

Formation de voies : détermination du vecteur de pointage

Les méthodes de formation de voies sont des techniques qui permettent d'obtenir la contribution des sources qui se trouvent dans un domaine sélectionné de l'espace en utilisant une antenne de microphones. Un vecteur de pointage construit en fonction de la position où on recherche la source pondère le signal de chacun des microphones avant de les sommer. Cette approche est basée sur un modèle de sources, ici des sources ponctuelles décorrélées. De nombreuses méthodes sont utilisées pour construire le vecteur de pointage :

- les méthodes intuitives de formation de voies conventionnelles par retard et sommation,
- les nombreuses méthodes basées sur la solution d'un problème d'optimisation,
- les méthodes dites 'haute résolution'.

Le terme haute résolution (HR) est utilisé pour désigner les algorithmes qui conduisent à une meilleure résolution que la méthode de formation de voie standard, ce qui est le cas pour la méthode à variance minimum ou méthode de Capon et les méthodes auto-régressives. Toutefois, Marcos (1999) adopte la définition suivante : "une méthode est dite haute résolution, si et seulement si, sa résolution potentielle est meilleure que celle de la formation de voies classique, et dont les performances asymptotiques ne sont pas limitées par le rapport signal sur bruit des signaux. Autrement dit, son pouvoir de résolution est théoriquement illimité pour un temps d'observation infini.", et fait remarquer que cette définition exclut les méthodes de formation de voies adaptatives et de maximum d'entropie (auto-régressives). Dans cette courte introduction aux techniques d'antenne, les méthodes HR sont limitées à la technique de décomposition en sous espace représentés par la méthode des valeurs propres et la méthode MUSIC.

On adopte le plan suivant :

Estimation des sources par antenne à retard et somme

Représentation temporelle

Représentation fréquentielle

La formation de voies comme solution d'un problème d'optimisation

Processeur de Bartlett

Estimation en présence de bruit

Estimation à variance minimum des sources

Décomposition en sous-espaces

Propriétés de la matrice interspectrale

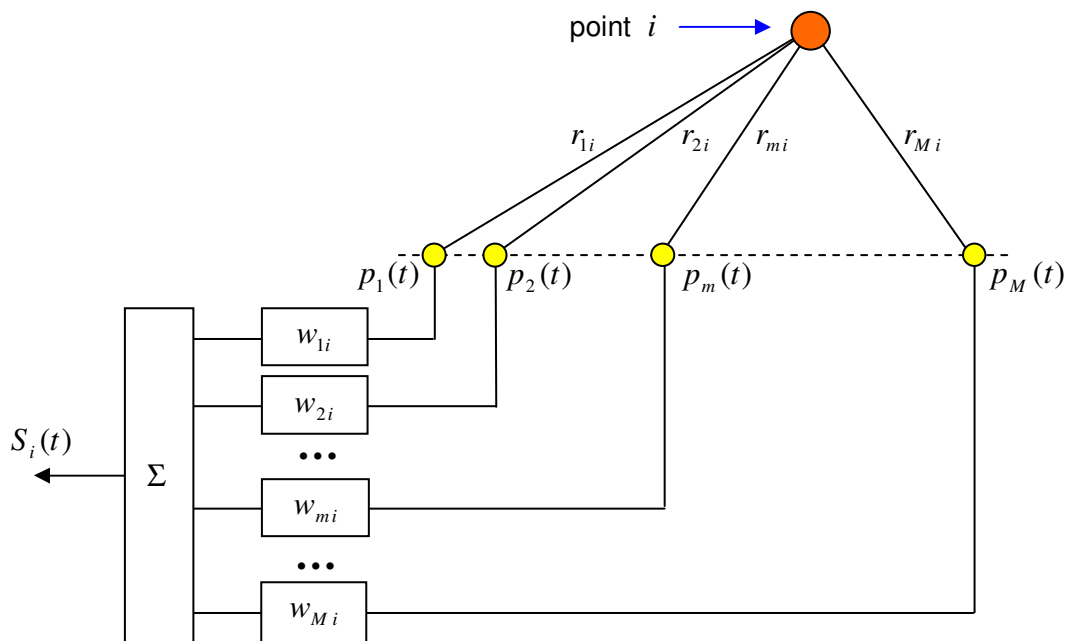
Méthode des valeurs propres et méthode MUSIC

