1)$$

Par ailleurs, le gradient longitudinal de vitesse peut être exprimé en fonction de la pression acoustique en reportant l'équation (2.75) dans l'équation de conservation de la masse (2.76) :

$$\partial_x \langle \tilde{v}_x \rangle = -\frac{ik_0}{\rho_0 c_0} [1 + (\gamma - 1)f_\kappa] \tilde{p}, \quad f_\kappa = \frac{2}{k_h R} \frac{J_1(k_h R)}{J_0(k_h R)}. \quad (3.2)$$

En introduisant le débit acoustique, noté  $\tilde{u} = S \langle \tilde{v}_x \rangle$ , dans le tube de section  $S$ , il vient :

$$\partial_x \tilde{p} + Z_v \tilde{u} = 0, \quad (3.3)$$

$$\partial_x \tilde{u} + Y_h \tilde{p} = 0, \quad (3.4)$$

soit encore

$$d\tilde{p} + Z_v dx \tilde{u} = 0, \quad (3.5)$$

$$d\tilde{u} + Y_h dx \tilde{p} = 0, \quad (3.6)$$

où  $Z_v$  et  $Y_h$  sont donnés par

$$Z_v = \frac{1}{S} \frac{ik_0 \rho_0 c_0}{1 - f_\nu}, \quad Y_h = S \frac{ik_0}{\rho_0 c_0} [1 + (\gamma - 1)f_\kappa]. \quad (3.7)$$

Dans l'hypothèse où  $|Z_v dx Y_h dx| \ll 1$ , il est possible de représenter le problème de propagation dans un petit élément de tube de longueur  $dx$  sous la forme du schéma électrique équivalent de la figure 3.1. Il est alors intéressant de noter que l'impédance élémentaire  $Z_v dx$  peut être réécrite sous la forme

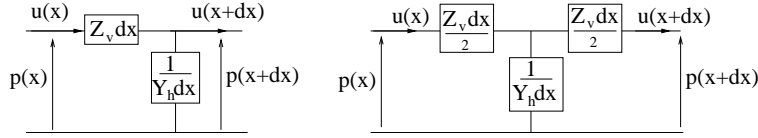


FIGURE 3.1 – Schéma électrique équivalent pour un tube de longueur  $dx$

$$Z_v dx = \frac{\rho_0 \omega dx}{S} \frac{\Im(f_\nu)}{|1 - f_\nu|^2} + i\omega \frac{\rho_0 dx}{S} \frac{1 - \Re(f_\nu)}{|1 - f_\nu|^2} = dR_\nu(\omega) + idM_a \omega \quad (3.8)$$

faisant apparaître une “résistance” visqueuse élémentaire

$$dR_\nu(\omega) = \frac{\rho_0 \omega dx}{S} \frac{\Im(f_\nu)}{|1 - f_\nu|^2} \quad (3.9)$$

et une masse acoustique élémentaire

$$dM_a = \frac{\rho_0 dx}{S} \frac{1 - \Re(f_\nu)}{|1 - f_\nu|^2} \quad (3.10)$$

De même, l'admittance élémentaire  $Y_h dx$  peut être réécrite sous la forme

$$Y_h dx = -\frac{S dx \omega (\gamma - 1)}{\rho_0 c_0^2} \Im(f_\kappa) + i\omega \frac{S dx \omega}{\rho_0 c_0^2} (1 + (\gamma - 1)\Re(f_\kappa)) = dY_\kappa(\omega) + idC_a \omega, \quad (3.11)$$

faisant apparaître une souplesse acoustique élémentaire

$$dC_a = \frac{S dx \omega}{\rho_0 c_0^2} (1 + (\gamma - 1)\Re(f_\kappa)) \quad (3.12)$$

et une admittance thermique

$$dY_\kappa = -\frac{S dx \omega (\gamma - 1)}{\rho_0 c_0^2} \Im(f_\kappa). \quad (3.13)$$

On peut par ailleurs remarquer que les variables  $p$  et  $u$  sont régies par une même équation de propagation

$$\partial_{zz}^2 \tilde{\xi} + k_x^2 \tilde{\xi} = 0 \quad (3.14)$$

avec  $\tilde{\xi} = \tilde{p}$  ou  $\tilde{u}$  et

$$k_x^2 = -Z_v Y_h = k_0^2 \frac{1 + (\gamma - 1)f_\kappa}{1 - f_\nu}. \quad (3.15)$$

En introduisant la constante de propagation,  $\Gamma = jk_x$  et l'impédance caractéristique de la ligne :

$$Z_c = \tilde{p}/\tilde{u} = \frac{\rho_0 c_0}{S \sqrt{(1 - f_\nu) [1 + (\gamma - 1) f_\kappa]}}, \quad (3.16)$$

les deux équations reliant  $p$  et  $u$  peuvent être réécrites :

$$\partial_x \tilde{p} = -\Gamma Z_c \tilde{u}, \quad (3.17)$$

$$\partial_x \tilde{u} = -\frac{\Gamma}{Z_c} \tilde{p}, \quad (3.18)$$

et la solution pour  $p$  s'écrit sous la forme  $\tilde{p} = ae^{-\Gamma x} + be^{+\Gamma x}$  (dont on déduit aisément la solution pour  $u$ ). Dès lors, par analogie avec la théorie des lignes, il est possible de décrire la propagation dans un tube de longueur  $L$  quelconque, sous les 2 formes équivalentes de la figure 3.1, avec

$$Z_{1,2} = Z_c \tanh\left(\Gamma \frac{L}{2}\right) \quad Z_T = \frac{Z_c}{\sinh(\Gamma L)} \quad (3.19)$$

$$Z_{a,b} = \frac{Z_c}{\tanh\left(\Gamma \frac{L}{2}\right)} \quad Z_\Pi = Z_c \sinh(\Gamma L) \quad (3.20)$$

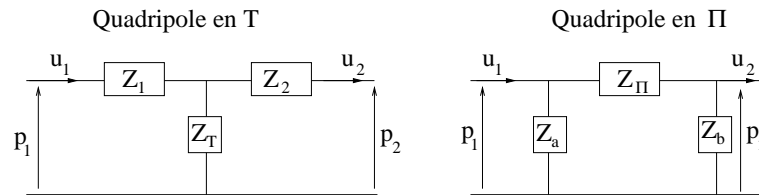


FIGURE 3.2 – Schéma électrique équivalent pour un tube de longueur  $L$

### 3.1.1.2 Constantes localisées

Les résultats précédents peuvent encore être développés lorsque l'hypothèse dite de constantes localisées peut être retenue. Cette hypothèse consiste à considérer que le système acoustique à l'étude est de dimension négligeable en regard de la longueur d'onde, i.e.  $|\Gamma L| \ll 1$ . Dès lors, une portion de tube large de rayon  $R$  ( $\delta_{\nu,\kappa} \ll R$ ) et de longueur  $L$  négligeable devant la longueur d'onde peut-être représentée par le schéma de la figure 3.3, avec <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} M_a &\approx \frac{\rho_0 L}{S} & R_\nu &\approx \frac{\rho_0 \omega L}{S} \frac{\delta_\nu}{R} \\ C_a &\approx \frac{SL\omega}{\rho_0 c_0^2} & R_\kappa &\approx \frac{\rho_0 c_0^2 R}{SL\omega \delta_\kappa (\gamma - 1)} \end{aligned}$$

1. compte-tenu des équations (3.9), (3.10), (3.12), (3.13) avec  $\delta_{\nu,\kappa} \ll R$



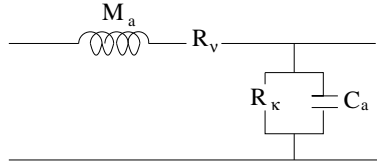


FIGURE 3.3 – Schéma électrique équivalent en constante localisée d'un tuyau large avec pertes viscothermiques.

Dans le cas d'un tube capillaire, pour lequel  $\delta_{\nu,\kappa} \gg R$  le terme de résistance visqueuse devient prépondérant devant les autres, avec <sup>2</sup>

$$R_\nu \approx \frac{8\mu L}{\pi R^4}.$$

### 3.1.1.3 Autres représentations quadripôlaires

Les propos du paragraphe précédent n'apportent rien de plus que ce qui a déjà été traité au chapitre 2.5, et n'ont d'autre mérite que d'utiliser un formalisme permettant la représentation des phénomènes à l'aide de schéma électriques équivalents. Il convient de noter qu'il existe d'autres modes de représentation très usuels des problèmes qui font également appel à la notion de quadripôles, représentés indifféremment par leur matrice de transfert, de diffusion ou encore leur matrice impédance. On se contente ici de donner l'expression de la matrice de transfert reliant les pression et débit en entrée à ceux en sortie d'un tube de longueur  $L$  (résultat très usité) :

$$\begin{pmatrix} \tilde{p}_s \\ \tilde{u}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(k_x L) & -iZ_c \sin(k_x L) \\ \frac{-i}{Z_c} \sin(k_x L) & \cos(k_x L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{p}_e \\ \tilde{u}_e \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

**Rque** : Il convient de prendre cette "formule" avec précautions. En effet, lorsqu'on est amené à utiliser cette approche quadripolaire pour traiter des problèmes de propagation, on est au préalable amené à définir des conventions, à savoir :

- la convention temporelle,
- l'orientation "symétrique" ou "antisymétrique" du quadripôle.

L'expression de la matrice de transfert du quadripôle diffère suivant les conventions adoptées (ici, convention  $+i\omega t$  et orientation anti-symétrique).

### 3.1.2 Ondes guidées en géométries cartésienne et cylindrique

Les problèmes de propagation guidée en géométries cartésienne, cylindrique, et sphérique ont déjà été abordés en fluide parfait dans le cadre du cours de Master 1. Ils sont repris ici succinctement en considérant l'ajout des pertes de pariétales (les pertes volumiques peuvent généralement être négligées en regard des pertes de paroi, comme nous l'avons vu précédemment).

2. compte-tenu que  $f_\nu \approx 1 + \frac{i}{4} \left(\frac{R}{\delta_\nu}\right)^2$  pour  $\delta_\nu \gg R$

### 3.1.2.1 Géométrie cartésienne

Le problème considéré ici est celui de la propagation acoustique dans un guide de section rectangulaire, infini suivant la direction  $x$  (voir Fig. 3.4). On ne s'intéresse pas ici à la source qui donne naissance au champ acoustique, dont on suppose qu'elle est placée en dehors du domaine d'étude ( $x > 0$ ).

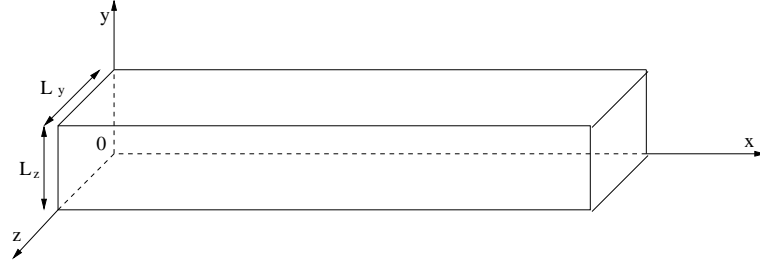


FIGURE 3.4 – Guide d'onde infini en géométrie cartésienne

En négligeant les pertes volumiques, le problème prend la forme suivante :

$$\forall z \in [0, L_z], \forall y \in [0, L_y], \forall x > 0, [\partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \partial_{zz}^2 + k_0^2] \tilde{p} = 0, \quad (3.22)$$

$$y = 0, \partial_y \tilde{p}|_{y=0} = ik_0 \beta_{ay} \tilde{p} \quad (3.23)$$

$$y = L_y, \partial_y \tilde{p}|_{y=L_y} = -ik_0 \beta_{ay} \tilde{p} \quad (3.24)$$

$$z = 0, \partial_z \tilde{p}|_{z=0} = ik_0 \beta_{az} \tilde{p} \quad (3.25)$$

$$z = L_z, \partial_z \tilde{p}|_{z=L_z} = -ik_0 \beta_{az} \tilde{p} \quad (3.26)$$

où  $\beta_{ay}$  et  $\beta_{az}$  désignent les impédances spécifiques de paroi qui prennent en compte les effets viscothermiques. Conformément aux développements menés au paragraphe 2.4, Eq. (2.58), elles s'écrivent :

$$\beta_{ay} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{c_0}} \left[ \left( 1 - \frac{k_y^2}{k_0^2} \right) \sqrt{l_v} + (\gamma - 1) \sqrt{l_h} \right], \quad (3.27)$$

$$\beta_{az} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega}{c_0}} \left[ \left( 1 - \frac{k_z^2}{k_0^2} \right) \sqrt{l_v} + (\gamma - 1) \sqrt{l_h} \right]. \quad (3.28)$$

La recherche de solution à ce problème se fait en considérant une solution à variable séparées :

- en écrivant la forme de solution sous forme de 2 ondes contrapropagatives pour les directions  $y$  et  $z$ ,
- et en ne retenant qu'un terme du type  $e^{-ik_x x}$  pour la direction  $x$  compte-tenu que le guide d'onde est infini (pas d'ondes retour).

Tous calculs faits (et compte-tenu que  $k_0 \beta_{a_{y,z}} \ll 1$ ), la forme générale de solution s'écrit :

$$\tilde{p} = \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} \Psi_{mn}(y, z) e^{-ik_{xmn} x} e^{i\omega t} \quad (3.29)$$

où les fonctions  $\Psi_{mn}$  sont définies par

$$(m, n) \neq (0, 0), \Psi_{mn} = \cos \left( k_{ym} y - i \frac{k_0 \beta_{aym} L_y}{m\pi} \right) \cos \left( k_{zn} z - i \frac{k_0 \beta_{azn} L_z}{n\pi} \right), \quad (3.30)$$

$$(m, n) = (0, 0), \Psi_{00} = 1, \quad (3.31)$$

et où

$$k_{xmn}^2 = k_0^2 - k_{ym}^2 - k_{zn}^2, \quad (3.32)$$

$$k_{ym} = \left( \frac{m\pi}{L_y} \right) + 2i \frac{k_0 \beta_{aym}}{m\pi}, \quad (3.33)$$

$$k_{zn} = \left( \frac{n\pi}{L_z} \right) + 2i \frac{k_0 \beta_{azn}}{n\pi}, \quad (3.34)$$

où les admittances spécifiques  $\beta_{aym}$  et  $\beta_{azn}$  correspondent à celles des équations (3.27) et (3.28) dans lesquelles les paramètres  $k_y^2$  et  $k_z^2$  sont remplacés par leur valeurs approchées  $(m\pi/L_y)^2$  et  $(n\pi/L_z)^2$ .

**Exercice** Reprendre les calculs en détail pour retrouver les résultats énoncés ci-dessus.

D'un point de vue moins formel, il convient de se demander ce que provoque la prise en compte des phénomènes thermovisqueux dans ce problème de propagation acoustique. Ceci peut être fait à la lumière des résultats connus dans le cas de propagation en fluide parfait. Le cas d'une propagation en fluide parfait peut être retrouvé en posant  $\beta_{azn} = \beta_{aym} = 0$  dans les équations ci-dessus. Il en résulte que la solution générale [Eq. (3.29)] apparaît comme la somme des contributions

- de modes acoustiques  $(m, n)$  propagatifs suivant la direction  $x$  ( $k_{xmn}^2 > 0$ ), i.e. ceux pour lesquels  $k_0^2 > k_{ym}^2 + k_{zn}^2$ ,
- de modes acoustiques  $(m, n)$  évanescents ( $k_{xmn}^2 < 0$ ), i.e. ceux pour lesquels  $k_0^2 < k_{ym}^2 + k_{zn}^2$ .

Les modes évanescents présentent une amplitude à décroissance exponentielle et ne participent pas à la propagation<sup>3</sup>. Il convient également de rappeler que le mode plan  $(0, 0)$  est toujours propagatif.

Dans le cas d'une propagation en fluide réel, cette dissociation entre modes propagatifs et évanescents apparaît de façon moins évidente dans la mesure où tous les modes suivent une loi de décroissance exponentielle ( $\Im(k_{xmn}) \neq 0$ ) en raison de la dissipation pariétale. La situation doit donc être examinée de plus près.

