



**TRAVAUX PRATIQUES DE
VIBRATIONS & ACOUSTIQUE 1**

M. Bentahar
J.-C. Pascal

2008/2009

**TRAVAUX PRATIQUES DE
VIBRATIONS & ACOUSTIQUE 1**

TP 1 – TUBE DE KUNDT	P. 1
TP 2 - PLAQUES DE CHLADNI	P. 7
TP 3 – VITESSE CRITIQUE DE FLEXION D'ARBRE	P. 13
TP 4 - ANALYSE MODALE D'UNE POUTRE	P. 21

La durée des TP est de 3 heures.

La préparation préalable des TP est indispensable

Chaque TP donnera lieu à une évaluation par trinôme / binôme, (voir pages suivantes)

Travaux pratiques de Vibrations & Acoustique I

Fonctionnement pour l'année 2008-2009

1. Méthode d'évaluation

Les étudiants sont :

- soit sollicités durant la séance de TP par l'enseignant pour présenter leurs acquis de la séance précédente,
- soit tenus de rendre un compte rendu de TP relatif à la séance précédente.

Le déroulement des séances de TP sera donc le suivant :

Vous travaillerez par trinôme/binôme (n-nôme) sur chaque banc de manipulation:

- Groupe de 12 étudiants : 4 trinômes
- Groupe de 11 étudiants : 3 trinômes + 1 binôme
- Groupe de 10 étudiants : 2 trinômes + 2 binômes

Vous ne serez pas toujours encadrés par le même enseignant. Il convient que chaque trinôme/binôme s'attribue un numéro (de 1 à 4) lors de la première séance de TP. Il y a au total 4 TP que vous effectuerez sur 4 séances en respectant l'ordre établi dans le tableau de répartition suivant.

	Séance 1	Séance 2	Séance 3	Séance 4
Tube de Kundt	n-nôme 1 / ctp	n-nôme 2 / ctp / <u>io</u>	n-nôme 3	n-nôme 4 / <u>io</u>
Plaques de Kladni	n-nôme 2	n-nôme 3 / ctp	n-nôme 4 / ctp / <u>io</u>	n-nôme 1 / <u>io</u>
Vitesse critique	n-nôme 3 / ctp	n-nôme 4 / <u>io</u>	n-nôme 1 / <u>io</u>	n-nôme 2 / <u>io</u>
Analyse modale	n-nôme 4 / ctp	n-nôme 1 / ctp	n-nôme 2 / ctp	n-nôme 3 / <u>io</u>

Exemple : vous êtes dans le groupe 2G3. Vous avez choisi le n° de **n-nôme 2**.

Séance 1 : vous faites le TP "Chladni".

Séance 2 : vous faites le TP "Tube de Kundt", pour lequel vous devez rédiger un compte rendu (**ctp** : compte rendu de TP). De plus, vous êtes interrogé sur le TP "Chladni" par l'encadrant de la séance 2 (io : interrogation orale).

Séance 3 : vous effectuez le TP "Analyse modale", pour lequel vous devez rédiger un compte rendu. De plus, vous rendez à l'encadrant de la séance 3 le compte rendu de TP de la séance 2 ("Tube de Kundt")

Séance 4 : vous effectuez le TP "Vitesse critique" et vous êtes interrogés sur "Analyse Modale"

Les comptes rendus corrigés vous sont retournés par les encadrants des séances suivantes.

2. L'interrogation orale

L'objectif est de contrôler si l'étudiant a compris les points clés relatifs à chaque TP. Il est important de noter que vous disposerez au préalable des points sur lesquels vous serez interrogés puisque les questions porteront généralement sur le travail qui vous est demandé dans le manuscrit de TP. Vous pourrez dès lors préparer vos réponses, et les argumenter, résultats à l'appui.

Chacune de ces évaluations orales fera l'objet d'une note sur 5 points. Cette note prendra en compte divers aspects :

- Avez-vous compris l'objectif du TP ?
- Maîtrisez-vous les connaissances relatives au travail demandé ?
- Vos résultats sont-ils cohérents, et l'analyse que vous en faites est-elle correcte ?
- Vous êtes-vous bien réparti le travail, et avez-vous bien communiqué entre vous ? (chacun des étudiants du binôme considéré devra être capable de répondre -ou ne pas répondre...- aux mêmes questions que son collègue...)
- La qualité de présentation des supports à la discussion (courbes, calculs...)

Notons pour finir que la durée de cette évaluation orale ne pourra excéder 15 minutes, au cours desquels l'enseignant vous interrogera, et reprendra les points sur lesquels des difficultés apparaissent. L'enseignant consacrera donc au maximum $3 \times 15 \text{ min} = 45 \text{ min}$ à l'évaluation orale, et il sera disponible le reste du temps pour palier aux problèmes techniques et répondre aux questions de l'ensemble des étudiants.

3. Le compte rendu de TP

Chaque trinôme/binôme devra à l'issue des 4 séances avoir **rédigé** 2 comptes rendus de TP. Chacun de ces comptes rendus devra être écrit en langage français (i.e. non télégraphique) et aura pour objectif de répondre aux questions posées dans le manuscrit de TP. Un effort particulier est demandé sur la présentation **synthétique** des résultats : le compte rendu ne devra pas excéder une copie double (4 pages). Ces compte rendu seront notés sur 5 points (dont un point sur la présentation).

Sur chaque compte rendu devront figurer en en-tête :

Groupe de TP :

Numéro de binôme :

Date du TP :

Nom de l'encadrant :

Date de remise du compte-rendu :

Le rapport devra être signé par tous les éléments du « trinôme/binôme ».

4. L'évaluation finale

A la fin des 4 séances de TP, un examen des connaissances sera organisé. Vous disposerez de $\frac{1}{2}$ heure de préparation, et $\frac{1}{4}$ d'heure de questions. Cela donnera lieu à une note sur 15 points. La note finale sera obtenue en ajoutant à la note d'examen la moyenne sur 5 points de vos 4 notes d'évaluation (ctp et io) obtenues au cours des TP.

DETERMINATION DU COEFFICIENT D'ABSORPTION ACOUSTIQUE ET DE L'IMPEDANCE ACOUSTIQUE SOUS INCIDENCE NORMALE PAR LA METHODE DU TUBE A ONDES STATIONNAIRES

1- Introduction, but du TP.

Le coefficient d'absorption α des matériaux utilisés en architecture, défini comme le rapport du flux d'énergie absorbé au flux d'énergie incident, est un paramètre fondamental. Il peut être mesuré par la méthode de la salle réverbérante, définie dans la norme NF S 31-003, où la modification du temps de réverbération par une surface de matériau absorbant donne le coefficient d'absorption α en incidence aléatoire à partir de la formule de Sabine :

$$T = 0,16 \frac{V}{A}$$

$$\text{avec } A = \sum_i \alpha_i S_i$$

avec T : temps de réverbération du local. Il est défini comme le temps au bout duquel le niveau sonore a diminué de 60dB.

V : volume du local

A : absorption totale des parois

α_i : coefficient d'absorption des différentes surfaces S_i de la salle

L'objectif de ce TP consiste à mesurer le coefficient d'absorption d'un matériau par une autre méthode, dite méthode du tube de Kundt, ou méthode du tube à ondes stationnaires. La mesure du champ de pression acoustique dans un tuyau permet de déterminer le coefficient d'absorption et l'impédance sous incidence normale d'un matériau absorbant placé à une de ses extrémités. Ce dispositif de mesure, décrit dans la norme NF S 31-065, convient pour la mise au point des produits absorbants et l'étude de leurs caractéristiques physiques. Les résultats obtenus avec cette méthode sont proches de ceux obtenus par la méthode de la salle réverbérante (voir figure 1).

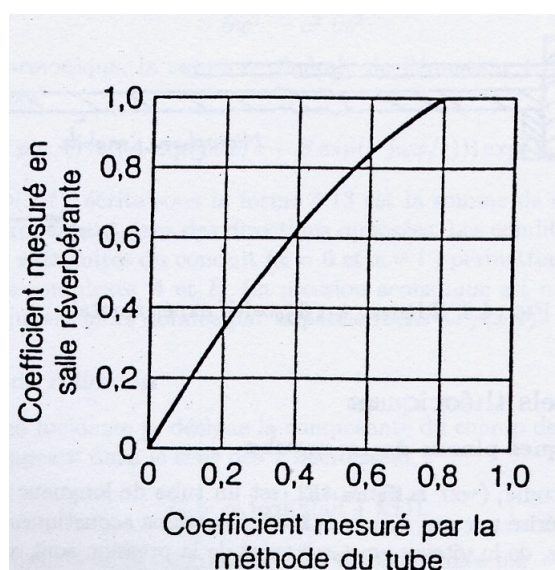


Figure 1 : relation entre le coefficient d'absorption mesuré par la méthode de la chambre réverbérante et par la méthode du tube de Kundt

2- Description du dispositif expérimental

La méthode utilise un tube de section uniforme, de longueur fixe (figure 2). Le champ d'ondes stationnaires est créé par un haut parleur alimenté par un signal sinusoïdal, généré puis amplifié par la chaîne générateur BF/ ampli BF. Le champ acoustique créé devant l'éprouvette constitué par le matériau absorbant est exploré au moyen d'un microphone mobile.

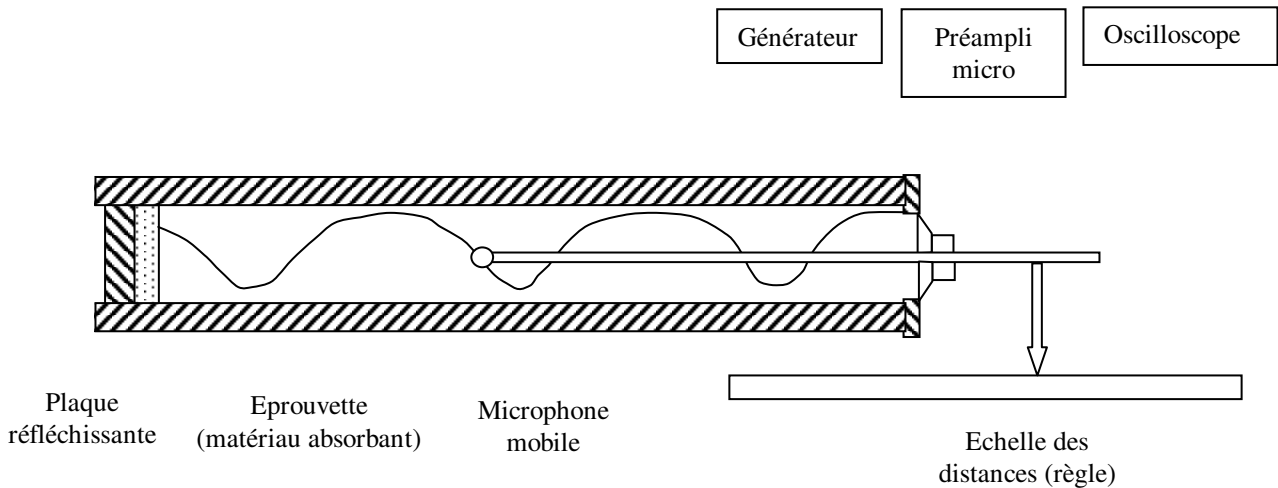


Figure 2 : schéma du dispositif expérimental

3- Rappels théoriques

3-1 Ondes acoustiques planes dans un tube

Le système étudié, (voir la figure 2) est un tube de longueur L , de section circulaire, caractérisé par son rayon a . Les fluctuations acoustiques de la masse volumique du gaz, de la vitesse particulière et de la pression sont notées ρ , u et p . On suppose que ces fluctuations sont uniformes sur chaque section droite du tube. Cette hypothèse est appelée hypothèse d'ondes planes. Cette hypothèse est satisfaite lorsque les dimensions transversales du tube sont faibles devant la longueur d'onde acoustique. Ceci est vérifié pour des fréquences inférieures à la première fréquence de coupure du tube, qui dans le cas d'un tube circulaire de rayon a est donnée par :

$$f_c = 1.84 \frac{c}{2\pi a},$$

Dans cette expression, par c désigne la célérité des ondes acoustiques. Dans l'hypothèse d'ondes planes, les champs acoustiques ρ , u et p ne dépendent que de l'abscisse x et du temps. Dans les expressions suivantes γ , P_0 , ρ_0 désignent respectivement le rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constant, la pression et la masse volumique du fluide (air) au repos.