Estimation des sources par antenne à retard et somme

Représentation temporelle

C'est la forme la plus classique de la formation de voies (DS : delay and sum beamformer). Chaque voie de l'antenne est constituée d'un microphone et d'un dispositif électronique permettant d'ajuster le gain et le retard du signal microphonique. Pour tester l'hypothèse de la présence d'une source ponctuelle située au point i , donc à des distances r_{mi} de chaque microphone, les retards r_{mi}/c (c est la célérité du son) dus à la propagation sont compensés. Ainsi l'estimation $S_i(t)$ de la source située au point i s'obtient en sommant les signaux

$$S_i(t) = \frac{\sum_{m=1}^M a_m p_m(t + r_{mi}/c)}{\Xi} \tag{1.1}$$



Dans l'équation précédente, un coefficient de pondération a_m est parfois utilisé pour modéliser la directivité de l'antenne (apodisation). Ξ représente un coefficient de normalisation nécessaire pour obtenir le niveau correct de la source. La pression produite par une source ponctuelle à une distance r en fonction de son débit d'accélération¹ $Q_a(t)$ est

¹ Le débit de masse est couramment employée et s'exprime par $Q_m(t) = \rho_0 Q_u(t)$ en fonction du débit de vitesse $Q_u(t) = 4\pi r^2 u_r(t)$ quand $r \rightarrow 0$ (où u_r est la vitesse particulière radiale à proximité immédiate de la source ponctuelle). Le débit d'accélération se définit donc par $Q_a(t) = dQ_u(t)/dt$.

$$p(t) = \frac{\rho_0 Q_a(t - r/c)}{4\pi r}. \quad (1.2)$$

En utilisant cette expression pour la pression captée par chacun des microphones de l'antenne dans l'équation estimant la source, on obtient

$$S_i(t) = \frac{\sum_{m=1}^M a_m p_m(t + r_{mi}/c)}{\Xi} = \frac{1}{\Xi} \sum_{m=1}^M a_m \frac{\rho_0 Q_a(t - r_{mi}/c + r_{mi}/c)}{4\pi r_{mi}} = \frac{\rho_0 Q_a(t)}{\Xi} \sum_{m=1}^M \frac{a_m}{4\pi r_{mi}}. \quad (1.3)$$

Cette relation montre clairement que pour une estimation de la source telle que $S_i(t) \approx \rho_0 Q_a(t)$, le coefficient de normalisation doit être $\Xi = \sum_{m=1}^M \frac{a_m}{4\pi r_{mi}}$. Ainsi il est possible d'écrire l'équation (1.1) d'une façon plus concise

$$S_i(t) = \sum_{m=1}^M p_m(t) * w_{mi}(t), \quad (1.4)$$

où la pression de chaque microphone est convoluée par une fonction nommée vecteur de pointage $w_{mi}(t) = \frac{\delta(t - T_0 + r_{mi}/c)}{\Xi}$ dans laquelle $T_0 = \max\left(\frac{r_{mi}}{c}\right)$ représente le retard de groupe nécessaire pour que le système soit causal.

Remarque : comme nous le verrons plus loin, cette approche intuitive ne conduit pas à un estimateur optimal de la source. Celui-ci correspond à la définition ci-dessous du vecteur de pointage

$$w_{mi}(t) = \frac{1}{\sum_{m=1}^M \frac{a_m}{(4\pi r_{mi})^2}} \frac{\delta(t - T_0 + r_{mi}/c)}{4\pi r_{mi}}. \quad (1.5)$$

Représentation fréquentielle

A une fréquence $f = \omega/2\pi$, le retard dû à la propagation s'exprime sous la forme d'un déphasage. La formation de voies par retard et sommation (DS) est souvent nommé processeur de Bartlett. Une estimation des amplitudes des sources peut se faire à partir du vecteur des pressions complexes captées par les M microphones de l'antenne. L'amplitude de la source au point focal i peut s'écrire formellement par

$$S_i = \mathbf{w}_i^H \mathbf{p}, \quad (2.1)$$

où \mathbf{w}_i est le vecteur de pointage (ou "steering vector") associé au point focal i (H note la transposée hermitienne : vecteur transposé dont les éléments sont complexes conjugués) et \mathbf{p} le vecteur des pressions complexes des microphones. Le produit scalaire $\mathbf{w}_i^H \mathbf{p}$ entre les deux

vecteurs est maximum quand ils sont colinéaires. Ce produit scalaire correspond en fait à un coefficient de corrélation. Le vecteur de pointage est donc basé sur un *modèle de source*.