Les équations (3.32), (3.33) et (3.34) mènent à la relation

$$k_{xmn}^2 = k_0^2 - \left( \frac{m\pi}{L_y} \right)^2 - \left( \frac{n\pi}{L_z} \right)^2 + (\chi_m + \chi_n), \quad (3.35)$$

où les paramètres  $\chi_{m,n}$  traduisent les effets viscothermiques. L'expression détaillée de ces paramètres n'est pas donnée ici car il convient simplement de constater que ce sont de petits paramètres, proportionnels au petit paramètre  $k_0 \beta_a$ . Dès lors, plusieurs situations peuvent être envisagées.

3. Ces modes peuvent prendre naissance du fait même de la source, ou bien en raison de la présence de singularités géométrique, par exemple

1. Si la fréquence de l'onde est proche de la fréquence de coupure du mode  $(m, n)$ , i.e. si  $k_0^2 \approx \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_z}\right)^2$ , il s'ensuit que  $\Re(k_{x_{mn}}^2) \sim \chi$  et  $\Im(k_{x_{mn}}^2) \sim \chi$ . L'onde associée à ce mode est une onde stationnaire qui oscille entre les plans du résonateur : la vitesse de phase ( $v_\varphi = \omega/\Re(k_{x_{mn}})$ ) tend vers l'infini et l'atténuation ( $\Im(k_{x_{mn}})$ ) reste faible. Il n'y a pas de propagation suivant la direction longitudinale  $x$ .
2. Si la fréquence de l'onde est telle que  $\left|k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{L_z}\right)^2\right| \gg |\chi_m + \chi_n|$  et  $k_0^2 > \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_z}\right)^2$  alors le mode  $(m, n)$  est propagatif (suivant la direction  $x$ ) puisque  $\Re(k_{x_{mn}}) \gg \Im(k_{x_{mn}})$ .
3. Si la fréquence de l'onde est telle que  $\left|k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{L_z}\right)^2\right| \gg |\chi_m + \chi_n|$  et  $k_0^2 < \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_z}\right)^2$  alors le mode  $(m, n)$  est évanescent puisque  $\Re(k_{x_{mn}}) \ll \Im(k_{x_{mn}})$ .

**Remarque :** Les valeurs propres et fonctions propres d'une cavité parallélépipédique (longueur  $L_x$  suivant la variable  $x$ ) peuvent être obtenues en remplaçant dans la solution générale le terme  $\Psi_{mn}(y, z)e^{-ik_{x_{mn}}x}$  par  $\Psi_{mnl}(x, y, z)$ , où les fonctions propres  $\Psi_{mnl}$  sont une simple extension de celles données par (3.31) incluant la dimension axiale, et où  $k_{x_{mn}}^2$  doit être remplacé par  $\left[\left(\frac{l\pi}{L_x}\right)^2 - \chi_l\right]$ .

### 3.1.2.2 Géométrie cylindrique

Le problème abordé au paragraphe (3.1.2.1) peut être traité de façon analogue pour le cas d'une propagation en guide d'onde à section circulaire de rayon  $a$ , avec les mêmes conclusions. Le traitement de ce problème est néanmoins formellement plus difficile à aborder du fait de la géométrie cylindrique imposant la recherche de solution sous forme de fonctions de Bessel. Afin de ne pas alourdir le document par des équations sans valeur ajoutée du point de vue de l'impact des effets thermovisqueux, les résultats ne sont donc pas détaillés ici (pour plus de détails, consulter par exemple les pages 233-240 de la référence [2]).

## 3.1.3 Résonateurs

### 3.1.3.1 Colonnes fluides en résonateur cylindrique.

On considère un guide d'onde cylindrique de longueur  $L$  dont une extrémité (en  $x = L$ ) est parfaitement rigide et dont l'autre extrémité est munie d'un piston oscillant (Fig. 3.5). La pulsation  $\omega$  est en deçà de la première pulsation de coupure du guide d'onde de sorte que l'hypothèse d'onde plane est retenue ici. La dissipation sur les parois en  $x = 0$  et  $x = L$  est négligée en regard des pertes viscothermiques latérales. Ceci est justifié d'une part par le fait que les pertes en bout de tube sont uniquement liées à la conduction [voir Eq. (2.59) avec  $\theta = 0$ ], et d'autre part par le fait que la surface latérale est bien plus grande que la somme des surface de terminaisons.

Ce problème peut être traité par exemple en faisant usage des propos du paragraphe 3.1.1. Si l'on cherche en particulier à caractériser la première résonance du système à l'étude, en termes de fréquence

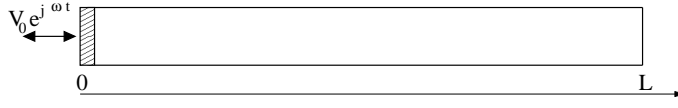
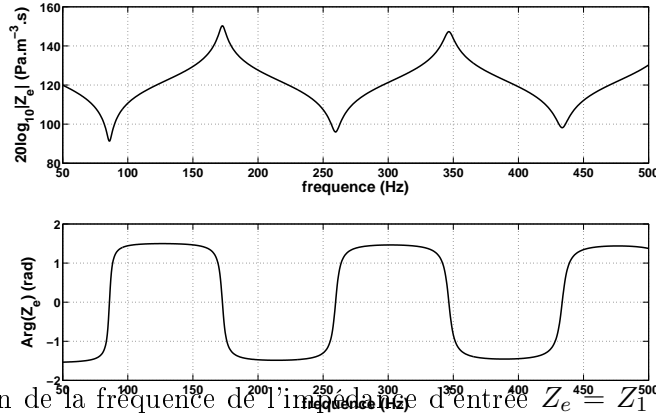


FIGURE 3.5 – Oscillations forcées d’une colonne fluide en tube cylindrique

et de facteur de qualité, il convient d’examiner le premier maximum de l’impédance d’entrée (rapport pression/débit) :

$$Z_e = Z_1 + Z_T = Z_c \tanh\left(\Gamma \frac{L}{2}\right) + \frac{Z_c}{\sinh(\Gamma L)}.$$

L’évolution du module et de la phase de cette impédance d’entrée  $Z_e$  est tracée à titre d’exemple sur la figure 3.6 pour un tube cylindrique de longueur  $L = 1$  m à section circulaire de rayon  $a = 1$  cm. La prise en compte des effets viscothermiques a pour conséquence que l’impédance d’entrée  $Z_e$  reste finie à la résonance, et il est possible d’estimer à partir de cette courbe le facteur de qualité de la résonance (méthode à  $-3dB$ ).

FIGURE 3.6 – Evolution en fonction de la fréquence de l’impédance d’entrée  $Z_e = Z_1 + Z_T$  pour un tube cylindrique de rayon 1 cm, de longueur  $L = 1$  m fermé par une paroi rigide.

### 3.1.3.2 Résonateur cylindrique planaire à mode radial.

Considérons un résonateur à mode radial comme représenté sur la figure 3.7. Si l’on considère que les dimensions relatives du guide et la nature de l’excitation (i.e. un cylindre pulsant de très faible rayon) sont telles que le champ acoustique est indépendant des variables  $z$  et  $\theta$ , le problème s’écrit de la manière suivante :

$$\left[ \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r) + k^2 \right] \tilde{p} = 0, \quad (3.36)$$

$$\partial_r \tilde{p} = 0, \quad r = R. \quad (3.37)$$

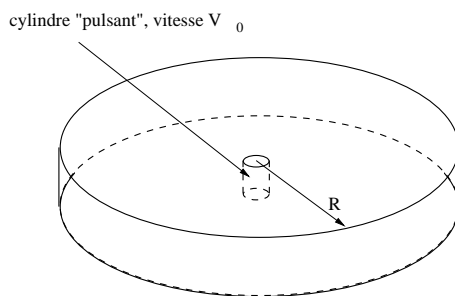


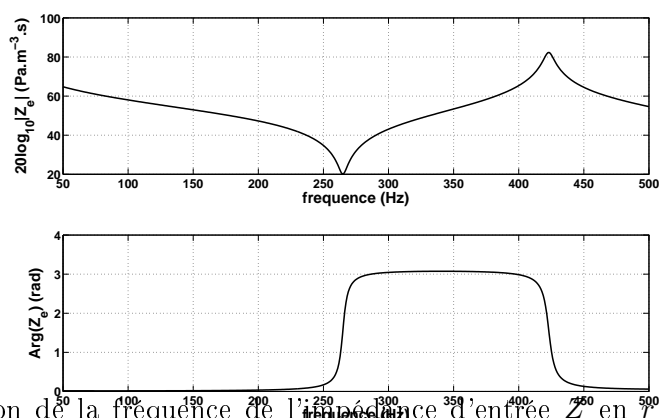
FIGURE 3.7 – Géométrie du problème considéré

où l'on néglige les pertes pariétales en surface périphérique en regard de celles sur les surface latérales, et où le nombre d'onde  $k^2$  est donné par l'équation (2.78) en prenant pour fonctions thermovisqueuses celles associées à une fente d'épaisseur  $h$  [Eq. (2.86)]. La résolution de ce problème amène à écrire la solution sous la forme d'une onde divergente et d'une onde convergente (dans un espace à 2 dimensions) sous la forme :

$$\tilde{p}(r) = AH_0^{(1)}(k(r-R)) + BH_0^{(2)}(k(r-R)) \quad (3.38)$$

où  $H_0^{(1)}$  et  $H_0^{(2)}$  représentent respectivement les fonctions de Hankel de premier et second type d'ordre 0. Dès lors, la condition en  $r = R$  impose que  $A = B$ , et donc que  $\tilde{p}(r) = 2AJ_0(k(r-R))$ . La composante radiale du champ de vitesse particulière s'écrit alors  $\langle \tilde{v}_r \rangle = \frac{-2iA}{k_0\rho_0c_0}(1-f_\nu)kJ_1(k(r-R))$ . Le module de l'impédance acoustique (rapport pression/débit) en  $r = 0$  est tracé sur la Fig. 3.8) :

$$\left| \frac{\tilde{p}}{2\pi Rh \langle \tilde{v}_r \rangle} \right|_{r=R} = \left| \frac{ik_0\rho_0c_0 J_0(-kR)}{k(1-f_\nu) J_1(-kR)} \right| \quad (3.39)$$

FIGURE 3.8 – Evolution en fonction de la fréquence de l'impédance d'entrée  $Z$  en  $r = 0$  pour un résonateur planaire de hauteur  $h = 1$  cm et de rayon  $R = 0.5m$ .

## 3.1.3.3 Résonateur sphérique à mode radial.

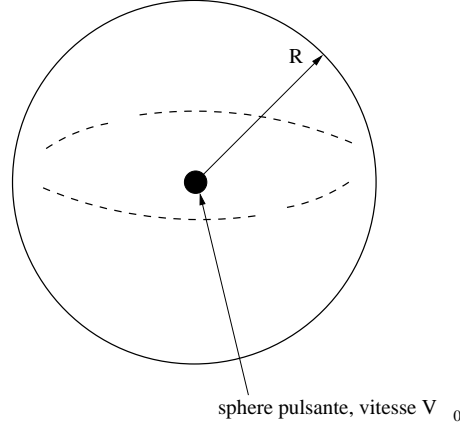


FIGURE 3.9 – Géométrie du problème considéré

Dans le cas d'un résonateur sphérique de rayon  $R$  pour lequel on considère un champ acoustique à symétrie sphérique (indépendant des variables  $\theta$  et  $\varphi$  de latitude et longitude, voir Fig. 3.9), le problème s'écrit :

$$\left[ \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + k^2 \right] \tilde{p} = 0, \quad (3.40)$$

$$\partial_r \tilde{p} = -ik_0 \beta_a \tilde{p}, \quad r = R. \quad (3.41)$$

où l'admittance spécifique de paroi  $\beta_a$  est donnée par l'équation (2.59) avec  $\theta = 0$  (incidence normale). Là encore, on néglige les pertes de volume, et on cherche une solution sous forme d'une onde sphérique convergente et d'une onde sphérique divergente sous la forme :

$$\tilde{p}(r) = A \frac{e^{ik_0(r-R)}}{r} + B \frac{e^{-ik_0(r-R)}}{r}. \quad (3.42)$$

La condition aux frontières en  $r = R$  impose que  $B = A(1 + \beta_a)/(1 - \beta_a)$ , et le module de l'impédance acoustique (rapport pression/vitesse) en  $r = 0$  prend la forme :

$$|Z| = \rho_0 c_0 \frac{e^{-ik_0 R} + R e^{ik_0 R}}{e^{-ik_0 R} - R e^{ik_0 R}} \quad (3.43)$$

où

$$R = \frac{1 + \beta_a}{1 - \beta_a}$$

désigne le coefficient de réflexion en amplitude sur les parois de la sphère. La figure 3.10 présente l'évolution du module et de l'argument de l'impédance  $Z$  en fonction de la fréquence, pour une sphère de rayon  $R = 0.5$  m. On voit clairement apparaître ici une résonance très marquée au voisinage de 350 Hz. Cette résonance à facteur de qualité très élevé fait des résonateurs sphériques de très bons objets d'études à des fins métrologiques : ils sont notamment utilisés pour la mise au point d'une technique de

mesure très précise de la constante de Boltzmann, dans le cadre de l'évolution du Système International des poids et mesures, évolution qui vise à redéfinir 4 des 7 unités fondamentales du système international (à savoir le kilogramme, la mole, l'ampère et le Kelvin) sur la base de trois constantes fondamentales (la constante de Boltzmann, la constante d'Avogadro, et la constante de Planck). Le très bon facteur de qualité des résonances en cavité sphérique permet d'accéder avec une grande précision à la célérité des ondes sonores, dont peut alors être déduite avec une grande précision la constante de Boltzmann

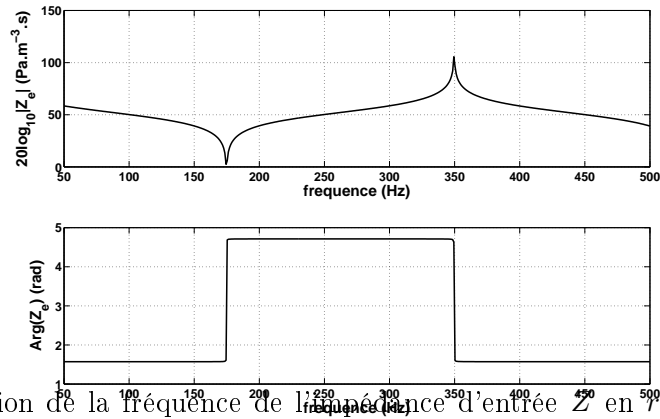


FIGURE 3.10 – Evolution en fonction de la fréquence de l'impédance d'entrée  $Z$  en  $\gamma = 0$  pour un résonateur sphérique de rayon  $R = 0.5m$ .

### 3.1.4 Modèle simplifié de matériaux poreux

Les phénomènes traités au chapitre 2 permettent de proposer un modèle rudimentaire pour la description de la propagation acoustique dans les matériaux poreux. On considère le problème de la réflexion d'une onde plane sur un matériau poreux constitué d'une ossature rigide percée d'une multitude de canaux cylindriques de rayon  $a$ , à l'image de la fig. 3.11. Le matériau est caractérisé par sa porosité  $\Phi$ , rapport de la surface fluide  $S_f = N\pi a^2$  (où  $N$  désigne le nombre de canaux) présente sur une surface  $S$  donnée du matériau.