L'équation de conservation de la masse

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

l'équation d'Euler

$$(2) \quad \rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

et l'équation d'état

$$(3) \quad p = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} = c^2 \rho,$$

permettent d'établir l'équation d'onde unidimensionnelle

$$(4) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

En régime harmonique, la solution générale de l'équation (4) s'écrit sous la forme complexe

$$(5) \quad p(x,t) = (Ae^{-j\omega x/c} + Be^{-j\omega x/c})e^{j\omega t}$$

La pression $p(x,t)$, écrite sous la forme (5) est la somme de deux ondes progressives se propageant dans des directions opposées. Les conditions aux limites imposées aux extrémités du conduit ($x=0$ et $x=L$) permettent de déterminer les constantes complexes A et B. La pression acoustique est une quantité scalaire, réelle, qui est alors donnée par la partie réelle de $p(x,t)$.

3-2 Coefficient de réflexion

La pression incidente p_i désigne la composante du champ de pression acoustique se propageant dans le sens des x décroissant :

$$(6) \quad p_i = p_0 e^{j(\omega t + kx)}.$$

Le nombre d'onde k et la longueur d'onde λ sont donnés par

$$(7) \quad k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

La pression réfléchi sur le matériau absorbant situé en $x=0$ s'écrit

$$(8) \quad p_r = R p_0 e^{j(\omega t - kx)},$$

où on a défini le coefficient de réflexion par

$$(9) \quad R = \frac{p_r(x=0)}{p_i(x=0)} = R_0 e^{j\phi}.$$

La pression acoustique complexe dans le tube s'exprime alors sous la forme

$$(10) \quad p(x, t) = p_i + p_r = p_0 (e^{jkx} + R e^{-jkx}) e^{j\omega t}.$$

Le module au carré de la pression acoustique

$$(11) \quad |p|^2 = p_0^2 (1 + R_0^2 + 2R_0 \cos(2kx - \phi)).$$

admet pour valeur maximale

$$(12) \quad p_{\max} = p_0 (1 + R_0)$$

et pour valeur minimale

$$(13) \quad p_{\min} = p_0 (1 - R_0).$$

Le taux d'ondes stationnaires (TOS) est défini par :

$$(14) \quad \tau = \frac{p_{\max}}{p_{\min}} = \frac{1 + R_0}{1 - R_0}.$$

La mesure de τ permet de déterminer le module du coefficient de réflexion à partir de l'expression

$$(15) \quad R_0 = \frac{\tau - 1}{\tau + 1}.$$

Les minima de pression sont obtenus aux abscisses x_n vérifiant la relation

$$(16) \quad 2kx_n - \phi = \pi(2n + 1).$$

Le premier minimum est atteint pour $n=0$. Le déphasage ϕ est alors donné par :

$$(17) \quad \phi = \pi \left(\frac{4x_0}{\lambda} - 1 \right).$$

3-3 Coefficient d'absorption

Le coefficient d'absorption acoustique est le rapport de la puissance acoustique absorbée par l'éprouvette à la puissance acoustique incidente. Sous incidence normale, le coefficient d'absorption α est lié au coefficient de réflexion en pression par la relation

$$(18) \quad \alpha = 1 - R_0^2$$

4- Travail demandé

1) La forme de la section du tube à ondes stationnaires (circulaire, carrée ..) a-t-elle une importance ? Pourquoi ?

2) La mesure du coefficient de réflexion est basée sur l'étude du système d'ondes planes stationnaires dans le conduit. Déterminer la plage fréquentielle (f_{\min} , f_{\max}) sur laquelle les mesures du coefficient de réflexion sont possibles. Faire l'application numérique.

3) Les ondes stationnaires sont des ondes caractérisées par le synchronisme des vibrations des différentes parties du système : seule l'amplitude du champ vibratoire varie d'un point à un autre. Les noeuds (point d'amplitude zéro) et les ventres (point d'amplitude maximale) sont fixes dans l'espace, la phase étant partout la même, excepté les sauts de π au passage des points nodaux. Les lignes nodales ou les surfaces nodales séparent deux régions où les champs acoustiques sont en opposition de phase.

Réaliser un système d'ondes stationnaires acoustiques dans le tube. Mesurer le champ de pression acoustique en différents points. Vérifier chacun des éléments de la définition ci-dessus.

4) Fermer l'extrémité du tube par un bouchon rigide. Ne pas placer de matériau absorbant. Pour quelques valeurs de la fréquence, mesurer la longueur d'onde acoustique dans le tube.

Tracer la courbe de dispersion ($k=2\pi/\lambda$ en fonction de f). En déduire la célérité c des ondes acoustiques dans l'air.

5) Choisir la fréquence d'excitation de telle sorte que $\lambda/2=40\text{cm}$. Fermer le tube par un bouchon rigide. Mesurer les variations du module de la pression acoustique au voisinage de l'extrémité (étendre la plage de mesure jusqu'à trouver un minimum et un maximum de pression). Tracer les valeurs trouvées pour p en fonction de l'abscisse x . Interpréter les résultats obtenus.

6) Sans changer la fréquence d'excitation, répéter la mesure précédente en présence d'un matériau absorbant. Tracer les variations du module de p en fonction de x . Tenez compte du décalage lié à l'épaisseur du matériau. Dans les deux configurations (extrémité rigide ou extrémité revêtue de matériau), l'origine de l'axe des x est placée sur le plan de l'extrémité. Commenter.

7) Mesurer le coefficient de réflexion d'un matériau absorbant (à choisir parmi ceux disponibles) sur la plage de fréquence la plus étendue possible ? Par quoi êtes-vous limité ? Représenter les variations de R_0 et ϕ en fonction de la fréquence.

8) Donner une interprétation du signe de ϕ . Remarquer qu'il est dépendant de la convention $e^{j\omega t}$ adoptée ! Comment ϕ varie-t-il avec la fréquence ? Interpréter ce phénomène.

PLAQUES DE CHLADNI

1 - Introduction, but du TP.

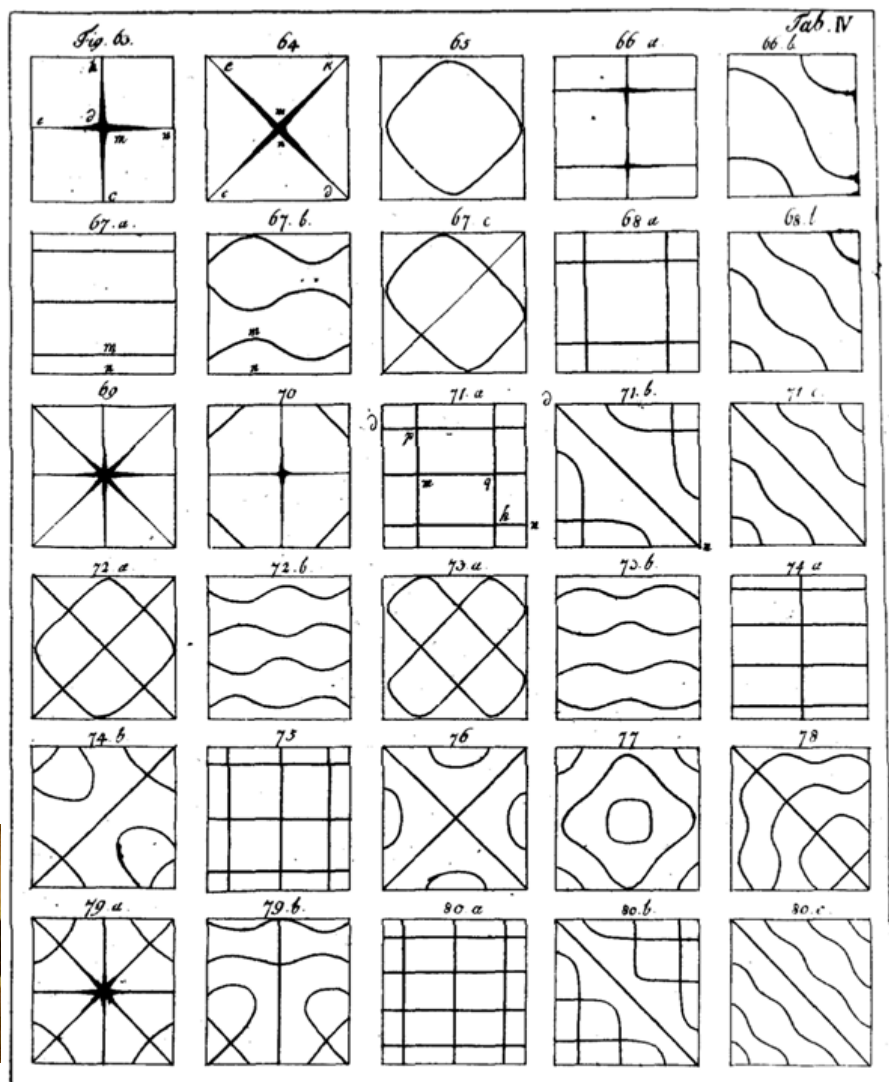
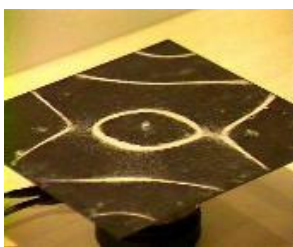
L'objet de ce TP est d'observer grâce à la méthode de Chladni les **déformées modales** des premiers modes de plaques circulaires ou carrés.

2 - Histoire

Ernst Florens Friedrich Chladni (1756 - 1827) a étudié vers 1780 à Leipzig les vibrations des plaques circulaires et carrées. Les plaques étaient généralement maintenues en leur centre et excitées sur un bord par un archet de violon. Les modes de vibrations étaient identifiés en saupoudrant la surface de la plaque par du sel ou du sable : ces particules se réfugiaient dans les zones où les vibrations étaient nulles (lignes nodales). Chladni fit une démonstration en 1808 à Paris devant l'Académie des Sciences et l'Empereur. Ce dernier fut tellement impressionné qu'il offrit un prix d'un kilo d'or à la première personne qui pourrait expliquer les fameuses figures. Celles-ci sont extraites de son livre (*Entdeckungen ueber die Theorie des Klanges*) publié en 1787.



Figure 1 - Ernst Chladni et ses figures obtenues avec une plaque carrée fixée en son centre.



3 - Modes de vibration de plaques.

Le problème vibratoire présente des propriétés de symétrie :

- symétrie de révolution, ou axisymétrie, pour une plaque circulaire,
- symétrie par rapport à une médiane et/ou une diagonale pour la plaque carrée.

La géométrie, les liaisons et chargement imposé (excitation au centre) présentent à la fois ces symétries. En conséquence, les modes propres de plaque vérifiant ces symétries sont susceptibles d'être excités et donc mis en évidence. Les noeuds et ventres de vibration sont constitués :

- de cercles concentriques pour la plaque circulaire (voir figure 2)
- de figures géométriques variées, mais symétriques, pour la plaque carrée (voir la figure 1 et la figure 3).

La résonance d'un mode de vibration de flexion de la plaque est observée lorsque, au voisinage d'une fréquence (la fréquence propre de ce mode), l'amplitude de la flexion de la plaque (donnée par le signal de l'accéléromètre) présente un maximum.

A la résonance d'un mode de vibration de plaque, les noeuds de vibration de ce mode peuvent être visualisés en saupoudrant sur la plaque un peu de sable fin. Sur les ventres de vibration, les grains de sable sont éjectés, alors que le sable peut se concentrer aux noeuds de flexion de la plaque. Les lignes nodales ainsi obtenues, ou figures de Chladni, fournissent une représentation du mode de vibration de flexion (voir la figure 1).