Par exemple, pour une source ponctuelle d'amplitude unitaire située au point focal i et rayonnant en espace libre, sa fonction de transfert est

$$h_{mi} = \exp(-jkr_{mi}) / (4\pi r_{mi}), \quad (2.2)$$

où $k = 2\pi f/c$ et r_{mi} est la distance entre la source i et le microphone m . La contribution de cette source sur tous les microphones de l'antenne est représentée par le vecteur

$$\mathbf{h}_i = \begin{bmatrix} h_{1i} & \dots & h_{mi} & \dots & h_{Mi} \end{bmatrix}^T. \quad (2.3)$$

Ainsi, le vecteur des pressions pour une source ponctuelle d'amplitude $A_i = \rho_0 Q_{ai}$ au point focal i est $\mathbf{p} = A_i \mathbf{h}_i$ ($A_i = \rho_0 Q_{ai}$). En choisissant un vecteur de pointage $\mathbf{u}_i = \mathbf{h}_i$, la corrélation $\mathbf{u}_i^H \mathbf{p} = A_i \mathbf{h}_i^H \mathbf{h}_i$ est maximale. Mais le remplacement de \mathbf{w}_i par \mathbf{u}_i dans l'équation (2.1) ne permet pas d'obtenir S_i égal à A_i : \mathbf{w}_i doit satisfaire en plus à la contrainte de normalisation $\mathbf{w}_i^H \mathbf{h}_i = 1$ et s'exprime par

$$\mathbf{w}_i = \frac{\mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i^H \mathbf{h}_i}. \quad (2.4)$$

Souvent pour réduire les effets de lobe, des fenêtres spatiales sont employées (Hanning, Kaiser-Bessel, Blackman, etc.). En notant \mathbf{a} le vecteur des pondérations appliquées à chaque microphone, le vecteur de pointage \mathbf{w}_i utilisera $\mathbf{u}_i = \text{diag}(\mathbf{a}) \mathbf{h}_i$.

La densité spectrale de puissance (amplitude carrée) de la distribution de source estimée peut s'écrire ² $\overline{G}_{ii}(\omega) = E\{S_i^* S_i\} = E\{(\mathbf{w}_i^H \mathbf{p})(\mathbf{w}_i^H \mathbf{p})^H\} = E\{\mathbf{w}_i^H \mathbf{p} \mathbf{p}^H \mathbf{w}_i\}$, soit

$$\overline{G}_{ii}(\omega) = \mathbf{w}_i^H \mathbf{G}_{pp} \mathbf{w}_i, \quad (2.5)$$

où $\mathbf{G}_{pp} = E\{\mathbf{p} \mathbf{p}^H\}$ est la matrice interspectrale des pressions sur l'antenne. Chaque élément de la matrice correspond à une densité interspectrale de puissance (interspectre³) entre deux

microphones de l'antenne $G_{mn}^{pp} = E\{p_m p_n^*\} \approx (2/T) \sum_{k=1}^N p_{m,k}(\omega, T) p_{n,k}^*(\omega, T)$, où $p_{m,k}(\omega, T)$ est

la transformée de Fourier sur un tronçon d'indice k de durée finie T du signal du microphone m . Sur la diagonale de la matrice \mathbf{G}_{pp} se trouvent les autospectres (réels) des microphones.

On note que $G_{nm}^{pp} = G_{mn}^{pp*}$, ce qui confère à \mathbf{G}_{pp} la symétrie hermitienne.

