Correction Méca3
Moments d'inertie et pendule de torsion

Expérience 1 : Etude statique: mesure de la constante de rappel du ressort

Etude théorique

Tourner le disque d'un angle θ_0 par rapport à sa position de repos équivaut à appliquer une force $\vec{F}$ ortho-radiale. Le fil (qui se comporte comme un ressort) va alors s'opposer au mouvement via l'application d'une force. La projection du moment (encore appelé couple de torsion) sur l'axe de rotation (Δ) de cette force a comme expression:

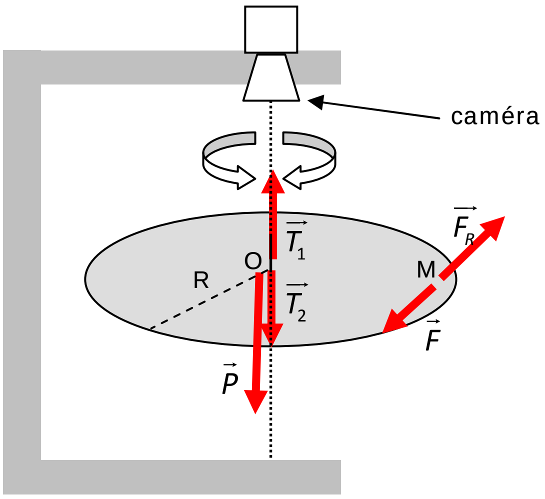
$$\boxed{\Gamma = -C \times \theta_0}$$

où C est la constante de torsion.

Question préliminaire

- Faire un schéma du bilan des forces qui s'exercent sur le disque (5 forces).

5 forces : le poids du disque, les tensions des deux fils (T1 et T2), la force qu'on applique (F) et la force de rappel du disque(F_R).



- Donner la direction des moments de ces 5 forces.

Les moments des forces par rapport au point O de T1, T2 et P sont nuls car ces forces s'appliquent en O. Il reste uniquement les moments de F et F_R.

$$\mathrm{M}(\vec{F_R}) = \vec{\Gamma} = -C\theta\vec{u_z}$$

$$\mathrm{M}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = R \times F \times \sin(\pi/2)\vec{u_z}$$

- Déterminer l'expression de Γ en fonction de R et de la force que vous appliquez au disque pour le faire tourner d'un angle θ_0.

Puisqu'on est à l'équilibre le moment cinétique est nul et sa dérivée aussi. Donc si on applique le théorème du moment cinétique on obtient :

$$\vec{0} = \mathrm{M}(\vec{F_R}) + \mathrm{M}(\vec{F}) = \vec{\Gamma} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = -C\theta\vec{u_z} + R \times F \times \sin(\pi/2)\vec{u_z}$$

Donc en projettant sur l'axe de rotation (u_z) on obtient :

$$F = \frac{C}{R}\theta$$

Manipulation:

- Mesurer à l'aide du dynamomètre la force en fonction de l'angle de torsion.

Analyse :
- Tracer la fonction F= f(θ_0) et en déduire la constante de torsion C aux incertitudes près.
La pente de la droite est égale à C/R

Expérience 2 : Etude dynamique: oscillations libres non amorties
Question préliminaire:
- Faire le bilan des forces et appliquer le théorème du moment cinétique au disque. Montrer que l'on obtient l'équation différentielle: $J\ddot{\theta}+C\theta=0$.

Mêmes forces que précédemment sans la force appliquée par l'opérateur (F)

Cette fois le moment cinétique n'est pas nul mais égal à :

$\overrightarrow{L_0}=J\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$ (Cf énoncé)

D'où $\dfrac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}=J\ddot{\theta}\overrightarrow{u_z}$

On applique le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}=J\ddot{\theta}\overrightarrow{u_z}=-C\theta\overrightarrow{u_z}$$

On projette sur Oz :

$$J\ddot{\theta}+C\theta=0$$

- En déduire la nature du mouvement et l'expression de la période des oscillations en fonctions de J et C.

Equa. Diff du second ordre sans second membre, la solution est du type : $\theta=A\cos(\omega t+\varphi)$ avec ω^2=C/J ou encore $T=2\pi\sqrt{\dfrac{J}{C}}$. C'est un mouvement d'oscillation harmonique (sans amortissement).

Analyse :

- Le logiciel vous donne les mesures des coordonnées X et Y en fonction du temps. Trouver la relation entre θ, X et Y et tracer la courbe θ=f(t) sur une feuille de papier millimétré.

$$\theta=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Attention θ doit être en radians
- La courbe observée est-elle en accord avec la courbe attendue ? Justifiez.
Oui on obtient bien une sinusoïde
- A l'aide du logiciel, mesurer la période moyenne des oscillations (sur plusieurs oscillations et sur plusieurs mesures). Donner l'incertitude sur la mesure.
Voir incertitude sur une moyenne
- En déduire la valeur du moment d'inertie J aux incertitudes près et comparer à la valeur théorique. Conclusion.
Comparer J=MR²/2 avec la valeur expérimentale trouvée. Normalement cela marche bien.

Expérience 3 : Oscillations libres et amorties

<u>Analyse</u>

Régime critique

- Rechercher la valeur de I (en observant la forme des oscillations à l'écran) telle que l'on réalise le mieux possible le régime critique (voir définition dans la partie théorique)
- Enregistrer la courbe $\theta(t)$ et tracer la sur du papier millimétré.
- Déterminer le coefficient d'amortissement δ.

θ ne passe pas par des valeurs négatives tout en revenant à 0 le plus vite possible

$$\theta = \theta_0 e^{-\delta t}(1+\delta t)$$

donc pour t = $1/\delta$ on a $\theta = 2\theta_0 e^{-1}$ et on détermine ainsi $1/\delta$ graphiquement en trouvant pour quel t on a $\theta = 2\theta_0 e^{-1}$

Amortissement faible

- Choisir I de manière à ce que le mouvement soit faiblement amorti (le pendule s'arrête au bout de quelques secondes).
- Enregistrer la courbe X,Y= f(t) et tracer la courbe $\theta(t)$ sur du papier millimétré.
- Déterminer la pseudo-période T des oscillations entre deux annulations de θ.

Pour cela il faut trouver la ligne de base correspondant à θ=0 rad, cela se fait en regardant à t grand lorsque les oscillations sont terminées. On mesure ensuite T entre deux annulations de θ=f(t).

- A l'aide de la courbe, mesurer 2 amplitudes séparées d'une pseudo-période T et en déduire une valeur du décrément logarithmique.

$$\boxed{\Lambda = \ln\left[\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right] = \delta T}$$

- Recommencer cette démarche plusieurs fois avec d'autres amplitudes et en déduire une valeur moyenne de Λ.

En fait Λ peut varier de manière significative, faire une moyenne devient difficile.

- En déduire graphiquement le coefficient d'amortissement δ. A votre avis quelle est la méthode la plus précise pour déterminer δ ?

La méthode graphique (tracer ln(z(nT))=f(nT) comme dans le TP méca2) permet de voir quels sont les points aberrants. De toute façon, c'est la méthode la plus précise (celle qu'il faut mémoriser).