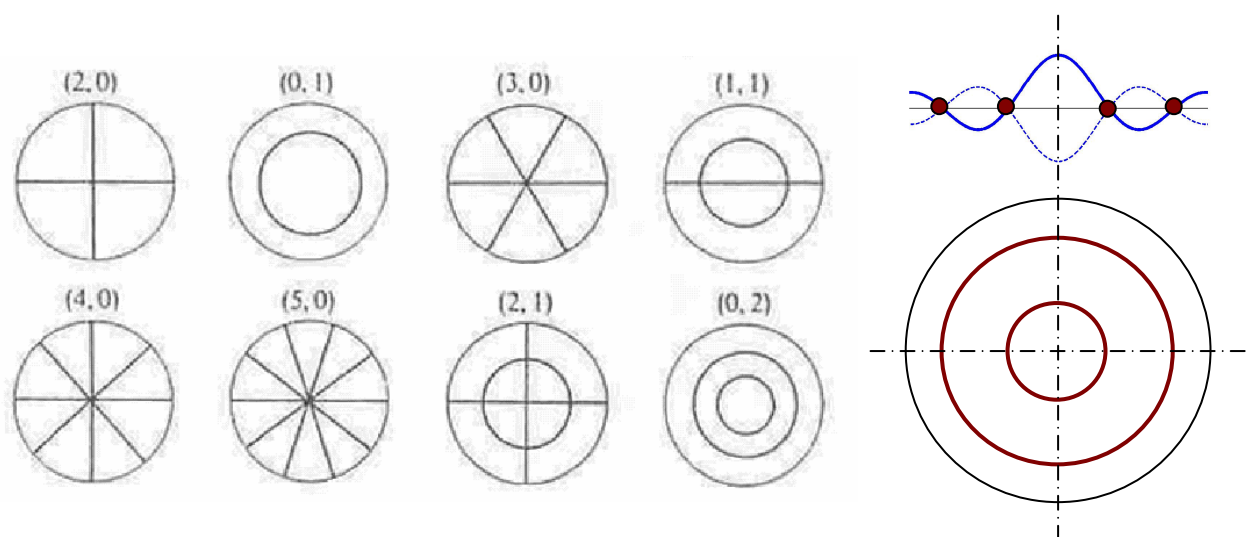


Figure 2 – Les modes (n,m) de la plaque circulaire libre et le profil du déplacement de la plaque pour le mode $(0,2)$

Pour les plaques circulaires, Chladni proposa en 1802 une loi pour obtenir approximativement la fréquence propre du mode $f \approx C(m + 2n)^2$, m est le nombre de cercles et n le nombre de lignes passant par le centre.

Référence : T.D. Rossing (1982) "Chladni's law for vibrating plates", *American Journal of Physics* **50**, 271-274.

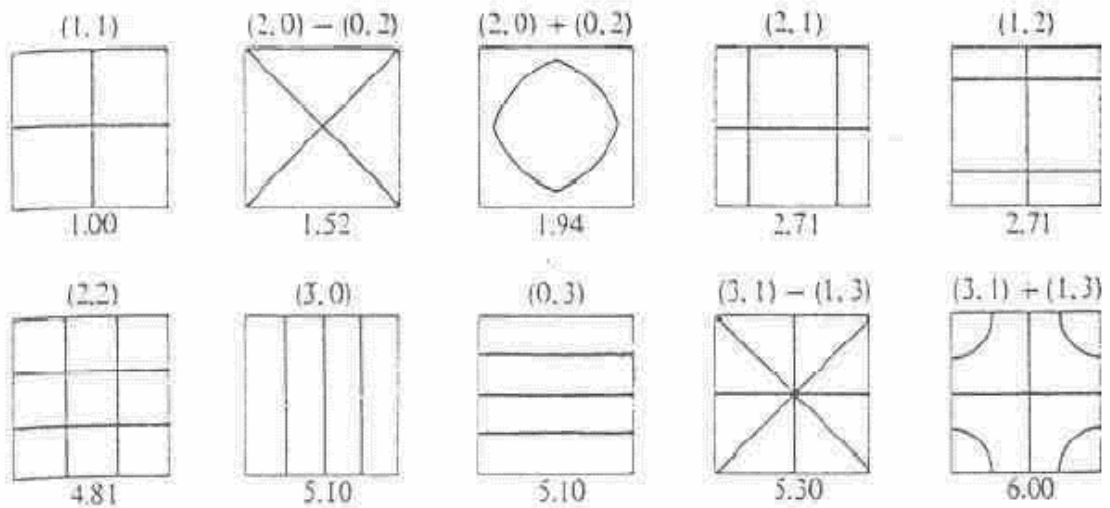


FIGURE 3.10. The first 10 modes of an isotropic square plate with free edges. The modes are designated by m and n , the numbers of nodal lines in the two directions, and the relative frequencies for a plate with $\nu = 0.3$ are given below the figures.

(T.D. Rossing, N.M. Fletcher, *Principles of vibration and sound*, Springer-Verlag, 1994)

4 - Modes acoustiques d'une cavité

Comme dans les phénomènes de vibration, les ondes acoustiques peuvent, si les conditions aux limites le permettent, donner lieu à des phénomènes stationnaires. L'exemple le plus simple est celui d'une onde se réfléchissant entre deux plans parallèles, distants d'une longueur l . Sur ces plans, rigides, la vitesse des particules d'air est nulle, et la pression oscille entre deux valeurs à la période T . L'onde ne peut être stationnaire que si, compte tenu de la célérité du son c dans le fluide acoustique, le temps t mis par l'onde pour revenir en un point (après une réflexion sur chacun des murs) correspond à un nombre entier de période(s) :

$$t = 2l / c = nT = n / f$$

c'est à dire que la distance l est un nombre entier de demi-longueur d'onde :

$$l = \frac{nc}{2f} = n \frac{\lambda}{2}$$

Un espace fermé (pour permettre les réflexions multiples) contenant un fluide acoustique est donc caractérisé par des éléments propres à sa géométrie - indépendants de la nature et de la position de toute source acoustique. Une structure élastique comporte des fréquences et des modes propres de vibration (déformée) ; de même, une cavité comporte des fréquences et modes acoustiques (champ de pression).

Si une source acoustique, placée dans la cavité, vient exciter un mode à sa fréquence propre, il apparaît une résonance, qui se traduit par une augmentation sensible de l'amplitude de la pression acoustique. La première résonance acoustique entre deux surfaces parallèles distantes

de l se manifeste lorsqu'une source acoustique émet un son dont la longueur d'onde est $\lambda = 2l$ (résonance en $\lambda/2$).

En pratique, l'entrée en résonance d'un mode acoustique de cavité se manifeste par un maximum local de l'amplitude du signal relevé par le microphone autour d'une fréquence donnée, qui est la fréquence propre de ce mode.

Un mode acoustique dépend de la forme et des dimensions de la cavité ; un bon moyen, pour vérifier que la résonance observée est de nature acoustique (et non vibratoire), est de modifier les dimensions de la cavité - par exemple en soulevant légèrement le couvercle : une forte sensibilité du signal recueilli par le micro à la position du couvercle confirme la nature acoustique de la résonance.

5 - Dispositif expérimental et mise en oeuvre du TP

EXCITATION MECANIQUE A L'AIDE D'UN POT-VIBRANT

Un pot vibrant est utilisé pour exciter en son centre les vibrations de flexion d'une plaque de forme circulaire souple. Un balayage en fréquence permet de faire successivement entrer en résonance différents modes de la plaque. Ce dispositif vibrant est placé à l'intérieur d'une cavité parallélépipédique dont deux des parois sont transparentes, permettant d'observer les figures de Chladni.

Le dispositif expérimental est constitué des éléments suivants :

- Un pot vibrant alimenté par un générateur de signal sinusoïdal met la plaque en vibration.
- Un capteur d'effort placé entre le pot vibrant et la structure étudiée permet la mesure de l'effort appliqué sur la plaque.
- L'amplitude des vibrations est mesurée par un accéléromètre collé sur la plaque.
- L'amplitude de la pression acoustique est relevée par un microphone placé dans la cavité.
- Les signaux peuvent être étudiés à l'aide d'un analyseur et d'un oscilloscope.

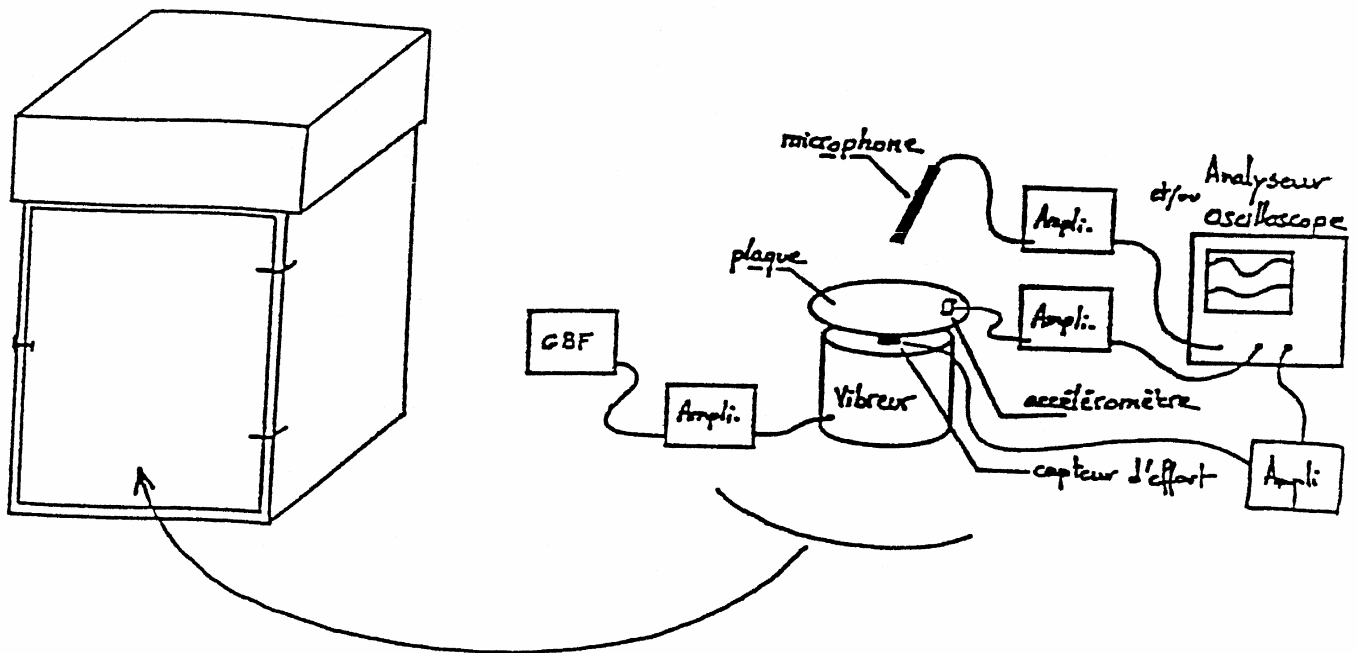


Figure 4 - dispositif expérimental

Utilisation de l'analyseur

(aide mémoire des commandes à utiliser pour réaliser un balayage en fréquence avec l'analyseur, et obtenir la FRF 2/1 en amplitude et en phase)

Menu Disp Format (H)	upper/lower (F3) (2 écrans)
Active trace (F)	permet de sélectionner l'écran inférieur ou supérieur (A, B)
Meas. Data (B)	freq. Resp 2/1 (F6) pour chacun des 2 écrans
Trace Coord. (C)	dB magn. pour A (F3)
	Unwrapped phase pour B (F5) (phase déroulante)
Scale (D)	Autoscale on (F1)
Inst Mode (J)	swept sine (sinus glissant)
Freq (K)	de 500 Hz (F3) à 3,5 kHz (F4) ; sweep lin (F5)
Sourec (Q)	level=1V (F2)
Avg (T)	settle time = 5 cycles (F1)
Trace coord. (C)	x axis = lin (F9)
Start (R)	

6 - Travail à effectuer

Au cours des manipulations prenez les deux précautions d'utilisation suivantes :

- **Pour éviter de détériorer le pot vibrant, bloquer l'excitateur en plaçant le système de verrouillage sur la position LOCK avant toute manipulation,**
- **L'alimentation du pot vibrant et du haut-parleur se fait impérativement à l'aide d'un ampli de puissance. Ne pas oublier de l'insérer à la suite du générateur de signal (analyseur ou GBF).**
- **Effectuer systématiquement toutes les manipulations en plaçant le pot vibrant dans la cavité, ce qui permet d'éviter de répandre du sable sur la paillasse, et de réduire sensiblement le niveau sonore dans la salle.**

- 1- Placer la plaque circulaire souple. Placer l'accéléromètre au centre de la plaque. Effectuer un balayage en fréquence manuel avec le générateur de signal de façon à exciter le système sur l'un de ses modes (amplitude importante du signal d'accélération sur l'oscilloscope). Placer le sable sur la plaque. Observer. Pour les modes observés, mesurer les fréquences de résonance et dessiner les déformées modales.
- 2- Monter la plaque carrée. Réaliser la même expérimentation. Observer les modes de la plaque carrée. Comparer la distribution des fréquences propres de la plaque carrée à celle obtenue pour la plaque circulaire.
- 3- Monter le capteur d'effort sur le pot vibrant et connecter le sur la voie 1 de l'analyseur. Brancher l'accéléromètre sur la voie 2 et utiliser l'analyseur pour exciter le pot vibrant. Configurer (voir ci-contre). Effectuer les mesures suivantes entre 500 Hz et 3500 Hz :
 - l'autospectre de la force,
 - l'autospectre de l'accéléromètre,
 - une mesure en amplitude et phase de la fonction de transfert accélération/force,Retrouvez-vous les maxima de cette fonction de transfert dans les pic ou les creux des autospectre ? Conclure.
- 4- Décentrer l'accéléromètre et refaire les mêmes mesures et la même analyse.
- 5- Etudier l'influence de la présence du sable sur la réponse de la structure (en superposant deux mesures faites avec et sans sable). Conclure.
- 6- En utilisant le haut-parleur comme source d'excitation, pouvez-vous identifier les modes de la cavité à l'aide du microphone ? Conclure.
- 7- En excitant la plaque souple à l'aide du pot vibrant, mesurer la fonction de transfert p/f . La quantité p désigne la pression acoustique en un point de l'enceinte et f désigne la force appliquée par le pot vibrant. Interpréter. Changer la position du microphone et effectuer une seconde mesure. Les résonance observées sont-elles d'origine vibratoire / acoustique ? Comment se manifeste le couplage vibro-acoustique ?