En notant  $\tilde{p}$  l'amplitude complexe de pression sur la face du matériau poreux et  $\tilde{u}_p$  le débit entrant dans chacun des pores, la continuité du débit impose que le débit entrant sur une surface  $S$  du matériau s'écrit  $\tilde{u} = N\tilde{u}_p$ , soit encore  $\tilde{u} = N\tilde{p}/Z_c$  où  $Z_c$  désigne l'impédance acoustique (rapport pression/débit) d'un pore. Dans le cas d'un pore cylindrique capillaire, on a ( $R \ll \delta_\nu$ ) :

$$Z_c = \frac{2\rho_0 c_0}{\pi a^2} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta_\nu}{a} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (3.44)$$

dont on déduit l'impédance spécifique (cette fois-ci en terme de rapport pression sur vitesse)  $\zeta_{\text{poreux}} = \frac{Z_{\text{poreux}}}{\rho_0 c_0} = Z_c S/N = \frac{2}{\Phi} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\delta_\nu}{a} e^{i\frac{\pi}{4}}$  présentée à l'interface entre le fluide et le matériau poreux. Cette



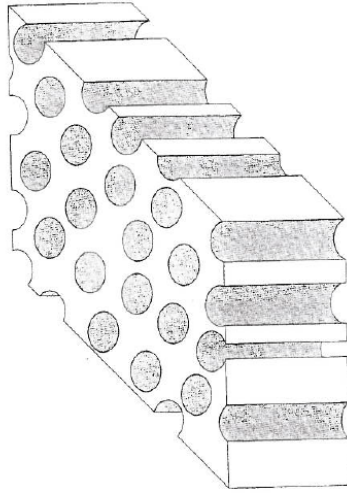


FIGURE 3.11 –

impédance spécifique est reliée au coefficient de réflexion à l'interface par la relation

$$R = \frac{\zeta_{poreux} \cos \theta - 1}{\zeta_{poreux} \cos \theta + 1}$$

où  $\theta$  désigne l'angle d'incidence de l'onde, ce qui permet finalement d'en déduire le coefficient d'absorption du matériau poreux  $\alpha = 1 - |R|^2 = \frac{4\Re(\zeta_{poreux} \cos \theta)}{|1 + \zeta_{poreux} \cos \theta|^2}$ . En particulier, dans le cas d'une incidence normale ( $\theta = 0$ ), et compte-tenu que  $\delta_\nu \gg R$ , il vient après calculs

$$\alpha(0) = \Phi \sqrt{\frac{\rho_0 \omega \gamma a^2}{\mu}}. \quad (3.45)$$

Cette expression montre que l'absorption croît en  $\sqrt{\omega}$ . Il convient néanmoins de noter que ce résultat fait usage de nombre d'approximations qui en limitent grandement la portée :

- la détermination de  $\zeta_{poreux}$ , basée sur l'expression (3.44) de l'impédance caractéristique dans le cas limite de capillaire, revient à considérer que le matériau poreux est suffisamment épais pour considérer que les réflexions à l'autre extrémité du matériau soient négligeables, ce qui revient à considérer que l'épaisseur  $h$  du matériau poreux est bien supérieure à l'inverse,  $1/k''$ , du coefficient d'atténuation d'un tube capillaire [Eq. 2.84].
- la modélisation même du matériau poreux comme un empilement de tubes capillaires cylindriques est assez limitée, car elle ne prend pas en compte les effets dus à la tortuosité du matériau ainsi que les pertes énergétiques liées à la vibration de l'ossature.

### 3.1.5 Ondes cylindriques et sphériques en espace infini

Le problème de la propagation d'ondes sonores cylindriques ou sphérique en milieu fluide infini avec prise en compte des effets viscothermiques peut être traité de façon analogue à celui de la propagation d'ondes planes décrit au paragraphe 2.2.

Pour le problème de la propagation d'une onde cylindrique divergente générée par un cylindre de rayon  $R$ , de longueur infinie, et pulsant à la vitesse  $V_0$ , la solution prend la forme :

$$\tilde{p}(r, t) = \frac{-ik_0\rho_0c_0V_0}{\partial_r H_0^{(2)}(kr)|_{r=R}} H_0^{(2)}(kr) e^{i\omega t}. \quad (3.46)$$

où le nombre d'onde  $k$  prend la forme

$$k = k_0 \sqrt{1 - ik_0 l_{vh} - \sum_q D_q \frac{i\omega\theta_q}{1 + i\omega\theta_q}}$$

si les phénomènes d'absorption classique et de relaxation moléculaire doivent être considérés. En champ lointain ( $kr \gg 1$ ), on a <sup>4</sup>

$$\tilde{p}(r, t) \approx \frac{1}{4} k_0 \rho_0 c_0 Q_0 \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{-i(kr - \pi/4)} e^{i\omega t}. \quad (3.47)$$

où  $Q_0 = 2\pi R V_0$  désigne le débit linéique du cylindre pulsant. On note dans ce résultat qu'à l'atténuation due aux processus thermovisqueux s'ajoute l'atténuation géométrique en  $r^{-1/2}$ .

Pour le problème de la propagation d'une onde sphérique divergente générée par une sphère de rayon  $R$  pulsant à la vitesse  $V_0$ , la solution prend la forme :

$$\tilde{p}(r, t) = \frac{-ik_0\rho_0c_0V_0}{\partial_r h_0^{(2)}(kr)|_{r=R}} h_0^{(2)}(kr) e^{i\omega t}. \quad (3.48)$$

où  $h_0^{(2)}$  désigne la fonction de Hankel sphérique de seconde espèce d'ordre 0. En champ lointain ( $kr \gg 1$ ), on a <sup>5</sup>

$$\tilde{p}(r, t) \approx ik_0\rho_0c_0Q_0 \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} e^{i\omega t}. \quad (3.49)$$

où  $Q_0 = 4\pi R^2 V_0$  désigne le débit volumique de la sphère pulsante. On note dans ce résultat qu'à l'atténuation due aux processus thermovisqueux s'ajoute l'atténuation géométrique en  $r^{-1}$ .

## 3.2 Conséquences des effets visqueux

### 3.2.1 Singularités géométriques

#### 3.2.1.1 Influence d'une singularité en fluide parfait (rappels)

Considérons le problème de la propagation suivant les  $x$  croissants d'une onde plane dans un guide infini présentant une singularité géométrique en  $x = 0$ , voir Fig. 3.12. Ce problème est relativement aisé à traiter en fluide parfait, puisqu'il suffit d'adopter une hypothèse de raccordement selon laquelle il y a conservation du débit volumique et de la pression acoustique en  $x = 0$  :

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x = 0^-) &= \tilde{p}(x = 0^+), \\ \pi R_1^2 \tilde{v}_x(x = 0^-) &= \pi R_2^2 \tilde{v}_x(x = 0^+). \end{aligned}$$

4.  $z \gg 1$ ,  $H_0^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z - \pi/4)}$

5.  $z \gg 1$ ,  $h_0^{(2)}(z) \sim -ie^{-i(z - \pi/2)}/z$

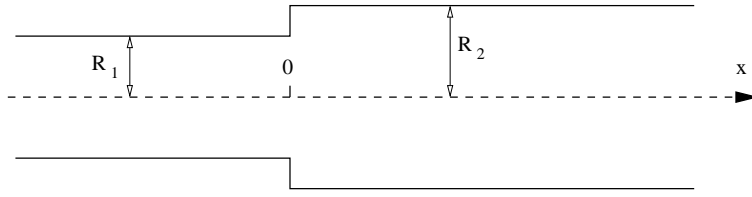


FIGURE 3.12 – Influence d’une singularité géométrique sur la propagation d’une onde plane.

Il s’en suit que la composante axiale de la vitesse particulière acoustique subit une discontinuité en  $x = 0$  ce qui ne correspond pas à la situation réelle. En réalité, il y a au niveau de cette discontinuité génération de modes acoustiques évanescents qui assurent localement la continuité de la vitesse acoustique, mais qui s’éteignent rapidement loin de la discontinuité. Il conviendrait donc en toute rigueur de traiter ce problème à l’aide d’une théorie modale (voir par exemple [3]). Reste que les deux conditions ci-dessus peuvent être utilisées en première approximation pour calculer le champ acoustique en amont et en aval de la singularité. En particulier, il est aisé d’établir que l’onde incidente se trouve réfléchi d’un facteur

$$\tilde{R} = \frac{S_1/S_2 - 1}{S_1/S_2 + 1}$$

avec  $S_i = \pi R_i^2$ , tandis que le coefficient de transmission s’écrit :

$$\tilde{T} = \frac{2S_1/S_2}{S_1/S_2 + 1}$$

Ceci montre notamment que dans les résonateurs acoustiques ouverts à une extrémité ( $S_2 \gg S_1$ ), seule une faible proportion de l’énergie acoustique est rayonnée vers le milieu extérieur.

### 3.2.1.2 Influence d’une singularité en fluide visqueux

L’analyse (présentée au paragraphe précédent) de l’influence d’une singularité géométrique en fluide parfait n’implique aucun phénomène de dissipation de l’énergie. En présence d’un fluide visqueux, ce phénomène de dissipation existe du fait de la génération de tourbillons au niveau de la singularité, comme l’illustre la Fig. 3.13

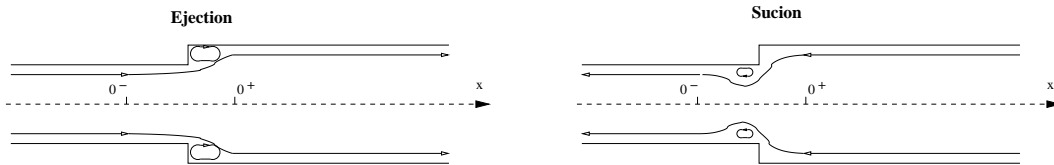


FIGURE 3.13 – Influence d’une singularité géométrique sur la propagation d’une onde plane, génération de tourbillons.

Il est usuel en mécanique des fluides de représenter en première approche les effets liés aux discontinuités géométriques dans les écoulements par un coefficient de pertes de charge, noté  $K$ , qui

traduit la perte de pression qui résulte de la génération de tourbillons. Ces coefficients de perte de charge sont déterminés empiriquement. Il convient de noter, comme l'illustre la Fig. 3.13, que la perte de charge  $K_{ej.}$  associée à l'élargissement de la conduite dans un écoulement stationnaire (i.e. non oscillant) est différente de la perte de charge  $K_{suc.}$  associée au rétrécissement de la section d'une conduite. A titre d'exemple, pour un rapport de rayons  $R_1/R_2 = 0.9$  et pour de faibles nombres de Reynolds, on a  $K_{ej.} \approx 0.026$  et  $K_{suc.} \approx 0.008$ . Les données en écoulement stationnaire incompressible peuvent être ici utilisées en écoulement oscillant pour estimer les pertes liées à une singularité géométrique. Ainsi, dans le cas d'un flux sortant de vitesse  $V$ , la différence de charge s'écrit :

$$\delta p_{ej.} = p(0^+) - p(0^-) = -\frac{1}{2}K_{ej.}\rho_0 V^2,$$

et dans le cas d'un flux entrant :

$$\delta p_{suc.} = p(0^-) - p(0^+) = -\frac{1}{2}K_{suc.}\rho_0 V^2.$$

Dès lors, considérant un écoulement oscillant  $v_x(0, t) = V \sin(\omega t)$ , la diminution de puissance acoustique  $\delta W_{sing}$  associée aux pertes de charge se calcule en moyennant sur un cycle acoustique le produit  $\delta p \times u$  où  $u = U \sin(\omega t)$  désigne le débit volumique :

$$\begin{aligned} \delta W_{sing} &= \frac{\omega}{\pi} \int_0^\pi \delta p_{ej.}(t) U \sin(\omega t) .d(\omega t) + \frac{\omega}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \delta p_{suc.}(t) U \sin(\omega t) .d(\omega t) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{4}{3\pi} \rho_0 (K_{ej.} + K_{suc.}) U^3 \end{aligned}$$

Il apparaît que cette puissance dissipée est un terme cubique ( $\propto U^3$ ), qui peut donc être généralement négligé en regard des pertes de charge régulières en paroi ( $\propto U^2$ ), sauf à de forts niveaux acoustiques (niveaux pour lesquels la description des effets de bords par les coefficients  $K_{ej.,suc.}$  doit toutefois être revue en raison du nombre de Reynolds élevé).

**Rque :** Il existe une expérience rigolote, dénommée la girouette acoustique, qui illustre de façon spectaculaire l'influence des effets de bords discutés ci-avant. Voir vidéo associée en cours.

## 3.2.2 Le vent acoustique

### 3.2.2.1 Introduction, hypothèses formulées.

Le "vent acoustique" est un mécanisme non linéaire, qui désigne désigne un écoulement moyen généré par le mouvement acoustique du fait des contraintes visqueuses se développant dans les couches limites. Il existe différents types de processus pouvant donner lieu à du vent acoustique, et par suite différents types de vents acoustiques, mais l'objet de ce cours n'est pas d'aborder cela. En revanche, il est tout de même intéressant de traiter l'exemple du vent acoustique dit "de Rayleigh", car :

- ce phénomène est une conséquence directe des effets visqueux,
- et le raisonnement à mener pour calculer ce vent acoustique met en jeu des techniques de résolution analytiques assez usuelles en mécanique des fluides et en acoustique non linéaire (méthode des développements asymptotiques raccordés, méthode des approximations successives).

On considère la propagation 2-D suivant  $x$  d'une onde plane dans un guide d'onde de largeur  $2y_0$  (Fig. 3.14). Le vent acoustique est ici modélisé en dehors des couches limites visqueuses acoustiques en utilisant la théorie des couches limites et en suivant une démarche par approximations successives. Les effets de conduction thermique sont négligés, y compris à proximité des parois, par souci de concision du propos.



FIGURE 3.14 –

Les variables d'intérêt, à savoir ici la pression  $p(x, y, t)$ , la vitesse particulière  $\mathbf{v}(x, y, t) = u(x, y, t)\mathbf{e}_x + v(x, y, t)\mathbf{e}_y$  et la masse volumique  $\rho(x, y, t)$  sont liées entre elles par l'équation de conservation de la masse, l'équation de Navier-Stokes et l'équation d'état du fluide :

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho u) + \partial_y (\rho v) = 0, \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho u) + \partial_x (\rho u^2) + \partial_y (\rho uv) &= -\partial_x p + \partial_x (2\mu \partial_x u) + \partial_y [\mu (\partial_y u + \partial_x v)] \\ &\quad + \partial_x \left[ \left( \xi - \frac{2}{3}\mu \right) (\partial_x u + \partial_y v) \right], \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho uv) + \partial_y (\rho v^2) &= -\partial_y p + \partial_y (2\mu \partial_y v) + \partial_x [\mu (\partial_y u + \partial_x v)] \\ &\quad + \partial_y \left[ \left( \xi - \frac{2}{3}\mu \right) (\partial_x u + \partial_y v) \right], \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\rho = \rho(p, s), \quad (3.53)$$

où  $\mu$  et  $\xi$  représentent respectivement les coefficients de viscosité de cisaillement et de volume. Comme mentionné précédemment, nous considérons ici que les processus sont isentropiques (de sorte que  $\rho = \rho(p)$ ) et nous considérons également que la viscosité reste constante (hypothèse fautive, car la viscosité dépend de la température, qui elle-même varie en présence d'une onde acoustique).

La démarche classique des approximations successives est utilisée ici, ce qui nécessite de se placer dans le cadre de l'acoustique faiblement non linéaire : faisant l'hypothèse que l'onde acoustique est de faible amplitude, les variables acoustiques sont décomposées comme suit :

$$\rho(x, y, t) - \rho_0 = \epsilon \rho_1(x, y, t) + \epsilon^2 \rho_2(x, y, t) + \dots, \quad (3.54)$$

$$p(x, y, t) - p_0 = \epsilon p_1(x, y, t) + \epsilon^2 p_2(x, y, t) + \dots, \quad (3.55)$$

$$\vec{v}(x, y, t) = \epsilon \vec{v}_1(x, y, t) + \epsilon^2 \vec{v}_2(x, y, t) + \dots, \quad (3.56)$$

avec  $\epsilon \ll 1$ , et où les quantités d'ordre 1 sont les composantes acoustiques linéaires oscillant à la pulsation  $\omega$ . Les composantes d'ordre 2 traduisent des non linéarités (intrinsèques aux équations du mouvement) dont l'amplitude reste faible devant celle des composantes linéaires.

Enfin, le domaine d'étude est séparé en deux "zones", conformément au schéma de la Fig. 3.15, à savoir une zone loin de la paroi où la propagation d'une onde plane *sans pertes* est considérée, puis une

zone proche de la paroi (i.e. jusqu'à une distance de quelques épaisseurs de couche limite visqueuse) où les équations du mouvement sont résolues en faisant l'approximation des couches limites (valable pour  $\delta_\nu \ll y_0 \ll \lambda$ ). Les variables sont annotées par l'exposant  $^{(o)}$  (« outer ») loin de la paroi et par l'exposant  $^{(i)}$  (« inner ») à proximité de la paroi.

