Concours de Jeux Mathématiques

Hiver 2011 en Mayenne

(© **Quadrature Infernale ; I.U.T. « Tech de Co »** 53000 LAVAL)

Réf : GH / courriel gilles.hainry@univ-lemans.fr

QUADRATURE INFERNALE

vous a proposé ce nouveau concours, visant à mettre à l'épreuve votre sagacité, à développer votre goût de la recherche et à titiller vos neurones…

Félicitations aux participants et merci aux parrains fidèles de Q.I. :

La Ville de Laval,

Le Département de la Mayenne,

Le Rotary-Club de Laval,

Le Crédit Agricole,

La Bijouterie Prieur-Bourdais,

Le département « Techniques de Commercialisation » de l'I.U.T. de Laval.

Voici les solutions des cinq énigmes

Q.I.

1. Réveillon en Vendée

© Quadrature Infernale, I.U.T. « Tech de Co » de Laval, 2011

Au lieu-dit Têque de Caux où il élève des huitres, tout le monde l'appelle Mô ; en ce 30 décembre 2011, la demande est là et Maurice LUX, notre ostréiculteur est certain d'écouler, grâce à son référencement dans quelques magasins de la région toutes les bourriches qu'il pourra remplir avant le lendemain matin.

Mô dispose encore de deux stocks d'huitres « Vendée-Atlantique », réputées parmi les meilleures : 290 kg d'huitres de numéro 4 (de taille moyenne) et 270 kg d'huitres de numéro 3 (un peu plus grosses). Il peut les vendre sous deux types de conditionnement : la bourriche « grand LUX » contenant 4 kg d'huitres de numéro 4 et 2 kg d'huitres de numéro 3 à 25 € ; la bourriche « super LUX » contenant 1,5 kg d'huitres de numéro 4 et 4,5 kg d'huitres de numéro 3 à 28 €.

De type « grand LUX » ou « super LUX », les bourriches sont des paniers identiques qui ne diffèrent que par l'étiquette que Mô y appose après remplissage ; Mô LUX dispose de 90 paniers, 72 étiquettes « grand LUX » et 52 étiquettes « super LUX » et n'a pas le temps de se réapprovisionner.

Grâce à l'aide de son fils qui a reçu à l'IUT de Laval des cours de mathématiques appliquées à des cas concrets, l'entreprise de Mô remplit le nombre de bourriches de chaque type lui permettant d'optimiser son chiffre d'affaires.

Par chance, il reste quelques huitres que Mô, ses employés et leurs familles dégusteront avec un bon Muscadet de Vendée et du beurre « Charentes-Poitou » lors de leur propre réveillon de Saint Sylvestre.

Combien reste-t-il d'huitres à Mô ? (arrondir si besoin à la réponse la plus proche)

a) 2 kg b) 8 kg c) 14 kg d) 20 kg e) 27 kg

Il s'agit d'un problème d'optimisation sous contraintes que nous allons résoudre « à l'ancienne » c'est à dire en utilisant les « bonnes vieilles méthodes » de programmation linéaire.

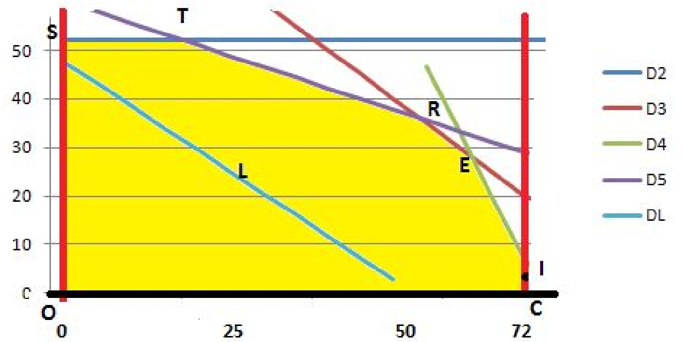
Notons x le nombre de bourriches « grand LUX » ;
y le nombre de bourriches « super LUX ».