² On a la relation suivante entre des vecteurs complexe : $(\mathbf{w}^H \mathbf{p})^* = (\mathbf{p}^T \mathbf{w}^*)^* = \mathbf{p}^H \mathbf{w} = (\mathbf{w}^H \mathbf{p})^H$

³ pour simplifier on parlera d'interspectre pour densité interspectrale de puissance et d'autospectre pour la densité spectrale de puissance;

La formation de voies comme solution d'un problème d'optimisation

Processeur de Bartlet

Pour rechercher un vecteur de pointage optimal, il faut définir une fonction coût (ou d'erreur) que l'on cherchera à minimiser. La fonction coût est naturellement associée à l'écart $|\mathbf{w}_i^H \mathbf{p} - A_i|$ entre la valeur estimée de la source et sa valeur réelle. Puisque les sources (et le bruit ajouté) sont des grandeurs aléatoires, c'est la densité spectrale de puissance qui définit cette fonction coût

$$J = E\{(\mathbf{w}_i^H \mathbf{p} - A_i)(\mathbf{w}_i^H \mathbf{p} - A_i)^*\} = \mathbf{w}_i^H \mathbf{G}_{pp} \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_i^H E\{\mathbf{p} A_i^*\} - E\{\mathbf{p}^H A_i\} \mathbf{w}_i + E\{A_i^* A_i\}. \quad (3.1)$$

$G_{ii} = E\{A_i^* A_i\}$ est le spectre de la source i . En considérant les vecteurs des densités interspectrales de puissance $\mathbf{g}_{pi} = E\{\mathbf{p} A_i^*\}$ et $\mathbf{g}_{pi}^H = E\{\mathbf{p}^H A_i\}$, la fonction coût se met sous la forme quadratique suivante

$$J = \mathbf{w}_i^H \mathbf{G}_{pp} \mathbf{w}_i - \mathbf{w}_i^H \mathbf{g}_{pi} - \mathbf{g}_{pi}^H \mathbf{w}_i + G_{ii}, \quad (3.2)$$

et la solution optimale s'obtient en calculant son minimum en appliquant la condition $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}_i} = 0$. J est un scalaire dérivé par un vecteur qui conduit à une expression vectorielle⁴

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}_i} = \mathbf{w}_i \mathbf{G}_{pp} - \mathbf{g}_{pi} = 0, \quad (3.3)$$

qui permet de donner l'expression du vecteur de pointage optimal

$$\mathbf{w}_{i \text{ optimal}} = \mathbf{G}_{pp}^{-1} \mathbf{g}_{pi}. \quad (3.4)$$

En considérant la matrice interspectrale due à la source i qui peut être modélisée par

$$\mathbf{G}_{pp,i} = E\{A_i \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H A_i^*\} = G_{ii} \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H, \quad (3.5)$$

et le vecteur des interspectres entre les pressions dues à cette source et son amplitude

$$\mathbf{g}_{pi,i} = E\{\mathbf{p} A_i^*\} = E\{A_i \mathbf{h}_i A_i^*\} = G_{ii} \mathbf{h}_i, \quad (3.6)$$

le vecteur de pointage s'écrit⁵

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{G}_{pp,i}^{-1} \mathbf{g}_{pi,i} = (\mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H)^{-1} \mathbf{h}_i = \frac{\mathbf{h}_i}{\mathbf{h}_i^H \mathbf{h}_i}. \quad (3.7)$$

⁴ M.T. Hanna, M. Simaan, "A closed-form solution to a quadratic optimization problem in complex variables", *Journal of Optimization Theory and Applications* **47** (4) (1985) 437-450. Voir aussi, P.A. Nelson, S.J. Elliott, *Active Control of Sound* (Appendix : a linear little algebra), Academic Press, 1992.

⁵ en utilisant la relation $(\mathbf{A}^H)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^H$ avec $\mathbf{A}^H = \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H$ (<http://matrixcookbook.com/>)

Le vecteur de pointage optimal obtenu correspond bien à l'expression (2.4) avec $\mathbf{u}_i = \mathbf{h}_i$.