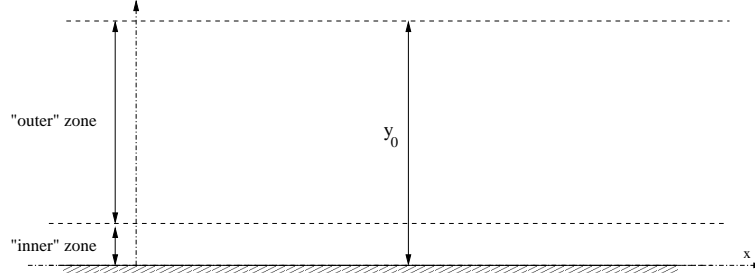


FIGURE 3.15 –

### 3.2.2.2 Solutions à l'ordre 1.

#### • Loin de la paroi

Le système de coordonnées utilisé ici et au paragraphe suivant est celui de la Fig. 3.15. Comme mentionné précédemment, on formule ici l'hypothèse que le guide d'onde est le siège d'une onde plane se propageant sans pertes (loin de la paroi) de sorte qu'au premier ordre du paramètre d'amplitude  $\epsilon$ , les équations du mouvement s'écrivent :

$$i\omega\tilde{\rho}_1^{(o)} + \rho_0\partial_x\tilde{u}_1^{(o)} = 0, \quad (3.57)$$

$$i\omega\rho_0\tilde{u}_1^{(o)} + \partial_x\tilde{p}_1^{(o)} = 0, \quad (3.58)$$

$$\tilde{p}_1^{(o)} = c_0^2\tilde{\rho}_1^{(o)}. \quad (3.59)$$

On suppose par la suite que l'onde plane, solution du système d'équations ci-dessus, est une onde stationnaire. Les champs de pression et de vitesse acoustiques s'écrivent donc de la manière suivante :

$$\tilde{p}_1^{(o)} = P_1 \cos(k_0x), \quad (3.60)$$

$$\tilde{u}_1^{(o)} = iU_1 \sin(k_0x), \quad (3.61)$$

avec  $k_0 = \omega/c_0$ , et  $U_1 = P_1/(\rho_0c_0)$ .

#### • A proximité de la paroi.

L'approximation des couches limites peut être appliquée ici aux équations (3.50-3.53) sous réserve que la dimension transverse  $\delta_\nu$  soit faible en regard de la longueur d'onde. Dans ces conditions, les

approximations  $\partial_x \ll \partial_y$  et  $v \ll u$  peuvent être retenues. En ne retenant que les termes du premier ordre suivant le paramètre  $\epsilon$ , les équations du mouvement deviennent :

$$i\omega\tilde{\rho}_1^{(i)} + \rho_0\partial_x\tilde{u}_1^{(i)} + \rho_0\partial_y\tilde{v}_1^{(i)} = 0, \quad (3.62)$$

$$i\omega\rho_0\tilde{u}_1^{(i)} = -\partial_x\tilde{p}_1^{(i)} + \mu\partial_{yy}^2\tilde{u}_1^{(i)}, \quad (3.63)$$

$$0 = -\partial_y\tilde{p}_1^{(i)}, \quad (3.64)$$

$$\tilde{p}_1^{(i)} = c_0^2\tilde{\rho}_1^{(i)}. \quad (3.65)$$

Compte-tenu que  $\forall y, \partial_y\tilde{p}_1^{(i)} = O(\epsilon^2)$ , et en particulier pour  $y \gg \delta_\nu$ , il vient :

$$\tilde{p}_1^{(i)} = \tilde{p}_1^{(i)}(y \rightarrow \infty) = \tilde{p}_1^{(o)}. \quad (3.66)$$

Le report de ce résultat dans l'équation (3.63) et la résolution de cette équation permet alors d'exprimer la composante longitudinale  $\tilde{u}_1^{(i)}$  de la vitesse particulière en fonction de sa valeur asymptotique  $\tilde{u}_1^{(o)}$  comme suit :

$$\tilde{u}_1^{(i)} = \tilde{u}_1^{(o)}(1 - F_\nu), \quad (3.67)$$

où la fonction visqueuse  $F_\nu$  est défini comme suit :

$$F_\nu = e^{-\sqrt{\frac{i\omega}{\nu}}y} = e^{-(1+i)\frac{y}{\delta_\nu}} \quad (3.68)$$

Enfin, le report des équations (3.67) et (3.65) dans (3.62) permet d'exprimer la composante transverse du champ de vitesse particulière en fonction de  $\tilde{u}_1^{(o)}$  :

$$\tilde{v}_1^{(i)} = \dots = -\frac{\delta_\nu}{1+i} \partial_x \tilde{u}_1^{(o)} (1 - F_\nu). \quad (3.69)$$

### 3.2.2.3 Solution à l'ordre 2 moyennée dans le temps (vent acoustique)

#### • Solution asymptotique dans la zone proche de la paroi.

A proximité des parois, compte tenu de l'approximation des couches limites, les équations du mouvement s'écrivent, dans le domaine temporel et au second ordre du paramètre d'amplitude  $\epsilon$  :

$$\partial_t \rho_2^{(i)} + \partial_x (\rho_0 u_2^{(i)} + \rho_1^{(i)} u_1^{(i)}) + \partial_y (\rho_0 v_2^{(i)} + \rho_1^{(i)} v_1^{(i)}) = 0, \quad (3.70)$$

$$\rho_0 \partial_t u_2^{(i)} + \partial_t (\rho_1^{(i)} u_1^{(i)}) + \rho_0 \partial_x (u_1^{(i)})^2 + \rho_0 \partial_y (u_1^{(i)} v_1^{(i)}) = -\partial_x p_2^{(i)} + \mu \partial_{yy}^2 u_2^{(i)}, \quad (3.71)$$

$$0 = -\partial_y p_2^{(i)} \quad (3.72)$$

En particulier, la moyenne temporelle ( $\langle \dots \rangle = (\omega/(2\pi)) \int_0^{2\pi/\omega} \dots dt$ ) de l'équation (3.71) permet d'obtenir l'équation différentielle

$$\mu \partial_{yy}^2 \langle u_2^{(i)} \rangle = \partial_x \langle p_2^{(i)} \rangle + \rho_0 \partial_x \langle (u_1^{(i)})^2 \rangle + \partial_y \langle u_1^{(i)} v_1^{(i)} \rangle \quad (3.73)$$

reliant la composante longitudinale du vent acoustique  $\langle u_2^{(i)} \rangle$  aux composantes du premier ordre de la vitesse particulière qui lui donnent naissance.

Une première intégration de cette équation suivant la variable  $y$  mène au résultat suivant :

$$\partial_y \langle u_2^{(i)} \rangle = \int_0^y \left( \frac{1}{\mu} \partial_x \langle p_2^{(i)} \rangle + \frac{1}{2\nu} \partial_x |\tilde{u}_1^{(i)}|^2 \right) dy' + \frac{1}{2\nu} \Re \left( \tilde{u}_1^{(i)} (\tilde{v}_1^{(i)})^* \right) + c^{te} \quad (3.74)$$

où  $\nu = \mu/\rho_0$  et où la relation  $\langle f(t)g(t) \rangle = \frac{1}{2} \Re \left( \tilde{f} \tilde{g}^* \right)$  est utilisée. La constante d'intégration  $c^{te}$  peut être déterminée à l'aide de la condition suivante :

$$\partial_y \langle u_2^{(i)} \rangle |_{y \gg \delta_\nu} = 0$$

en remarquant de plus que, puisque  $p_2^{(i)}$  est indépendant de la variable  $y$  (Eq. (3.72)), et puisque l'intégrale du premier terme du membre de droite de l'équation (3.74) doit rester finie lorsque  $y \rightarrow \infty$ , la relation

$$\frac{1}{\mu} \partial_x p_2^{(i)} = -\frac{1}{2\nu} \partial_x |\tilde{u}_1^{(o)}|^2$$

est nécessairement vérifiée. Finalement l'expression de la constante d'intégration  $c^{te}$  peut être obtenue en fonction des composantes d'ordre 1 du champ de vitesse particulière :

$$c^{te} = -\frac{1}{2\nu} \partial_x \int_0^\infty \left( |\tilde{u}_1^{(i)}|^2 - |\tilde{u}_1^{(o)}|^2 \right) dy' - \frac{1}{2\nu} \lim_{y \rightarrow \infty} \Re \left( \tilde{u}_1^{(i)} (\tilde{v}_1^{(i)})^* \right). \quad (3.75)$$

Une nouvelle intégration de l'équation (3.74) permet ensuite d'exprimer la composante longitudinale du vent acoustique proche de la paroi :

$$\langle u_2^{(i)} \rangle = \frac{1}{2\nu} \partial_x \int_0^y \left( \int_0^{y'} \left( |\tilde{u}_1^{(i)}|^2 - |\tilde{u}_1^{(o)}|^2 \right) dy'' \right) dy' + \frac{1}{2\nu} \int_0^y \Re \left( \tilde{u}_1^{(i)} (\tilde{v}_1^{(i)})^* \right) dy' + c^{te} y + c^{te'}, \quad (3.76)$$

où la condition de non glissement impose que la constante d'intégration  $c^{te'}$  soit nulle.

Après quelques (longs) calculs, le résultat suivant est obtenu pour la valeur asymptotique ( $y \gg \delta_\nu$ ) de la composante longitudinale du vent acoustique :

$$u_{2_\infty}^{(i)} = -\frac{3}{8\omega} k_0^2 U_1^2 \sin(2k_0 x) \quad (3.77)$$

### • Vent acoustique en dehors des couches limites

A partir du résultat de l'équation (3.77), il est possible de calculer la distribution du vent acoustique loin des parois. Pour ce faire, l'équation de Navier Stokes est réécrite au second ordre du paramètre  $\epsilon$  comme suit :

$$\underbrace{\rho_0 \left( \langle u_1^{(o)} \partial_x u_1^{(o)} \rangle + \langle v_1^{(o)} \partial_y u_1^{(o)} \rangle \right)}_{=0} = -\partial_x \langle p_2^{(o)} \rangle + \mu \nabla^2 \langle u_2^{(o)} \rangle, \quad (3.78)$$

$$\underbrace{\rho_0 \left( \langle u_1^{(o)} \partial_x v_1^{(o)} \rangle + \langle v_1^{(o)} \partial_y v_1^{(o)} \rangle \right)}_{=0} = -\partial_y \langle p_2^{(o)} \rangle + \mu \nabla^2 \langle v_2^{(o)} \rangle. \quad (3.79)$$



La combinaison de ces deux équations mène au résultat suivant :

$$\nabla^2 \left( \partial_y \langle u_2^{(o)} \rangle - \partial_x \langle v_2^{(o)} \rangle \right) = 0 \quad (3.80)$$

De plus, l'écoulement redressé  $\langle \mathbf{v}_2^{(o)} \rangle$  est supposé incompressible de sorte que  $\partial_x \langle u_2^{(o)} \rangle + \partial_y \langle v_2^{(o)} \rangle = 0$ . Par suite, introduisant une fonction courant  $\Psi$  telle que  $\langle u_2^{(o)} \rangle = \partial_y \Psi$  et  $\langle v_2^{(o)} \rangle = -\partial_x \Psi$ , il vient :

$$\nabla^2 \nabla^2 \Psi = 0. \quad (3.81)$$

Une solution à variables séparées  $\Psi(x, y) = Y(y) \sin(2k_0 x)$  de l'équation (3.81) est alors recherchée, qui vérifie les conditions aux frontières  $\partial_y \Psi = u_{2\infty}^{(i)}$  et  $\partial_x \Psi = 0$  en  $y = \pm y_0$  (le système de coordonnées utilisé ici est celui de la Fig. 3.14). Cette solution, après calculs, s'écrit :

$$\Psi = -\frac{3U_1^2}{16\omega\alpha} (\beta \sinh(2k_0 y) - 2k_0 y \gamma \cosh(2k_0 y)) \sin(2k_0 x), \quad (3.82)$$

avec

$$\alpha = 2k_0 y_0 - \sinh(2k_0 y_0) \cosh(2k_0 y_0), \quad (3.83)$$

$$\beta = 2k_0 y_0 - \cosh(2k_0 y_0), \quad (3.84)$$

$$\gamma = \sinh(2k_0 y_0). \quad (3.85)$$

Enfin, compte-tenu que  $2k_0 y_0 \ll 1$  l'expression de la distribution spatiale du vent acoustique en dehors des couches limites est finalement obtenue :

$$\langle u_2^{(o)} \rangle = -\frac{9}{16} \frac{U_1^2}{c_0} \left( \frac{1}{3} - \left( \frac{y}{y_0} \right)^2 \right) \sin(2k_0 x), \quad (3.86)$$

$$\langle v_2^{(o)} \rangle = -\frac{3}{8} \frac{U_1^2}{c_0} (k_0 y) \left( 1 - \left( \frac{y}{y_0} \right)^2 \right) \cos(2k_0 x). \quad (3.87)$$

Cette solution correspond au résultat établi en 1883 par Lord Rayleigh. La figure (3.16) présente un ensemble de lignes de courant associées à ce vent acoustique (dit « de Rayleigh »). Cet écoulement se présente sous forme d'une succession de grand tourbillons (de « longueur »  $\lambda/4$ ), avec un axe de symétrie suivant l'axe du guide d'onde. Il est particulièrement intéressant de noter que l'amplitude de cet écoulement est indépendante de la viscosité, alors même que ce sont des phénomènes visqueux qui sont responsables de cet écoulement !

### 3.2.3 Le gyromètre acoustique

Il serait inélégant, dans le cadre d'un cours sur l'acoustique en fluides thermovisqueux délivré à l'université du Maine, de ne pas mentionner un dispositif de mesure méconnu et pourtant très intéressant en ce sens qu'il tire avantageusement parti des phénomènes visqueux se développant en paroi : le gyromètre acoustique<sup>6</sup>. Un schéma de principe de ce type de capteur est présenté sur la

6. Un gyromètre est un capteur de vitesse de rotation utilisé principalement pour la navigation aérienne et maritime.

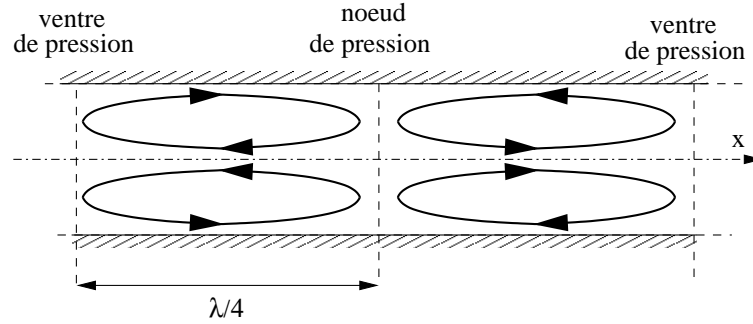


FIGURE 3.16 – Allure qualitative des lignes de courant associées au vent acoustique (loin des parois) en présence d'un onde stationnaire

Fig. 3.17 . Il est constitué d'une cavité acoustique résonante munie d'un haut-parleur et de deux microphones, la cavité étant mise en rotation à la vitesse angulaire  $\Omega$  que l'on cherche précisément à déterminer par l'analyse du champ acoustique qui règne dans cette cavité.

Afin de comprendre les principes sur lequel repose le capteur (sans toutefois mener le raisonnement jusqu'au bout<sup>7</sup>), il convient de revenir aux équations fondamentales du mouvement, en supposant ici que le fluide ne conduit pas la chaleur. Pour ce faire, plaçons nous dans un référentiel en rotation à la vitesse angulaire  $\Omega$ . Le mouvement des particules fluide à la vitesse  $\mathbf{v}$  dans ce référentiel en mouvement est responsable de forces d'inertie d'entraînement, et en particulier ici, de la force volumique de Coriolis  $\mathbf{f}_c = \rho_0 \gamma_c$ , où l'accélération de Coriolis s'écrit  $\gamma_c = 2\Omega \times \mathbf{v}$ . Notons également que la rotation de la cavité entraîne l'existence d'un gradient radial de masse volumique sous l'effet de la force centrifuge ; cet effet est néanmoins négligé ici (son influence sur les phénomènes acoustique étant effectivement négligeable). Cette force inertielle de Coriolis doit être ajoutée au second membre de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, qui s'écrit :

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{v} = -\text{grad} p + \mathbf{f}_c + \left( \eta + \frac{4}{3} \mu \right) \text{grad} \text{div} \mathbf{v} - \mu \text{rot} \text{rot} \mathbf{v}. \quad (3.88)$$

Ensuite, en reprenant le raisonnement du paragraphe 2.1, compte-tenu que  $p = \rho_0 C_p \tau$  (conséquence de  $l_h = 0$ ), on obtient les systèmes d'équations de conservation suivant :

$$\partial_t p + \rho_0 c_0 \text{div} \mathbf{v}_1 = 0, \quad (3.89)$$

$$\left( \frac{1}{c_0} \partial_t - l_v \Delta \right) \mathbf{v}_1 = -\frac{1}{\rho_0 c_0} \text{grad} p + \frac{1}{\rho_0 c_0} \mathbf{f}_{c1}, \quad (3.90)$$

$$\left( \frac{1}{c_0} \partial_t - l_v \Delta \right) \mathbf{v}_v = -\frac{1}{c_0} \mathbf{f}_{cv}, \quad (3.91)$$

où  $\mathbf{f}_{c1}$  et  $\mathbf{f}_{cv}$  désignent respectivement les composantes potentielle et rotationnelle de la force volumique de Coriolis :  $\mathbf{f}_c = \mathbf{f}_{c1} + \mathbf{f}_{cv}$  avec  $\text{rot} \mathbf{f}_{c1} = \mathbf{0}$  et  $\text{div} \mathbf{f}_{cv} = 0$ . Par suite, en appliquant l'opérateur

7. Le lecteur désireux de comprendre finement le fonctionnement de ce capteur pourra consulter la référence suivante : D. Ecotière, N. Tahani, M. Bruneau, *Acust. Acta Acust.*, vol. 90, pp. 1151-1158, 2004

$\left(\frac{1}{c_0}\partial_t - l_v\Delta\right)$  à l'équation (3.89) puis en lui retranchant  $\rho_0 c_0 \text{div}(3.90)$ , on obtient l'équation de propagation suivante :

$$\left[1 + \frac{l_v}{c_0} \frac{\partial}{\partial t}\right] \Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\text{div}\mathbf{f}_c. \quad (3.92)$$

Cette équation est identique à l'équation d'onde 2.18 pour un fluide visqueux, à ceci près qu'il existe au second membre un terme source associée à la divergence de la force de Coriolis. C'est précisément ce terme source qui est exploité dans le fonctionnement du gyromètre acoustique.