Nous avons les contraintes suivantes :

$x \geq 0$	$y \geq 0$	
$x \leq 72$	$y \leq 52$	$x + y \leq 90$
$4x + 1{,}5y \leq 290$	$2x + 4{,}5y \leq 270$	

Les deux premières inéquations (logiques) nous limitent au quart de plan contenant les points d'abscisse et ordonnée positives.

Les cinq suivantes nous conduisent à éliminer successivement les demi-plans ne contenant pas l'origine O (0 ; 0) du repère limités par les cinq droites (D_1) : $x = 72$; (D_2) : $y = 52$; (D_3) : $x + y = 90$; (D_4) : $8x + 3y = 580$; (D_5) : $4x + 9y = 540$



Au final, après avoir tracé ces cinq droites et déterminé leurs points d'intersection, nous pouvons retenir comme « zone admissible » l'ensemble des points à coordonnées entières situés à l'intérieur du polygone (OSTREIC) dont les sommets sont ainsi définis :

O (0 ; 0) ; S (0 ; 52) ;
T (18 ; 52) ; R (54 ; 36) ;
E (62 ; 28) ; I (72 ; 4/3) ;
C (72 ; 0)

Le chiffre d'affaires K de Mô est donné par l'équation suivante (fonction économique) :

$K = 25x + 28y$ qui équivaut à $y = (-25x + K) / 28$

La courbe de cette fonction économique est une droite qui coupe l'axe des ordonnées (axe vertical (y'y)) en un point d'ordonnée K / 28. Ainsi, plus cette droite coupera (y'y) « haut » et plus K sera grand ; nous avons tracé sur le graphique la fonction économique (droite (D_L)) associée au point L (25 ; 25).

Quel que soit le point auquel nous voulons associer sa fonction économique, la courbe de celle-ci est une droite passant par ce point et parallèle à (D_L). Pour optimiser K, il suffit donc de trouver parmi les parallèles à (D_L) celle qui passe par un point à coordonnées entières de la zone admissible (le polygone (OSTREIC)) et qui coupe (y'y) « le plus haut possible ». C'est manifestement la droite passant par R (54 ; 36) « la meilleure »

Mô va donc remplir 54 bourriches « grand LUX » (il restera 18 étiquettes correspondantes) ;
36 bourriches « super LUX » (il restera 16 étiquettes correspondantes) ;
soit 90 bourriches (il ne restera aucun panier).

Le chiffre d'affaires réalisé sera de 2358 € (K = 54 . 25 + 36 . 28 = 1350 + 1008 = 2358)

270 kg d'huitres de numéro 4 seront vendues (54 . 4 + 36 . 1,5 = 216 + 54 = 270) ;

270 kg d'huitres de numéro 3 seront vendues (54 . 2 + 36 . 4,5 = 108 + 162 = 270) ;

Il restera exactement 290 kg – 270 kg = 20 kg d'huitres de numéro 4.

Réponse d

2. Le V$^{\text{ème}}$ corps

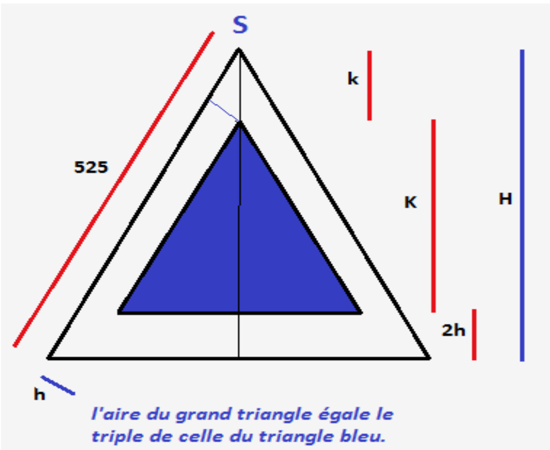
© Quadrature Infernale, I.U.T. « Tech de Co » de Laval, 2011

Quelques octogénaires se souviennent encore de l'arrivée des alliés en Mayenne en 1944 ; ils avaient sur l'épaule un écusson marquant leur appartenance : ceux du cinquième corps de l'armée américaine arboraient ainsi un pentagone bleu et blanc.