Estimation en présence de bruit

On considère ici qu'un bruit indépendant vient s'ajouter au signal des sources mesurées par les microphones, si bien que la matrice interspectrale des microphones devient

$$\hat{\mathbf{G}}_{pp,i} = G_{ii} \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H + \mathbf{G}_{nn}. \quad (4.1)$$

Le bruit de chaque microphone est supposé décorrélé (pas de termes croisés dans la matrice interspectrale) et peut s'écrire en utilisant la matrice identité tel que $\mathbf{G}_{nn} = G_{nn} \mathbf{I}$. Le vecteur des densités interspectrales de puissance $\mathbf{g}_{pi,i} = E\{\mathbf{p} A_i^*\} = G_{ii} \mathbf{h}_i$ n'est pas affecté par le bruit puisque celui-ci n'est pas corrélé avec le signal de la source. En notant le rapport du bruit sur le signal source $\gamma = G_{nn}/G_{ii}$, le modèle de la matrice interspectrale mesurée devient $\hat{\mathbf{G}}_{pp,i} = G_{ii} (\mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H + \gamma \mathbf{I})$. Le vecteur de pointage devient alors⁶

$$\mathbf{w}_i = \hat{\mathbf{G}}_{pp,i}^{-1} \mathbf{g}_{pi,i} = (\mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H + \gamma \mathbf{I})^{-1} \mathbf{h}_i = \frac{\mathbf{h}_i}{\mathbf{h}_i^H \mathbf{h}_i + \gamma}. \quad (4.2)$$

Estimation à variance minimum des sources

Cette méthode, introduite par Capon (1969), est aussi nommée méthode de maximum de vraisemblance. Elle consiste à choisir un vecteur de pointage qui minimise l'énergie à la sortie du processeur quand celui-ci est soumis à la contrainte de normalisation (gain unitaire pour une source unitaire) dans la direction de la source. Ce problème d'optimisation est exprimé sous forme synthétique par :

$$\text{Minimiser } \mathbf{w}_i^H \mathbf{G}_{pp} \mathbf{w}_i \text{ sous réserve que } \mathbf{w}_i^H \mathbf{h}_i = 1. \quad (5.1)$$

La solution est obtenue par la méthode du multiplicateur de Lagrange (noté λ) qui consiste à minimiser la forme quadratique suivante

$$J = \mathbf{w}_i^H \mathbf{G}_{pp} \mathbf{w}_i + \lambda (\mathbf{w}_i^H \mathbf{h}_i + \mathbf{h}_i^H \mathbf{w}_i). \quad (5.2)$$

La dérivée de cette fonctionnelle étant $\frac{\partial J}{\partial \mathbf{w}_i} = 2\mathbf{G}_{pp} \mathbf{w}_i + 2\lambda \mathbf{h}_i$, son annulation conduit à l'expression suivante du vecteur de pointage

$$\mathbf{w}_i = -\lambda \mathbf{G}_{pp}^{-1} \mathbf{h}_i. \quad (5.3)$$

Celui-ci doit aussi satisfaire la contrainte de normalisation $\mathbf{w}_i^H \mathbf{h}_i = \mathbf{h}_i^H \mathbf{w}_i = 1$, qui devient

$$-\lambda \mathbf{h}_i^H \mathbf{G}_{pp}^{-1} \mathbf{h}_i = 1, \quad (5.4)$$

⁶ K.B. Petersen, M.S. Petersen, The Matrix Cookbook [<http://matrixcookbook.com>], 2008.

quand on utilise l'expression du vecteur de pointage de l'équation (5.3). Le multiplicateur de Lagrange est ainsi obtenu et fournit le vecteur de pilotage optimal en reportant son expression dans (5.3)

$$\mathbf{w}_i = \frac{\mathbf{G}_{pp}^{-1} \mathbf{h}_i}{\mathbf{h}_i^H \mathbf{G}_{pp}^{-1} \mathbf{h}_i}. \quad (5.5)$$

Remarques

- 1) Dans la méthode de Capon et contrairement aux méthodes précédentes (Eq. 3.5 et 3.6), la matrice interspectrale \mathbf{G}_{pp} n'est pas construite avec le modèle de la source i mais calculée à partir des signaux microphoniques mesurés.
- 2) En utilisant l'expression (2.5) pour la densité spectrale de source $\overline{G}_{ii}(\omega) = \mathbf{w}_i^H \mathbf{G}_{pp} \mathbf{w}_i$ et en utilisant l'expression (5.5) du vecteur de pilotage on obtient

$$\overline{G}_{ii} = \frac{1}{\mathbf{h}_i^H \mathbf{G}_{pp}^{-1} \mathbf{h}_i}. \quad (5.6)$$

