Concours de Jeux Mathématiques

janvier 2009 - Palmarès

Fête de la Science 2008 en Mayenne

(© **Quadrature Infernale ; I.U.T. « Tech de Co »** 53000 LAVAL)
Réf : GH / courriel gilles.hainry@univ-lemans.fr

QUADRATURE INFERNALE :

Créée en 1988 par des étudiants du département Techniques de Commercialisation de Laval l'association Quadrature Infernale a vingt ans révolus ; elle vous a proposé ce concours, cherchant de nouveau à mettre à l'épreuve votre sagacité, à développer votre goût de la recherche et à titiller vos neurones…

Cinq énigmes vous attendaient (consacrées respectivement aux nombres premiers, identités remarquables, palindromes, voyages et cryptogrammes), suivies de la traditionnelle question subsidiaire destinée à départager d'éventuels ex-aequo.

Quarante-neuf concurrents ont rempli un bulletin réponse et quinze d'entre eux sont récompensés : un collégien, aucun lycéen, quatre étudiants, trois enseignants et sept « grand public ».

Félicitations à tous !

Coordination départementale
Fête de la science

Concours de Jeux Mathématiques
novembre 2008

SOLUTIONS

(© **Quadrature Infernale ; I.U.T. « Tech de Co »** 53000 LAVAL)
Réf : GH / courriel gilles.hainry@univ-lemans.fr

1. Premier, la Mayenne

Chacun connaît les numéros minéralogiques des départements de la Région des Pays de la Loire ; on a 44 = 4 x 11 ; 85 = 5 x 17 ; 72 = 6 x 12 ; 49 = 7 x 7 ; chacun des quatre nombres précédents a donc des diviseurs autres que 1 et lui-même, contrairement à 53 qui est premier (il a exactement deux diviseurs : 1 et 53).

Quelle est la région de France qui compte le plus grand nombre de départements dont le numéro est premier ?

Les nombres premiers pouvant être des numéros de départements de régions de France sont :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89.
Il y en a 24 pour 22 régions. Dans 6 régions (dont la Corse aux départements 2A et 2B non entiers) aucun numéro de département n'est premier ; 9 régions comptent un seul département de numéro premier (à l'instar des Pays de la Loire) ; 6 régions en ont deux ; une seule région (PACA) en a trois (5 ; 13 ; 83).

<u>Réponse</u> : **Provence, Alpes, Côte d'azur**.

2. Identités remarquables

On a : $44 = 12^2 - 10^2$ (= 144 – 100) ; $49 = 7^2 - 0^2$ (= 49 – 0) ; $53 = 27^2 - 26^2$ (= 729 – 676) ; $72 = 11^2 - 7^2$ (= 121 – 49) ; et $85 = 11^2 - 6^2$ (=121 – 36). Ainsi, chacun des départements de la région des Pays de la Loire a un numéro qui est la différence de deux carrés (d'entiers).

Combien y a t-il (en comptant les Pays de la Loire et en excluant la Corse dont les départements ont des numéros [2A et 2B] qui ne sont pas des nombres) de régions de France dont tous les départements ont un numéro qui est la différence de deux carrés ?

Il y a trois sortes d'entiers : les impairs, les multiples de quatre, et les autres.

1) Soit N un impair, on a $N = 2 . K + 1$;
posons $A + B = 2 . K + 1$ et $A – B = 1$; on obtient $A = K + 1$ et $B = K$;
on a alors $N = (A + B) . (A – B) = A^2 - B^2$ et N est la différence de deux carrés.

2) Soit N un multiple de 4, on a $N = 4 . K$;
posons $A + B = 2 . K$ et $A – B = 2$; on obtient $A = K + 1$ et $B = K – 1$;
on a alors $N = (A + B) . (A – B) = A^2 - B^2$ et N est la différence de deux carrés.

3) Soit N un autre nombre ;
N est un nombre pair non multiple de 4 et donc le produit d'un pair par un impair.
si $N = A^2 - B^2$, alors $N = (A + B) . (A – B)$ et (A + B) est pair, tandis que (A – B) est impair (ou vice et versa) ; 2 . A est donc impair (de même que 2 . B) , ce qui n'est pas possible pour A entier (idem pour B). N ne peut donc pas être la différence de deux carrés.