Emmanuel, dont le grand-père collectionne objets et documents relatifs à la deuxième guerre mondiale, a reproduit, en l'agrandissant beaucoup, sur une très grande feuille, ce badge militaire : il s'agit d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 525 mm (voir figure) ; cinq triangles égaux bleus y figurent, séparés les uns des autres et des bords du pentagone par des bandes blanches d'égale largeur. La surface blanche est double de la surface bleue.

Quel est la largeur des bandes blanches ? (arrondie à l'unité la plus proche)

a) 5 mm b) 53 mm c) 97 mm d) 101 mm e) 252 mm



Nous reproduisons ci-contre un cinquième du pentagone (après l'avoir découpé en parts égales) ; le grand triangle et le triangle bleu sont bien sûr semblables, isocèles et ont un angle au sommet de 72° (les angles à la base quant à eux sont de 54°).

Nous cherchons 2h, largeur des bandes blanches.
Soit H la hauteur du grand triangle
et K celle du triangle bleu.

Nous avons $H^2 = 3 K^2$ avec $H = 2h + K + k$
où $k = h / \sin 36$ et $H = 525 \cos 36$
Il s'ensuit que :

$$h = (H – K) / (2 + 1 / \sin 36)$$

ou encore $h = H . (1 - \sqrt{3} / 3) / (2 + 1 / \sin 36)$

et donc $h = 525 \cos 36 . (1 - \sqrt{3} / 3) / (2 + 1 / \sin 36) \approx 48{,}500$

ce qui nous donne $2h \approx 97$

Réponse c

<u>**Compléments**</u> :

Le lecteur courageux pourra tenter de démontrer que :

$$2h = 525 . (\sqrt{6} - \sqrt{2}) . (\sqrt{(105 + 45 \sqrt{5})} - \sqrt{(75 + 33 \sqrt{5})}) / 12$$

ou encore $$2h = 175 . (\sqrt{6} - \sqrt{2}) . (\sqrt{(105 + 45 \sqrt{5})} - \sqrt{(75 + 33 \sqrt{5})}) / 4$$

3. Le pp lavallois

© Quadrature Infernale, I.U.T. « Tech de Co » de Laval, 2011

Léon-Noël, toujours préoccupé par la recherche de nombres entiers caractéristiques, étudie en ce moment les palindromes premiers, en abrégé pp : 2, 3, 5, 7 le sont évidemment, mais aussi 11, 101… 797… ou 9686869. Habitant en Mayenne, il a décidé, après avoir classé par ordre croissant tous ceux ayant moins de 9 chiffres d'appeler pp lavallois le cinquante-troisième nombre premier palindrome.

Mais, lequel de ces nombres est le pp lavallois ?

a) 20702 b) 31513 c) 90309 d) 70507 e) 1234321

Notons pour commencer que 20702 est pair, 90309 multiple de 3 (comme la somme de ses chiffres) et 1234321 multiple de 11 (comme la différence entre la somme de ses chiffres de rang pair et la somme de ses chiffres de rang impair). Il ne reste plus que deux possibilités : 31513 et 70507…