VITESSE CRITIQUE DE FLEXION D'ARBRE EN ROTATION

1- Introduction, but du TP.

L'objet de cette manipulation est de mettre en évidence les premières vitesses critiques de flexion d'un arbre comportant un ou deux volants d'inertie.

2- Modes de flexion et vitesses critiques

2-1 Généralités

Un arbre ou un rotor est une structure constituée d'un matériau élastique. Celle-ci présente des modes et fréquences propres. Nous nous intéressons ici aux seuls modes de flexion.

Dans le cas d'un rotor guidé en rotation par deux paliers, les forces appliquées à l'arbre sont :

- les réactions des paliers,
- le poids de l'arbre et des volants,
- les efforts liés au fonctionnement de la machine (actions exercées sur les éléments montés sur le rotor)
- les forces d'inertie centrifuges (radiales), qui sont de la forme :

$$\vec{F}_r = m \omega^2 r \vec{u} \quad (1)$$



Figure 1 : schéma de l'arbre en rotation.

Lorsque la vitesse de rotation correspond à une fréquence propre de la flexion de l'arbre, certaines forces (efforts appliqués sur l'arbre d'une machine, défauts d'équilibrage, poids, défaut des paliers,...) viennent exciter un mode de flexion de l'arbre à sa fréquence propre. Cette vitesse de rotation est appelée vitesse critique de flexion, et correspond à la mise en vibrations forcées de l'arbre.

La flexion de l'arbre (notée y sur le schéma) est provoquée par les forces qui lui sont appliquées, or les forces d'inertie centrifuges données par (1) sont d'autant plus importantes que la flexion y est importante : en raison de la nature "auto-excitatrice" de ce type de vibration, et du caractère amplificateur des forces d'inertie, les vitesses critiques présentent des dangers :

- risque de déformation plastique et de rupture de l'arbre si la limite élastique du matériau est dépassée,

- détérioration plus ou moins rapide des éléments de guidage (roulements ou paliers à huile, pour lesquels la rupture du film d'huile et le contact direct entre métaux conduit à une détérioration rapide du guidage).

En pratique, les phénomènes de vitesse critique font partie de l'étude vibratoire de la machine dans son ensemble, ce qui peut se révéler assez complexe : outre les caractéristiques de l'arbre (masse, raideur) et des paliers (raideur, amortissement), de nombreux phénomènes interagissent avec ce phénomène, notamment :

- les sollicitations de l'arbre (chargements liés au fonctionnement de la machine tournante),
- les liaisons avec le bâti et le couplage éventuel avec d'autres vibrations,
- la stabilité des vibrations.

2-2 Un modèle simple : l'arbre vertical sur deux paliers avec volant excentré

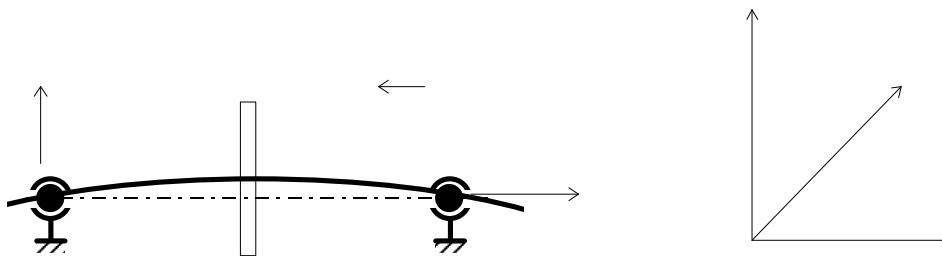


Figure 2 : notations.

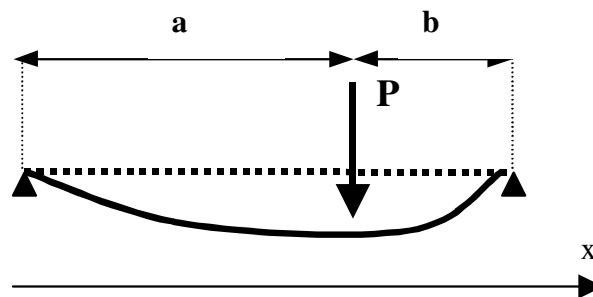


Figure 3 : déformation d'une poutre sur appuis simple sous l'effet d'une force ponctuelle

Une modélisation simple des phénomènes est possible par la démarche qui suit:

- ◆ L'arbre est vertical, de masse négligeable. Il reste dans le domaine élastique, et présente une raideur de flexion k , dont la valeur est donnée par la résistance des matériaux. En effet, conformément au schéma de la figure 3, la flèche prise par la poutre s'exprime comme suit (les paliers sont assimilés à des liaisons parfaites):

$$0 \leq x \leq a, \quad \delta(x) = \frac{Pbx}{6EIL} (L^2 - b^2 - x^2),$$

$$a \leq x \leq L, \quad \delta(x) = \frac{Pa(L-x)}{6EIL} (2Lx - a^2 - x^2),$$

$$\text{où } I = \frac{\pi D^4}{64}, \text{ et } E = 210\text{GPa (pour de l'acier).}$$

Dès lors, la raideur équivalente en flexion de la poutre peut être déterminée grossièrement à l'aide de la relation $P = k\delta_{\max}$, où δ_{\max} désigne la flèche maximale prise par la poutre.

- ◆ On considère que le volant est de masse m , et que son centre d'inertie G est excentré de la distance $CG = e$. Pour décrire le premier mode de flexion de l'arbre doté d'un volant en son centre, la modélisation consiste en un simple système masse - ressort. La flexion de l'arbre développe une force de rappel \vec{F}_r (dans le domaine élastique)

$$\vec{F}_r = -k y \vec{u}.$$

L'écriture du principe fondamental de la dynamique eu projection sur l'axe \vec{u} fournit la relation :

$$m \omega^2 (e + y) - k y = 0$$

soit

$$y = e \frac{\omega^2}{\frac{k}{m} - \omega^2} = e \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2},$$

en posant $\varepsilon = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Les variations de y en fonction du paramètre fréquentiel ε sont données sur la figure 4.

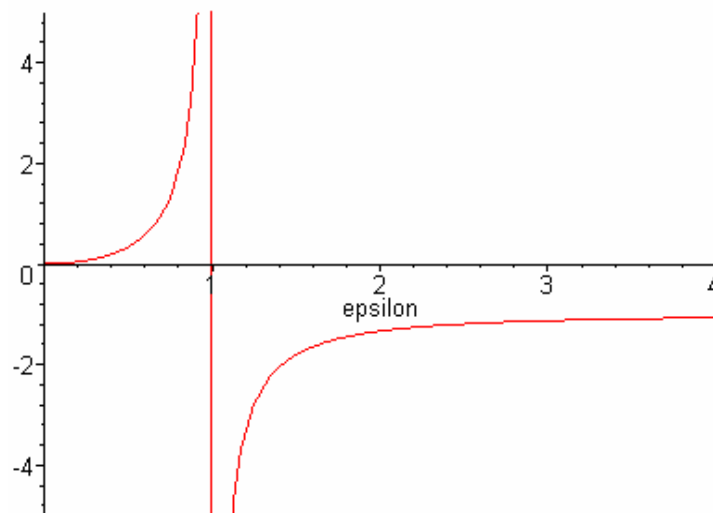


Figure 4 : variation de la flèche y en fonction du paramètre fréquentiel ε

Pour $\varepsilon = 1$ la mise en résonance de l'arbre fait tendre y vers l'infini : la vitesse correspondante est la vitesse critique.

Remarques :

- A la résonance, les hypothèses de calcul ne sont pas vérifiées, en particulier en ce qui concerne le comportement élastique de l'arbre,
- Ce modèle ne prend pas en compte les amortissements au niveau des paliers.

Pour les vitesses sensiblement supérieures à la vitesse critique ($\varepsilon \gg 1$), y tend vers $-e$, c'est à dire que le centre d'inertie du volant G se rapproche de l'axe des paliers : il y a "auto-centrage" du centre d'inertie de l'arbre.

2-3 Arbre rigide / Arbre flexible

Pour éviter les problèmes liés aux vitesses critiques, beaucoup de machines industrielles sont dimensionnées pour que la première vitesse critique de flexion (V_{c1}) soit nettement supérieure à la vitesse d'entraînement V_e ($V_e < 0,8 V_{c1}$). L'arbre est alors qualifié *d'arbre rigide*.

Lorsque la vitesse d'entraînement d'une machine tournante est très élevée, une telle condition conduirait à des sections d'arbre très importantes. Le dimensionnement est alors réalisé pour que la vitesse de fonctionnement de la machine soit entre la première et la seconde vitesse critique de flexion de l'arbre, et l'arbre est dit *flexible*. Cette vitesse de fonctionnement est suffisamment éloignée de la première vitesse critique pour éviter l'excitation forcée de ce premier mode, et permet de bénéficier de l'"auto-centrage" de l'arbre en présence d'un balourd (voir ci-dessus). Toutefois, dans ce cas, des précautions doivent être prises dans la phase de démarrage :

- Pour que la zone de fréquence proche de la première vitesse critique soit dépassée rapidement, il est nécessaire d'assurer une accélération angulaire importante (démarrage rapide).
- Pour éviter une trop grande amplitude de vibration au passage de la première vitesse critique, on a intérêt à assurer un équilibrage très précis du rotor (cf. TP équilibrage).

2-4 Influence des paliers

2-4-1 Nature de la liaison

La schématisation faite pour les paliers est importante : la déformée dépend fortement des conditions aux limites de flexion de l'arbre, c'est à dire de la nature de la liaison aux paliers :

- liaison rotule (pour des roulements à rotule, ou un guidage court - longueur du palier $< 0,8$ diamètre),
- liaison pivot pour un guidage long.

2-4-2 Élasticité des paliers

En raison de son mode de fixation au bâti, un palier présente généralement une flexibilité différente dans les deux plans x et y. Il en résulte non pas une, mais deux vitesses critiques différentes (mais voisines). Alors qu'une flexibilité identique dans ces deux directions se traduit par des vibrations circulaires du palier, une anisotropie de raideur provoque un tournoiement d'orbite elliptique. L'influence de la flexibilité est d'autant plus sensible que la vitesse critique du rotor sur appuis rigides est élevée.

2-4-3 Effet gyroscopique

Considérons un arbre muni d'un ou plusieurs disques, entraîné à une vitesse de rotation différente d'une vitesse critique.