Compte-tenu que  $\mathbf{f}_c = 2\rho_0\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}$ , et que par définition  $\text{rot}\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ , il vient

$$\text{div}\mathbf{f}_c = 2\rho_0 [\mathbf{v} \cdot \text{rot}\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} \cdot \text{rot}\mathbf{v}] = -2\rho_0 \boldsymbol{\Omega} \cdot \text{rot}\mathbf{v} = -2\rho_0 \boldsymbol{\Omega} \cdot \text{rot}\mathbf{v}_v. \quad (3.93)$$

Cette dernière relation stipule donc que le terme source liée à la rotation de la cavité met en jeu la composante tourbillonnaire  $\mathbf{v}_v$  du champ de vitesse particulière  $\mathbf{v}$ . En d'autres termes, ce sont des effets visqueux de parois (i.e. ceux responsable de  $\mathbf{v}_v$ ) qui sont à l'origine d'un terme source additionnel lié à la rotation de la paroi.

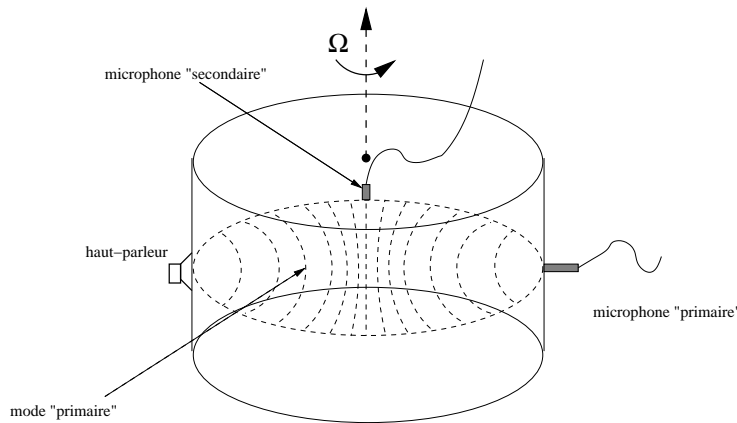


FIGURE 3.17 – Schéma de principe d'un gyromètre acoustique

A partir des considérations ci-dessus il est alors possible d'expliquer intuitivement le fonctionnement du capteur présenté sur la Fig. 3.17. Considérons une cavité cylindrique dans lequel un champ acoustique résonant est entretenu par un haut-parleur (voir Fig. 3.17), ce champ résonant ayant une distribution spatiale telle qu'il existe une ligne nodale de pression acoustique passant par le centre de la cavité perpendiculairement à l'axe du haut-parleur<sup>8</sup>. Dès lors, en l'absence de rotation de la cavité, le microphone "secondaire", placé sur cette ligne nodale capte une pression acoustique nulle. En revanche, lorsque la cavité est mise en rotation à la vitesse angulaire  $\Omega$ , la force de Coriolis entre en jeu. Cette force de Coriolis se "nourrit" de l'énergie du champ primaire, et se trouve localisée sur les parois latérales de la cavité, car elle met en jeu le champ de vitesse tourbillonnaire. Ceci se traduit par l'excitation d'un mode acoustique secondaire "au droit" du mode primaire, dont la ligne nodale correspond à l'axe

8. le mode acoustique correspondant est le mode 10 du résonateur cylindrique, dont la fréquence propre est  $1.84c_0/a$  où  $a$  est le rayon du cylindre

du haut-parleur. Ce mode secondaire est capté par le microphone secondaire, et la pression mesurée permet de remonter à la vitesse de rotation de la cavité. En d'autres termes, la mise en rotation de la cavité induit un phénomène de couplage de modes acoustiques, ce couplage étant contrôlé par la force de Coriolis localisée dans les couches limites visqueuses de la cavité. Bien que ce type de capteur ne soit pas sorti des laboratoires où il a été étudié (et en particulier du LAUM), ce capteur présente nombre d'avantages : grande dynamique ( de  $10^{-2} \text{ }^\circ\text{s}^{-1}$  à environ  $10^5 \text{ }^\circ\text{s}^{-1}$  pour certains prototypes), temps de réponse quasi-instantané (la rotation de la cavité entraînant quasi-instantanément le fluide situé dans les couches limites visqueuses), grande linéarité, grande simplicité de mise en oeuvre.

**Rque :** Il est intéressant de noter que la source de Coriolis  $\mathbf{f}_c$  est également mise en jeu dans d'autres phénomènes sonores qui relèvent de l'aéroacoustique. C'est par exemple le cas du "vortex sound" qui se trouve généré sous certaines circonstances lorsqu'un écoulement traverse une singularité géométrique. Ce mécanisme de génération du son se traduit, dans une certaine gamme de valeurs du nombre de Reynolds (la viscosité joue donc un rôle dans ce mécanisme), par un détachement tourbillonnaire localisé en aval de la singularité (allée de tourbillons de Bénard Von Karman), la fréquence du détachement tourbillonnaire étant contrôlé par la géométrie de l'obstacle et la vitesse de l'écoulement (le nombre de Strouhal caractérise la fréquence de ces oscillations). Cet alternance de tourbillons constitue une source acoustique de nature dipolaire. Notons que l'obstacle peut en retour réagir à l'émission de tourbillons, et citons deux exemples pour illustrer ce fait :

- la célèbre destruction du pont de Tacoma : sous l'effet d'un vent modéré, la fréquence d'émission des tourbillons vint à coïncider avec une fréquence de résonance du tablier du pont,
- la mise en résonance d'une bouteille de bière par un écoulement sur le goulot de la bouteille.

### 3.3 Conséquences des effets thermiques

#### 3.3.1 Généralités sur les effets thermoacoustiques

On désigne par thermoacoustique un processus physique qui met en jeu l'interaction entre une onde acoustique et des transferts de chaleur. En réalité, toute propagation d'une onde acoustique est un phénomène thermoacoustique qui met en jeu des transferts de chaleur instationnaires dans le milieu de propagation, mais le terme "thermoacoustique" est généralement employé lorsque ces transferts de chaleur constituent le coeur des phénomènes physiques étudiés.

La nature et l'utilisation des phénomènes thermoacoustiques n'est pas unique, et on peut dénombrer plusieurs "familles" de phénomènes thermoacoustiques, avec des communautés scientifiques et des problématiques différentes. Par exemple, une recherche à l'aide du mot clé "thermoacoustique" sur une base de données de revues scientifiques permettra rapidement de dégager (au moins) cinq problématiques différentes mettant en jeu des phénomènes thermoacoustiques, à savoir :

- la génération indésirable d'instabilités thermoacoustiques dans certains problèmes de combustion (génération d'ondes acoustique de fort niveau prenant source dans le dégagement de chaleur instationnaire de flammes), risquant d'endommager le dispositif (turbine, réacteur d'avion, . . .) ;
- les machines thermoacoustiques, qui tirent parti des interactions thermoacoustiques au sein d'un

matériau poreux pour la production de travail acoustique (fonctionnement en moteur) ou la génération d'un flux de chaleur thermoacoustique (fonctionnement en pompe à chaleur) ;

- la tomographie thermoacoustique, une technique récente d'imagerie médicale consistant à illuminer les tissus à imager par une impulsion électromagnétique radiofréquence, provoquant par suite un réchauffement inhomogène et instationnaire à l'origine de l'émission d'une onde acoustique, elle-même captée par des détecteurs appropriés ;
- le mécanisme "d'effet piston" mis en jeu dans les fluides supercritiques, parfois présenté comme un quatrième mode de transport de la chaleur ;
- les sources d'émission sonore (plutôt dans le domaine hautes-fréquences, au delà de 20 kHz) réalisées au moyen de microtubes dissipant par effet Joule un courant électrique instationnaire.

Les phénomènes thermoacoustiques, sous toutes leurs formes, sont souvent peu connus au sein même de la communauté des sciences mécaniques. Ceci est sans doute lié au fait qu'une large gamme de problèmes acoustiques mettent en jeu, pour ce qui concerne les sources sonores, une conversion vibroacoustique, plus intuitive, basée sur le mouvement oscillant d'éléments solides. Ceci est aussi, probablement, lié au fait qu'une première approche des équations fondamentales de l'acoustique (du moins jusqu'en licence) "camoufle" bien souvent (et sans doute à juste titre) la nature thermomécanique des phénomènes acoustiques derrière une relation simple,  $p = c_0^2 \rho'$ , traduisant l'hypothèse (généralement acceptable) de processus adiabatiques.

Cependant, la possibilité d'une conversion d'énergie thermoacoustique apparaît clairement dès l'écriture des équations de conservation, écrites ci-après *avec sources*. Considérons le cas simple du mouvement acoustique d'un fluide supposé ici non visqueux et non conducteur de la chaleur. Sous l'hypothèse de faible amplitude (linéarisation des équations), les trois équations de conservation s'écrivent sous la forme suivante :

$$\partial_t \rho' + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = \rho_0 Q(\mathbf{r}, t), \quad (3.94)$$

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{grad} p = \rho_0 \mathbf{f}(\mathbf{r}, t), \quad (3.95)$$

$$\rho_0 C_p \partial_t \tau - \partial_t p = \rho_0 \dot{q}(\mathbf{r}, t). \quad (3.96)$$

Au second membre de chacune de ces équations apparaissent les termes sources (jusqu'ici ignorés) responsables du mouvement acoustique. Aux équations de conservation de la masse (3.94) et de la quantité de mouvement (3.95) sont associées, respectivement, une source de débit  $Q(\mathbf{r}, t)$  et une source de force  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$  par unité de masse. Dans le cas de sources supposées par exemple sphériques et ponctuelles (en regard de la longueur d'onde), la source de débit  $Q(\mathbf{r}, t) = Q(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  représente l'effet d'une sphère pulsante responsable d'un débit  $Q(t)$  au point  $\mathbf{r}_0$ , tandis que la source  $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  représente la force par unité de masse exercée sur le fluide par une sphère en mouvement oscillant suivant l'axe de direction  $\mathbf{f}/\|\mathbf{f}\|$  (pour plus de détails, voir le cours de Master 1). Puisqu'il est question dans ce document de phénomènes thermoacoustiques, on s'intéresse ici plus particulièrement à l'équation de conservation de l'énergie (3.96), dont le second membre fait apparaître un taux de dégagement de chaleur instationnaire  $\dot{q}(\mathbf{r}, t)$ . Faisant usage de la propriété de bivariance du fluide sous

l'hypothèse d'un gaz parfait, on obtient aisément l'équation d'onde inhomogène suivante

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} \partial_{tt}^2 p = -\frac{\partial_t \dot{q}}{T_0 C_p} - \rho_0 \partial_t Q + \operatorname{div} \mathbf{f} \quad (3.97)$$

qui fait clairement apparaître au second membre les trois sources élémentaires d'émission acoustique : débit, force et dégagement de chaleur instationnaires. Le processus d'émission acoustique par dégagement de chaleur instationnaire est non seulement moins répandu mais aussi généralement plus complexe à traiter que les deux autres mécanismes élémentaires, et ce principalement pour deux raisons. Tout d'abord, l'hypothèse de départ menant aux équations (3.94-3.96) s'avère inappropriée pour traiter d'un phénomène thermoacoustique puisque la présence effective du terme source  $\dot{q}$ , et donc d'un apport de chaleur au fluide, ne peut être envisagée que sous l'hypothèse d'un fluide conducteur de la chaleur. Ensuite, ce terme source  $\dot{q}$  dépend bien souvent, et de façon complexe, des autres variables acoustiques de sorte qu'il n'est généralement pas possible de traiter la source et le milieu de propagation de façon indépendante. Cela est notamment le cas des auto-oscillateurs thermoacoustiques (générateurs d'ondes thermoacoustique et instabilités de combustion), pour lesquels le terme source  $\dot{q} = \dot{q}(p, v, \rho', \tau)$  est responsable de la génération d'une instabilité thermoacoustique dont la fréquence est déterminée par les propriétés du réseau acoustique environnant.

Une étude exhaustive des différents phénomènes thermoacoustiques sort du cadre de ce cours introductif, mais nous traiterons néanmoins dans la suite du document deux exemples, à savoir d'une part celui des machines thermoacoustiques<sup>9</sup> et d'autre part celui des thermophones. Ce dernier exemple est traité sous forme d'exercice et correspond au sujet d'examen de l'année universitaire 2012/2013.

### 3.3.2 Les machines thermoacoustiques

Les machines thermoacoustiques sont de façon plus générale des machines thermiques cycliques qui ont vocation à échanger de l'énergie avec des sources extérieures sous forme de travail et de chaleur. Comme la plupart des machines thermiques cycliques, les machines thermoacoustiques peuvent fonctionner suivant deux modes, à savoir le mode réfrigérateur (ou plus généralement le mode pompe à chaleur) et le mode moteur (Fig. 3.18). Le réfrigérateur assure le transfert de chaleur d'une source froide vers une source chaude, ce qui nécessite un apport d'énergie sous forme de travail acoustique (cf. Fig. 3.18, « Réfrigérateur »). A l'inverse, dans le cas du moteur, la chaleur  $Q_H$  reçue par la machine depuis la source chaude est, hors pertes, pour une part convertie en travail  $W$  et, pour l'autre part restituée à la source froide (cf. Fig. 3.18, « Moteur »). Ces phénomènes thermoacoustiques prennent place au sein des couches limites thermiques acoustiques, et sont optimisés dans les machines thermoacoustiques par l'usage d'un matériau poreux (appelé stack) placé dans un guide d'onde : voir Fig. 3.18. Les mouvements particuliers liés à une onde acoustique, l'état de compression-détente d'une particule (et donc son état instantané de température) en contact thermique avec les parois du stack peuvent être associés à un flux hydrodynamique de chaleur transitant depuis une source de chaleur vers l'autre.

Nous proposerons dans ce paragraphe une explication conceptuelle du phénomène thermoacoustique, puis nous présenterons la théorie linéaire de la thermoacoustique et son application aux machines

9. pour la simple (et bonne?) raison que des activités de recherches sont menées au LAUM sur ce sujet

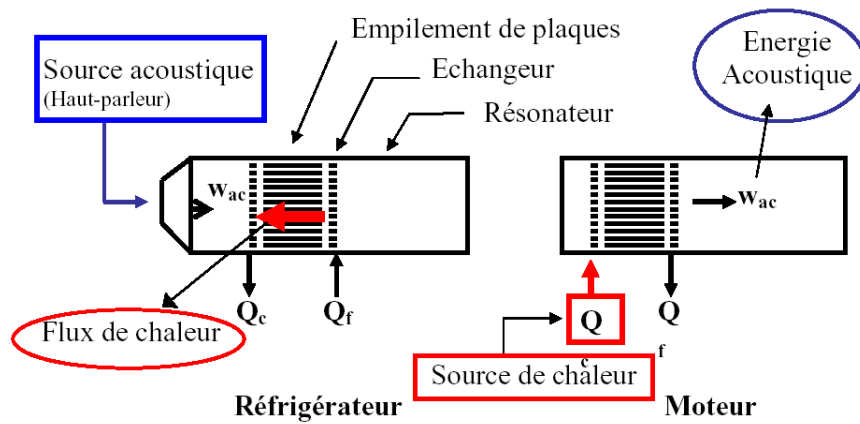


FIGURE 3.18 – Machines thermoacoustiques. Schémas de principe.

thermoacoustiques. Dans toute la suite de ce paragraphe, on considèrera pour la brièveté de l'exposé que le fluide de travail est **non visqueux**. Notons également que l'aspect technologique et les potentiels d'applications de ces machines sortent du cadre de ce cours<sup>10</sup>, qui vise en premier lieu ici à préciser la mise en équation des problèmes de propagation acoustique en présence de gradients de température.