- 3) La méthode de Capon possède une sensibilité plus importante au modèle de source et à la qualité des signaux mesurés car son vecteur de pointage utilise la matrice interspectrale mesurée. Une version *régularisée* où l'inverse de la matrice interspectrale \mathbf{G}_{pp}^{-1} est remplacée par $(\mathbf{G}_{pp} + \gamma \mathbf{I})^{-1}$ doit souvent être employée.

Décomposition en sous-espaces

Cette méthode est basée sur les propriétés de la matrice interspectrale.

Propriétés de la matrice interspectrale

La matrice interspectrale \mathbf{G}_{pp} des pressions microphoniques a pour éléments les interspectres calculés entre chaque paires de microphones. L'élément d'indices mn correspond à l'interspectre entre le microphone m et le microphone n et s'exprime par

$$G_{mn}^{pp} = E\{p_m p_n^*\} \approx (2/T) \sum_{k=1}^N p_{m,k}(\omega, T) p_{n,k}^*(\omega, T). \quad (6.1)$$

On remarque que l'interspectre G_{nm}^{pp} , qui correspond à l'élément symétrique de G_{mn}^{pp} dans la matrice, est son complexe conjugué $G_{nm}^{pp} = G_{mn}^{pp*}$. Sur la diagonale de la matrice \mathbf{G}_{pp} se trouvent les autospectres (réels) des microphones. On dit que \mathbf{G}_{pp} est une matrice carrée qui possède une symétrie hermitienne et peut se définir par la relation

$$\mathbf{G}_{pp}^H = \mathbf{G}_{pp}, \quad (6.2)$$

où H signifie que la matrice est transposée et que ses éléments sont remplacés par leurs complexes conjugués. Ces propriétés font que cette matrice $M \times M$ peut se décomposer, en utilisant la technique de décomposition en valeurs singulières (SVD), sous la forme

$$\mathbf{G}_{pp} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma}^2 \mathbf{U}^H. \quad (6.3)$$

La matrice \mathbf{U} est une matrice constituée de vecteurs propres $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_M]$ orthogonaux ($\mathbf{u}_i^H \mathbf{u}_j = 0$, pour $i \neq j$) et unitaires telle que $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^H = \mathbf{I}$. La matrice $\mathbf{\Sigma}^2$ est une matrice diagonale $\text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_M^2)$ dont les éléments présentent des valeurs propres décroissantes. En réécrivant la matrice interspectrale sous la forme (grâce à l'orthogonalité des vecteurs \mathbf{u}_q)

$$\mathbf{G}_{pp} = \sum_{q=1}^M \sigma_q^2 \mathbf{u}_q \mathbf{u}_q^H, \quad (6.4)$$

on montre qu'elle se décompose en M champs cohérents, indépendants entre eux (orthogonaux). Si les signaux microphoniques sont dus uniquement à N sources sonores, le rang r de la matrice interspectrale ne pourra être supérieur à N , c'est à dire que

$$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_r^2 \text{ et } \sigma_{r+1}^2 = \dots = \sigma_M^2 = 0, \text{ pour } r \leq N. \quad (6.5)$$

Dans la pratique, par exemple dans le cas d'un champ produit par des sources partiellement cohérentes situées dans une région en face de l'antenne, r peut être bien inférieur au nombre de sources ponctuelles. Dans la pratique, un bruit de mesure indépendant des signaux associés aux sources viendra aussi se superposer et conduire à des valeurs non-nulles pour les composantes d'indices supérieurs à r si bien que la matrice interspectrale peut s'écrire sous la forme de deux termes correspondant respectivement au *sous-espace source* et au *sous-espace bruit*

$$\mathbf{G}_{pp} = \mathbf{G}_{pp}^s + \mathbf{G}_{pp}^n = \underbrace{\sum_{q=1}^r \sigma_q^2 \mathbf{u}_q \mathbf{u}_q^H}_{\text{sous espace source}} + \underbrace{\sum_{q=r+1}^M \sigma_q^2 \mathbf{u}_q \mathbf{u}_q^H}_{\text{sous espace bruit}}. \quad (6.6)$$

Constitués de sommes d'éléments orthogonaux, les deux sous espaces sont naturellement orthogonaux.