Le programme ci-dessous écrit en « python » (merci à Emmanuel) construit puis affiche avec numéro d'ordre une liste de palindromes premiers (palprem); sans maîtriser ce langage de programmation, on voit que la liste est donnée pour les palindromes premiers à un puis deux chiffres, puis poursuivie grâce au programme en retenant parmi tous les palindromes à trois, puis cinq, puis sept, puis neuf chiffres ceux qui sont premiers… Bien sûr, on néglige les palindromes à quatre, six ou huit chiffres qui sont tous des multiples de 11 (on peut en trouver une explication par exemple sur la page http://perso.univ-lemans.fr/~hainry/articles/palind11.html).

```
import math
def isprime(n):
    for k in [1+2*x for x in range(1, 1+int(math.sqrt(1+n/4)))]:
        if n%k == 0 :
            return False
    return True
palprem = [2, 3, 5, 7, 11]
for a in [1, 3, 7, 9]:
    for b in range(10):
        w = 101*a + 10*b
        if isprime(w):
            palprem.append(w)
for a in [1, 3, 7, 9]:
    for b in range(10):
        for c in range(10):
            w = 10001*a + 1010*b + 100*c
            if isprime(w):
                palprem.append(w)
for a in [1, 3, 7, 9]:
    for b in range(10):
        for c in range(10):
            for d in range(10):
                w = 1000001*a + 100010*b + 10100*c + 1000*d
                if isprime(w):
                    palprem.append(w)
for a in [1, 3, 7, 9]:
    for b in range(10):
        for c in range(10):
            for d in range(10):
                for e in range(10):
                    w = 100000001*a + 10000010*b + 1000100*c + 101000*d + 10000*e
                    if isprime(w):
                        palprem.append(w)
for k in range(len(palprem)):
    print k+1, "  -   ", palprem[k]
```

ci-dessous le résultat, limité aux 99 premiers palindromes premiers :

1 -> 2 ---- 2 -> 3 ---- 3 -> 5 ----
4 -> 7 ---- 5 -> 11 ---- 6 -> 101 ---- 7 -> 131 ---- 8 -> 151 ---- 9 -> 181 ---- 10
-> 191 ---- 11 -> 313 ---- 12 -> 353 ---- 13 -> 373 ---- 14 -> 383 ---- 15 -> 727 ---- 16
-> 757 ---- 17 -> 787 ---- 18 -> 797 ---- 19 -> 919 ---- 20 -> 929 ---- 21 -> 10301 ----
22 -> 10501 ---- 23 -> 10601 ---- 24 -> 11311 ---- 25 -> 11411 ---- 26 -> 12421 ---- 27 -> 12721 ----
28 -> 12821 ---- 29 -> 13331 ---- 30 -> 13831 ---- 31 -> 13931 ---- 32 -> 14341 ---- 33 -> 14741 ----
34 -> 15451 ---- 35 -> 15551 ---- 36 -> 16061 ---- 37 -> 16361 ---- 38 -> 16561 ---- 39 -> 16661 ----
40 -> 17471 ---- 41 -> 17971 ---- 42 -> 18181 ---- 43 -> 18481 ---- 44 -> 19391 ---- 45 -> 19891 ----
46 -> 19991 ---- 47 -> 30103 ---- 48 -> 30203 ---- 49 -> 30403 ---- 50 -> 30703 ---- 51 -> 30803 ----
52 -> 31013 ---- **53 -> 31513** ---- 54 -> 32323 ---- 55 -> 32423 ---- 56 -> 33533 ---- 57 -> 34543 ----
58 -> 34843 ---- 59 -> 35053 ---- 60 -> 35153 ---- 61 -> 35353 ---- 62 -> 35753 ---- 63 -> 36263 ----
64 -> 36563 ---- 65 -> 37273 ---- 66 -> 37573 ---- 67 -> 38083 ---- 68 -> 38183 ---- 69 -> 38783 ----
70 -> 39293 ---- 71 -> 70207 ---- **72 -> 70507** ---- 73 -> 70607 ---- 74 -> 71317 ---- 75 -> 71917 ----

76 -> 72227 ---- 77 -> 72727 ---- 78 -> 73037 ---- 79 -> 73237 ---- 80 -> 73637 ---- 81 -> 74047 ----
82 -> 74747 ---- 83 -> 75557 ---- 84 -> 76367 ---- 85 -> 76667 ---- 86 -> 77377 ---- 87 -> 77477 ----
88 -> 77977 ---- 89 -> 78487 ---- 90 -> 78787 ---- 91 -> 78887 ---- 92 -> 79397 ---- 93 -> 79697 ----
94 -> 79997 ---- 95 -> 90709 ---- 96 -> 91019 ---- 97 -> 93139 ---- 98 -> 93239 ---- 99 -> 93739 ----

On voit que le pp lavallois est 31513 (par contre, 70507 étant le 72$^{\text{ème}}$ palindrome premier est le pp manceau).