### 3.3.2.1 Explication conceptuelle du processus thermoacoustique

Considérons un moteur thermoacoustique dans sa version la plus simple (dite à ondes stationnaires), représentée sur la Fig. 3.19. Considérons une particule de fluide située au voisinage d'une paroi solide du stack, le long duquel est imposé un fort gradient de température  $\nabla T$  (Fig. 3.20 (a)). La température de cette particule, au repos sous une pression statique donnée  $P_0$ , est imposée par la présence de la paroi (dont « l'inertie thermique » est supposée très grande devant celle du fluide du fait d'une capacité calorifique volumique et d'une conduction thermique bien supérieures). Supposons à présent que l'état de cette particule fluctue sous l'effet d'un champ acoustique stationnaire sinusoïdal. Elle prend dès lors un mouvement oscillant sinusoïdal, auquel sont associées des oscillations infinitésimales de pression acoustique  $p(t)$  ( $p \ll P_0$ ), en phase avec le déplacement particulaire acoustique  $\xi(t)$ , ou en quadrature de phase avec la vitesse acoustique (propriété des ondes stationnaires dans un tube). Aux oscillations de pression acoustique sont associées des oscillations de température supposées, en première approximation, en phase avec les oscillations de pression acoustique (Fig. 3.21 (a), trait plein).

Pour la clarté de l'exposé, et parce que le propos est ici limité à la compréhension physique des phénomènes fondamentaux mis en jeu, supposons tout d'abord que le mouvement présente non pas un profil temporel sinusoïdal mais un profil « articulé » voisin (cf. Fig. 3.21 (a), trait tireté). Le cycle suivi par la particule se déroule alors suivant quatre phases distinctes : compression adiabatique, expansion isobare, détente adiabatique, contraction isobare. Les phases de compression-détente sont supposées

10. ces aspects sont traités dans le cours optionnel d'introduction à la thermoacoustique en Master 1

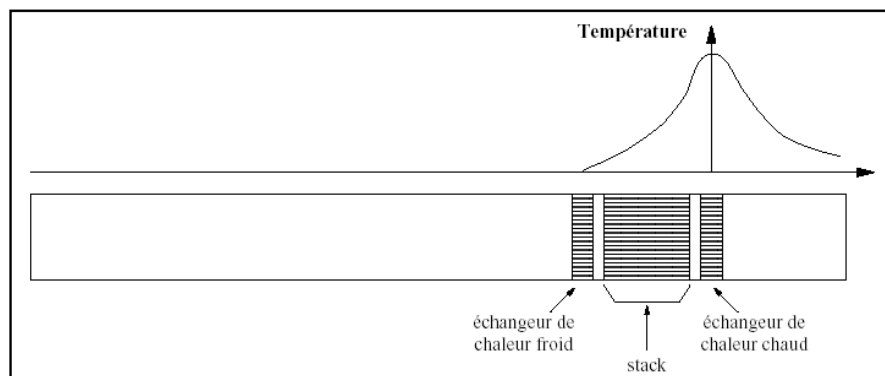


FIGURE 3.19 – Représentation schématique d'un moteur thermoacoustique à ondes stationnaires

adiabatiques<sup>11</sup>, tandis qu'aux phases d'expansion et contraction sont associés des transferts de chaleur entre fluide et paroi. Le cycle suivi par la particule présente alors l'allure indiquée sur la Fig. 3.20 (b)-(e), lorsque le gradient de température  $\nabla T$  appliqué à la paroi est tel que  $\xi_{max}\nabla T > \tau_{max}$ . Ainsi, la particule reçoit une quantité de chaleur  $Q$  durant sa phase de compression et restitue une quantité de chaleur  $Q'$  durant sa phase de détente. Ce même cycle à quatre phases peut être représenté de façon schématique suivant un diagramme de Clapeyron (Fig. 3.21(b)). Il apparaît alors clairement qu'au cours du mouvement de la particule, une quantité de chaleur  $Q - Q'$  a été convertie en énergie ordonnée (i.e. en énergie acoustique), représenté par la zone hachurée de la Fig. 3.21 (b).

Evidemment, le mécanisme d'échange de chaleur entre fluide et paroi est plus complexe que ne le laissent entendre les propos précédents. En réalité, pour comprendre en profondeur le processus réel d'amplification thermoacoustique, une attention particulière doit être portée sur les relations de phase entre oscillations de pression, de déplacement particulaire et de température acoustiques. Les variations de température d'une particule de fluide sont liées aux phénomènes de compressions-détentes et aux échanges de chaleur avec la paroi qui dépendent de sa température locale. La distance entre particule fluide et paroi est dès lors un paramètre important concernant la nature du processus d'échange de chaleur : « loin » de la paroi, le processus est adiabatique et la température acoustique oscille dans le temps en phase avec la pression acoustique ; « à proximité » immédiate de la paroi, le processus est isotherme et la température acoustique est imposée à chaque instant par la température locale de la paroi ; mais pour une particule de fluide située à une distance de l'ordre d'une épaisseur de couche limite thermique  $\delta_\kappa$  de la paroi, le contact thermique entre particule et paroi est « suffisamment bon » pour qu'un échange de chaleur ait lieu, mais « suffisamment mauvais » pour que cet échange de chaleur se traduise par un changement consécutif de la température du fluide, non pas instantanément mais avec un retard, en raison du déphasage entre le mouvement acoustique et le transfert de chaleur qui n'obéissent pas au même constantes de temps. C'est bel et bien ce déphasage qui est responsable

11. il faut comprendre *globalement* adiabatique car la quantité de chaleur échangée avec la paroi durant ces deux phases est supposée *globalement* nulle, ce qui rappelons-le est faux compte-tenu des propos du paragraphe 2.5



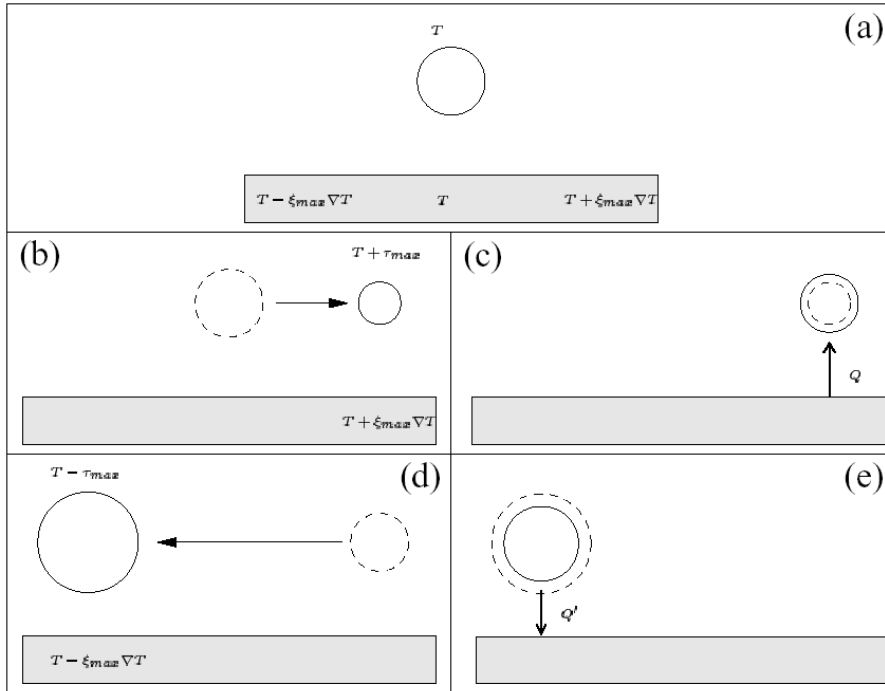


FIGURE 3.20 – Cycle moteur suivi par une particule de fluide sous l'effet d'une onde acoustique stationnaire au voisinage d'une paroi soumise à un gradient de température  $\nabla T$ . (a) particule initialement au repos. (b) compression adiabatique. (c) expansion isobare. (d) détente adiabatique. (e) contraction isobare.

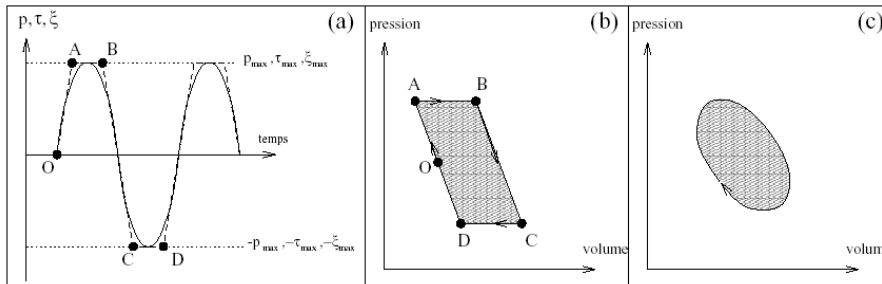


FIGURE 3.21 – (a) évolutions temporelles sinusoïdale (trait plein) et « articulée » (trait tireté) des variables de pression, température et déplacement acoustiques  $p, \tau, \xi$  pour une onde acoustique stationnaire. Les points O, A, B, C, D correspondent respectivement aux états (a), (b), (c), (d) et (e) de la Fig. 2. (b) Diagramme de Clapeyron au cours d'un cycle acoustique « articulé ». (c) Diagramme de Clapeyron « réel ».

de la conversion d'énergie, et le cycle suivi par la particule est alors analogue au schéma de la Fig. 3.21(c). En résumé, seules les particules de fluide situées à une distance de l'ordre d'une épaisseur

de couche limite thermique contribuent à la conversion d'énergie thermoacoustique. On comprend dès lors aisément pourquoi l'emploi d'un stack dont les pores (i.e. la distance inter-parois) sont correctement dimensionnés relativement à la distance  $\delta_\kappa$  permet d'optimiser le processus de conversion thermoacoustique en maximisant la proportion de fluide « efficace ».

Dès lors que les propos ci-avant ont été bien assimilés, il est aisé de comprendre le processus de réfrigération thermoacoustique (Fig. 3.18). En effet, il apparaît directement au regard du cycle schématisé de la Fig. 3.20, que si le gradient de température appliqué le long de la paroi est tel que  $\xi_{max} \nabla T < \tau_{max}$ , le sens des transferts de chaleur s'en trouvera alors inversé, tout comme le sens des cycles des Fig. 3.21 (b) et (c). Au cours d'un cycle, du travail acoustique est alors consommé pour transférer de proche en proche un flux de chaleur thermoacoustique d'une extrémité du stack à l'autre (de gauche à droite sur la Fig. 3.20, de droite à gauche sur la Fig. 3.18), de sorte qu'un gradient de température s'établit et se maintient le long du stack.

Là encore, il convient de garder en mémoire que les mouvements particuliers et les flux de chaleur qui prennent lieu au voisinage des parois du stack sont plus complexes que ne le laisse entendre l'explication ci-avant. En particulier, la viscosité du fluide impose qu'au voisinage de la paroi l'amplitude du mouvement particulière soit diminuée du fait du cisaillement imposé par la présence de la paroi, ce qui joue bien sûr un rôle important dans les échanges thermiques entre fluide et paroi.

### 3.3.2.2 Equations de la thermoacoustique linéaire

Nous nous intéressons ici au mouvement acoustique d'un fluide dans un canal cylindrique de rayon  $R$  et de longueur  $l_s$  le long duquel un gradient de température  $d_x T_0$  non nul est imposé. Les variations de température dans le solide (plaques de l'empilement) amènent à prendre en compte la variable de température du solide  $T_s(x, r, t) = T_{s0}(x) + \tau_s(x, r, t)$  où  $\tau_s$  désigne les fluctuations oscillantes de température dans le solide à l'interface fluide paroi. Usant des mêmes arguments que ceux du paragraphe 2.3, on considère dans la suite que  $\tau_s = 0$ , de même que l'on considère que la paroi solide impose sa température au fluide :  $T_{s0}(x) = T_0(x)$ .

**Equation d'onde** Les équations régissant le mouvement acoustique et les échanges fluide-paroi sont les 3 équations de conservation ainsi que l'équation d'état du fluide. De plus, on formule l'hypothèse d'une onde plane se propageant suivant l'axe  $x$ , de sorte qu'on peut retenir l'approximation couches limites : la seule chose qui diffère du problème traité au paragraphe 2.5 est simplement l'existence d'un gradient de température axial. C'est ainsi qu'en reprenant les raisonnements formulés au paragraphe 2.5, et en supposant que  $\nu = 0$  et  $T_0 = T_0(x)$ , il est relativement aisé d'obtenir une relation entre la pression acoustique  $\tilde{p}$  et les autres variables  $(\tilde{v}_x, \tilde{\rho}', \tilde{s}, \tilde{\tau})$ . Après quelques calculs, les relations suivantes sont obtenues :

$$\langle \tilde{v}_x \rangle = \frac{i}{k_0 \rho_0 c_0} \partial_x \tilde{p}, \quad (3.98)$$

$$\langle \tilde{\tau} \rangle = \frac{\tilde{p}}{\rho_0 C_p} [1 - f_\kappa] - \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \frac{\partial T_0}{\partial x} [1 - f_\kappa], \quad (3.99)$$

$$\langle \tilde{\rho}' \rangle = \frac{1}{\omega^2} [1 - f_\kappa] \frac{d_x T_0}{T_0} d_x \tilde{p} + \frac{1}{c_0^2} [1 + (\gamma - 1) f_\kappa] \tilde{p} \quad (3.100)$$

$$\langle \tilde{s} \rangle = -\frac{\tilde{p}}{\rho_0 T_0} f_\kappa - \frac{C_p}{\rho_0 \omega^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} \frac{d_x T_0}{T_0} [1 - f_\kappa], \quad (3.101)$$

avec

$$f_\kappa(x) = \frac{2}{k_h(x) R} \frac{J_1(k_h(x) R)}{J_0(k_h(x) R)}. \quad (3.102)$$

$$k_h(x) = \frac{1 - i}{\delta_\kappa(x)} \quad (3.103)$$

où la dépendance suivant  $x$  de  $\delta_\kappa$  provient des dépendances avec la température de la conductivité thermique du fluide  $\lambda$  et de la densité du fluide  $\rho_0$ . Le report des expressions de  $\tilde{\rho}'$  et  $\tilde{v}_x$  dans l'équation de conservation de la masse linéarisée permettent d'aboutir à l'équation de propagation pour la variable  $\tilde{p}$  :

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial x^2} + (1 - f_\kappa) \frac{1}{T_0} \frac{dT_0}{dx} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \left( \frac{\omega}{c_0} \right)^2 (1 + (\gamma - 1) f_\kappa) \tilde{p} = 0. \quad (3.104)$$

L'équation de propagation (3.104) est une équation différentielle ordinaire du second ordre à coefficients non constants<sup>12</sup> dont la résolution analytique n'est pas triviale<sup>13</sup>.

### Flux de chaleur et de travail thermoacoustique

**Flux de chaleur thermoacoustique** Le flux hydrodynamique de chaleur associé à l'effet thermoacoustique s'écrit comme la moyenne sur une période acoustique du terme d'advection  $s v_x$ .

$$q_2 = \rho_m T_m \overline{s \cdot v_x} = \rho_m T_m \frac{1}{2} \Re(\tilde{s} \tilde{v}_x^*), \quad (3.105)$$

La notation  $*$  représente le complexe conjugué et l'indice  $_2$  spécifie que ce flux de chaleur est une quantité du second ordre. En utilisant la relation thermodynamique reliant l'entropie massique  $s$  aux variables  $\tau$  et  $p$  il vient :

$$q_2 = \frac{1}{2} \rho_0 C_p \Re(\tilde{\tau} \tilde{v}_x^*) - \frac{1}{2} \Re(\tilde{p} \tilde{v}_x^*). \quad (3.106)$$

En exprimant la variable  $\tau$  en fonction de la variable  $p$ , puis en moyennant  $q_2$  sur la section du pore, il vient :

$$\langle q_2 \rangle = \langle q_{SW} \rangle + \langle q_{TW} \rangle + \langle q_D \rangle \quad (3.107)$$

12. Les coefficients  $\rho_0$ ,  $c_0$ , et  $f_\kappa$  dépendent tous de la température, non constante le long du pore.