Ainsi, les départements dont le numéro n'est pas différence de deux carrés (d'entiers) sont :
2 ; 6 ; 10 ; 14 ; 18 ; 22 ; 26 ; 30 ; 34 ; 38 ; 42 ; 46 ; 50 ; 54 ; 58 ; 62 ; 66 ; 70 ; 74 ; 78 ; 82 ; 86 ; 90 ; 94
Il y en a aussi 24 et il est assez facile de rendre à chaque région les numéros qui lui appartiennent. Les régions dont tous les départements ont un numéro qui est la différence de deux carrés sont donc les autres : Alsace ; Aquitaine ; Auvergne ; Limousin ; Haute Normandie ; Pays de la Loire.

Réponse : **6**.

3. Palindromes en Pays de la Loire

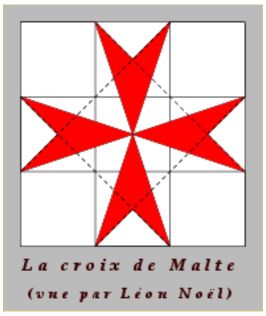
Avec la Mayenne de préfecture **LAVAL** et la Loire Atlantique de numéro **44**, la région des Pays de la Loire est vraiment la région des palindromes, d'autant plus que 44 x 53 = **2332** et que la somme des numéros de ses cinq départements est **303**.

Mais, quel est le plus petit palindrome multiple commun (p.p.p.m.c.) de 49 et 85 ?

49 et 85 sont premiers entre eux (ils n'ont de diviseur commun que 1) ; leur plus petit commun multiple (p.p.c.m.) est donc leur produit, soit 49 . 85 = 4165.
Le plus petit palindrome multiple commun (p.p.p.m.c.) de 49 et 85 est donc le plus petit multiple de 4165 qui se trouve être un palindrome.
Les multiples de 4165 sont : 4165 ; 8330 ;12495 ; 16660 ; 20825 ; 24990 ; 29155 ; 33320 ; 37485 ; 41650 ; 45815 ; 49980 ; 54145 …et point n'est besoin d'aller plus loin puisque 54145 est un palindrome.

Réponse : **54145**.

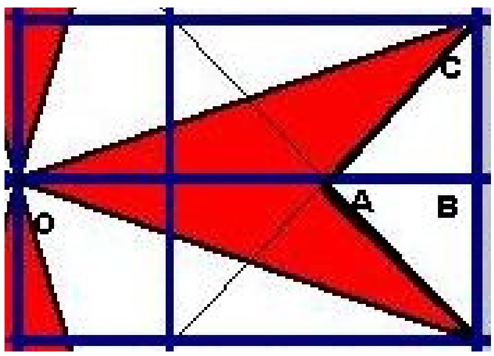
4. Voyage palindrome



LEON NOEL est né à **NOYON** ; il s'est marié à **SEES** en **1991** et habite **LAVAL** depuis **2002** ; féru de palindromes et de géométrie, Léon vient de passer une semaine à Malte pour fêter ses **44** ans ; sur le trajet retour, **LA VALETTE LAVAL** (car + avion + train), il réfléchit à la croix de Malte. Léon finit par imaginer la construction de cette croix dans un grand carré partagé en neuf petits carrés identiques (voir figure) ; Léon s'amuse en remarquant qu'alors qu'il a choisi un très grand carré dont le côté (exprimé en millimètres) est un entier palindrome, la surface de « sa » croix de Malte, **20402** (en mm²) en est un autre.

Mais, combien mesure le périmètre de cette croix ? (on arrondira à l'unité la plus proche).

Nous avons reproduit ci-contre, en la grossissant, l'une des quatre double branches de la croix ; nous supposerons que les neuf petits carrés ont pour côté a, et donc que le grand carré a pour côté 3.a ; on a ainsi OB = 1,5.a ; OA = a ; BC = 0,5 a.



L'aire du triangle (OAC) est 0,5.OA.BC = 0,25.a^2 ; la double branche a donc pour aire 0,5.a^2 et la croix quatre fois plus, soit 2.a^2.
Ainsi, 2.a^2 = 20402 ; d'où a^2 = 10201 et a = 101.
Le grand carré a donc pour côté 303 (palindrome qui – hasard des mathématiques ?- est associé à la région des Pays de la Loire [voir plus haut]).
La double branche a pour périmètre 2.(OC + CA) ; par conséquent, la croix a un périmètre quatre fois plus grand, soit 8.(OC + CA) = 8.a.(r (1,5² + 0,5²) + r (0,5²+0,5²)) = 4.a.(r (10) + r (2)) où la notation r (k) désigne la racine de k.
Ce périmètre exprimé en millimètres est donc environ 1848,9 que l'on arrondit (par excès) à l'unité la plus proche : 1849.

Réponse : **1849**.