Réponse b

4. Les trois frères

© Quadrature Infernale, I.U.T. « Tech de Co » de Laval, 2011

Monsieur et madame GLYNS, tous les deux professeurs de mathématiques à Laval, en Mayenne, ont trois enfants : Pierre, Evariste et Emmanuel ; ils les ont habitués tout jeunes à résoudre des énigmes logiques et mathématiques. Vers la fin du vingtième siècle, après un séjour en Espagne qui avait valu à chacun des trois enfants un surnom hispanisé, ils travaillèrent notamment à la recherche de triagonydes *: On appelle triagonyde d'un polygone convexe tout triangle dont les sommets sont des sommets du polygone et dont les côtés ne sont pas des côtés du polygone ;* Pierre, dit Pedrito avait 7 ans et réussit à montrer qu'un polygone ayant 7 côtés possède 7 triagonydes ; Evariste, dit Evaristo avait 8 ans et prouva qu'un polygone ayant 8 sommets possède 16 triagonydes ; Emmanuel, dit Manuelito, avait 9 ans et démontra qu'un polygone ayant 9 côtés possède 30 triagonydes ; « c'est curieux, dit Hilaire, le père de famille, le nombre total des triagonydes des trois polygones ayant respectivement un nombre de côtés égal à votre nombre d'années est 53, le numéro du département de la Mayenne. »

Aujourd'hui, 15 octobre 2011, les enfants ont grandi, mais Emmanuel a toujours deux ans de plus que Pierre qui a un an de moins qu'Evariste… Réunis pour une fête de famille, ils discutent avec leurs parents des énigmes qu'ils ont résolues et repensent à ces fameux triagonydes de polygones. « C'est étonnant, dit Hilaire, le nombre total des triagonydes des trois polygones ayant respectivement un nombre de côtés égal à votre nombre d'années est précisément 2011, le numéro de l'année en cours. »

Mais, quel est l'âge de Pierre ?

a) 16 ans b) 17 ans c) 18 ans d) 19 ans e) 20 ans

Observons, pour commencer les premiers résultats. Il n'y a aucun triagonyde dans un pentagone ; il y en a 2 dans un hexagone, 7 dans un heptagone, 16 dans un octogone et 30 dans un ennéagone. D'où le tableau des premiers résultats :

Nombre de sommets	5	6	7	8	9
Nombre de triagonydes	0	2	7	16	30

Prolonger la suite de nombres de la première ligne du tableau est simple ; prolonger la seconde ligne l'est moins ; c'est pourtant ce que l'on aimerait faire !

Nous calculons la suite des différences successives entre les termes de notre suite de nombres de triagonydes, puis, comme cela ne suffit pas, de nouveau la suite des différences successives entre les termes de cette suite de différences.

Nombre de sommets	5	6	7	8	9
Nombre de triagonydes	0	2	7	16	30
Suite de différences		2	5	9	14
Nouvelles différences			3	4	5

L'observation de la dernière ligne de ce tableau nous amène à conjecturer que cette dernière suite continue avec 6 , 7 , 8 , 9 … et donc la précédente avec 20 (14 + 6) , 27 (20 + 7) , 35 (27 + 8) , 44 (35 + 9) … et donc la suite des nombres de triagonydes avec 50 (30 + 20) puis 77 (50 + 27) et 112 (77 + 35) et 156 (112 + 44) etc…

En définitive, la suite des nombres de triagonydes est : 0 ; 2 ; 7 ; 16 ; 30 ; 50 ; 77 ; 112 ; 156 ; 210 ; 275 ; 352 ; 442 ; 546 ; 665 ; 800 …et la suite des sommes de trois termes de cette suite est donc : 9 ; 25 ; **53** ; 96 ; 157 ; 239 ; 345 ; 478 ; 641 ; 837 ; 1069 ; 1340 ; 1653 ; **2011** …

2011 étant le $11^{ème}$ terme après 53, il s'ensuit que Pierre avait 18 ans (7 + 11) le 15 octobre 2011.