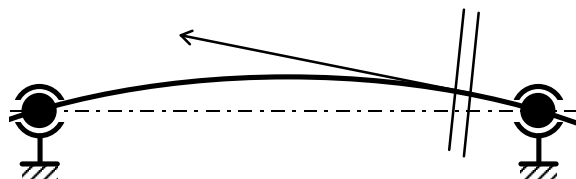


Figure 5 : arbre en rotation

Lors d'une vibration de flexion de l'arbre, la normale au disque n'est plus confondue avec l'axe défini par les paliers. Le mouvement du disque est alors celui d'un volant en rotation à la vitesse de rotation de l'arbre autour de son axe de symétrie, cet axe étant lui même animé du mouvement de flexion de la ligne élastique de l'arbre, qui décrit généralement une orbite circulaire (à une pulsation différente de celle de la rotation de l'arbre). Le mouvement du volant est par conséquent identique à celui d'un gyroscope animé d'un mouvement de précession imposé. Il s'en suit un couplage gyroscopique ; le plus souvent, le mouvement de précession est direct, c'est à dire de même sens que la rotation de l'arbre, et l'effet du couple gyroscopique est de redresser l'arbre (de le ramener dans sa position naturelle). L'effet obtenu est donc généralement un raidissement de l'arbre, qui correspond à une augmentation de la vitesse critique.

3- Présentation du dispositif expérimental.

Le banc d'essai est un exemple de machine tournante. Une vue générale est donnée sur la figure 6.

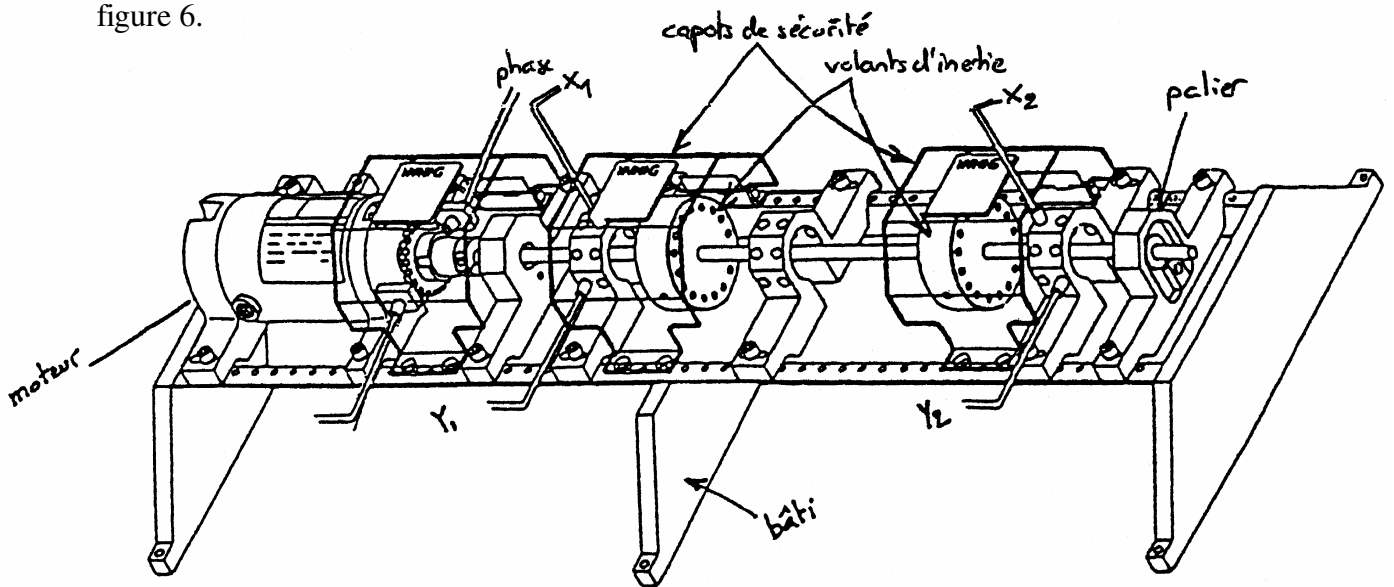


Figure 6 : vue du dispositif expérimental

3-1 Le moteur d'entraînement

Le contrôle de la vitesse du moteur s'effectue par l'intermédiaire d'un boîtier (fig. 7) qui utilise les impulsions envoyées par un capteur à courant de Foucault (tachymètre, fig. 7,8) scrutant une roue taillée de 20 encoches.

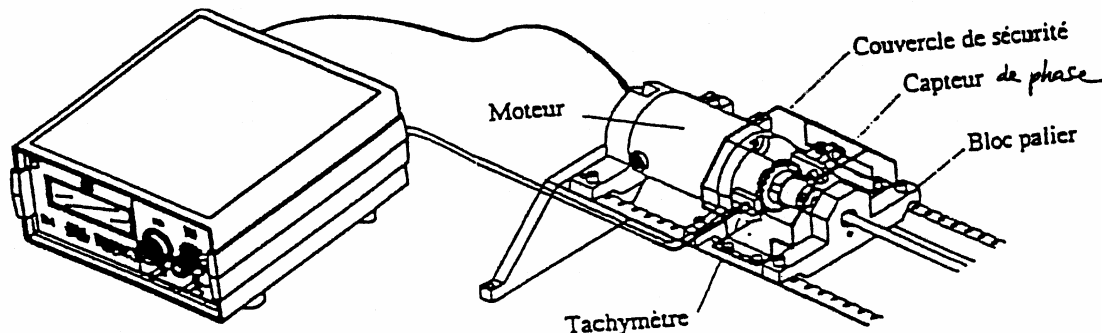


Figure 7 : moteur d'entraînement

Ce boîtier comprend :

- un interrupteur marche / arrêt (à l'arrière),
- un affichage de la vitesse de rotation de l'arbre, en tr/min.

La vitesse peut varier de 0 à 10 000 tr / min.

- un bouton "max speed setpoint", qui définit la vitesse maximale de rotation du rotor (la borne supérieure est la valeur affichée multipliée par 10). **Ne pas dépasser une vitesse de rotation de 6000 tr/min !**
- un interrupteur 2 positions "ramp up / down", qui définit si la phase courante est une accélération (up) ou une décélération (down),
- un interrupteur 3 positions "slow roll / ramp / stopped"
slow roll : vitesse lente (50 à 500 tr/min, réglable en face arrière)
ramp : phase d'accélération / décélération (rampe dont le sens est défini par le bouton précédent, et la vitesse par le suivant)
stopped : arrêt du rotor
- un bouton "ramp rate", qui définit l'accélération du rotor (jusqu'à 15 000 tr/min/min)
- un interrupteur CCW/EXT/CW (face arrière) qui définit le sens de rotation :
 - CCW : sens direct
 - CW : sens horaire (ClockWise)

3-2 Le joint d'accouplement

L'objet de la manipulation est de mettre en évidence la flexion de l'arbre. Pour ne pas transmettre ces vibrations et éviter de détériorer l'axe du moteur, l'entraînement de l'arbre est assuré au travers d'un joint d'accouplement, constitué d'une pièce en aluminium taillée en spirale.

3-3 L'arbre

matériau : acier ($E=210\,000\text{ N/mm}^2$)

section : circulaire (diamètre d)

Le mode de fixation des paliers permet, pour une flexion de faible amplitude, de les modéliser comme des liaisons de type rotule.

3-4 Les volants d'inertie

Deux volants d'inertie sont montés sur l'arbre, dont la masse unitaire est 0,8 kg.

La fixation de ces volants est assurée par deux vis radiales en appui sur l'arbre ; vérifier le bon serrage de ces deux vis pour chaque rotor avant la mise en rotation du rotor.

L'adjonction de vis (de 0,1 à 2,0 g) dans certains des taraudages de ces volants permet de créer un balourd.

Ne pas déséquilibrer le rotor (i.e. l'ensemble des deux volants) de plus de trois grammes.
Avant de mettre le rotor en rotation, **vérifier que ces vis de fixation des masses sont bien noyées dans le corps du rotor** (qu'elles ne dépassent pas).

3-5 Les capteurs de proximité :

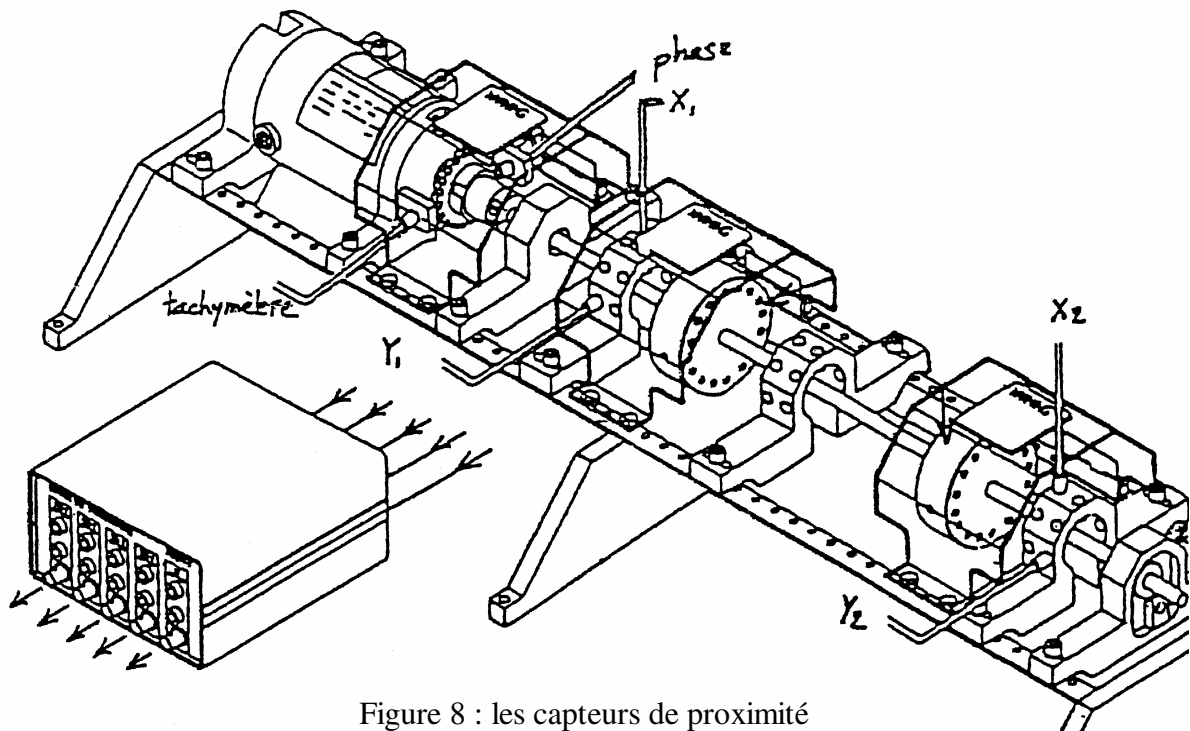


Figure 8 : les capteurs de proximité

Outre le capteur destiné à contrôler la vitesse de rotation de l'arbre, le dispositif comporte cinq capteurs à courant de Foucault connectés à un boîtier d'amplification (fig. 6) :

- un capteur placé près du moteur détecte une encoche à chaque tour du rotor : le signal obtenu par ce capteur sert de référence pour le repérage des phases,
- deux ensembles, comprenant chacun deux capteurs, servent à repérer la position suivant deux axes (x,y) de l'arbre. Les capteurs sont montés sur un support ; pour éviter une interaction entre les deux capteurs x et y, ils doivent être légèrement décalés (fig. 9).

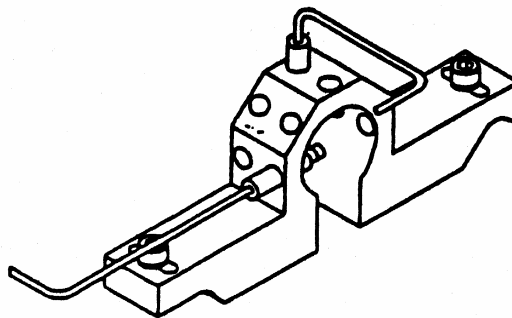


Figure 9 : montage des capteurs

Pour assurer un bon fonctionnement, l'entrefer entre le capteur et l'arbre doit être de **0,8 mm** pour les capteurs de déplacement (x,y), et de **0,4 mm** pour les capteurs de contrôle de la vitesse et de repérage de la phase. (Ces capteurs sont identiques, cette différence d'entrefer vient de la nature des matériaux utilisés : acier pour l'arbre, aluminium pour le joint d'accouplement en sortie du moteur).

La sensibilité des capteurs de position est de $7,8 \mu\text{V}/\mu\text{m}$.