13. il est cependant possible d'exprimer une solution analytique implicite à l'équation (3.104) en la transformant sous la forme d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce

avec

$$\langle q_{SW} \rangle = -\Im(f_\kappa)J, \quad (3.108)$$

$$\langle q_{TW} \rangle = -\Re(f_\kappa)I, \quad (3.109)$$

$$\langle q_D \rangle = (\rho_0 C_p d_x T_0) \Im(f_\kappa) \frac{|\langle \tilde{v}_x \rangle|^2}{2\omega}, \quad (3.110)$$

où  $I = \frac{1}{2}\Re(\tilde{p}\langle \tilde{v}_x^* \rangle)$  et  $J = \frac{1}{2}\Im(\tilde{p}\langle \tilde{v}_x^* \rangle)$  désignent respectivement les intensités acoustiques active et réactive dans la direction  $x$ . Les flux de chaleur  $\langle q_{SW} \rangle$  et  $\langle q_{TW} \rangle$  représentent les composantes stationnaire (« Standing Wave ») et progressive (« Traveling Wave ») du flux de chaleur thermoacoustique.  $\langle q_D \rangle$  exprime quant à lui une perte de chaleur, i.e. un flux de chaleur induit par les oscillations acoustiques et opposé au gradient de température  $d_x T_0$  ( $\Im(f_\kappa) < 0$ ).

**Flux de travail thermoacoustique.** La puissance produite ou consommée par le processus thermoacoustique peut être obtenue en considérant que le travail  $d\mathfrak{w}$  reçu par un volume élémentaire  $dx.dy.dz$  de fluide lorsqu'il s'expand (ou se contracte) d'un volume  $dV$  s'écrit  $d\mathfrak{w} = -P.dV = -(P/\rho)dx.dy.dz.d\rho$ , de sorte que la puissance reçue<sup>14</sup> par unité de volume s'écrit :

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = -\frac{P}{\rho} \frac{d\rho}{dt}, \quad (3.111)$$

avec  $P = P_0 + p$  et  $d_t \rho = d_t \rho' = \partial_t \rho' + v_x \partial_x \rho_m$ . Par suite, la moyenne sur une période acoustique de cette puissance volumique (après quelques calculs) s'écrit

$$\mathfrak{w}_2 = \frac{\omega}{2\rho_0} \Re(i\tilde{p}\tilde{\rho}'^*), \quad (3.112)$$

où l'indice 2 spécifie que la puissance considérée est une quantité du second ordre<sup>15</sup>. Par suite, en exprimant les fluctuations de masse volumique en fonction de  $\tilde{p}$  et  $\tilde{v}_x$ , il vient :

$$\langle \mathfrak{w}_2 \rangle = \langle \mathfrak{w}_\kappa \rangle + \langle \mathfrak{w}_{SW} \rangle + \langle \mathfrak{w}_{TW} \rangle, \quad (3.113)$$

où

$$\langle \mathfrak{w}_\kappa \rangle = \frac{1}{2} \frac{\gamma - 1}{\rho_0 c_0^2} \Im(f_\kappa) \omega |\tilde{p}|^2, \quad (3.114)$$

$$\langle \mathfrak{w}_{SW} \rangle = -\frac{d_x T_0}{T_0} \Im(f_\kappa) J, \quad (3.115)$$

$$\langle \mathfrak{w}_{TW} \rangle = \frac{d_x T_0}{T_0} \Re(f_\kappa) I, \quad (3.116)$$

La densité de puissance  $\langle \mathfrak{w}_\kappa \rangle$ , négative, traduit les pertes par diffusion thermique liées à la nature irréversible des échanges fluide/paroi (la quantité de chaleur cédée ou récupérée par la particule à la

14. Il convient de noter que cette puissance est une quantité *algrébique* qui est positive si un travail est effectivement reçu par le volume de fluide, ou en d'autres termes si le processus thermoacoustique *produit* du travail.

15. La moyenne temporelle des quantités d'ordre 0 et 1 est nulle, et les termes d'ordre supérieurs à 2 sont éliminés du fait de la linéarisation.

paroi durant sa phase de compression est différente de la quantité de chaleur récupérée ou cédée durant la phase de détente).

Les densités de puissance  $\mathbf{w}_{SW}$  et  $\mathbf{w}_{TW}$ , représentent les densités de puissances acoustiques produites (ou consommées) par les composantes stationnaire (« Standing Wave ») et progressive (« Traveling Wave ») de l'onde acoustique (pour une onde progressive pure,  $J = 0 \Rightarrow w_{SW} = 0$ ).

### Cas d'une onde stationnaire en interaction quasi-adiabatique avec les parois du pore

Afin de mieux comprendre les phénomènes mis en jeu, il peut être intéressant d'analyser le cas particulier

- d'un fluide en interaction “quasi-adiabatique” avec les parois du pore, i.e.  $R \gg \delta_\kappa$ ,
- et d'une onde purement stationnaire, i.e.  $\tilde{p}(x) = p^{sw}(x) = A \cos(k_0 x)$  et  $\tilde{v}_x(x) = \frac{iA}{\rho_0 c_0} \sin(k_0 x) = i v_x^{sw}(x)$ .

En reportant  $I = 0$  (onde stationnaire) ainsi que l'expression asymptotique  $f_\kappa \approx (1 - i) \frac{\delta_\kappa}{R}$  dans les expressions de  $\langle \mathbf{w}_2 \rangle$  et  $\langle q_2 \rangle$ , il vient après quelques calculs :

$$\langle \mathbf{w}_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\delta_\kappa \omega}{R} \frac{(p^{sw})^2}{\rho_0 C_p T_0} [\Gamma - 1] \quad (3.117)$$

$$\langle q_2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\delta_\kappa}{R} p^{sw} v_x^{sw} [1 - \Gamma] \quad (3.118)$$

avec  $\Gamma = d_x T_0 / d_x T|_{crit}$  et où le “gradient critique”, défini par

$$d_x T|_{crit} = \frac{p^{sw} \omega}{\rho_0 C_p v_x^{sw}} \quad (3.119)$$

représente le gradient de température subit par une particule fluide au cours de son mouvement adiabatique.

Au regard de l'expression  $\langle q_2 \rangle$ , il apparaît que le flux de chaleur thermoacoustique est proportionnel au produit  $p^{sw} v_x^{sw}$  : il est donc nul si le stack est placé sur un noeud de pression ou de vitesse<sup>16</sup>. Le flux de chaleur est également proportionnel au terme  $(1 - \Gamma)$ . Si l'on suppose d'une part que le stack est placée telle sorte le long du guide que que  $p^{sw} v_x^{sw} > 0$ , et d'autre part que le gradient de température  $d_x T_0$  imposé le long des parois du stack est tel que  $d_x T_0 > d_x T|_{crit}$ , alors le flux de chaleur  $\langle q_2 \rangle$  est négatif, ce qui traduit que de la chaleur est transportée de la droite vers la gauche. Inversement, si  $d_x T_0 < d_x T|_{crit}$ , alors  $\langle q_2 \rangle$  est positif, et la chaleur est transportée de gauche à droite. Enfin, lorsque le champ de température le long de la plaque est tel que  $d_x T_0 = d_x T|_{crit}$ , il n'y a pas de flux de chaleur thermoacoustique, car la température de toute particule fluide oscillant à proximité de la paroi est à chaque instant égale à celle de la paroi située en vis à vis de la particule fluide considérée.

De façon analogue, il apparaît que la densité de puissance acoustique  $\langle \mathbf{w}_2 \rangle$  produite ou consommée par l'effet thermoacoustique est une grandeur quadratique (proportionnelle à  $(\tilde{p}^S)^2$ ) proportionnelle

16. Dans ce cas très simplifié, il apparaît que la position optimale du stack est au milieu d'un noeud et d'un ventre de pression, position pour laquelle le produit  $p^{sw} v_x^{sw}$  est maximum

au paramètre  $\omega / (\rho_m C_p T_m) = \omega (\gamma - 1) / (\rho_m c_0^2)$ , ce qui montre que le choix des propriétés thermodynamiques du fluide est important<sup>17</sup>. et proportionnel au facteur  $[\Gamma - 1]$ . Pour  $d_x T_0 > d_x T|_{crit}$ , de la puissance acoustique est produite, alors que pour  $d_x T_0 < d_x T|_{crit}$  la puissance acoustique est absorbée.

### 3.3.2.3 Modélisation simplifiée d'un réfrigérateur thermoacoustique à ondes stationnaires

On considère un réfrigérateur thermoacoustique à ondes stationnaires constitué d'un guide d'onde de section carrée d'arête  $a$ , fermé à son extrémité  $x = L$ , et équipé d'un haut-parleur électrodynamique en  $x = 0$  (Fig. 3.22). Dans ce résonateur est inséré un stack constitué d'un empilement de plaques d'épaisseur  $2e_s$  et séparées d'un intervalle  $2y_0$  grand devant l'épaisseur des plaques ( $e_s \ll y_0$ ). Le fluide est supposé non visqueux. La longueur  $l_s$  du stack est supposée très faible devant la longueur d'onde de sorte que la pression et la vitesse acoustiques peuvent être supposées indépendantes du point le long du stack.

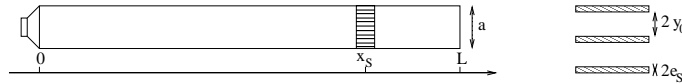


FIGURE 3.22 –

Afin que le problème considéré ici reste simple à traiter, le couplage entre le haut-parleur et le guide d'onde est supposé tel que le haut-parleur puisse être considéré comme une source « idéale » de pression acoustique, et que la fréquence de résonance est exactement celle d'un guide demi-onde sans pertes (ce qui suppose notamment que le stack n'influence pas la résonance du guide d'onde), de sorte que les champs de pression et de vitesse acoustiques s'écrivent respectivement

$$\forall x \in [0, L], x \notin ]x_s - \frac{l_s}{2}, x_s + \frac{l_s}{2}[, \tilde{p}(x) = P_A \cos(k_0 x), \quad (3.120)$$

$$\forall x \in [0, L], x \notin ]x_s - \frac{l_s}{2}, x_s + \frac{l_s}{2}[, \langle \tilde{v}_x(x) \rangle = i \frac{P_A}{\rho_0 c_0} \sin(k_0 x), \quad (3.121)$$

dans le résonateur, avec  $k_0 = \omega / c_0 = \pi / L$ , et

$$\forall x \in ]x_s - \frac{l_s}{2}, x_s + \frac{l_s}{2}[, \tilde{p}(x) \approx P_A \cos(k_0 x_s) = p^{sw}, \quad (3.122)$$

$$\forall x \in ]x_s - \frac{l_s}{2}, x_s + \frac{l_s}{2}[, \langle \tilde{v}_x(x) \rangle \approx i \frac{P_A}{\rho_0 c_0} \frac{1}{1 - \frac{e_s}{y_0}} \sin(k_0 x_s) = i v^{sw}, \quad (3.123)$$

dans le stack, la vitesse acoustique étant majorée d'un facteur  $1/(1 - \frac{e_s}{y_0}) \approx 1 + \frac{e_s}{y_0}$  du simple fait de la conservation du débit massique. Par ailleurs, l'hypothèse de quasi adiabaticité ( $\delta_\kappa \ll y_0$ ) est retenue et la fonction thermique  $f_\kappa$  a donc pour expression approchée  $f_\kappa \approx (1 - i) \frac{\delta_{\nu, \kappa}}{2y_0}$ .

17. le paramètre  $(\gamma - 1)$  est appelé paramètre de travail et doit être préférentiellement maximisé.

On suppose qu'aucun échangeur de chaleur n'est placé aux extrémités du stack, de sorte qu'en régime stationnaire, le flux thermoacoustique de chaleur s'équilibre avec le flux de conduction  $\langle q_{cond} \rangle$  retour à travers les parois du stack et le fluide

$$\langle q_{cond} \rangle = -\frac{\lambda_f y_0 + \lambda_s e_s}{y_0 + e_s} d_x T_m, \quad (3.124)$$

où  $\lambda_f$  et  $\lambda_s$  désignent respectivement les conductivités thermiques du fluide et du solide. Après quelques calculs, il est dès lors possible, compte-tenu que  $\langle q_2 \rangle + \langle q_{cond} \rangle = 0$  et sous réserve que  $e_s \ll y_0$ , d'obtenir l'expression de la différence de température  $\Delta T = d_x T_0 / l_s$  entre les 2 extrémités du stack :

$$d_x T_0 \approx \frac{\Delta T}{l_s} \approx -\frac{\delta_\kappa}{4} \frac{\frac{P_A^2}{\rho_0 c_0} \left(1 + \frac{e_s}{y_0}\right) \sin(2k_0 x_s)}{\frac{\lambda_f y_0 + \lambda_s e_s}{y_0 + e_s} + \frac{\delta_\kappa}{4} \frac{P_A^2 C_p}{\rho_0 c_0^2 \omega} \left(1 + \frac{e_s}{y_0}\right)^2 (1 - \cos(2k_0 x_s))} \quad (3.125)$$

On note donc que si  $x_s > L/2$  alors  $d_x T_0 > 0$  (et vice-versa) et que la position permettant de maximiser l'écart de température  $|\Delta T|$  est  $x_s = \frac{L}{4}$  ou  $\frac{3L}{4}$ .

### 3.3.2.4 Modélisation simplifiée d'un moteur thermoacoustique à ondes stationnaires

On cherche ici à décrire les conditions de déclenchement de l'instabilité thermoacoustique dans le système représenté sur la figure 3.23. Le guide d'onde est un cylindre de rayon  $R_w$  et de longueur  $L$ . Le stack est un matériau poreux à pores cylindriques de rayon  $R_s$ , et dont la porosité est supposée égale à 1. La région du guide d'onde inhomogène en température  $[x_H - l_S, x_H + l_W]$  constitue ce que l'on appelle le noyau thermoacoustique.

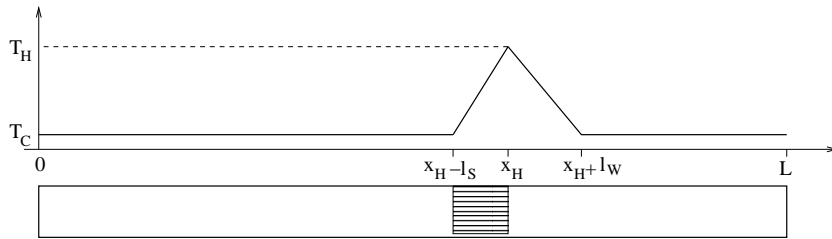


FIGURE 3.23 –

L'approche simplifiée utilisée ici consiste à procéder à un bilan énergétique afin de prédire le gradient de température seuil pour lequel l'instabilité thermoacoustique est déclenchée. En effet, le système ci-dessus est un oscillateur non-linéaire dans lequel des oscillations acoustiques auto-entretenues se développeront dès lors que l'amplification thermoacoustique compensera l'ensemble des pertes thermique linéaires. La fréquence des auto-oscillations générées est celle du mode acoustique le plus instable (celui qui présente le moins de pertes). Afin de pouvoir mener tant que possible les calculs à l'aide d'un papier et d'un crayon, un certain nombre d'approximations, pour certaines très violentes, sont retenues. Ces approximations sont les suivantes :

- (i) La fréquence de déclenchement de l’instabilité thermoacoustique est celle du premier mode acoustique de la colonne de gaz renfermée par le guide d’onde, comme si ce dernier ne comportait ni stack, ni inhomogénéités de température. Cette fréquence vaut donc  $f_0 = \frac{c_0}{2L}$ .
- (ii) La porosité du stack est égale à 1, ce qui revient à considérer que les parois du stack sont infiniment fines.
- (iii) Le stack est supposé très court devant la longueur d’onde, de sorte que la pression et la vitesse acoustiques peuvent être supposées indépendantes du point le long du stack.
- (iv) La viscosité du fluide, rappelons-le, n’est pas prise en compte.
- (v) L’hypothèse de quasi-adiabaticité est retenue dans le stack ( $\delta_\kappa \ll R_S$ ) et donc a fortiori dans le guide d’onde ( $\delta_\kappa \ll R_W$ ).
- (vi) L’essentiel des pertes viscothermiques est supposé localisé dans le stack, de sorte que le reste du guide d’onde est supposé sans pertes.
- (vii) Le champ de température dans le noyau thermoacoustique est supposé linéaire, comme indiqué sur la figure (3.23).
- (viii) La diffusivité thermique du fluide de travail est supposée indépendante de la température.