Réponse c

Compléments :

Conjecturer n'étant pas prouver, nous allons établir les résultats ci-dessus de manière plus rigoureuse. Soit N le nombre de sommets (supposé plus grand que 4) d'un polygone.

Il existe C(N ; 3) triangles ayant pour sommets des sommets (différents) du polygone ; et l'on a C(N ; 3) = N . (N – 1) . (N – 2) / 6

Parmi ceux-ci, il faut enlever les N triangles ayant 3 sommets consécutifs , mais également ceux dont un côté (et un seul) est un côté du polygone, qui sont N . (N – 4).

On a donc T(N) = [N . (N – 1) . (N – 2) / 6] – [N (1 + N – 4)] triagonydes ; soit après simplification :

T(N) = N.(N² - 9.N + 20) / 6 ou encore T(N) = N.(N – 4).(N – 5) / 6

Ainsi, T(**7**) + T(8) + T(9) = 7 + 16 + 30 = **53**

et T(**18**) + T(19) + T(20) = 546 + 665 + 800 = **2011**

ce qui montre bien que Pierre avait 18 ans le 15 octobre 2011

Réponse c

Remarque :

Pierre avait 7 ans en 2000, cette année étant bien à la fin du vingtième siècle ! (bien sûr, la première année du vingt-et-unième siècle est 2001).

Appendice : L' enoglavalgone

© Quadrature Infernale, I.U.T. « Tech de Co » de Laval, 2005

L'enoglavalgone est un polygone ubuesque qui a exactement 2004 côtés, et bien sûr autant de sommets. Un triangle a trois côtés et zéro diagonale ; un quadrilatère a quatre côtés et deux diagonales ; un pentagone a cinq côtés et cinq diagonales ; un hexagone a six côtés et neuf diagonales…

Combien un enoglavalgone a-t-il de diagonales ?

Proposé lors d'un précédent concours début 2005, cette énigme est rappelée ici pour son analogie avec celle des trois frères. Le lecteur est invité à retrouver le résultat, à savoir 2005002 qui constitue le palindrome du passage de 2004 à 2005, résultat de l'opération 2004 x 2001 / 2 que le Père UBU, Roi du palindrome et de LAVAL, résumerait ainsi :

2001 x 1002 = 1002 x 2001 = 2005002 = 1002 x 2001 = 2001 x 1002

5. Le prix du fromage

© Quadrature Infernale, I.U.T. « Tech de Co » de Laval, 2011

L'entreprise Tulas-Trop, installée à la proximité de Laval, vend chaque jour 275 exemplaires de son produit « vache à lait », le César, au prix de 1,25 € l'unité ; une étude de marché montre que chaque baisse (respectivement hausse) de 0,05 € du prix de vente provoquerait une augmentation (respectivement diminution) de 25 du nombre d'exemplaires vendus. Le prix de revient d'un exemplaire de César est de 0,30 €. L'entreprise cherche à optimiser son bénéfice (montant des ventes diminué du coût de revient).

Quel est le meilleur prix de vente ?

a) 1,45 € b) 1,25 € c) 1,10 € d) 1,05 € e) 0,90 €

Notons P le prix de vente du César, Q la quantité (nombre de produits vendus),
D la dépense (soit le coût de revient), R la recette (chiffre d'affaires)
et enfin B le bénéfice (marge nette).

On a les résultats suivants (les calculs sont relativement simples, notamment si l'on utilise pour les deux premières lignes du tableau la fonction « recopie incrémentée » d'un tableur) :

P	0,90	0,95	1,00	**1,05**	1,10	1,15	1,20	**1,25**	1,30	1,35	1,40	1,45
Q	450	425	400	**375**	350	325	300	**275**	250	225	200	175
R = P.Q	405,00	403,75	400,00	**393,75**	385,00	373,75	360,00	**343,75**	325,00	303,75	280,00	253,75
D = 0,30.Q	135,00	127,50	120,00	**112,50**	105,00	97,50	90,00	**82,50**	75,00	67,50	60,00	52,50
B = R - D	270,00	276,25	280,00	**281,25**	280,00	276,25	270,00	**261,25**	250,00	236,25	220,00	201,25

Il apparaît clairement que B est maximum pour P = 1,05 €

(i.e. : en diminuant le prix de 0,20 €, on augmente la marge de 20 €).