Méthode des valeurs propres et méthode MUSIC

Si comme pour l'équation (3.5), le modèle de source est employé pour construire la matrice interspectrale $\mathbf{G}_{pp,i} = E\{A_i \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H A_i^*\} = G_{ii} \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^H$ due à une source située en i , deux situations peuvent se produire :

- a) une source réelle se trouve au point i et des éléments de cette matrice seront partiellement corrélés avec ceux de la matrice \mathbf{G}_{pp}^s mais tout à fait indépendants avec ceux de \mathbf{G}_{pp}^n , se qui signifie que

$$\mathbf{h}_i^H \mathbf{G}_{pp}^n \mathbf{h}_i \rightarrow 0.$$

- b) il n'y a pas de source réelle en i et des éléments de la matrice $\mathbf{G}_{pp,i}$ sont plus ou moins corrélés avec ceux des matrices \mathbf{G}_{pp}^s et \mathbf{G}_{pp}^n .

La méthode des valeurs propres construit un estimateur de source où la matrice interspectrale de l'estimateur de Capon (5.6) est remplacée par ses composantes correspondant au sous espace bruit tel que

$$P_i = \frac{1}{\mathbf{h}_i^H \mathbf{G}_{pp}^{-1} \mathbf{h}_i} = \frac{1}{\mathbf{h}_i^H \left[\sum_{q=r+1}^M \frac{\mathbf{u}_q \mathbf{u}_q^H}{\sigma_q^2} \right] \mathbf{h}_i} \quad (6.1)$$

qui peut se simplifier sous la forme équivalente suivante

$$P_i = \frac{1}{\sum_{q=r+1}^M \frac{|\mathbf{h}_i^H \mathbf{u}_q|^2}{\sigma_q^2}}. \quad (6.2)$$

Quand le processeur pointe sur le point i où se trouve une source, les vecteurs \mathbf{h}_i et \mathbf{u}_q (quand $q > r$) sont orthogonaux et l'estimateur P_i prend une valeur infinie. P_i ne fournit pas une estimation de la densité spectrale de la source mais seulement une estimation de sa présence au point i . La méthode MUSIC (MUltiple Signal Classification) due à Schmidt (1971) est une variante de la méthode précédente dont l'estimateur n'utilise pas les valeurs propres σ_q^2

$$P_i = \frac{1}{\mathbf{h}_i^H \left[\sum_{q=r+1}^M \mathbf{u}_q \mathbf{u}_q^H \right] \mathbf{h}_i} = \frac{1}{\sum_{q=r+1}^M |\mathbf{h}_i^H \mathbf{u}_q|^2}. \quad (6.3)$$

Pour utiliser ces méthodes, la séparation entre les deux sous-espaces doit être effectuée en utilisant des estimateurs du 'nombre de sources'. Ces estimateurs sont exposés en Annexe.

Ces méthodes HR fournissent des résultats très performants dans bons nombres de domaines où les antennes sont appliquées (communications, médical, radar, etc.). En acoustique des difficultés sont souvent rencontrées du fait que les dimensions des sources et des obstacles du milieu de propagation sont du même ordre de grandeur que la longueur d'onde. Le modèle \mathbf{h}_i peut-être alors assez différent des fonctions de transfert réelles, ce qui se traduit par de faibles corrélations avec l'espace source, et introduit du même coup un défaut d'orthogonalité avec le sous espace bruit qui rend les résultats difficilement interprétables.

