Concours de Jeux Mathématiques

Fête de la Science **novembre 2009** **SOLUTIONS**

(© **Quadrature Infernale ; I.U.T. « Tech de Co »** 53000 LAVAL ; mél : gilles.hainry@univ-lemans.fr)

1. La cagnotte

Six amis d'Argentré, petite commune de l'est de l'agglomération lavalloise, en Mayenne (53), ont constitué une cagnotte : Anna y a mis a pièce(s) de 1 centime ; Roy, r pièce(s) de 2 centimes ; Gaëlle, g pièce(s) de 5 centimes ; Elise, e pièce(s) de 10 centimes ; Noël, n pièce(s) de 20 centimes ; et Tom, t pièce de 50 centimes… Finalement il y a 53 centimes dans la cagnotte... Bien sûr, les six entiers g, r, e, n, a, t ne sont ni tous nuls, ni tous non nuls !

Mais, quel est le nombre de possibilités ?
(c'est à dire le nombre de sextuplets (a ; r ; g ; e ; n ; t) différents qui conviennent ?)

a) 53 b) 350 c) 503 d) 530 e) 720

Solution : a, r et g sont des pièces jaunes ; e, n et t des pièces rouges

avec les pièces rouges, il y a 4 manières de faire 50 centimes :
(e ; n ; t) = (0 ; 0 ; 1) ou (1 ; 2 ; 0) ou (3 ; 1 ; 0) ou (5 ; 0 ; 0) ;
il y a 3 manières de faire 40 centimes :
(e ; n ; t) = (0 ; 2 ; 0) ou (2 ; 1 ; 0) ou (4 ; 0 ; 0) ;
il y a 2 manières de faire 30 centimes :
(e ; n ; t) = (1 ; 1 ; 0) ou (3 ; 0 ; 0) ;
il y a 2 manières de faire 20 centimes :
(e ; n ; t) = (0 ; 1 ; 0) ou (2 ; 0 ; 0) ;
il y a 1 manière de faire 10 centimes :
(e ; n ; t) = (1 ; 0 ; 0) ;
il y a 1 manière de faire 0 centime :
(e ; n ; t) = (0 ; 0 ; 0).

avec les pièces jaunes, il y a 2 manières de faire 3 centimes :
(a ; r ; g) = (1 ; 1 ; 0) ou (3 ; 0 ; 0) ;
il y a 14 manières de faire 13 centimes :
(a ; r ; g) = (1 ; 1 ; 2) ou (3 ; 0 ; 2)
ou (0 ; 4 ; 1) ou (2 ; 3 ; 1) ou (4 ; 2 ; 1) ou (6 ; 1 ; 1) ou (8 ; 0 ; 1)
ou (1 ; 6 ; 0) ou (3 ; 5 ; 0) ou (5 ; 4 ; 0) ou ….. ou (13 ; 0 ; 0)
de même,
il y a 36 manières de faire 23 centimes ;
68 manières de faire 33 centimes ;
110 manières de faire 43 centimes ;
et 162 manières de faire 23 centimes.

avec les pièces jaunes et les pièces rouges,
puisque 53 = 50 + 3 = 40 + 13 = 30 + 23 = 20 + 33 = 10 + 43 = 0 + 53 ,
le nombre de sextuplets qui conviennent est :
4 x 2 + 3 x 14 + 2 x 36 + 2 x 68 + 1 x 110 + 1 x 162 = 530

réponse d

2. Semaines mayennaises

Après trois ans passés au département T.C. de l'I.U.T. de Laval, diplôme universitaire de technologie et licence professionnelle de commerce en poche, Amina est maintenant responsable de secteur dans la grande distribution. Aujourd'hui, agenda en main, elle gère les commandes devant être livrées fin décembre ; c'est ainsi qu'elle se rend compte qu'il y a, en 2009, une semaine de numéro 53 – une semaine mayennaise en quelque sorte ! *
Chaque année, les semaines sont numérotées chronologiquement, de 1 à 52 ou 53 ; lorsqu'une semaine est à cheval sur l'année N et l'année N + 1, elle est la dernière semaine de l'année N si elle compte plus de jours en décembre N qu'en janvier N + 1, et la première semaine de l'année N + 1 dans le cas contraire.