Réponse d

<u>Compléments</u> :

On montre que Q = 900 – 500.P

Q est nul pour P = 1,80 ; rien ne servirait donc de vendre le César plus de 1,80 €.

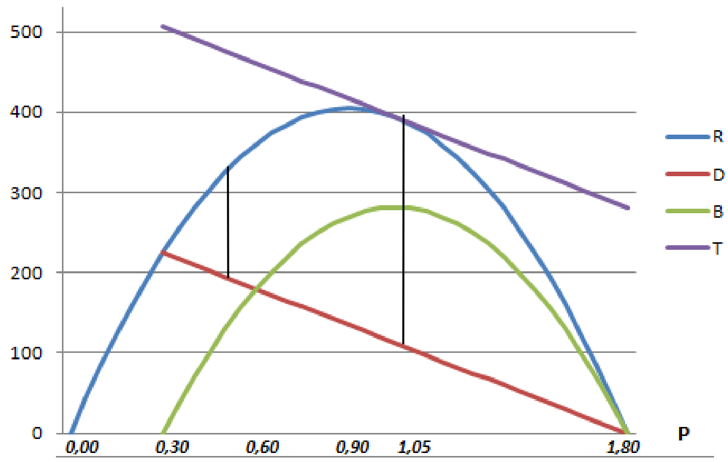
On se limite donc pour l'étude du chiffre d'affaires, ici noté R (pour recette) sur l'intervalle [0,00 ; 1,80]

R = P.Q = 900.P – 500.P²

R' = 900 – 1000.P est nul pour P = 0,90

Ainsi, c'est pour P = 0,90 € que le chiffre d'affaires est maximum…

Mais on doit tenir compte des coûts de revient (dépense) notés D ; bien sûr, maintenant, on se limite à l'intervalle d'étude [0,30 ; 1,80] car il est exclu de vendre à perte !



sur ce schéma apparaissent deux segments de droites (le "plus bas" représente la dépense D, l'autre la tangente à la courbe de R en son point d'abscisse P = 1,05) et deux segments de paraboles (B et R).

D = 0,30.Q = 270 – 150.P et B = R – D = 1050.P – 500.P² - 270

B' = 1050 – 1000.P est nul pour P = 1,05 ; c'est donc pour P = 1,05 € que la marge est maximale.

Réponse d

N.B. : Le schéma montre (observer les deux petits segments verticaux) que la marge B qui est nulle pour P = 0,30 croît jusqu'à ce que P = 1,05, puis décroît pour atteindre de nouveau 0 quand P = 1,80.

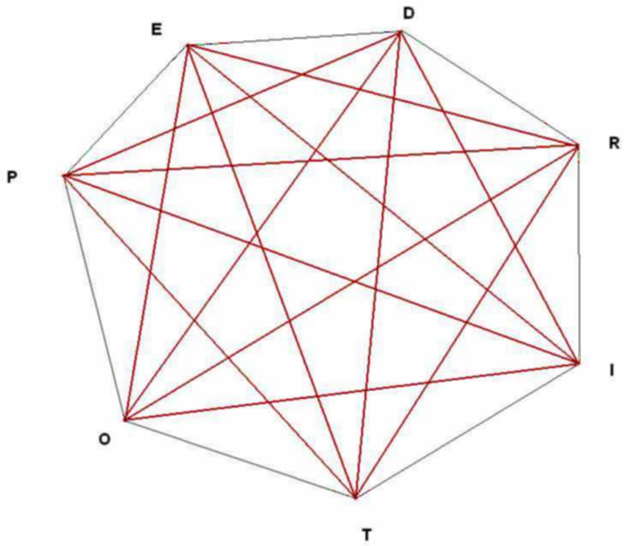
Le maximum de B est atteint lorsque la parabole courbe de R admet une tangente parallèle à la droite courbe de D.