4- Travail à effectuer :

Avant tout essai, vérifier le montage (serrage de toutes les vis, les sondes et les boulons. Prêter une attention particulière aux vis de fixation des masses, et fermer systématiquement tout les capots de sécurité)

Ne pas déséquilibrer le rotor de plus de trois grammes.

- 1- Prendre connaissance de l'équipement ; observer notamment le dispositif de régulation du moteur d'entraînement, les capteurs et la chaîne de mesure. Observer sur l'oscilloscope les déplacements de l'arbre, voie par voie et en mode (x,y) (visualisation des orbites).
- 2- L'arbre comporte deux disques d'inertie. Placer ces deux disques accolés, à équidistance des deux paliers, et placer un *petit* balourd. (Placer les capteurs à courant de Foucault au voisinage des paliers. Prendre garde à ce que l'axe ne vienne pas heurter les capteurs au cours du mouvement). Mettre en évidence la première vitesse critique. Estimer par ailleurs sa valeur grâce au modèle simple décrit ci-dessus. Conclure.
- 3- La vitesse critique dépend elle du balourd que présente le rotor ? Pourquoi ?
- 4- Au voisinage de la vitesse critique, l'amplitude dépend elle du balourd du rotor ?
- 5- Déplacer chacun des disques vers les paliers (comme sur la figure 6), en conservant le même balourd. En conservant cette configuration, comment disposer les balourds sur chacun des disques pour exciter le mode correspondant à la deuxième vitesse critique ? Appliquer de tels *petits* balourds. La première vitesse critique est elle affectée par cette modification ? Pourquoi ?
- 6- Comment est-il possible d'estimer par le calcul la deuxième vitesse critique ?
- 7- Observer expérimentalement les deux vitesses critiques. Au voisinage de chacune de ces vitesses, quelle est la phase relative des déplacements aux deux extrémités. Conclure.
- 8- Dépasser la première vitesse critique, observer l'auto-centrage de l'arbre pour les vitesses sensiblement supérieures à la première vitesse critique.

DETERMINATION DES PARAMETRES MODAUX D'UNE POUTRE

1- Introduction, but du TP.

L'analyse modale expérimentale est une technique qui permet la détermination de la base modale d'une structure mécanique. La connaissance d'une telle base est essentielle pour l'étude du comportement vibratoire de la structure. La détermination expérimentale de la base modale permet en outre le recalage d'un modèle obtenu par éléments finis.

Le principe de l'analyse modale consiste à considérer que la structure continue étudiée (poutre, plaque...), i.e. une structure comportant une infinité de degrés de libertés et par conséquent une infinité de modes propres, peut être discrétisée sous forme d'un système comportant un nombre fini de degrés de libertés. Cette approche est valide en basses fréquences (i.e. pour les premiers modes). Vous trouverez dans votre cours de vibrations (chapitre III, paragraphe 4) une description de la méthode d'analyse modale expérimentale. **Le problème à traité est très proche de l'exemple de la p.104.** Vous pourrez également lire le paragraphe introductif du TP Chladni afin de mieux cerner les notions de déformée modale, de nœuds et de ventres de vibrations.

L'objet de ce TP est de déterminer les paramètres modaux d'une structure simple de type poutre. L'analyse est menée en utilisant un marteau d'impact comme source d'excitation.

2- Description du dispositif expérimental

La structure étudiée est une poutre suspendue en deux points (voir la figure 1). La suspension étant particulièrement souple, la poutre peut être considérée comme libre à chacune de ses extrémités.

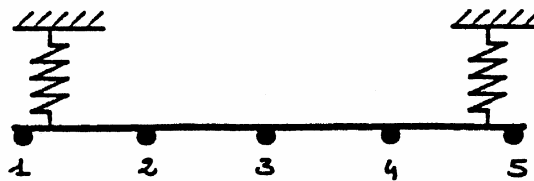


Figure 1 : vue du dispositif

L'excitation est réalisée à l'aide d'un marteau d'impact. Celui-ci est muni d'un capteur de force; la mesure de ce signal permet de caractériser l'excitation appliquée à la poutre (idéalement une impulsion de Dirac), dans le domaine temporel (fig. 2a) et fréquentiel (fig. 2b). On peut modifier le contenu fréquentiel de l'impulsion d'impact au moyen d'embouts interchangeables (acier, plastique, caoutchouc, ...).

La technique du marteau d'impact est intéressante à plusieurs titres :

- Le matériel d'excitation est réduit, donc facile à mettre en oeuvre.
- Il n'y a pas de perturbation du comportement mécanique (masse ajoutée, amortissement) liée à la présence de l'excitateur.
- Le temps d'analyse est réduit (utilisation de la FFT).

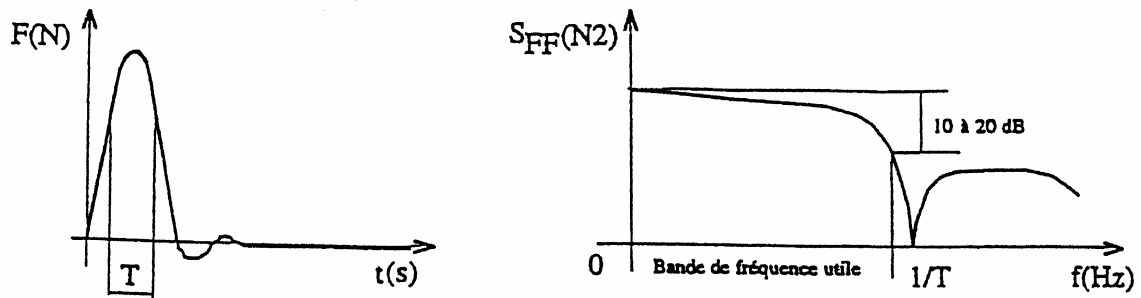


Figure 2 a) impulsion d'excitation

b) autospectre de F

La réponse de la structure à cette excitation est mesurée par trois accéléromètres ICP, placés respectivement aux points 1, 3 et 5, définis sur la figure 1 . L'excitation peut être appliquée aux points 1 à 5.

En analyse modale, le comportement de la structure est supposé linéaire, de sorte que ses propriétés dynamiques peuvent être caractérisées par une fonction de transfert. Cette fonction de transfert est appelée fonction de réponse en fréquence (FRF). Elle correspond au quotient, dans le domaine de Fourier de l'accélération mesurée en un point d'écoute par la force appliquée en un point d'impact.

Une carte d'acquisition (DIFA), pilotée par un ordinateur (PC) permet l'enregistrement des signaux issus des trois accéléromètres et du capteur de force monté sur le marteau d'impact. Le traitement de ses différents signaux permet le calcul des fonctions de réponse en fréquence dont on peut extraire les caractéristiques modales de la structure.

3- Gestion de la carte d'acquisition

On donne ci-après quelques éléments permettant de mettre en oeuvre la carte d'acquisition DIFA. La documentation du constructeur, à laquelle on pourra se reporter fournit des informations complètes.

- Lancer le programme de gestion de la carte d'acquisition (Difa measuring systems) sous DOS :

```
c:\> cd d_tac200
c:\d_tac200> de
```

- Rappeler les paramètres de configuration par défaut :
-file /settings/sélectionner la config. "POUTRE"/reload
- Vérification et, le cas échéant, modification de la configuration d'acquisition :
 - setting / acquisition
 - setting / measure settings (repeat count)
 - setting / FFT window
 - setting / calibration
 - setting / display
- Réalisation d'une mesure ou d'une série de mesure :
 - measure / FRF

4- Travail à effectuer

- 1- A l'aide du document fourni en annexe, calculer les fréquences propres des 4 premiers modes de la poutre.
- 2- Les accéléromètres ont une sensibilité d'environ 100 mV/g. Rechercher dans la documentation la sensibilité du capteur d'effort monté sur le marteau d'impacts (la livre-force (lbf) est une unité anglo-saxonne équivalente à 0,444 g). Régler la dynamique de chaque voie de façon à éviter toute saturation, et vérifier que la configuration d'acquisition prend correctement en compte les sensibilités des capteurs.
- 3- Réaliser un impact au point 1 et mesurer les fonctions de transfert $H_{i1}(\omega) = a_i(\omega)/F_1(\omega)$. La quantité $a_i(\omega)$ désigne l'accélération du point i ($i=1,2,3$).
- 4- Déterminer la fréquence de résonance ω_{dk} et l'amortissement relatif ξ_k des 3 premiers modes ($k=1,2,3$) de la poutre. Pour la détermination de l'amortissement relatif, deux méthodes peuvent être utilisées : la méthode d'atténuation à -3dB décrite en annexe (méthode valable pour un pic de résonance isolé et faiblement amorti) et la fonction f0 / damping du menu scalar (section 8.25 du manuel d'instruction de la carte d'acquisition DIFA). Cette fonction permet d'obtenir la fréquence propre et l'amortissement relatif d'un pic encadré par 2 curseurs¹.
- 5- Les modes propres $U(i,k)$ vérifient la relation suivante (voir cours : exemple d'analyse modale d'une poutre)

$$|U(i,k)U(j,k)| = 2 \xi_k \omega_k^2 |H_{ij}(\omega_k)|$$

L'indice $i=1,2,3,4,5$ désigne le numéro du point d'impact. L'indice $j=1,2,3,4,5$ désigne le numéro du point où est placé l'accéléromètre. L'indice $k = 1,2,3$ désigne le numéro du mode. Cette relation permet de déterminer les valeurs de $|U(i,k)|$, i.e. l'amplitude de déformation au point i correspondant au mode k . Le signe de $U(i,k)$ est défini par la phase de $H_{ij}(\omega_k)$.

Déterminer les modes propres $U(i,k)$. Faire une représentation graphique. Placer en abscisse les points de mesure sur l'axe de la poutre et en ordonnée l'amplitude de la déformée modale.

- 7- Le nombre de points de mesure n'est pas suffisant pour déterminer complètement les déformées modales (sous échantillonnage spatial). Quelles sont les mesures qui permettent d'obtenir les informations manquantes ? Effectuer ces mesures et compléter la représentation des déformées modales.

¹ ... mais vous allez constater qu'elle ne fonctionne pas : employer la méthode de la largeur de bande à - 3dB

ANNEXE : Fréquences propres de vibration d'une poutre homogène de section constante pour différentes conditions aux limites

Conditions aux limites	Valeur propre μ_n			
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n > 3$
libre - libre	0	4.730	7.853	$(2n - 1)\frac{\pi}{2}$ (approx.)
libre - guidée	0	2.365	5.498	$(4n - 5)\frac{\pi}{2}$ (approx.)
libre - articulée	0	3.927	7.069	$(4n - 3)\frac{\pi}{4}$ (approx.)
guidée - guidée	0	3.142	6.283	$(n - 1)\pi$ (exact)
guidée - articulé	1.561	5.712	7.854	$(2n - 1)\frac{\pi}{2}$ (exact)
encastrée - libre	1.875	4.694	7.855	$(2n - 1)\frac{\pi}{2}$ (approx.)
bi - articulée	3.142	6.283	9.425	$n\pi$ (exact)
encastrée - articulée	3.927	7.069	10.210	$(4n + 1)\frac{\pi}{4}$ (approx.)
encastrée - guidée	2.365	5.498	8.639	$(4n - 1)\frac{\pi}{4}$ (approx.)
bi - encastrée	4.730	7.853	10.996	$(2n + 1)\frac{\pi}{2}$ (approx.)

$$\omega_n^2 = \mu_n^4 \frac{EI}{ml^4}$$

table 4.5.1 ✖
Fréquences propres de vibrations d'une poutre uniforme pour différents cas de conditions aux limites

* d'après « Théorie des vibrations », M. Géradin & D. Rixen, 1993

Pour une poutre de longueur ℓ , sollicitée dans le plan vertical, de section b (largeur) \times h (hauteur) :

$$I = \frac{b h^3}{12}$$

NB : pour de l'acier, $E=210$ Gpa, et $\rho=7800$ kgm⁻³

ANNEXE : Analyse modale , rappels de quelques éléments théoriques

1- Système à un degré de liberté

1-1 Description

Le système le plus simple comporte un degré de liberté (Fig. 1). En considérant un amortissement visqueux, son comportement est représenté par l'équation :

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = f(t) \quad (1)$$

dont les paramètres physiques sont :

m masse (kg)

k raideur (N . m⁻¹)

c amortissement visqueux (l'amortisseur exerce une force $-c \dot{x}$, proportionnelle et de sens opposé à la vitesse instantanée)