5. Les sœurs jumelles

© Quadrature Infernale, I.U.T. « Tech de Co » de Laval, 2008

Le département T.C. (Techniques de Commercialisation) de l'I.U.T. (Institut Universitaire de Technologie) de **LAVAL** a fêté ses vingt ans cette année ; **EVE** et **ANNA**, deux sœurs jumelles, y ont obtenu le D.U.T. (Diplôme Universitaire de Technologie ¤ niveau bac + 2) en **2002** ; présentes à la fête, les deux sœurs, nées le même jour, au XX^{ème} siècle, ont soumis aux autres anciens l'énigme suivante :
« Nous sommes nées le L A / V / A L et vous trouverez notre date de naissance en résolvant le cryptogramme
I U T x T C = L A V A L , multiplication dans laquelle les sept lettres C, U, L, T, I, V, A représentent sept chiffres différents non nuls. »

Quelle est la date de naissance d'EVE et ANNA ?

Anna et Eve ont obtenu leur DUT en 2002 ; elles avaient alors entre 14 et 28 ans et sont donc nées entre 74 et 88 ; si c'était 74, elles seraient nées le 47° jour du mois de numéro V, ce qui est bien sur impossible, tout comme elles ne peuvent être nées en 75, 76, 77, 78, 79, 83, 84, 85, 86, 87 ou 88 ; elles ne sont pas nées en 80 puisque les sept chiffres cherchés (dont L) sont non nuls.
Les deux sœurs sont donc nées le 18 / V / 81 ou le 28 / V / 82.

Si AL = 81

LAVAL = 18V81 = IUT x TC ; donc T et C sont impairs, différents l'un de l'autre, différents de 1, et leur produit se termine par 1 ;
seuls 3 et 7 conviennent et on a alors TC = 37 ou TC = 73.
18281, 18481, 18581, 18681 ne sont divisibles ni par 37, ni par 73 ;
18981 n'est pas divisible par 73 ;
par contre, 18981 = 37 x 513, mais cette solution ne convient pas (on aurait U = L).

Donc AL = 82

LAVAL = 28V82 = IUT x TC ; donc T et C sont différents l'un de l'autre, différents de 2 et de 8, et leur produit se termine par 2 ;
les seules possibilités sont : TC = 34 ; TC = 43 ; TC = 67 ; TC = 76.
28182, 28582 ne sont divisibles ni par 34, ni par 43, ni par 67, ni par 76 ;
28382, 28482 ne sont divisibles ni par 67, ni par 76 ;
28682, 28782 ne sont divisibles ni par 34, ni par 43 ;
28982 n'est divisible ni par 34, ni par 67, ni par 76 ;
par contre, 28982 = 43 x 674 ce qui donne CULTIVA = 3724698 avec 7 chiffres différents non nuls.

Anna et Eve sont donc nées le 28 septembre 1982

Réponse : **28 / 9 / 82**.

NB : Une autre manière de résoudre cet exercice s'offrait aux informaticiens ; un petit programme permet en effet de trouver toutes les solutions du cryptogramme I U T x T C = L A V A L , à savoir 267 x 73 = 19491 ; 423 x 37 = 15651 ; 564 x 48 = 27072 ; 674 x 43 = 28982 parmi lesquelles seule la dernière répond au problème, puisque la première correspond à un DUT obtenu à 11 ans (impossible), la deuxième à 51 ans (jamais vu à Laval), la troisième donnant V = 0 ce qui est contraire aux hypothèses et n'est pas un numéro de mois !

. Enigme cadeau : Les copains de Janina

© Quadrature Infernale, I.U.T. « Tech de Co » de Laval, 2009

Ils sont cinq garçons entreprenants qui, sous la houlette de Janina, femme de tête accorte et dynamique, ont monté une petite cafétéria dans un vieux wagon restaurant désaffecté près du parc universitaire de MAGOG : Nick s'occupe de l'approvisionnement et de la gestion des stocks ; Antonio vend les pizzas 3,50 $ l'unité ; Dave est préposé aux sandwiches facturés 2,60 $ l'un ; El Jo délivre les boissons à 1,50 $ la canette ; Small fait office de garçon de salle-plongeur. Caissière et trésorière, Janina évalue le bénéfice à 0,90 $ par pizza vendue, 1,10 $ par sandwich et 0,70 $ par canette. Le 27 janvier 2009, Nick nous affirme que 142 articles ont été vendus ; la recette est de 313 $ et le bénéfice de 121 $ selon Janina.

Quels sont les nombres p de pizzas, s de sandwiches et c de canettes vendus ce 27 janvier ?