Combien y a-t-il de semaines mayennaises au XXI ^{ème} siècle ?

a) 15 b) 17 c) 18 d) 19 e) 53

Solution : les années comprenant une semaine mayennaise ont pour lettre(s) dominicale(s) D , DC ou ED.

lettre dominicale D : il s'agit des années « ordinaires » qui commencent un jeudi ;
ces années se terminent également un jeudi ; ainsi, les 1, 2, 3 et 4 janvier constituent la semaine 1 ; et les 28, 29, 30 et 31 décembre la semaine 53.
On vérifie aisément que 51 semaines de 7 jours + 2 semaines de 4 jours font 365 jours.
Ce sont les années 2009, 2015, 2026, 2037, 2043, 2054, 2065, 2071, 2082, 2093 et 2099.

lettres dominicale DC : il s'agit des années « bissextiles » qui commencent un jeudi ;
ces années se terminent un vendredi ; ainsi, les 1, 2, 3 et 4 janvier constituent la semaine 1 ; et les 27, 28, 29, 30 et 31 décembre la semaine 53.
Ce sont les années 2004, 2032, 2060 et 2088.

lettres dominicale ED : il s'agit des années « bissextiles » qui commencent un mercredi ;
ces années se terminent un jeudi ; ainsi, les 1, 2, 3, 4 et 5 janvier constituent la semaine 1 ; et les 28, 29, 30 et 31 décembre la semaine 53.
Il s'agit des années 2020, 2048 et 2076.

Il y a donc au total 18 semaines mayennaises entre 2001 et 2100,

réponse c

3. L'armoire

Barnabé vient de réceptionner dans son garage dont la hauteur sous plafond est 234,5 cm une armoire de 222,0 cm de haut et 140,1 cm de large. La porte d'entrée du garage a une largeur de 205,6 cm et une hauteur de 193,2 cm.
Barnabé est inquiet tout à coup : pourra-t-on redresser l'armoire, un parallélépipède rectangle ? Finalement, à son grand soulagement, on y parvient ; il y avait même 53 mm de battement…

Quelle est la profondeur de l'armoire de Barnabé , exprimée en mm ? (arrondie à l'unité la plus proche)

a) 570 b) 577 c) 584 d) 589 e) 595

Solution : l'armoire étant posée sur le dos, c'est l'hypoténuse du triangle ayant pour côtés de l'angle droit hauteur et profondeur qui doit « passer ».

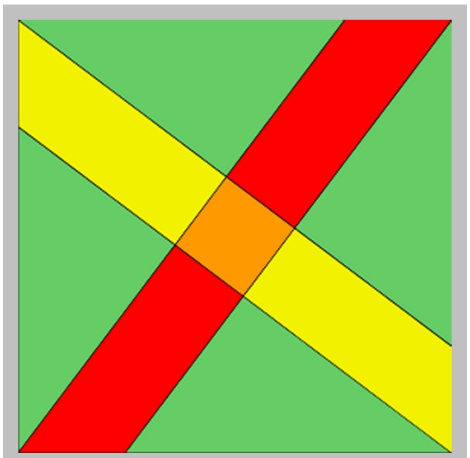
hauteur utile - battement : on a 2345 – 53 = 2292;

profondeur = Racine (2292^2 - 2220^2) = 569,968… soit environ 570 mm

réponse a

4. Le blason

© Quadrature Infernale, I.U.T. « Tech de Co » de Laval, 2009



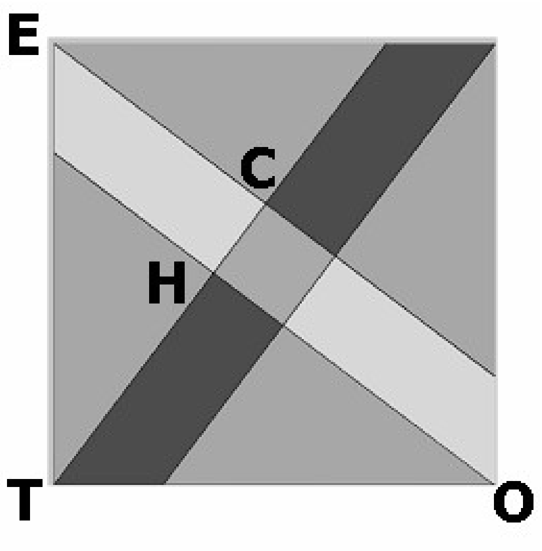
Le blason mayennais

Léon a imaginé pour la Mayenne un blason de sinople (vert) barré de gueules (rouge) et bandé d'or (jaune), barre et bande se superposant pour former un carré orangé de 99 mm de côté.

Le blason est un carré ; bande et barre font avec les côtés un angle de 53 degrés (voir figure).

Quel est le côté du blason, exprimé en mm ?
(on arrondira à l'unité la plus proche).

a) 396 b) 503 c) 530 d) 535 e) 61053



Solution : le graphique a été reproduit ci-dessous et quelques points ont été nommés.