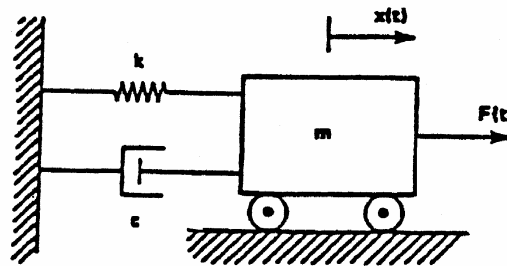


Figure 1

1-2 Réponse libre

En l'absence de force d'excitation ($f(t) = 0$), l'équation homogène associée à (1)

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0$$

admet des solutions de la forme :

$$x = x_1 e^{(\delta + j \omega_d)t} + x_2 e^{(\delta - j \omega_d)t} = x_1 e^{\lambda t} + x_2 e^{\bar{\lambda} t}$$

avec :

$$\omega_d = \frac{\sqrt{4 k m - c^2}}{2 m} = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (\text{pulsation propre du système amorti})$$

$$\delta = \frac{-c}{2 m} = -\zeta \omega_0 \quad (\text{valeur d'amortissement})$$

$$\lambda = \frac{-c + \sqrt{4 k m - c^2}}{2 m} = \delta + j \omega_d \quad (\text{pôle})$$

1-3 Réponse forcée

En présence d'une excitation harmonique $f(t) = F e^{j\omega t}$, l'équation (1) s'écrit :

$$\ddot{x} + 2 \zeta \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \left(\frac{F}{k} \right) e^{j\omega t} \quad (2)$$

avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\delta^2 + \omega_d^2} \quad (\text{pulsation propre du système non amorti})$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{k m}} = \frac{c}{2 m \omega_0} = \frac{1}{2 Q} = -\frac{\delta}{\omega_0} \quad (\text{coefficient d'amortissement relatif})$$

La recherche d'une solution de la forme $x = X e^{j\omega t}$ conduit à la fonction de transfert complexe :

$$H(\omega) = \frac{X}{\left(\frac{F}{k} \right)} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 2 j \zeta \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)} \quad (3)$$

dont l'amplitude et la phase sont représentés figure 2 :

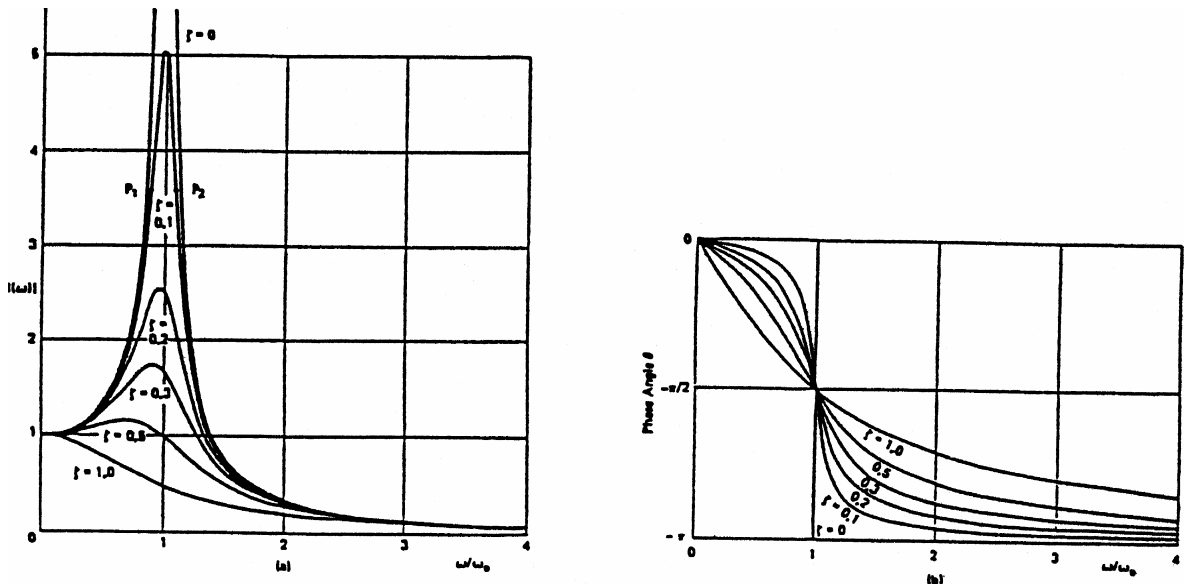


Figure 2 : variation du module et de la phase de la fonction de transfert d'un système à un degré de liberté, en fonction du paramètre fréquentiel adimensionnel ω/ω_0

On constate que :

- la pulsation de résonance diminue avec l'amortissement :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

- l'amplitude de la réponse diminue avec l'amortissement ζ , et le maximum d'amplitude est :

$$H(\omega_r) = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3 \text{ bis})$$

Sur la courbe $\zeta = 0,1$ (voir figure 2), les points P_1 et P_2 d'abscisses ω_1 et ω_2 , pour lesquels l'amplitude est $1/\sqrt{2}$ la valeur de la résonance (ce qui correspond à une diminution de -3 dB par rapport à la résonance) sont tels que la différence $(\omega_2 - \omega_1)$ vérifie, pour un faible amortissement, la relation :

$$\omega_2 - \omega_1 = 2\zeta \omega_0$$

ce qui donne la relation :

$$\eta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = 2\zeta = \frac{1}{Q} = \frac{-2\delta}{\omega_0}$$

où Q est le facteur de qualité.

Pour les faibles amortissements sur un système à un degré de liberté, $H(\omega_r) \approx \frac{1}{2\zeta} = Q$

Les figures (3) et (4) représentent les parties réelle et imaginaire de $H(\omega)$.

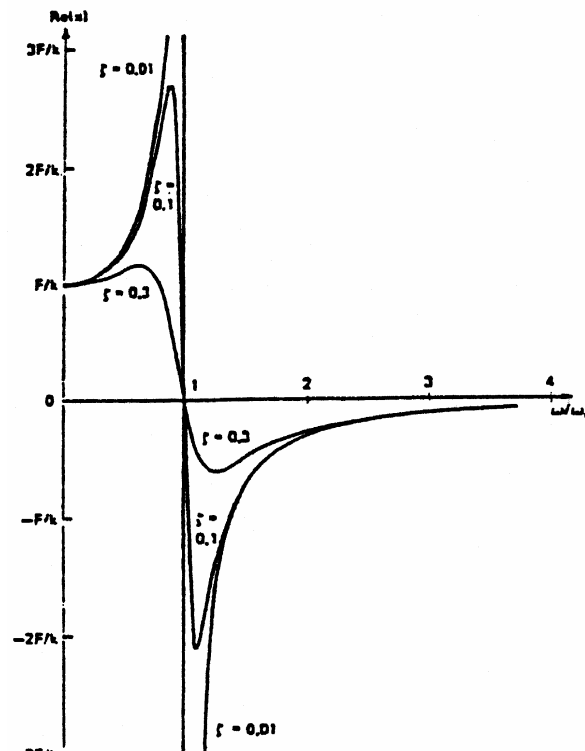


Figure 3 : variation de la partie réelle de de la fonction de transfert d'un système à un degré de liberté, en fonction du paramètre fréquentiel adimensionnel ω/ω_0

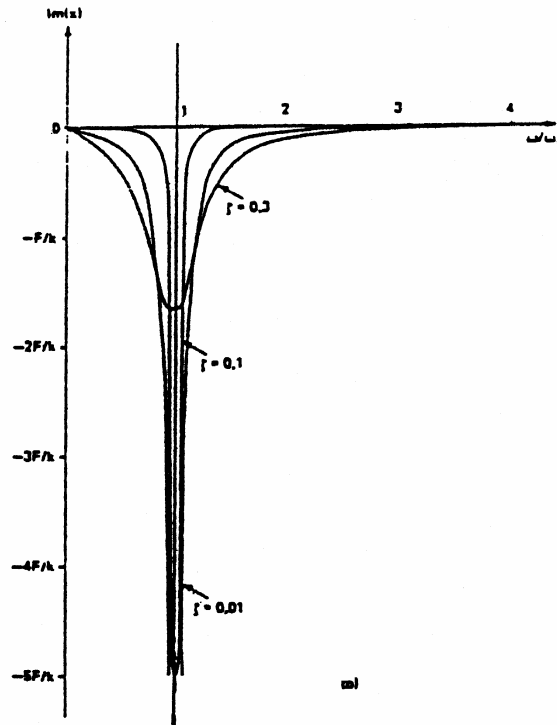


Figure 4 : variation de la partie imaginaire de de la fonction de transfert d'un système à un degré de liberté, en fonction du paramètre fréquentiel adimensionnel ω/ω_0

2- Système à plusieurs degrés de liberté :

2-1 Description

Une structure complexe peut être considérée comme un ensemble de masses interconnectées par des ressorts. L'amortissement réel d'une structure, résultant de phénomènes physiques variés et complexes, ne peut être modélisée avec la même précision que l'inertie et la raideur. Cependant, pour modéliser les phénomènes sous une forme mathématiquement exploitable, des hypothèses sont formulées sur la nature de l'amortissement. Nous utiliserons ici un amortissement de type visqueux, pour lequel la force est proportionnelle et opposée à la vitesse. D'autres modèles peuvent être utilisés, notamment l'amortissement hystérétique, pour lequel l'énergie dissipée dépend du nombre de cycles décrits par la structure. Dans les conditions d'un amortissement proportionnel, le comportement vibratoire d'une structure dans le domaine élastique se modélise sous la forme d'un système d'équations :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\} \quad (4)$$

où $[M]$, $[C]$ et $[K]$ sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement visqueux et de raideur, $\{x\}$ est le vecteur des N_{ddl} degrés de liberté du système (déplacements), $\{\dot{x}\}$ le vecteur des vitesses, $\{\ddot{x}\}$ le vecteur des accélérations et $\{f(t)\}$ le vecteur des forces d'excitations.

Remarque : les matrices $[M]$, $[C]$ et $[K]$ sont de dimensions $N_{ddl} \times N_{ddl}$.

2-2 Systèmes conservatifs

Un système est conservatif s'il n'est le siège d'aucune dissipation, c'est à dire si $[C] = [0]$.

La recherche d'une solution séparées, de la forme :

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{N_{ddl}} \{\phi_i(x, y, z)\} q_i(t)$$

conduit au calcul des modes et pulsations propres.

Les modes propres d'un système conservatif sont réels, c'est à dire que tous les points de la structure vibrent avec un déphasage de 0 -phase- ou π -opposition de phase- :

$$([K] - \omega_{0i}^2 [M]) \{\phi_i\} = \{0\} \quad i=1, N_{ddl}$$

Chaque vecteur propre est défini à une constante multiplicative arbitraire près.

L'écriture de (2) dans la base modale est obtenue en faisant le changement de base

$$\{x\} = [\phi] \{q\} \quad \text{où } [\phi] \text{ est la matrice des vecteurs propres } \phi_i :$$

$$(2) \Leftrightarrow {}^t[\phi][M][\phi] \{\ddot{q}\} + {}^t[\phi][K][\phi] \{q\} = {}^t[\phi]\{f(t)\}$$

Les vecteurs propres sont orthogonaux

$${}^t\{\phi_i\}[M]\{\phi_j\} = 0 \quad \text{et} \quad {}^t\{\phi_i\}[K]\{\phi_j\} = 0 \quad \text{pour } i \neq j$$

aussi les matrices modales $[M_m] = {}^t[\phi][M][\phi]$ et $[K_m] = {}^t[\phi][K][\phi]$

sont elles diagonales, de composantes respectives

$$m_i = {}^t\{\phi_i\}[M]\{\phi_i\} \quad (\text{masse modale})$$

$$k_i = {}^t\{\phi_i\}[K]\{\phi_i\} \quad (\text{raideur modale})$$

avec

$$k_i = \omega_{0i}^2 m_i$$

Remarque : les vecteurs propres étant définis à une constante multiplicative près, il est toujours possible de choisir cette constante de telle sorte que la masse modale soit unitaire (opération de normalisation) ; c'est ce qui a été implicitement écrit équation (2))

Le système d'équations ainsi obtenu est donc découplé, chaque mode se comportant comme un élément à un degré de liberté.