Annexe : Détection du nombre de sources

Les estimateurs du nombre de sources peuvent s'écrire de la façon suivante ^{7,8} :

$$\begin{aligned}\hat{K} &= \arg \min_{k=\{0,\dots,M-1\}} \left\{ -N \log \left[\frac{g(k)}{a(k)} \right]^{M-k} + \alpha k(2M - k) \right\} \\ &= \arg \min_{k=\{0,\dots,M-1\}} \left\{ -N \log \frac{p(k)}{a^{M-k}(k)} + \alpha k(2M - k) \right\}\end{aligned}$$

avec M le nombre de capteurs utilisées et N le nombre d'échantillons (temporelle pour la fonction de corrélation et nombre de moyenne pour la matrice interspectrale) et en notant les moyennes arithmétique et géométriques des valeurs propres associées à l'espace bruit par

$$a(k) = \frac{s(k)}{M - k} = \frac{1}{M - k} \sum_{i=k+1}^M \hat{\lambda}_i \quad \text{et} \quad g(k) = p^{1/(M-k)}(k) = \left[\prod_{i=k+1}^M \hat{\lambda}_i \right]^{1/(M-k)}$$

et le paramètre α permet de différencier deux méthodes :

- méthode basée sur le critère AIC (Akaike Information Criterion) $\alpha = 1$
- méthode basée sur le critère MDL (Minimum Description Length) $\alpha = \frac{\log N}{2}$

Remarque : le critère AIC présente une probabilité de surestimation asymptotique non nulle du nombre de source. C'est à dire que même pour un nombre infini d'échantillons, le critère AIC aura tendance à surestimer le nombre de sources. Il est montré que l'adjonction du facteur de pénalité α dans MDL permet de régler la probabilité de surestimation asymptotique à zéro. En revanche, cette probabilité de surestimation n'est pas nulle lorsque le nombre d'échantillons est faible. Le facteur de pénalisation a alors tendance à sur-pénaliser et à détériorer la probabilité de détection ⁸. Des facteurs de pénalité réalisant un compromis entre AIC et MDL ont été proposés ⁹.

Le test d'Akaike a été reformulé à partir de l'information mutuelle de Kullback, qui mesure la proximité entre deux lois de probabilité de vraisemblance sous des hypothèses de nombre de sources différentes ^{7,10}. Une variante ¹⁰ permet de lui donner une forme dérivée du test d'Akaike en utilisant l'information inverse de Kullback. Cette variante peut être étendue au critère MDL ⁷

$$\hat{K}2 = \arg \min_{k=\{0,\dots,M-1\}} \left\{ N \log \frac{p(k)}{a^{-1}(k)} + \alpha k(2M - k) \right\}.$$

⁷ J. Grouffaud, P. Larzabal, H. Clergeot, "Sélection d'ordre du modèle pour les méthodes H.R.", in *Les méthodes à haute résolution* (Ch. 6) (S. Marcos, Ed.), Hermès, 1998.

⁸ M. Wax, T. Kailath, "Detection of signal by information theoretic criteria", *IEEE Transactions on ASSP* **33**(2) (1985) 387-392.

⁹ K.M. Wong, Q.T. Zhang, J.P. Reilly, P.C. Yip, "On information theoretic criteria for determining the number of signals in high resolution array processing", *IEEE Transaction on ASSP* **38**(11) (1990) 1959-1974.

¹⁰ J.P. Le Cadre, "Application of some statistical measures to spatial signal processing", NATO Advanced Study Institute on Adaptive Methods in Underwater Acoustics, Luneburg (Germany) 30 July- 10 August 1984 (Proceedings in NATO ASI Serie C, edited by H.G. Hurban, Reidel, 1985).

Eléments de bibliographie

D.E. Dudgeon, R.M. Mersereau, *Multidimensional digital signal processing*, Prentice-Hall, 1984.

S. Marcos (Ed.), *Les méthodes à haute résolution*, Hermès, 1998.

M. Brandstein, D. Ward (Eds.), *Microphone Array*, Springer, 2001.

T.J. Mueller (Ed.), *Aeroacoustic Measurements*, Springer-Verlag, 2002. [authors : C.S. Allen, W.K. Blake, R.P. Dougherty, D. Lynch, P.T. Soderman, J.R. Underbrink.]

P.A. Nelson, "Source identification and location (Ch.3)", in *Advanced Applications in Acoustics, Noise and Vibration* (F. Fahy and J. Walker, Eds.), Spon Press, 2004.