Compte-tenu des hypothèses précédentes, les champs de pression et de vitesse acoustiques dans le stack s’écrivent respectivement

$$\tilde{p}(x) \approx \tilde{p}(x_H) \approx P_A \cos(k_0 x_H), \quad (3.126)$$

$$\langle \tilde{v}_x(x) \rangle \approx \langle \tilde{v}_x(x_H) \rangle \approx i \frac{P_A}{\rho_0 c_0} \sin(k_0 x_H), \quad (3.127)$$

avec  $k_0 = \pi/L$ . Par ailleurs, compte-tenu de l’hypothèse de quasi adiabaticité, la fonction thermique  $f_\kappa^{(s)}$  caractérisant le couplage acousto-thermique dans les pores du stack s’écrit simplement  $f_\kappa^{(s)} \approx (1 - i) x_\kappa^{(s)}$  avec  $x_\kappa^{(s)} = \delta_\kappa/R_s$ . Dans le stack, la température suit une évolution linéaire suivant la variable  $x$  comme suit :

$$x \in [x_H - l_s, x_H], T_0(x) = T_C + \frac{T_H - T_C}{l_s} (x - (x_H - l_s)), \quad (3.128)$$

où  $T_H$  et  $T_C$  désignent respectivement les températures chaude et froide. Par suite, le terme  $d_x T_0/T_0$  s’écrit :

$$\frac{d_x T_0}{T_0} = \frac{\Delta T}{\Delta T (x - x_H) + l_s T_H}, \quad (3.129)$$

où  $\Delta T = T_H - T_C$ . Compte-tenu des approximations formulées précédemment, il s’ensuit que la puissance totale produite ou dissipée dans la machine s’écrit  $W_{tot} = \pi R_w^2 \int_{x_H - l_s}^{x_H} \langle \mathbf{w}_2 \rangle dx = W_\kappa + W_{sw}$ , avec

$$W_\kappa = -\frac{1}{2} \pi R_w^2 l_s \frac{\gamma - 1}{\rho_0 c_0^2} \omega x_\kappa P_A^2 \cos^2(k_0 x_H), \quad (3.130)$$

$$W_{sw} = -\frac{1}{2} \pi R_w^2 x_\kappa \frac{P_A^2}{\rho_0 c_0} \sin(k_0 x_H) \cos(k_0 x_H) \log \left( \frac{T_H}{T_C} \right). \quad (3.131)$$



La condition sur le champ de température pour qu'il y ait déclenchement des auto-oscillation correspond donc à  $W_{tot} = 0$ , ce qui impose :

$$\log\left(\frac{T_H}{T_C}\right) = -2k_0 l_s \frac{(\gamma - 1) \cos^2(k_0 x_H)}{\sin(2k_0 x_H)}$$

Ce résultat fait apparaître que si  $T_H > T_C$ , il ne peut y avoir déclenchement de l'instabilité thermoacoustique sur le premier mode du résonateur qu'à condition que  $x_H > L/2$ .

### 3.3.2.5 Sur le rôle de la viscosité dans les machines thermoacoustiques

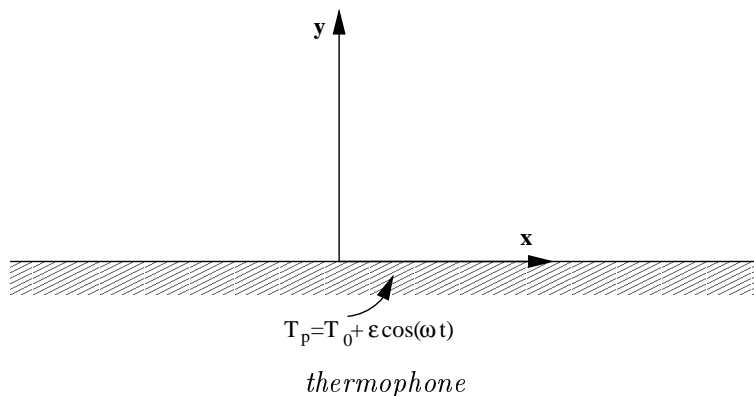
Par souci de brièveté, l'exemple des machines thermoacoustiques a été traité ici dans le cas d'un fluide non visqueux, ce qui ne peut correspondre à la réalité. Son influence sur le fonctionnement des machines thermoacoustique est cependant significative et multiple : pertes visqueuses pariétales, effets de bords aérodynamiques aux extrémités du stack, génération d'un vent acoustique venant à son tour modifier le champ de température imposé, etc . . .

### 3.3.3 Thermophones

Ce dernier paragraphe du support de cours est traité sous forme d'un problème. L'espace d'étude est limité par une paroi plane infinie, parfaitement rigide, placée en  $y = 0$ . Le problème considéré est un problème à 2 dimensions, dans un fluide au repos caractérisé par sa pression statique  $P_0$ , sa masse volumique  $\rho_0$  et sa température  $T_0$ . L'ensemble des autres notations sont par ailleurs **conformes à celles utilisées dans le support de cours**, et il n'est pas utile de redémontrer des relations déjà établies dans ce support. Dans toute la suite du problème on négligera les effets de dissipation viscothermique associés à la propagation dans le fluide, loin de la paroi. Seuls les effets à proximité de la paroi seront donc considérés.

Supposons à présent que la paroi est immobile, mais qu'elle est soumise à une oscillation de température d'amplitude  $\epsilon$  ( $\epsilon \ll T_0$ ) autour de sa valeur moyenne  $T_0$  (voir figure ci-après) :

$$T_p(t) = T_0 + \epsilon \cos \omega t$$



- (a) Compte-tenu de la géométrie du problème considéré, montrer que le rotationnel du champ de vitesse particulière est nul, et que par suite la composante tourbillonnaire du champ de vitesse est nulle.
- (b) Justifier que la solution du problème considéré pour les oscillations de températures peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{\tau}(y, t) = \tilde{A}_a e^{-ik_0 y} + \tilde{A}_h e^{-ik_h y} \quad (3.132)$$

où  $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$  et  $k_h = \sqrt{\frac{-ik_0}{l_h}} = \sqrt{\frac{-i\omega}{\kappa}}$  représentent respectivement les nombres d'onde acoustique et entropique ( $\kappa$  désignant la diffusivité thermique du fluide à la température  $T_0$ ).

- (c) Exprimer les constantes  $\tilde{A}_a$  et  $\tilde{A}_h$ , au premier ordre du petit paramètre  $k_h l_h$ , à partir des conditions aux limites du problème considéré.
- (d) Exprimer la solution pour le champ de vitesse particulière et les fluctuations de pression.
- (e) Montrer que l'intensité acoustique rayonnée (dans la direction  $y$ ) loin de la paroi s'écrit :

$$I = \frac{1}{2} \frac{\rho_0 \omega \kappa c_0}{T_0^2} \epsilon^2 \quad (3.133)$$

- (f) Calculer le flux de chaleur instantané  $q(t)$  transmis par la paroi au fluide.
- (g) La puissance par unité de surface  $I_{input}$  qu'il est nécessaire de fournir pour maintenir les oscillations de température de la plaque peut être obtenue à l'aide de la relation suivante :

$$I_{input} = T_0 \left\langle \frac{q(t)}{T_p(t)} \right\rangle \quad (3.134)$$

où  $q(t)$  représente le flux de chaleur instantané transmis depuis la paroi vers le fluide, où  $T_p(t)$  désigne la température à laquelle est effectué ce transfert de chaleur, et où  $\langle \dots \rangle$  représente la moyenne sur une période acoustique. Calculer  $I_{input}$  et en déduire le rendement de la transduction thermoacoustique. Conclure.



## Annexe A

# Paramètres thermophysiques de l'air, de l'hélium et de l'eau

propriété	unité	air	Hélium	eau
Conductivité thermique $\lambda$	$W.m^{-1}.K^{-1}$	$2.26 \cdot 10^{-2}$	0.142	0.6
Masse volumique $\rho = \frac{M_{mol}P_0}{R_{gp}T_m}$	$kg.m^{-3}$	1.16	0.16	1000
Capacité calorifique isobare $C_p$	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	1003	5193	4186
Capacité calorifique isochore $C_v$	$J.kg^{-1}.K^{-1}$	716	3115	
Coefficient polytropique $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$		1.4	1.667	
Diffusivité thermique $\kappa = \frac{\lambda}{\rho C_p}$	$m^2.s^{-1}$	$2.24 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$1.43 \cdot 10^{-7}$
Viscosité dynamique $\mu$	$Pa.s$	$1.84 \cdot 10^{-5}$	$1.86 \cdot 10^{-5}$	$\approx 1.10^{-3}$
Viscosité cinématique $\nu$	$m^2.s^{-1}$	$1.56 \cdot 10^{-5}$	$1.16 \cdot 10^{-4}$	$\approx 1.10^{-6}$
Nombre de Prandtl $\sigma = \nu/\kappa$		0.7008	0.68	$\approx 7$
Coefficient de compressibilité isotherme $\chi_t$	$Pa^{-1}$	$10^{-5}$	$10^{-5}$	$\approx 5.10^{-10}$
Célérité adiabatique du son $c_0 = \sqrt{\gamma R_{gp}T_0/M_{mol}}$	$m.s^{-1}$	347	1019	$\approx 1480$
Masse molaire $M_{mol}$	$kg.mol^{-1}$	$29.10^{-3}$	$4.10^{-3}$	$18.10^{-3}$

TABLE A.1 – Caractéristiques thermophysique de l'air, de l'hélium et de l'eau à la pression statique  $P_0 = 1$  bar, et à la température  $T_0 = 300$  K. NB : la constante des gaz parfaits  $R_{gp}$  vaut 8.31.

**NB :** Il faut noter que dans les gaz parfaits, la diffusivité thermique et la viscosité cinématique varient de façon significative avec la température, et que cette variation peut être approchée par la loi de puissance  $\kappa, \nu \propto T_0^{1+\beta}$  avec  $\beta = 0.73$  [6].



## Annexe B

# Quelques précisions sur le tenseur des taux de déformation.

Comme l'illustrent les figures B.1 dans un cas à 2 dimensions, les tenseurs  $e_{ij}$  et  $\omega_{ij}$  représentent respectivement la déformation (avec ou sans changement de volume) et la rotation en bloc de l'élément de volume.

Analysons tout d'abord le cas d'un champ de gradient de vitesse pour lequel  $\omega_{ij} = 0$ . Lorsque seuls les termes diagonaux du tenseur  $e_{ij}$  sont non nuls, i.e. lorsque  $(\partial v_i / \partial x_j) = 0$  si  $i \neq j$ , la configuration de l'écoulement est alors celle de la figure B.1(a). Si à l'instant  $t$  la vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  du point  $\mathbf{r}$  a pour composantes  $v_1$  et  $v_2$ , alors celle  $\mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t + dt)$  du point  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  aura pour composantes  $v_1 + dx'_1 = v_1 + (\partial v_1 / \partial x_1) dx_1$  et  $v_2 + dx'_2 = v_2 + (\partial v_2 / \partial x_2) dx_2$ . A l'image de la Fig. B.1(a), ceci correspond à une *variation de volume* de l'élément de fluide.

Lorsqu'en revanche le tenseur  $e_{ij}$  est à trace nulle ( $(\partial v_i / \partial x_i) = 0$ ), la configuration de l'écoulement est alors celle de la figure B.1(b). Si à l'instant  $t$  la vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  du point  $\mathbf{r}$  a pour composantes  $v_1$  et  $v_2$ , alors celle  $\mathbf{v}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t + dt)$  du point  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  aura pour composantes  $v_1 + (\partial v_1 / \partial x_2) dx_2$  et  $v_2 + (\partial v_2 / \partial x_1) dx_1$ . A l'image de la Fig. B.1(b), ceci correspond à une *déformation* de l'élément de fluide sans variation de volume<sup>1</sup>, et les angles  $\alpha$  et  $\beta$  dont ont tourné les cotés  $dx_1$  et  $dx_2$  pendant le temps élémentaire  $dt$  sont donnés en première approximation (petits angles) par

$$\frac{d\alpha}{dt} \approx \frac{d \tan \alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{-[v_1(x_1, x_2 + dx_2) - v_1(x_1, x_2)] dt}{dx_2} \right\} = -\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{d\beta}{dt} \approx \frac{d \tan \beta}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{[v_2(x_1 + dx_1, x_2) - v_2(x_1, x_2)] dt}{dx_1} \right\} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \quad (\text{B.2})$$

Analysons ensuite le cas d'un champ de gradient de vitesse pour lequel  $e_{ij} = 0$ ; il ne subsiste alors que la partie anti-symétrique  $\omega_{ij}$  du tenseur des taux de déformations. Ce tenseur anti-symétrique  $\omega_{ij}$  est à trace nulle (donc pas de variations de volume) et les angles de rotation  $\alpha$  et  $\beta$  sont nécessairement

---

1. le lecteur pourra vérifier que la non-variation du volume de l'élément de fluide est une conséquence de la trace nulle de la matrice

égaux puisque si  $e_{ij} = 0$  alors  $\partial v_i / \partial x_j = -\partial v_j / \partial x_i$ , ce qui mène bien à  $\alpha = \beta$  par report dans les équations ci-dessus.

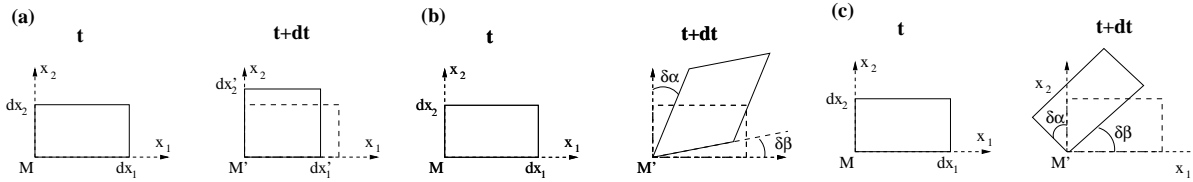


FIGURE B.1 – Déformations dans l'écoulement. **(a)** Déformation dans un écoulement lorsque la partie anti-symétrique du tenseur des taux de déformation est nulle ( $\omega_{ij} = 0$ ) et que sa partie symétrique ne comporte que des termes diagonaux. **(b)** Déformation dans un écoulement lorsque la partie anti-symétrique du tenseur des taux de déformation est nulle ( $\omega_{ij} = 0$ ) et que sa partie symétrique ne comporte que des termes diagonaux. **(c)** Déformation dans un écoulement lorsque la partie symétrique du tenseur des taux de déformation est nulle ( $e_{ij} = 0$ ).

En résumé, le tenseur des taux de déformation peut être décomposé en une partie symétrique  $e_{ij}$  et une partie anti-symétrique  $\omega_{ij}$ . La partie symétrique peut elle-même être décomposée en une partie diagonale traduisant les dilatations/compression du fluide, et une partie à trace nulle traduisant la déformation angulaire (et sans changement de volume) de l'élément de fluide. La partie anti-symétrique  $\omega_{ij}$  traduit quant à elle une rotation en bloc de l'élément de volume fluide.

# Bibliographie

- [1] G.K. Batchelor, “An introduction to fluid dynamics”, Cambridge university Press, 1970.
- [2] M. Bruneau “Manuel d’Acoustique Fondamentale”, ed. Hermès, Paris, 1998.
- [3] P. M. Morse, K. U. Ingard, “Theoretical Acoustics”, Princeton University Press, New Jersey, 1968.
- [4] A.D. Pierce, “Acoustics : an introduction to its physical principles and applications”, Mc Graw-Hill (2<sup>nd</sup> ed.), 1991.
- [5] C. Potel, M. Bruneau, “Acoustique Générale : équations différentielles et intégrales, solutions en milieux fluides et solides, applications”, Ed. Ellipses, Paris, 2006.
- [6] Rott N., “Thermoacoustics”, *Adv. Appl. Mech.*, 20 :135-175, 1980.