La transformée de Laplace s'écrit :

$$(p^2 [M_m] + [K_m]) \{Q(p)\} = {}^t[\phi] \{F(p)\}$$

soit, pour le mode i , les matrices modales étant diagonales,

$$q_i(p) = \frac{{}^t\{\phi_i\}\{F(p)\}}{p^2 m_i + k_i} = \frac{{}^t\{\phi_i\}\{F(p)\}}{m_i (p^2 + \omega_{0i}^2)}$$

Les racines de $p^2 + \omega_{0i}^2 = 0$ étant $p = \pm j \omega_{0i}$, on cherche à écrire le dénominateur sous la forme :

$$\frac{1}{p^2 + \omega_{0i}^2} = \frac{A}{p - j\omega_{0i}} + \frac{B}{p + j\omega_{0i}}$$

en identifiant, on obtient $A = -B = \frac{1}{2 j \omega_{0i}}$, d'où

$$q_i(p) = \frac{1}{2 j m_i \omega_{0i}} \left(\frac{1}{p - j \omega_{0i}} - \frac{1}{p + j \omega_{0i}} \right) {}^t\{\phi_i\}\{F(p)\} \quad (5)$$

en revenant à $X(p)$

$$\{X(p)\} = [\phi]\{Q(p)\} = \sum_{i=1}^{N_{ddl}} \frac{[\phi]^t[\phi]}{2 j m_i \omega_{0i}} \left(\frac{1}{p - j \omega_{0i}} - \frac{1}{p + j \omega_{0i}} \right) \{F(p)\}$$

d'où la matrice de transfert $[H(p)]$ telle que $\{X(p)\} = [H(p)]\{F(p)\}$

$$[H(p)] = \sum_{i=1}^{N_{ddl}} \frac{[\phi]^t[\phi]}{2 j m_i \omega_{0i}} \left(\frac{1}{p - j \omega_{0i}} - \frac{1}{p + j \omega_{0i}} \right)$$

en définissant les matrices résiduelles (de composantes imaginaires, puisque les modes sont réels)

$$[R_i] = \frac{[\phi]^t[\phi]}{2 j m_i \omega_{0i}}$$

cette matrice de transfert s'écrit

$$[H(p)] = \sum_{i=1}^{N_{ddl}} \left(\frac{[R_i]}{p - j \omega_{0i}} + \frac{[R_i^*]}{p + j \omega_{0i}} \right)$$

La matrice de transfert est, comme les $[R_i]$, symétrique de dimensions $N_{ddl} \times N_{ddl}$. En notant $r_{i(k,l)}$ la composante (k,l) de la matrice résiduelle $[R_i]$, la composante (k,l) de $[H(p)]$ est :

$$h_{k,l}(p) = \sum_{i=1}^{N_{ddl}} \left(\frac{r_{i(k,l)}}{p - j \omega_{0i}} + \frac{r_{i(k,l)}^*}{p + j \omega_{0i}} \right)$$

En reprenant l'équation (5) et l'expression dans la base modale $\{x\} = \sum_{i=1}^{N_{ddl}} \{\phi_i\} q_i(t)$, il vient

$$\{X(p)\} = \sum_{i=1}^{N_{ddl}} \frac{[\phi]^t[\phi]}{p^2 m_i + k_i} \{F(p)\}$$

soit, dans l'espace de Fourier ($p = j \omega$)

$$\{X(j\omega)\} = \sum_{i=1}^{N_{ddi}} \frac{[\phi]^t [\phi]}{k_i - \omega^2 m_i} \{F(j\omega)\}$$

La réponse impulsionnelle au point k ($k^{\text{ième}}$ composante de $\{X\}$) à une excitation de type Dirac unitaire au point l ($l^{\text{ième}}$ composante de $\{F\}$) est donc :

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{N_{ddi}} \frac{1}{\omega_{di}} \sin(\omega_{di} t) \phi_{i(k)} \phi_{i(l)}$$

où $\phi_{i(n)}$ est la $n^{\text{ième}}$ composante du vecteur propre $\{\phi_i\}$.

2-3 Systèmes dissipatifs à amortissement visqueux proportionnel

A une distribution de l'amortissement proportionnelle

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \quad (\alpha \text{ et } \beta \text{ réels})$$

(c'est à dire si la condition de Caughey est vérifiée : $[C][M]^{-1}[K] = [K][M]^{-1}[C]$)

correspondent des valeurs propres *complexes* $\lambda_i = \delta_i \pm j \omega_{di}$ associées à des modes (vecteurs) propres *réels*, qui sont les modes propres du système conservatif associé. Les valeurs propres sont deux à deux conjuguées, et de partie réelle négative, ce qui traduit une décroissance avec le temps de l'amplitude des modes de vibration libre, et la nature réelle des modes propres traduit que tous les points de la structure vibrent avec un déphasage de 0 (phase) ou π (opposition de phase).

Dans cette base modale, le système (4) s'écrit :

$$[M_m] \{\ddot{q}\} + [C_m] \{\dot{q}\} + [K_m] \{q\} = {}^t[\phi] \{f(t)\} \quad (6)$$

où la matrice modale d'amortissement $[C_m]$ est, comme $[M_m]$ et $[K_m]$, diagonale

$$[C_m] = {}^t[\phi][C][\phi] = \alpha [M_m] + \beta [K_m]$$

de composantes $\zeta_i = {}^t\{\phi_i\}[c]\{\phi_i\}$ (amortissement modal)

avec $k_i = \omega_{0i}^2 m_i = \sqrt{\delta_i^2 + \omega_{di}^2} m_i$ et $\zeta_i = -\frac{\delta_i}{\omega_{0i}}$

En raison des propriétés d'orthogonalité des modes réels, le membre de gauche du système (6) est constitué d'équations *découplées*.

La transformée de Laplace s'écrit :

$$(p^2 [M_m] + p [C_m] + [K_m]) \{Q(p)\} = {}^t[\phi] \{F(p)\}$$

soit, pour un mode :

$$(p^2 m_i + p c_i + k_i) Q_i(p) = {}^t\{\phi_i\} \{F(p)\}$$

la matrice de transfert est obtenue comme précédemment :

$$[H(p)] = \sum_{i=1}^{N_{ddl}} \frac{[\phi_i]^T [\phi_i]}{2 j m_i \omega_{di}} \left(\frac{1}{p - \lambda_i} - \frac{1}{p + \lambda_i} \right)$$

où apparaissent les pôles conjugués $\lambda_i = \delta_i + j \omega_{di}$ et $\lambda_i^* = \delta_i - j \omega_{di}$

En définissant les matrices résiduelles (de composantes imaginaires)

$$[R_i] = \frac{[\phi_i]^T [\phi_i]}{2 j m_i \omega_{di}}$$

la matrice de transfert s'écrit

$$[H(p)] = \sum_{i=1}^{N_{ddl}} \left(\frac{[R_i]}{p - \lambda_i} + \frac{[R_i^*]}{p + \lambda_i^*} \right)$$

dont la composante (k,l) est :

$$h_{k,l}(p) = \sum_{i=1}^{N_{ddl}} \left(\frac{r_{i(k,l)}}{p - \lambda_i} + \frac{r_{i(k,l)}^*}{p + \lambda_i^*} \right)$$

La réponse impulsionnelle au point k à une excitation au point l est donc :

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{N_{ddl}} \frac{1}{\omega_{di}} \sin(\omega_{di} t) e^{-\zeta_i \omega_{di} t} \phi_{i(k)} \phi_{i(l)}$$

ce qui s'écrit également :

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{N_{ddl}} R_i e^{\lambda_i t} + R_i^* e^{\lambda_i^* t}$$

2-4 Systèmes dissipatifs - cas général

Pour une matrice d'amortissement (symétrique) non proportionnelle, une technique classique consiste à associer à l'équation (4)

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f(t)\}$$

l'identité $[M]\{\dot{x}\} - [M]\{\dot{x}\} = \{0\}$,

ce qui permet de former le système matriciel

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix},$$

qui est de la forme $[U]\{\dot{z}\} + [V]\{z\} = \{g(t)\}$,

où les matrices [U] et [V] sont symétriques, de dimensions $2 N_{ddl} \times 2 N_{ddl}$, mais de signe indéfini. L'avantage de cette écriture est de ramener un système différentiel du second ordre à un système du premier ordre.

La solution du système homogène associé $[U]\{\dot{z}\} + [V]\{z\} = \{0\}$ met en évidence l'existence de *modes propres* $\{\phi_{di}\}$ complexes. La nature complexe d'un mode propre traduit que tous les degrés de liberté de la structure ne sont pas *simultanément* nuls (énergie sous forme cinétique), de même qu'ils ne parviennent pas *simultanément* à l'état de déplacement maximal (énergie sous forme potentielle). Contrairement à un système conservatif, les noeuds de vibration de la structure ne sont donc pas fixes, mais évoluent cycliquement au cours du temps, à la manière d'une onde stationnaire.

Pour décrire le comportement de la structure à amortissement généralisé, la réponse forcée peut être exprimée sur la base du système conservatif associé (SCA), ou sur la base du système dissipatif.

2-5 Réponse sur la base du système conservatif associé à l'équation (4) :

La base du SCA est formée des vecteurs propres de l'équation homogène :

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\}$$

Dans cette base, l'équation (4) peut se mettre sous la forme :

$$[M_m]\{\ddot{q}\} + [C_{dm}]\{\dot{q}\} + [K_m]\{q\} = {}^t[\phi]\{f(t)\}$$

où les matrices généralisées de masse $[M_m]$ et de raideur $[K_m]$ sont *diagonales*, et où la matrice d'amortissement généralisée $[C_{dm}]$ est, dans le cas d'un amortissement *non proportionnel, non diagonale*. Le système d'équations ainsi obtenu n'est donc pas découplé : en considérant les modes propres de SCA, un *amortissement non proportionnel* introduit un *couplage* entre modes, c'est à dire un *transfert d'énergie* entre différents modes propres.

2- 6 Réponse sur la base du système dissipatif :

Dans cette base complexe $\{\phi_{di}\}$, le système d'équations obtenu est découplé, quelle que soit la structure de la matrice des amortissements généralisés. Il est alors possible de définir une fonction de transfert sous la forme fractionnelle partielle :

$$[H(p)] = \sum_{i=1}^{N_{ddl}} \left(\frac{[R_i]}{p - \lambda_i} - \frac{[R_i^*]}{p + \lambda_i} \right)$$

ou, en l'exprimant sous forme d'une fonction rationnelle :

$$[H(p)] = \sum_{i=1}^{N_{ddl}} \frac{p(R_i + R_i^*) + \lambda_i R_i - \lambda_i^* R_i^*}{p^2 + p(\lambda_i - \lambda_i^*) - \lambda_i \lambda_i^*} = \sum_{i=1}^{N_{ddl}} \frac{\alpha_{0i} + \alpha_{1i} p}{\beta_{0i} + \beta_{1i} p + p^2}$$

Cette dernière forme est utilisée dans les méthodes polynomiales d'identification modale.

Dans le cas d'une excitation par un Dirac au point l , la réponse impulsionnelle en un point k est donnée par :

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{N_{ddl}} \left(\phi_{di(k)} \phi_{di(l)} \right) e^{\lambda_{di} t} + \left(\phi_{di(k)}^* \phi_{di(l)}^* \right) e^{\lambda_{di}^* t}$$

2-7 Principe de réciprocité

Quelle que soit la nature de l'amortissement, la symétrie des matrices du problème physique $[K]$, $[M]$ et $[c]$ conduit à la symétrie de la matrice de transfert $[H]$, qui illustre le principe de réciprocité : la fonction de transfert pour une excitation au point k et une réponse au point l est la même que pour une excitation au point l et la réponse en k .

En pratique, la matrice de raideur $[K]$ peut ne pas être symétrique (par exemple dans le cas d'éléments de machine lubrifiés par film d'huile).

3 -Eléments bibliographiques relatifs à l'analyse modale des structures

- [1] Modan, version 2.0, Manuel théorique.
- [2] J. Piranda, Analyse modale expérimentale, note interna du Laboratoire de Mécanique Appliquée Raymond Chaléat, Besançon, 1996.
- [3] J.F. Boisseau, B. Garnier, Vibrations des structures industrielles, in Techniques de l'ingénieur, tome R6.
- [4] K. Zaveri, M. Phil, Modal Analysis of large Structures : Multiple Exciter Systems, brochure Brüel & Kjaer, 1985
- [5] Geradin, Rixen, Théorie des vibrations.