On rappelle que les angles (OTH) et (TEC) mesurent 53° et que dans un triangle rectangle, on a les relations trigonométriques suivantes :

sin (angle) = côté opposé / hypoténuse ;
cos (angle) = côté adjacent / hypoténuse ;
pour chacun des deux angles aigus

Dans le triangle (TEC) : on a TC = TE . sin (53°)

Dans le triangle (HOT) : on a TH = TO . cos (53°)

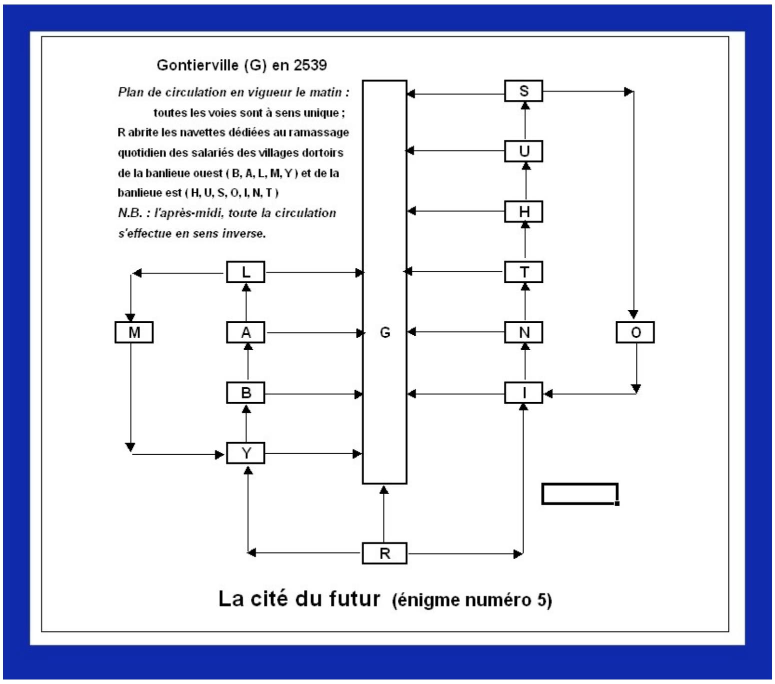
On a alors : HC = a (sin(53°) – cos (53°))
où a = TO = TE est le côté du blason

On sait que HC = 99 ; on a donc a = 99 / (sin(53°) – cos (53°)) = 502,996…
Soit environ 503 (en mm comme HC)

réponse b

5. La cité du futur

En 2539 à Gontierville (G), au sud de l'ancien département de la Mayenne, qui regroupe nombre d'entreprises, les salariés qui habitent pour la plupart les villages dortoirs situés alentour empruntent chaque matin les voies à sens uniques (voir figure) pour se rendre à la ville, dans leur véhicule personnel héliopropulsé, ou par les navettes au lavalium qui, partant de Ramar (R) font le tour de la banlieue ouest ou celui de la banlieue est avant de rejoindre la ville. *[le soir, les sens de circulation sont inversés afin de permettre à chacun de regagner son village].* Mathus-André ne travaille pas - *il a pris sa retraite il y a un peu plus de 530 ans, lorsque c'était encore possible* - et, habitant Ramar, se rend à Gontier chaque matin sur son deux-roues du XX[ème] siècle en respectant les sens de circulation ; il lui arrive de faire de très grands tours, par l'ouest ou par l'est, traversant alors un grand nombre de villes étapes (par exemple, si son circuit est RYBALMYBALMYBAG, il y a treize villes-étapes, car on ne compte ni la ville de départ R, ni la ville d'arrivée G).



La cité du futur (énigme numéro 5)

Quel est le plus petit nombre entier de villes-étapes irréalisable sur un trajet de R vers G ?

a) 15 b) 35 c) 48 d) 53 e) 86

Solution : le trajet direct de R vers G est un trajet ayant 0 ville étape.

Trajets passant par l'ouest : les circuits RYG, RYBG, RYBAG,RYBALG comportent respectivement 1, 2, 3, 4 villes étapes ; les circuits RYBALMYG, RYBALMYBG, RYBALMYBAG, RYBALMYBALG 6, 7, 8, 9 villes étapes ; les circuits RYBALMYBALMYG, RYBALMYBALMYBG, RYBALMYBALMYBAG, RYBALMYBALMYBALG 11, 12, 13, 14 villes étapes…

Ainsi, les nombres irréalisables de villes étapes sur un trajet passant par l'ouest sont les multiples de 5 non nuls.

Trajets passant par l'est : les circuits RIG, RING, RINTG, RINTHG, RINTHUG, RINTHUSG comportent respectivement 1, 2, 3, 4, 5, 6 villes étapes ; de même, il y a 8 villes étapes sur le trajet RINTHUSOIG etc…

Les nombres irréalisables de villes étapes sur un trajet passant par l'est sont donc les multiples de 7 non nuls.

Conclusion : le plus petit nombre de villes-étapes irréalisable sur un trajet de R vers G est le ppmc de 5 et de 7, soit 35.

réponse b