Les 15 gagnants (ordre alphabétique des prénoms) sont :

Alexis LEMESLE lycéen - * - André GOURVES grand public - * - Auguste FOUCAULT lycéen - * - Charlotte HELBERT lycéenne - * - Denis GEMOND enseignant - * - Jérôme GALARD grand public - * - Julien LALONNIER lycéen - * - Lauriane GAUTIER etudiante - * - Louis-Etienne CHOPIN lycéen - * - Marie-Claude HELBERT grand public - * - Maurice GAUTIER grand public - * -Samantha T'KINT grand public - * - Tanguy GOUPIL lycéen - * - Thierry PLAI grand public - * - Vincent BARRE enseignant - * -

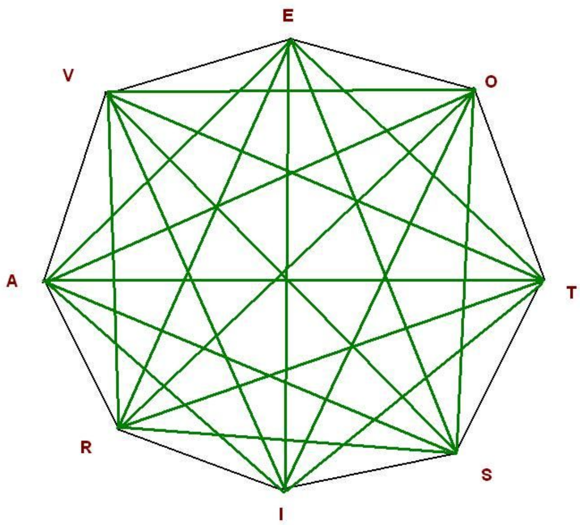
Tous ont résolu avec succès quatre ou cinq énigmes et sont relativement proches de la bonne réponse à la question subsidiaire (c'était 18). Il y a eu 49 participants.

Quelques polygones et leurs triagonydes



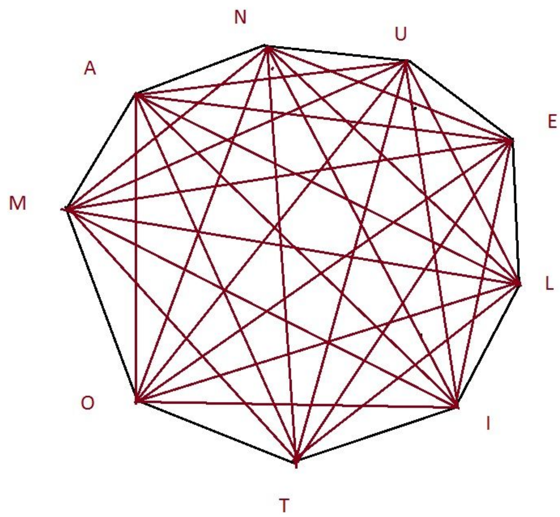
Le polygone à 7 côtés de PEDRITO et ses 7 triagonydes

(OER) ; (OEI) ; (ODI) ; (PDI) ; (PDT) ; (PRT) et (ERT)



Le polygone à 8 côtés d'EVARISTO et ses 16 triagonydes

(EAI) ; (EAS) ; (EAT) ; (ERS) ; (ERT) ; (EIT) ; (VRS) ; (VRT) ; (VRO) ; (VIT) ; (VIO) ; (VSO) ; (AIT) ; (ASO) ; (ATE) et (RSO)



Le polygone à 9 côtés de MANUELITO et ses 30 triagonydes

(MNE) ; (MNL) ; (MNI) ; (MNT) ; (MUL) ; (MUI) ; (MUT) ; (MEI) ; (MET) ; (MLT) ; (AUL) ; (AUI) ; (AUT) ; (AUO) ; (AEI) ; AET) ; etc...